

BAB II

KAJIAN TEORI

Pada bab II ini akan dibahas tentang materi dasar yang digunakan untuk mendukung pembahasan pada bab-bab berikutnya, yaitu variable random, ekspektasi, varians dan kovarians, distribusi normal, matriks, analisis multivariat, investasi, saham, indeks LQ-45, portofolio, model mean-variance Markowitz, Capital Assets Pricing Model (CAPM), model Black Litterman, *shape ratio*, *Least Discriminant*.

A. Variabel Random

Definisi 2. 1 (Bain & Engelhardt, 1992:53)

Variabel Random X adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada ruang sampel S , yang menghubungkan setiap anggota pada ruang sampel S dengan suatu bilangan real. Variabel random X dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$X(e) = x, \text{ dengan } e \in S \text{ dan } x \in R \quad (2. 1)$$

Variabel Random dinotasikan dengan huruf capital misalnya X , Y , Z , sedangkan nilai yang mungkin dan setiap hasil observasi pada ruang sampel dinotasikan dengan huruf kecil misalnya x , y , z .

B. Ekspektasi

Definisi 2. 2 (Bain & Engelhandt, 1992:61)

Jika X adalah variable random diskrit dengan fungsi densitas probabilitas $f(x)$, maka nilai ekspektasi dari X didefinisikan sebagai berikut:

$$E(X) = \sum_x xf(x)$$

(2. 2)

Definisi 2. 3 (Bain & Engelhardt,1992: 67)

Jika X adalah variable random kontinu dengan fungsi densitas probabilitas $f(x)$, maka nilai ekspektasi dari X didefinisikan sebagai berikut:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

(2. 3)

Jika X dan Y adalah variable random dan a dan b konstan maka sifat-sifat ekspektasi adalah sebagai berikut :

1. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
2. $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$
3. $E(aX + b) = aE(X) + b$
4. $E(XY) = E(X)E(Y)$, jika X dan Y independen.

C. Varians dan Kovarians**Definisi 2. 4 (Bain & Engelhardt,1992: 73)**

Varians dari varaibel random X didefinisikan sebagai berikut :

$$Var(X) = E[(X - \mu^2)] \quad (2. 4)$$

Notasi varians yang lain adalah σ^2, σ_x^2 , atau $V(X)$. Standar deviasi dari X didefinisikan sebagai akar positif dari varians yaitu $\sigma = \sigma_x = \sqrt{Var(X)}$.

Teorema 2. 1 (Bain & Engelhardt, 1992: 74)

Jika X adalah variabel random, maka

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 \quad (2. 5)$$

Bukti :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[(X - \mu)^2] \\ &= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \end{aligned}$$

Karena nilai ekspektasi X adalah $\mu = E(X)$ maka

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2. \end{aligned}$$

Teorema 2. 2 (Bain & Engelhardt, 1992: 74)

Jika X adalah variabel random, a dan b adalah konstanta, maka

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X) \quad (2. 6)$$

Bukti :

$$\begin{aligned} Var(aX + b) &= E[(aX + b - a\mu_x - b)^2] \\ &= E[(aX - a\mu_x)^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E[a^2(X - \mu_x)^2] \\
&= a^2 E[(X - \mu_x)^2] \\
&= a^2 \text{Var}(X).
\end{aligned}$$

Definisi 2.5 (Bain & Engelhardt,1992: 174)

Kovarians dari pasangan variabel random X dan Y didefinisikan sebagai berikut :

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] \quad (2. 7)$$

Notasi kovarians yang lain adalah σ_{xy} .

Jika X dan Y variabel random diskrit maka

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(X, Y) &= E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] \\
&= \sum_x \sum_y (X - \mu_x)(Y - \mu_y) f(x, y)
\end{aligned} \quad (2. 8)$$

Jika X dan Y variabel random kontinu maka

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(X, Y) &= E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu_x)(Y - \mu_y) f(x, y) dx dy
\end{aligned} \quad (2. 9)$$

Jika X dan Y adalah varaibel random dan a dan b konstan maka berlaku sebagai berikut :

1. $Cov(aX, bY) = acCov(X, Y)$
2. $Cov(X + a, Y + b) = Cov(X, Y)$
3. $Cov(X, aX + b) = a var (X)$
4. $Cov(X, Y) = 0$, jika X dan Y independen

D. Distribusi Normal

1. Definisi Distribusi Normal

Definisi 2. 6 (Bain & Engelhardt, 1992)

Variabel random X dikatakan berdistribusi normal yang dinotasikan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dengan *mean* μ dan *varians* σ^2 mempunyai fungsi densitas probabilitas yaitu :

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left\{\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}^2}{2}} \quad (2.10)$$

Untuk $-\infty < x < \infty$, dengan $-\infty < \mu < \infty$ dan $0 < \sigma < \infty$.

2. Uji Normalitas

Uji normalitas dapat dilakukan dengan bantuan *software* SPSS menggunakan pengujian *Kolmogorov-Smirnov*. Dalam hal investasi uji normalitas sering digunakan untuk melihat apakah return saham berdistribusi normal atau tidak. Apabila return saham berdistribusi normal, maka saham tersebut akan diperhitungkan untuk dimasukkan ke dalam portofolio. Tujuan pengujian normalitas dalam return saham adalah untuk mengantisipasi terjadinya ketidakstabilan harga, yang

dikhawatirkan akan mengalami penurunan harga saham yang sangat signifikan sehingga merugikan investor. Uji normalitas return saham dapat dilakukan dengan uji *Kolmogorov-Smirnov* sebagai berikut :

a. Hipotesis:

H_0 : data *return* saham berdistribusi normal.

H_1 : data *return* saham tidak dapat diasumsikan berdistribusi normal.

b. Tingkat Signifikansi α

c. Statistik uji :

$$\text{Kolmogorov-Smirnov (KS)} = \sup_X |F^*(X) - S(X)|.$$

$F^*(X)$ adalah distribusi kumulatif data sampel.

$S(X)$ adalah distribusi kumulatif yang berdistribusi normal.

d. Kriteria uji :

H_0 ditolak jika $KS > KS_{Tabel}$ atau $p - \text{value } KS < \alpha$.

e. Perhitungan.

Perhitungan $p - \text{value } KS$ berdasarkan *output SPSS*.

f. Kesimpulan.

A. Matriks

Definisi 2. 8 (Anton, 2010: 26)

Sebuah matriks adalah susunan segi empat dari bilangan – bilangan riil. Bilangan-bilangan tersebut dinamakan entri dari matriks. Ukuran matriks didekskripsikan dengan banyaknya baris (garis horizontal) dan banyaknya kolom (baris vertical) yang terdapat dalam matriks. Entri yang terdapat pada baris i dan kolom j dari matriks A dapat dinyatakan dengan a_{ij} . Secara umum bentuk matriks berukuran $m \times n$ adalah sebagai berikut :

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(2. 11)

1. Perkalian Matriks

Definisi 2. 9 (Anton, 2010)

Jika A adalah suatu matriks dan c adalah skalar, maka hasil kali (*product*) cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing – masing entri dari A oleh c . Jika $A = [a_{ij}]$, maka perkalian matriks ini dinotasikan sebagai $c(A)_{ij} = (cA)_{ij} = [ca_{ij}]$.

Jika $A = [a_{ij}]$ sebuah matriks berukuran $m \times r$ dan $B = [b_{ij}]$ sebuah matriks berukuran $r \times n$, maka hasil kali A dengan B yaitu $C = AB$ adalah matriks yang entrinya didefinisikan sebagai berikut:

$$C_{mn} = \sum_{l=1}^r a_{il} b_{lj} \quad (2.12)$$

dengan matriks C berukuran $m \times n$.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

maka,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 + (-2).(-1) + (-1).1 \\ 4.2 + 1.(-1) + 2.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

2. Transpose Matriks

Definisi 2. 10 (Anton, 2010)

Jika A adalah sebarang matriks $m \times r$, maka transpose A dinyatakan oleh A' yang merupakan matriks berukuran $r \times m$ dengan mengubah baris dari A menjadi kolom pada A' . Transpose matriks A dapat dinyatakan sebagai :

$$(A)_{ij} = (A')_{ji}. \quad (2.13)$$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ maka, } A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Minor dan Kofaktor Matriks

Definisi 2.11 (Anton, 2010)

Jika A merupakan matriks berukuran $n \times n$, maka minor dari entri a_{ij} dinotasikan dengan M_{ij} yaitu determinan dari submatriks A dapat didapat dengan menghapus baris ke- i dan kolom ke- j . Nilai $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinotasikan dengan c_{ij} disebut kofaktor dari entri a_{ij} .

Sehingga matriks kofaktor dari A dapat dinyatakan sebagai :

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

(2. 14)

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

maka, minor dari entri a_{11} yaitu :

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (-4).(-2) - 3.4 = 8 - 12 = -4.$$

Kofaktor dari entri a_{11} yaitu :

$$c_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = 1.(-4) = -4.$$

4. Determinan Matriks**Definisi 2. 12 (Anton, 2010)**

Determinan matriks A berukuran $n \times n$ dapat dihitung dengan mengalikan entri pada suatu baris ke- i atau kolom ke- j dengan masing-masing kofaktor dan menjumlahkan hasil perkalian tersebut.

Determinan matriks A dinyatakan sebagai :

$$|A| = a_{1j} \cdot c_{1j} + a_{2j} \cdot c_{2j} + \cdots + a_{nj} c_{nj}. \quad (2.15)$$

atau

$$|A| = a_{i1} \cdot c_{j1} + a_{i2} \cdot c_{j2} + \cdots + a_{jn} \cdot c_{jn} \quad (2.16)$$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

maka,

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot [(-4) \cdot (-2) - 3 \cdot 4] + 2 \cdot [1 \cdot (-2) - 0 \cdot 4] \\ &\quad + 5 \cdot [1 \cdot 3 - 0 \cdot (-4)] \\ &= 3 \cdot (-4) + 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 \\ &= -12 - 4 + 15 \\ &= -1. \end{aligned}$$

5. Invers Matriks

Definisi 2. 13 (Anton, 2010)

Jika A matriks persegi dan jika terdapat suatu matriks B dengan ukuran yang sama sedemikian sehingga $AB=BA=I$ dengan I merupakan matriks identitas, maka A invertible (dapat dibalik) dan

B adalah invers dari A . Invers dari A dinotasikan dengan A^{-1} , sehingga $AA^{-1} = I$ dan $A^{-1}A = I$.

Jika matriks A berukuran $n \times n$ maka invers dari matriks A adalah sebagai berikut :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} [adj(A)]$$

(2. 17)

dengan,

$adj(A)$: matriks adjoin dari A yaitu transpose dari matriks kofaktor A .

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}, adj A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, |A| = -1.$$

maka,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|} [adj(A)] \\ &= \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

B. Analisis Multivariat

Definisi 2. 14 (Johnson & Wichern, 2007)

Analisis statistik multivariat merupakan metode statistik untuk menganalisis hubungan antara lebih dari dua variabel secara bersamaan.

Data sampel analisis multivariat secara umum dapat digambarkan dalam bentuk matriks dengan n objek dalam p variabel sebagai berikut :

	Variabel 1	Variabel 2	...	Variabel k	...	Variabel p
Objek 1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1k}	...	x_{1p}
Objek 2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2k}	...	x_{2p}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Objek j	x_{j1}	x_{j2}	...	x_{jk}	...	x_{jp}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Objek n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nk}	...	x_{np}

atau dapat ditulis dalam bentuk matriks X dengan n baris dan p kolom sebagai berikut :

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{j1} & x_{j2} & \cdots & x_{jk} & \cdots & x_{jp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

1. Multivariat Berdistribusi Normal

Definisi 2. 15 (Johnson & Wichern, 2007)

Fungsi distribusi multivariat normal merupakan perluasan dari fungsi distribusi univariat normal untuk $p \geq 2$. Jika $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ adalah p -variabel multivariat normal dengan rata-rata μ dan varians-kovarians matriks Σ , dimana :

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{12} & \sigma_{21} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

Maka fungsi densitas multivariat normal adalah sebagai berikut :

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-(\mathbf{X}-\mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{X}-\mu)/2}$$

(2. 18)

dengan $-\infty < X_i < \infty, i = 1, 2, \dots, p$.

2. Vektor Random dan Matriks Random

Definisi 2. 16 (Johnson & Wichern, 2007)

Vektor random adalah vektor yang elemen-elemennya berupa variabel random. Jika suatu unit eksperimen hanya memiliki satu variabel terukur maka variabel terukur disebut variabel random, sedangkan jika terdapat lebih dari satu variabel terukur, misalkan n variabel maka variabel-variabel tersebut disebut vektor random dengan n komponen. Sedangkan matriks random adalah matriks yang mempunyai elemen variabel random.

3. Mean dan Kovarians Vektor Random

Definisi 2. 17 (Johnson & Wichern, 2007)

Dimisalkan $\mathbf{X}$ adalah variabel random dengan mean $\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{X})$ dan matriks kovarians $\boldsymbol{\Sigma}$. Mean vektor random $\mathbf{X}$ dengan ordo $p \times 1$ dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu}.$$

(2. 19)

Sedangkan kovarians vektor random $\mathbf{X}$ dengan ordo $p \times 1$ adalah :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{E}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'$$

$$\begin{aligned} &= E \left(\begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \\ \vdots \\ X_p - \mu_p \end{bmatrix} (X_1 - \mu_1 \quad X_2 - \mu_2 \quad \dots \quad X_p - \mu_p) \right) \\ &= \begin{bmatrix} (X_1 - \mu_1)^2 & (X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2) \dots (X_1 - \mu_1)(X_p - \mu_p) \\ (X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1) & (X_2 - \mu_2)^2 & \dots (X_2 - \mu_2)(X_p - \mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_p - \mu_p)(X_1 - \mu_1) & (X_p - \mu_p)(X_2 - \mu_2) \dots & (X_p - \mu_p)^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E(X_1 - \mu_1)^2 & E(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2) \dots E(X_1 - \mu_1)(X_p - \mu_p) \\ E(X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1) & E(X_2 - \mu_2)^2 & \dots E(X_2 - \mu_2)(X_p - \mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(X_p - \mu_p)(X_1 - \mu_1) & E(X_p - \mu_p)(X_2 - \mu_2) \dots & E(X_p - \mu_p)^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Atau dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \text{Cov}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_{pp} \end{bmatrix} \quad (2.$$

20)

dengan σ_{ij} : kovarians dari X_i dan X_j , $i = 1, 2, \dots, p$ dan $j = 1, 2, \dots, p$.

Kovarians untuk sampel dinyatakan sebagai berikut :

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & S_{p2} & \dots & S_{pp} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

dengan S_{ij} : kovarians dari $\hat{X}_i$ dan $\hat{X}_j$, $i = 1, 2, \dots, p$ dan $j = 1, 2, \dots, p$.

C. *Moving Average*

Metode *simple average* adalah metode peramalan yang dilakukan dengan menggunakan rata-rata dari semua data pengamatan sebagai ramalan untuk periode selanjutnya. Namun jika seorang pengamat ingin menggunakan data terbaru saja, maka dapat ditentukan suatu data sebagai titik awal pengamatan dan nilai rata-rata dihitung dimulai dari data tersebut. Dengan *moving average* dapat ditentukan nilai pengamatan terbaru, yaitu dengan mengambil data-data terbaru dan menghitung rata-ratanya. *Moving average* ini digunakan untuk meramalkan pengamatan periode selanjutnya. Isntilah *moving average* digunakan karena setiap data observasi baru tersedia, maka angka rata-rata yang baru dihitung dan dipergunakan sebagai ramalan. Berikut persamaan *moving average*:

$$\hat{Y}_{t+1} = \frac{Y_t + Y_{t-1} + \dots + Y_{t-k+1}}{k} \quad (2.22)$$

diamana,

Y_{t+1} : nilai peramalan untuk periode $t+1$

Y_t : nilai aktual pada periode t

k : jumlah batas dalam *moving average*

Moving average untuk periode waktu t adalah rata-rata aritmatika dari k pengamatan terbaru (Hanke & Winchen, 2005).

D. Investasi

Menurut Tandelilin (2010) Investasi adalah komitmen atas sejumlah dana atau sumber daya lainnya yang dilakukan pada saat ini, dengan tujuan memperoleh sejumlah keuntungan di masa datang. Proses investasi menunjukkan bagaimana seharusnya seorang investor membuat keputusan investasi, yaitu sekuritas apa yang akan dipilih, seberapa banyak investasi tersebut, dan kapan investasi tersebut akan dilakukan (Suad Husnan, 1998).

Tahap-tahap keputusan investasi adalah sebagai berikut:

1. Penentuan tujuan investasi

Tahap pertama dalam proses keputusan investasi untuk menentukan tujuan investasi yang akan dilakukan. Tujuan investasi untuk masing-masing investor bias berbeda tergantung pada investor yang membuat keputusan tersebut.

2. Penentuan kebijakan investasi

Tahap penentuan kebijakan investasi dilakukan dengan penentuan keputusan alokasi asset. Keputusan ini menyangkut pendistribusian dana yang dimiliki pada berbagai kelas asset yang tersedia (saham, obligasi, *real estat* maupun sekuritas luar negeri).

3. Pemilihan strategi portofolio

Strategi portofolio yang bias dipilih yaitu strategi portofolio aktif dan strategi portofolio pasif. Strategi portofolio aktif meliputi kegiatan penggunaan informasi yang tersedia untuk mencari kombinasi portofolio yang lebih baik. Sedangkan strategi portofolio pasif meliputi aktivitas investasi pada portofolio yang seiring dengan kinerja pasar.

4. Pemilihan sekuritas

Pemilihan sekuritas yang dilakukan untuk membentuk suatu portofolio. Tahap ini memerlukan pengevaluasian setiap sekuritas yang ingin dimasukkan dalam portofolio untuk mencari kombinasi portofolio yang efisien.

5. Pengukuran dan evaluasi kinerja portofolio

Tahap akhir proses keputusan investasi ini meliputi pengukuran kinerja portofolio dan perbandingan hasil pengukuran tersebut dengan kinerja portofolio lainnya.

E. Saham

Saham merupakan surat berharga yang menunjukkan kepemilikan atau penyertaan pasar modal investor dalam suatu perusahaan (Fakhruddin, 2006: 13), Saham merupakan selembar kertas yang menunjukkan hak pemodal (yaitu pihak yang memiliki kertas tersebut) untuk memperoleh bagian dari prospek atau kekayaan organisasi yang menerbitkan sekuritas tersebut dan berbagai kondisi yang

memungkinkan pemodal tersebut menjalankan haknya. (Suad Husnan, 2005).

Jenis-jenis saham menurut Jogiyanto (2000 : 58) adalah sebagai berikut :

1. Saham Preferen (*Prefferen Stock*)

Saham prefferen merupakan saham yang mempunyai hak khusus melebihi pemegang saham biasa. Saham preferen memberikan hasil yang tetap berupa deviden preferen seperti saham biasa dalam hal likuidasi klaim. Saham preferen mempunyai sifat gabungan (*hybrid*) antara obligasi (*bond*) dan saham biasa.

2. Saham biasa (*Common Stock*)

Saham biasa memberikan deviden lebih besar daripada saham preferen jika perusahaan berjalan dengan baik. Pembagian deviden untuk saham biasa dapat dilakukan jika perusahaan sudah membayar deviden untuk saham preferen.

F. Indeks LQ-45

Indeks *Liquid Quality-45* (LQ-45) terdiri dari 45 saham yang telah terpilih memiliki likuiditas dan kapitalisasi pasar yang tinggi dan direview setiap 6 bulan pada awal Februari dan Agustus. Menurut Tandelilin (2010) saham-saham pada indeks LQ-45 harus memenuhi criteria sebagai berikut :

1. Masuk dalam urutan 60 terbesar dari total transaksi saham di pasar reguler (rata-rata nilai transaksi selama 12 bulan terakhir).

2. Urutan berdasarkan kapitalisasi pasar (rata-rata nilai kapitalisasi pasar selama 12 bulan terakhir).
3. Telah tercatat di BEI selama paling sedikit 3 bulan.
4. Kondisi keuangan dan prospek pertumbuhan perusahaan, frekuensi dan jumlah hari transaksi di pasar regular.

Jika saham tidak memenuhi kriteria tersebut pada saat review maka saham tersebut akan dikeluarkan dari perhitungan indeks dan diganti dengan saham lainnya yang memenuhi kriteria.

G. Portofolio

Portofolio adalah suatu kumpulan sekuritas keuangan dalam suatu unit yang dipegang atau dibuat oleh seorang investor (Jogiyanto, 2014). Tujuan dari pembentukan portofolio adalah untuk melakukan diversifikasi pada investasi sehingga mampu memaksimalkan keuntungan dengan resiko yang minimal.

1. Return Portofolio

Return realisasian dari suatu portofolio dapat diestimasi dengan menghitung rata-rata tertimbang dari return realisasian masing-masing sekuritas tunggal yang ada dalam portofolio. *Return* Portofolio dapat dibagi menjadi dua, yaitu *realized return* portofolio dan *expected return* portofolio. *Realized return* portofolio berupa *return* yang sudah terjadi dan *Expected Return* berupa *return* yang belum terjadi atau diharapkan akan diperoleh pada masa mendatang (Jogiyanto, 2012).

Realized return portofolio apat dirumuskan sebagai berikut :

$$R_p = \sum_{i=1}^n (w_i \cdot R_i)$$

(2. 23)

dengan,

R_p : realized *return* portofolio

w_i : bobot dana investor pada sekuritas ke- i

R_i : realized *return* dari sekuritas ke- i

n : banyaknya sekuritas

Return suatu sekuritas sapat dihitung menggunakan rumus sebagai berikut :

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

(2. 24)

dengan,

P_t : harga sekuitas pada periode ke- t

P_{t-1} : harga sekuitas pada periode ke- $(t-1)$

Return suatu sekuritas untuk sampel dinyatakan pada persamaan sebagai berikut :

$$\hat{R}_t = \frac{\hat{P}_t}{\hat{P}_{t-1}} - 1 = \frac{\hat{P}_t - \hat{P}_{t-1}}{\hat{P}_{t-1}}$$

(2. 25)

Sedangkan *expected return* portofolio merupakan rata-rata tertimbang dari *expected return* masing-masing sekuritas dalam

portofolio. *Expected return* portofolio dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n (w_i \cdot E(R_i)) \quad (2. 26)$$

dengan,

$E(R_p)$: *expected return* dari portofolio

w_i : bobot dana investor pada sekuritas ke- i

$E(R_i)$: *expected return* dari sekuritas ke- i

n : banyaknya sekuritas

Expected return portofolio untuk sampel dinyatakan sebagai berikut :

$$\widehat{R}_p = \sum_{i=1}^n (\widehat{w}_i \cdot \widehat{E}(R_i)) \quad (2. 27)$$

Nilai *expected return* pada persamaan (2. 26) secara sistematis dapat dibentuk dalam matriks adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} E(R_p) &= w_1(E(R_1)) + w_2(E(R_2)) + \dots + w_n(E(R_n)) \\ &= [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n] \begin{bmatrix} E(R_1) \\ E(R_2) \\ \vdots \\ E(R_n) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{W}' \mathbf{E}(\mathbf{R}) \end{aligned}$$

(2. 28)

dimana,

W : matriks bobot tiap sekuritas dalam portofolio

$E(R)$: matriks *expected return* tiap sekuritas dalam portofolio.

2. Risiko Portofolio

Risiko dalam portofolio dapat diartikan sebagai tingkat kerugian tidak terduga yang besarnya tergantung pada portofolio yang dibentuk. Risiko portofolio dapat diukur dengan besarnya varians dari nilai *return* saham-saham yang ada di dalam portofolio (Jogiyanto, 2003). Jika semakin besar nilai varians maka risiko yang ditanggung semakin tinggi. Banyaknya sekuritas dalam suatu portofolio dapat mempengaruhi nilai varians dari risiko. Pembentukan suatu portofolio diperlukan minimal dua sekuritas. Varians dengan dua sekuritas adalah sebagai berikut (Jogiyanto, 2003) :

$$\begin{aligned} Var(R_p) &= \sigma_p^2 \\ &= E[R_p - E(R_p)]^2 \\ &= E[(w_1R_1 + w_2R_2) - E(w_1R_1 + w_2R_2)]^2 \\ &= E[(w_1R_1 + w_2R_2) - E(w_1R_1) - E(w_2R_2)]^2 \\ &= E[(w_1R_1 + w_2R_2) - w_1E(R_1) - w_2E(R_2)]^2 \\ &= E[w_1(R_1 - E(R_1)) + w_2(R_2 - E(R_2))]^2 \\ &= E[w_1^2(R_1 - E(R_1))^2 + 2w_1w_2(R_1 - E(R_1))(R_2 - E(R_2)) \\ &\quad + w_2^2(R_2 - E(R_2))^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= w_1^2 E \left((R_1 - E(R_1))^2 \right) \\
&\quad + 2 w_1 w_2 E \left((R_1 - E(R_1))(R_2 - E(R_2)) \right) \\
&\quad + w_2^2 E \left((R_2 - E(R_2))^2 \right) \\
&= w_1^2 \sigma_1^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_{12} + w_2^2 \sigma_2^2
\end{aligned}
\tag{2. 29}$$

Selanjutnya varians dengan n sekuritas dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= [w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + \dots + w_n^2 \sigma_n^2] \\
&\quad + [2 w_1 w_2 \sigma_{12} + 2 w_1 w_3 \sigma_{13} + \dots + 2 w_{n-1} w_n \sigma_{n-1n}] \\
&= \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n \underset{j \neq i}{w_i w_j \sigma_{ij}}
\end{aligned}
\tag{2. 30}$$

Persamaan (2. 30) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks yaitu sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{w}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}
\end{aligned}
\tag{2. 31}$$

dengan,

$\boldsymbol{\Sigma}$: matriks varians kovarians $n \times n$

$\mathbf{w}$: matriks bobot tiap sekuritas $n \times 1$

Risiko portofolio dapat dihitung menggunakan rumus standar deviasi sebagai berikut :

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} \quad (2.32)$$

dengan,

σ_p : standar deviasi portofolio.

Risiko portofolio dapat dihitung dengan mensubstitusi persamaan (2.31) dalam persamaan standar deviasi (2.32) sebagai berikut :

$$\sigma_p = \sqrt{w' \Sigma w} \quad (2.33)$$

Risiko portofolio untuk sampel dinyatakan sebagai berikut:

$$S_p = \sqrt{\widehat{w}' S \widehat{w}} \quad (2.34)$$

dimana,

S : matriks varians kovarians sampel $n \times n$

$\widehat{W}$: matriks bobot sampel tiap sekuritas $n \times 1$

H. Model *Mean-Variance* Markowitz

Harry Markowitz memperkenalkan model tentang pemilihan portofolio optimal secara kuantitatif pada tahun 1952 (Markowitz, 1952). Menurut Guerard (2010). Model *mean-variance* Markowitz menggunakan asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Investor hanya memperhatikan mean dan varians dari portofolio.
2. Preferensi investor akan meminimumkan risiko dengan tingkat *return* tertentu.

3. Preferensi investor akan memaksimumkan *return* tingkat risiko tertentu.
4. Tidaka ada biaya transaksi dan tidak ada pinjaman.

Menurut Moehring (2013) portofolio optimal menggunakan model *mean-variance* Markowitz berdasarkan preferensi investor adalah sebagai berikut:

- a. Meminimumkan risiko untuk tingkat *return* tertentu

$$\text{Min } \text{Var}(R_p) = \mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w} \text{ dengan } E(R_p) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} \quad (2.35)$$

- b. Memaksimumkan *return* dengan tingkat risiko tertentu

$$\text{Maks } E(R_p) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} \text{ dengan } \text{Var}(R_p) = \mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w} \quad (2.36)$$

Bobot untuk masing-masing sekuritas dinyatakan dengan $\mathbf{w}' = [w_1 \dots w_n]$ dan $\boldsymbol{\mu}$ merupakan matriks *expected return* masing-masing sekuritas $n \times 1$.

Optimisasi untuk memaksimumkan *return* dengan tingkat risiko tertentu dapat diselesaikan dengan menggunakan fungsi Lagrange L dan faktor pengali Lagrange λ adalah sebagai berikut :

$$L = \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} - \lambda(\mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w}) \quad (2.37)$$

Turunan parsial L terhadap w adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} &= \frac{\partial(\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} - \lambda(\mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w}))}{\partial \mathbf{w}} \\ &= \boldsymbol{\mu} - 2\lambda\Sigma\mathbf{w} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Optimasi harus memenuhi syarat $\frac{\partial L}{\partial w} = 0$ sehingga

$$\mu - 2\lambda\Sigma w = 0$$

$$\mu - 2\lambda\Sigma w = 0, \text{ karena } \lambda = \frac{\delta}{2}$$

$$\mu = \delta\Sigma w \quad (2.39)$$

Dengan δ merupakan koefisien *risk aversion* (Moehring, 2013).

Rumus bobot portofolio model *mean-variance* Markowitz untuk masing-masing sekuritas dalam pasar berdasarkan Persamaan (2.39) adalah sebagai berikut :

$$w_m = (\delta\Sigma)^{-1}\mu \quad (2.40)$$

Dengan w_m yaitu matriks bobot masing-masing sekuritas.

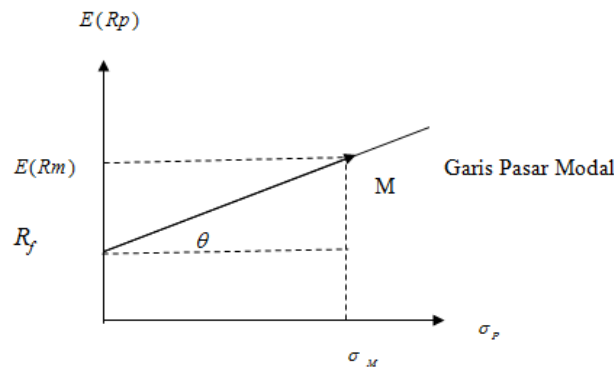
I. Capital Assets Pricing Model (CAPM)

Capital Assets Pricing Model (CAPM) diperkenalkan pertama kali oleh William Sharpe, John Lintner, dan Jan Mossin pada tahun 1964. Model CAPM dibentuk berdasarkan hubungan antara *expected risk* dan *expected return* (Strong, 2009). Model CAPM merupakan suatu model yang bertujuan untuk memprediksi hubungan antar risiko dengan *return* yang diharapkan dari suatu sekuritas. Untuk memahami model CAPM, maka harus memahami asumsi-asumsi yang melandasi model. Berikut asumsi-asumsi yang dibangun dalam model CAPM menurut Strong (2009) adalah sebagai berikut:

1. Varians *return* dan *mean return* menjadi keputusan investor.

2. Investor sebagai pengambil harga dan tidak dapat mempengaruhi harga saham.
3. Investor mempunyai probabilitas tingkat *return* di masa depan yang sama dan akses harga yang sama untuk informasi yang relevan.
4. Tidak terdapat pajak atau biaya transaksi.
5. Semua investor mengamati dalam periode investasi yang sama.
6. Setiap orang mempunyai keahlian yang sama dalam menganalisis sekuritas dan mengintrepetasikan berita.

Jika semua asumsi tersebut dipenuhi, maka akan terbentuk kondisi pasar yang ekuilibrium. Hubungan *expected return* dan risiko dalam keadaan ekuilibrium pasar dapat digambarkan pada gambar 2. 1



Gambar 2. 1 Capital Market Line

Slope dalam garis pasar modal disimbolkan θ merupakan harga pasar dari risiko untuk portofolio. Besarnya *slope* garis pasar modal mengindikasikan tambahan *return* yang disyaratkan pasar untuk

setiap 1% kenaikan risiko portofolio. Slope garis pasar dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut:

$$\theta = \frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M} \quad (2.41)$$

Perubahan θ yang semakin kecil mengakibatkan risiko portofolio semakin besar dan sebaliknya. Garis pasar modal menunjukkan semua kemungkinan kombinasi portofolio efisien yang terdiri sekuritas-sekuritas berisiko dan sekuritas bebas risiko (Jugiyanto, 2003). Garis pasar modal terbentuk sepanjang titik *expected return* sekuritas bebas risiko r_f sampai titik M . *Expected return* sekuritas bebas risiko didekati dengan tingkat return suku bunga bank sentral, di Indonesia umumnya diambil dari tingkat return suku bunga bank Indonesia. Portofolio CAPM diharapkan memberikan keuntungan lebih besar dibandingkan sekuritas yang di investasikan pada bank (Jugiyanto, 2003). *Expected return* dalam portofolio CAPM berdasarkan Gambar 2. 1 dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$E(R_p) = r_f + \frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M} \sigma_p \quad (2.42)$$

dengan,

$E(R_p)$: *expected return* portofolio

r_f : *return* sekuritas bebas risiko

$E(R_M)$: *expected return* portofolio pasar

σ_M : standar deviasi dari *return* portofolio pasar

σ_p : standar deviasi dari *return* portofolio

Persamaan (2. 42) menggambarkan hubungan antara risiko dan *return* pada pasar yang seimbang untuk portofolio-portofolio yang efisien. Gambaran hubungan risiko dan *return* dari sekuritas-sekuritas individual dapat dilihat dari kontribusi masing-masing sekuritas terhadap risiko portofolio pasar tergantung dari besarnya kovarians *return* sekuritas dengan portofolio pasar. Besarnya kontribusi risiko sekuritas terhadap risiko portofolio pasar yaitu:

$$\sigma_p = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M}$$

dimana $\sigma_{i,M}$ adalah kovarians dari sekuritas dari sekuritas ke-*i* dengan portofolio pasar. Dengan mensubstitusikan kontribusi sekuritas ke-*i* terhadap risiko portofolio pasar pada Rumus (2. 42), maka diperoleh:

$$\begin{aligned} E(R_i) &= r_f + \frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M} \cdot \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M} \\ &= r_f + \frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M^2} \cdot \sigma_{i,M} \\ &= r_f + \beta_i [E(R_M) - r_f] \end{aligned} \quad (2. 43)$$

Dengan $\beta_i = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M} = \frac{Cov(R_i, R_M)}{Var(R_M)}$ sebagai pengukur tingkat risiko dari suatu sekuritas terhadap risiko pasar dan $E(r_i)$ sebagai *expected return* CAPM masing-masing sekuritas. *Expected return* CAPM untuk suatu sekuritas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$E(r_i) = r_f + \beta_i[E(R_M) - r_f] \quad (2.44)$$

Pasar dalam model ini yaitu Indeks Harga Saham Gabungan (IHSG) yang merupakan penggambaran keseluruhan keadaan harga-harga saham. Indeks Harga Saham Gabungan (IHSG) disebut juga Jakarta Composite Index (JCI) atau JSX Composite yang merupakan salah satu indeks pasar saham yang digunakan oleh Bursa Efek Indonesia (BEI). IHSG memudahkan investor dalam mengukur kinerja portofolio global.

J. Model Black Litterman

1. Model Black Litterman

Model Black Litterman diperkenalkan oleh Fischer Black dan Robert Litterman di Goldman Sachs pada tahun 1990. Model ini menggunakan dua jenis informasi yaitu *return* ekuilibrium dari CAPM dan *expected return views* investor yang merupakan titik acuan dari model Black Litterman (He & Litterman, 1999) Satchell & Scowcroft (2000) menjelaskan pendekatan *bayes* untuk menyelesaikan kombinasi distribusi probabilitas model Black Litterman. Model Black Litterman dengan pendekatan *bayes* menggunakan *views* investor (*views*) sebagai informasi prior dan informasi pasar sebagai data sampel yang kemudian dikombinasikan untuk membentuk data baru (data posterior).

Views model Black Litterman digunakan untuk menyesuaikan *expected return* ekuilibrium dalam memprediksi *return* di masa

yang akan datang. Manajer investasi dapat menyatakan opininya yang berbeda dengan kondisi ekuilibrium, informasi yang berbeda ini mungkin karena berkaitan dengan *expected return* suatu sekuritas apakah akan meningkat atau turun berdasarkan *views* investor terhadap keadaan pasar, perekonomian ataupun isu-isu politik dan kenegaraan yang mungkin mempengaruhi pergerakan sekuritas di pasar.

2. **Views Investor**

Seorang investor dapat memiliki *views* hanya untuk sejumlah k saham dari d saham yang terdapat dalam portofolio, dengan kata lain investor tidak perlu menyatakan pandangannya pada setiap saham yang dimasukkan ke portofolio namun cukup pada sejumlah saham yang menjadi perhatian investor, investor dapat menyatakan prediksinya mengenai *return* yang akan diperoleh untuk masing-masing saham pada masa mendatang dengan melihat plot pergerakan data harga dan data *return* masing-masing saham pada beberapa periode sebelumnya. Investor dapat menyatakan pandangannya dengan *views* relatif (*relative views*) maupun *views* pasti (*absolute views*).

a. *Views* pasti (*absolute views*)

Views pasti terbentuk apabila seorang investor memberikan prediksinya terhadap dua buah saham, maka investor tersebut

akan mengungkapkan *views* dengan yakin terhadap besarnya *return* yang akan diberikan oleh masing-masing saham.

Contoh:

Views 1 : “Saya prediksikan *return* saham A akan meningkat sebesar 3%”.

Views 2 : “Saya prediksikan *return* saham B akan mengingkat sebesar 2%”.

b. *Views* relatif (*relative views*)

Ketika seorang investor diminta untuk memberikan *views* tentang dua buah saham, kemudian investor tersebut melakukan perbandingan antara *return* yang akan diberikan kedua saham tersebut, maka terbentuklah *views* relatif atau *relative views*.

Contoh : “Saya prediksikan bahwa *return* saham A akan melebihi *return* saham sebesar 3%”.

Contoh :

Suatu portofolio terbentuk 4 saham, yaitu saham A, B, C dan D. Investor dapat menyatakan *views* terhadap keempat saham tersebut maupun hanya pada beberapa saham yang menjadi perhatian investor. Pada contoh ini, investor hanya menyatakan keempat saham tersebut dalam 3 *views* sebagai berikut:

Views 1: “Saya yakin saham B akan memberikan *return* 3%
melampaui saham A”.

Views 2: “Saya yakin saham C akan memberikan *return* 2%”.

Views 3: “Saya yakin saham D akan memberikan *return* 1%”.

Jika $E(r)$ adalah estimasi return investor dengan 4 saham, yaitu A, B, C dan D maka ketiga views investor tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$E(r_B) - E(r_A) = 0,03$$

$$E(r_C) = 0,02$$

$$E(r_D) = 0,01.$$

Estimasi *return* investor tersebut jika dibentuk dalam matriks, maka:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} E(r_A) \\ E(r_B) \\ E(r_C) \\ E(r_D) \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0,03 \\ 0,02 \\ 0,01 \end{bmatrix}$$

Baris dalam matriks $\mathbf{P}$ menjelaskan tentang views dan kolom matriks $\mathbf{P}$ menjelaskan tentang saham. Saham yang akan memberikan *return* lebih dari saham yang lain (*outperforming*) akan dinyatakan dalam nilai positif, sedangkan saham yang *underperforming* akan diberikan nilai negatif. Sehingga, jumlah dari bobot views absolute yang diberikan dalam matriks $\mathbf{P}$ adalah 1 dan views relatif berjumlah 0. Matriks $\mathbf{q}$ adalah matriks

berukuran $k \times 1$ yang elemen-elemennya berisi nilai *expected return* yang diperoleh dari views investor.\

3. Tingkat Keyakinan Investor

Tingkat keyakinan merupakan vektor error yang menandakan *views* yang dimiliki investor masih belum pasti dan diasumsikan berdistribusi normal. Tingkat keyakinan ini dinyatakan dalam matriks diagonal Ω (kovarians dari *views*) sebagai berikut (Idzorek, 2005) :

$$\Omega = P(\tau\Sigma)P' \quad (2.45)$$

dengan,

P = matriks *views* dari *return*

τ = skala tingkat keyakinan dalam *views* (*range* 0-1)

Σ = matriks varians-kovarians dari *return* saham

Jika elemen Ω adalah nol maka investor dianggap sangat yakin terhadap pandangannya, sedangkan ketika informasi prior yang dimiliki investor memiliki tingkat *views* yang tidak pasti, maka hal ini diindikasikan dengan nilai matriks kovarians *views* Ω adalah tidak nol.

4. Asumsi Model

Aturan Bayes menyatakan bahwa distribusi probabilitas dari suatu kejadian B terjadi apabila kejadian A diketahui, maka:

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A|B) \Pr(B)}{\Pr(A)} \quad (2. 46)$$

Aturan Bayes di atas lebih sering diungkapkan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\Pr(B|A) \propto \Pr(A|B) \Pr(B) \quad (2. 47)$$

Dengan notasi $\propto$ menyatakan “proporsional terhadap”

$\Pr(B|A)$: probabilitas dari kejadian B dengan syarat kejadian A diketahui Disebut dengan distribusi posterior.

$\Pr(A|B)$: probabilitas dari kejadian A, dengan syarat kejadian B diketahui.

Disebut dengan distribusi bersyarat.

$\Pr(B)$: probabilitas B, disebut juga informasi prior.

$\Pr(A)$: probabilitas A, disebut juga normalisasi konstan.

Untuk membentuk model Black Litterman dibutuhkan dua jenis informasi yaitu *expected return* ekuilibrium CAPM dan *views* investor. Kedua informasi tersebut kemudian dikombinasikan dengan menggunakan Bayes, dengan mengganti kejadian A adalah return ekuilibrium CAPM dan kejadian B adalah *expected return* investor, menggunakan persamaan bayes sebagai berikut :

$$\Pr(E(r)|\pi) = \frac{\Pr(\pi|E(r))\Pr(E(r))}{\Pr(\pi)} \quad (2. 48)$$

dimana,

$E(r)$: vektor *expected return* investor ukuran $n \times 1$

π : *return* ekuilibrium CAPM

dengan asumsi-asumsi sebagai berikut (Retno Subekti, 2008) :

a. Asumsi Pertama

Diasumsikan bahwa kejaidan prior $E(r)$ dinyatakan sebagai $PE(r)$, yang mempunyai bentuk k kendala linier dari vektor *expected return* $E(r)$ dan dituliskan dengan matriks P berukuran $k \times n$ sehingga:

$$PE(r) = q + v \quad (2.49)$$

Notasi q adalah vektor $k \times 1$ dari *views return* yang diberikan investor, sedangkan v adalah vektor *error* $k \times 1$ yang menandakan adanya *views* yang masih belum pasti.

Persamaan (2.49) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1k} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{k1} & P_{k2} & \cdots & P_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(r_1) \\ E(r_2) \\ \vdots \\ E(r_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ \vdots \\ q_{k1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{k1} \end{bmatrix}$$

Diasumsikan v berdistribusi normal dengan mean nol dan varians Ω , dinotasikan $v \sim N(0, \Omega)$, Ω adalah matriks kovarians $k \times k$, sehingga:

$$PE(r) \sim N(q, \Omega)$$

(2.50)

b. Asumsi Kedua

Data *return* ekuilibrium π dengan syarat informasi prior diasumsikan berdistribusi normal multivariate dengan mean $E(r)$ dan varians $\tau\Sigma$, sehingga dapat dinyatakan:

$$\pi|E(r) \sim N(E(r), \tau\Sigma) \quad (2.51)$$

dengan $E(\pi) = E(r)$, artinya terdapat asumsi bahwa *mean return* ekuilibrium sama dengan mean return pasar yang diperoleh melalui CAPM. Sedangkan nilai τ adalah suatu angka yang diberikan investor untuk menyatakan keyakinan dalam pandangannya. Kebanyakan peneliti menggunakan nilai τ yang berbeda. Stachell & Scowcroft (2000) menentukan nilai τ sama dengan 1, sedangkan He & Litterman (1999) menggunakan τ yaitu 0,025. Nilai τ tergantung dari tingkat keyakinan investor terhadap *views*, sehingga nilai untuk τ berkisar antara 0 sampai 1.

5. Kombinasi *Return* Ekuilibrium dan Views Investor

Teorema Model Black Litterman (Salomons, 2007)

$(E(r)|\pi)$ berdistribusi multivariate normal dengan mean $E(r) = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}P]$ dan variansnya adalah $[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}$

Bukti:

Asumsi 1:

$\mathbf{PE}(\mathbf{r})$ berdistribusi normal multivariat dengan mean $\mathbf{q}$ dan varians $\mathbf{\Omega}$ dinotasikan $\mathbf{PE}(\mathbf{r}) \sim N(\mathbf{q}, \mathbf{\Omega})$, sehingga fungsi probabilitasnya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{PE}(\mathbf{r})) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \det(\mathbf{\Omega})}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{PE}(\mathbf{r}) - \mathbf{q})' \mathbf{\Omega}^{-1} (\mathbf{PE}(\mathbf{r}) - \mathbf{q}) \right]
 \end{aligned}
 \tag{2. 52}$$

Asumsi 2:

$\pi|\mathbf{E}(\mathbf{r})$ berdistribusi normal multivariat dengan *mean* π dan varians-kovarians matriks $\tau\mathbf{\Sigma}$ dinotasikan $\pi|\mathbf{E}(\mathbf{r}) \sim N(\mathbf{E}(\mathbf{r}), \tau\mathbf{\Sigma})$, sehingga fungsi probabilitasnya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f(\pi|\mathbf{E}(\mathbf{r})) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\tau\mathbf{\Sigma})}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\pi - \mathbf{E}(\mathbf{r}))' (\tau\mathbf{\Sigma})^{-1} (\pi - \mathbf{E}(\mathbf{r})) \right]
 \end{aligned}
 \tag{2. 53}$$

Teorema Bayes dalam konteks ini dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$Pr(\mathbf{E}(\mathbf{r})|\pi) = \frac{Pr(\pi|\mathbf{E}(\mathbf{r})) Pr(\mathbf{E}(\mathbf{r}))}{Pr(\pi)}$$

atau dapat dinyatakan sesuai dengan persamaan (2. 47) sebagai berikut:

$$Pr(E(r)|\pi) \propto Pr(\pi|E(r)) Pr(E(r))$$

Fungsi probabilitas (2. 52) dan (2. 53) disubstitusikan pada persamaan

(2. 47) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} Pr(E(r)|\pi) \propto & \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\tau\Sigma)}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\pi - E(r))' (\tau\Sigma)^{-1} (\pi - E(r)) \right] \\ & \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\tau\Sigma)}} \exp \left[-\frac{1}{2} (PE(r) - q)' \Omega^{-1} (PE(r) - q) \right] \end{aligned}$$

Dengan menghilangkan semua konstanta, maka yang tersisa adalah:

$$\begin{aligned} Pr(E(r)|\pi) \propto & \exp \left[-\frac{1}{2} (\pi - E(r))' (\tau\Sigma)^{-1} (\pi - E(r)) \right] \\ & - \frac{1}{2} (PE(r) - q)' \Omega^{-1} (PE(r) - q) \end{aligned}$$

$$Pr(E(r)|\pi) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} \varphi \right]$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} \varphi &= \\ & (\pi - E(r))' (\tau\Sigma)^{-1} (\pi - E(r)) + (PE(r) - q)' \Omega^{-1} (PE(r) - q) \\ &= \pi' (\tau\Sigma)^{-1} \pi - E(r)' (\tau\Sigma)^{-1} \pi - \pi' (\tau\Sigma)^{-1} E(r) + E(r)' (\tau\Sigma)^{-1} E(r) + \\ & \quad (PE(r))' \Omega^{-1} PE(r) - q' \Omega^{-1} PE(r) - (PE(r))' \Omega^{-1} q + q' \Omega^{-1} q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi'(\tau\Sigma)^{-1}\pi - E(r)'(\tau\Sigma)^{-1}\pi - \pi'(\tau\Sigma)^{-1}E(r) + E(r)'(\tau\Sigma)^{-1}E(r) + \\
&\quad E(r)'P'\Omega^{-1}PE(r) - q'\Omega^{-1}PE(r) - E(r)'P'\Omega^{-1}q + q'\Omega^{-1}q \\
&= E(r)'[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]E(r) + \pi'(\tau\Sigma)^{-1}\pi - E(r)'(\tau\Sigma)^{-1}\pi - \\
&\quad \pi'(\tau\Sigma)^{-1}E(r) - q'\Omega^{-1}PE(r) - E(r)'P'\Omega^{-1}q + q'\Omega^{-1}q \\
&= E(r)'[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]E(r) - 2[(\tau\Sigma)^{-1}\pi' + P\Omega^{-1}q']E(r) + \\
&\quad \pi'(\tau\Sigma)^{-1}\pi + q'\Omega^{-1}q
\end{aligned}$$

untuk,

$$C = (\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}q$$

$$H = (\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P, \text{ dimana } H \text{ simetris dengan } H = H'$$

$$A = \pi(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}q$$

Mennggunakan notasi di atas, maka dapat ditulis kembali menjadi:

$$\begin{aligned}
\varphi &= E(r)'HE(r) - 2C'E(r) + A \\
&= E(r)'H'HH^{-1}E(r) - 2C'H^{-1}HE(r) + A \\
&= A - C'H^{-1}C + (H(E(r) - C))'H^{-1}(HE(r) - C)
\end{aligned}$$

Dimana $A - C'H^{-1}C$ akan menjadi konstanta dan selanjutnya

$$\begin{aligned}
&(HE(r) - C)'H^{-1}(HE(r) - C) \\
&= (HE(r) - C)'H^{-1}(HE(r) - C) \\
&= (H^{-1}HE(r) - H^{-1}C)'HH^{-1}H(H^{-1}HE(r) - H^{-1}C) \\
&= (E(r) - H^{-1}C)'H(E(r) - H^{-1}C)
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh:

$$Pr(E(r)|\pi) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} (E(r) - H^{-1}C)'H(E(r) - H^{-1}C) \right]$$

Maka mean posterior $H^{-1}C$ adalah

$H^{-1}C = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}q]$ dan variansya

H^{-1} yaitu $H^{-1} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}$

Jadi distribusi *return* kombinasi yang baru $(E(r)|\pi)$ sebagai distribusi posterior berdistribusi normal

$$(E(r)|\pi) \sim N([(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}q], [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1})$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} \mu_{BL} &= [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}P] \\ &= [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}(\tau\Sigma)^{-1}(\tau\Sigma)[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}P] \\ &= [I + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}P]^{-1}[\pi + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}q] \\ &= [I + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(I + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}P)\pi + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}(q - P\pi)] \\ &= \pi + (I + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}P)^{-1}(\tau\Sigma P'\Omega^{-1}(q - P\pi)) \\ &= \pi + (I + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}P)^{-1}(\tau\Sigma P'\Omega^{-1}\{(q + P'\tau\Sigma P)(\Omega + P'\tau\Sigma P)^{-1}\}(q - P\pi)) \\ &= \pi + (I + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}P)^{-1}(\tau\Sigma P' + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}P'\tau\Sigma P)(\Omega + P'\tau\Sigma P)^{-1}(q - P\pi) \\ &= \pi + [(I + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}P)^{-1}((I + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}P)^{-1})\tau\Sigma P'(\Omega + P'\tau\Sigma P)^{-1}(q - P\pi)] \\ &= \pi + \tau\Sigma P'(\Omega + \tau\Sigma P')^{-1}(q - P\pi) \end{aligned}$$

Sehingga, *expected return* Black Litterman dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\mu_{BL} = E(r_{BL}) = \pi + \tau \Sigma P' (\Omega + \tau \Sigma P')^{-1} (q - P\pi) \quad (2. 54)$$

dengan,

$E(r_{BL})$: *expected return* model Black Litterman

π : vektor $k \times 1$ untuk *return* ekuilibrium CAPM

τ : skala tingkat keyakinan dalam *views* (*range* 0-1)

Σ : matriks varians kovarians *return*

Ω : matriks diagonal kovarians dari *views*

P : matriks $k \times n$ untuk *views* yang berkaitan dengan *return*

q : vektor $k \times 1$ untuk *views return* yang diberikan investor.

Pembobotan portofolio model Black Litterman dihitung menggunakan rumus (2. 37) pada model *mean variance* Markowitz dengan meminimumkan risiko dengan *return* tertentu. Untuk mendapatkan optimasi pada portofolio maka terlebih dahulu menentukan fungsi tujuan, fungsi tujuan disini diminimumkan dengan beberapa kendala, berikut fungsi tujuan dan kendala untuk mengoptimumkan :

Fungsi Tujuan:

Meminimumkan

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}$$

1. $\sum_{i=1}^n w_i = 1$
2. $\sum_{i=1}^n E(R_i)w_i \geq \mu_{BL}$

Dimana w_i adalah bobot sekuritas ke- i , $E(R_i)$ adalah *expected return* dari masing-masing sekuritas dan R adalah *return* minimal yang diperoleh dari rata-rata *expected return* setiap sekuritas.

Dengan demikian, sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$\mathbf{w}_{BL} = (\delta \Sigma)^{-1} \mu_{BL} \quad (2.55)$$

dengan,

$\mathbf{w}_{BL}$: bobot sekuritas pada model Black Litterman

δ : koefisien *risk aversion*

Σ : matriks varians kovarians *return*

μ_{BL} : *expected return* Black Litterman

K. Sharpe Ratio

Sharpe Ratio dikembangkan oleh William Sharpe dan sering disebut juga dengan *reward-to-variability ratio* (RVAR). *Sharpe Ratio* membandingkan selisih antara *return* sekuritas dan *risk free rate* dengan standar deviasi dari sekuritas tersebut, artinya *Sharpe* mengukur besarnya perbedaan $(R_p - r_f)$ atau *risk premium* yang dihasilkan untuk tiap unit risiko yang diambil. Semakin tinggi nilai *Sharpe ratio*, maka

semakin baik kinerja yang dihasilkan. Perhitungan *Sharpe ratio* dengan menggunakan *risk free rate* adalah sebagai berikut:

$$S_p = \frac{R_p - r_f}{\sigma_p} \quad (2. 56)$$

Untuk portofolio yang tidak menggunakan *risk free rate*, maka perhitungan kinerja portofolio *Sharpe ratio* menjadi:

$$S_p^* = \frac{R_p}{\sigma_p} \quad (2. 57)$$

dengan,

S_p : *Sharpe ratio*

R_p : *Return* portofolio dalam suatu periode

r_f : Suku bunga bebas risiko dalam suatu periode

σ_p : Standar deviasi dari *return* portofolio suatu periode

L. *Least Discriminant*

1. Pengertian *Least Discriminant*

Menurut Jacques Pezier (2007) *Least Discriminant* merupakan pendekatan dengan meminimumkan risiko investasi dari harga jual pasar saham. Prinsip *Least Discriminant* dapat dibentuk melalui perkiraan pasar dengan mempertimbangkan *views* investor sehingga hal ini menyebabkan ketidakpastian risiko dan *return*. Prinsip *Least*

Discriminant dapat dinilai oleh manajer investasi melalui views yang dibentuk melalui fungsi utilitas. Fungsi utilitas pada model *Least Discriminant* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$E(u) = E_p[u(f_p(r) - E_q[f_p(r)] + w_0)] \quad (2. 58)$$

dengan,

$E_q[f_p(r)]$: biaya *return* saham

w_0 : modal awal

Portofolio optimal diperoleh dari turunan pertama dari fungsi utilitas terhadap f dimana u_x adalah notasi turunan dari $u(x)$ dengan

$$x = f_p(r) - E_q[f_p(r)] + w_0, \quad (2. 59)$$

untuk setiap r :

$$p(r) \cdot u_x(x(r)) - q(r) \cdot E_p[u_x] = 0$$

$$p(r) \cdot \frac{q(r)}{p(r)} - q(r) \cdot E_p[u_x] = 0$$

$$q(r) - q(r) \cdot E_p[u_x] = 0$$

$$q(r) - q(r) \cdot E_p \left[\frac{\partial (f_p(r) - E_q[f_p(r)] + w_0)}{\partial r} \right] = 0$$

$$q(r) - q(r) \cdot f_p'(r) - E_q[f_p'(r)] = 0 \quad (2. 60)$$

Menurut Pezier (2007), optimalisasi *return* dapat pula dicari dengan menghitung fungsi utility dengan :

$$u(x) = -\exp(-\gamma x) \quad (2. 61)$$

$$u'(x) = -(-\gamma) \exp(-\gamma x)$$

$$u'(x) = \gamma \exp(-\gamma x)$$

$$u_x = \gamma \cdot \exp(-\gamma x)$$

Dengan mengganti $u_x = \gamma \cdot \exp(-\gamma x)$ pada persamaan (2. 60) maka diperoleh :

$$p(r) \cdot u_x(x(r)) - q(r) \cdot E_p[u_x] = 0$$

$$p(r) \cdot \frac{q(r)}{p(r)} - q(r) \cdot \gamma \exp(-\gamma x) = 0$$

$$q(r) - q(r) \cdot \gamma \exp(-\gamma x) = 0$$

$$f_{q,p(r)} = \left(\frac{1}{\gamma}\right) \ln(p(r))/q(r) + C(f_{q,p}|q, p) \quad (2. 62)$$

dengan,

$$f_{q,p}(r) = f_p(r) - E_q[f_p(r)]$$

$$C(f_{q,p}|q, p) : \text{skalar independent}$$

Dengan mensubstitusi persamaan (2. 62) dan (2. 58) diperoleh *expected* utility yang maksimum sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E_p \left[u \left(f_{q,p}(r) \right) \right] &= E_p \left[u \left(\frac{1}{\gamma} \right) \ln(p(r)) / q(r) + C(f_{q,p}|q, p) \right] \\ &= - \exp \left(\gamma C(f_{q,p}|q, p) \right) \end{aligned} \quad (2. 63)$$

Maka , $C(f_{q,p}|q, p)$ adalah kepastian kesetaraan dari optimal *return* $f_{q,p}(r)$. Fungsi $p(r)$ dan $q(r)$ diperoleh dari nilai *expected* berdasarkan persamaan (2. 63) dibawah risiko netral sehingga diperoleh :

$$C(f_{q,p}|q, p) = \left(\frac{1}{\gamma}\right) E_q(\ln q(r)/p(r))$$

$$= \left(\frac{1}{\gamma}\right) D(q, p) \quad (2. 64)$$

Portofolio aktif menunjukkan perbedaan pandangan investor dengan menggunakan persamaan (2. 62) dan (2. 64) sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} f_{q,p}(r) &= \left(\frac{1}{\gamma}\right) \ln (p(r)/q(r)) + C(f_{q,p}|q, p) \\ &= \left(\frac{1}{\gamma}\right) \ln p(r)/q(r) + \left(\frac{1}{\gamma}\right) E_q(\ln (q(r)/p(r))) \\ &= \left(\frac{1}{\gamma}\right) \ln p(r)/q(r) + \left(\frac{1}{\gamma}\right) D(q, p) \\ f_{q,m}(r) &= \left(\frac{1}{\gamma}\right) \ln (q(r)/m(r)) + C(f_{q,m}|q, m) \\ &= \left(\frac{1}{\gamma}\right) \ln (q(r)/m(r)) + \left(\frac{1}{\gamma}\right) E_q(\ln (q(r)/m(r))) \\ &= \left(\frac{1}{\gamma}\right) \ln (q(r)/m(r)) + \left(\frac{1}{\gamma}\right) D(q, m) \\ f_{q,m,p}(r) &= f_{q,p}(r) - f_{q,m}(r) \\ &= \left(\frac{1}{\gamma}\right) \ln (p(r)/q(r)) + \left(\frac{1}{\gamma}\right) D(q, p) - \left(\frac{1}{\gamma}\right) \ln (q(r)/m(r)) + \\ &\quad \left(\frac{1}{\gamma}\right) D(q, m) \\ &= \left(\frac{1}{\gamma}\right) \ln(p(r))/(m(r)) + D(q, p) - D(q, m) \end{aligned} \quad (2. 65)$$

Kepastian kesetaraan berdasarkan *return* dan perkiraan investor pada persamaan (2. 64) dapat dikombinasikan menjadi bentuk sebagai berikut :

$$- \exp \left(-\gamma C(f_{q,m}|q, p) \right) = E_p [-\exp (-\ln (m(r)/q(r)) - D(q, m))]$$

$$= -\exp(\ln(E_q[p(r)/m(r)] - D(q, m)))$$

$$C(f_{q,m}|q, p) = \left(\frac{1}{\gamma}\right) (D(q, m) - \ln(E_q[p(r)/m(r)])) \quad (2. 66)$$

Kepastian kesetaraan optimal portofolio aktif berdasarkan persamaan (2. 63) dan (2. 64) menghasilkan :

$$\begin{aligned} C(f_{q,p}|q, p) - C(f_{q,m}|q, p) &= \left(\frac{1}{\gamma}\right) (\ln(E_q[p(r)/m(r)])) - E_q[p(r)/m(r)] \\ &= \left(\frac{1}{\gamma}\right) D(q, m, p) \end{aligned} \quad (2. 67)$$

Dimana $D(q, m, p)$ dapat ditunjukkan dengan distribusi multivariat normal sebagai berikut :

$$\mathbf{q} \sim N(0, \Sigma)$$

$$\mathbf{m} \sim N(\boldsymbol{\pi}, \Sigma)$$

$$\mathbf{p} \sim N(p, \Sigma)$$

dengan,

$\mathbf{q}$ = risiko netral

$\mathbf{m}$ = perkiraan pasar

$\mathbf{p}$ = *expected return*

sehingga , berdasarkan Jacque Pezier (2007) diperoleh Persamaan sebagai berikut :

$$f_{q,m,p}(r) = \left(\frac{1}{\gamma}\right) (p - S\Sigma^{-1}\pi)' S^{-1}r - \left(\frac{1}{2\gamma}\right) [r'(S^{-1} - \Sigma^{-1})r + n - Tr(\Sigma S^{-1})]$$

(2. 68)

$$\left(\frac{1}{\gamma}\right) D(q, m, p) = \frac{1}{2} (p - S\Sigma^{-1}\pi)' (\gamma S)^{-1} (p - S\Sigma^{-1}\pi) + \left(\frac{1}{2\gamma}\right) [Tr(\Sigma S^{-1}) - n - \ln(|\Sigma S^{-1}|)]$$

(2. 69)

Untuk mendapatkan bobot *Least Discriminant* dihitung menggunakan fungsi pengali Lagrange dan faktor pengali Lagrange pada persamaan (2. 69) diperoleh :

$$L = \frac{1}{2} (p - S\Sigma^{-1}\pi)' S^{-1} (p - S\Sigma^{-1}\pi) + \frac{1}{2} (Tr(\Sigma S^{-1}) - n - \ln(|\Sigma S^{-1}|) - \lambda'_1 (Pp - q))$$

$$\frac{\partial L}{\partial p} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} (p - S\Sigma^{-1}\pi)' S^{-1} (p - S\Sigma^{-1}\pi) + \frac{1}{2} (Tr(\Sigma S^{-1}) - n - \ln(|\Sigma S^{-1}|) - \lambda'_1 (Pp - q)) \right)}{\partial p}$$

$$= S^{-1} (p - S\Sigma^{-1}\pi) - P' \lambda_1$$

$$p - S\Sigma^{-1}\pi = S P' \lambda_1$$

Dimana, $\lambda_1 = (PSP')^{-1} (q - PS\Sigma^{-1}\pi)$ sehingga diperoleh :

$$p - S\Sigma^{-1}\pi = S P' (PSP')^{-1} (q - PS\Sigma^{-1}\pi)$$

$$p = S\Sigma^{-1}\pi + S P' (PSP')^{-1} (q - PS\Sigma^{-1}\pi)$$

$$= \pi + \Sigma P' (P\Sigma P')^{-1} (q - P\pi)$$

(2.70)

dengan,

P : *expected return Least Discriminant*

q : risk netral

Σ : matriks varians kovarians *return* saham

π : vektor $k \times 1$ untuk *return* ekulibrium CAPM