BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Secara umum, pada bab ini membahas mengenai kajian teori yang digunakan dalam penelitian yaitu, grup, transformasi, translasi, refleksi, rotasi, *glide/*refleksi geser, grup simetri, *frieze group*, *graphical user interface* (GUI) pada MATLAB versi R2011b.

A. Definisi dan Sifat-sifat Sederhana Grup

Sebelum dijelaskan mengenai definisi grup terlebih dahulu akan dijelaskan mengenai operasi biner.

Definisi 2.1 (Grillet, 2007 hal. 1) *Operasi* $*$ *pada himpunan* G *adalah suatu operasi biner jika operasi* $*$ *merupakan fungsi* $G\ x\ G \rightarrow G$.

Dengan kata lain operasi $*$ pada anggota himpunan G adalah operasi biner jika untuk setiap dua anggota a, b di G maka $(a * b)$ juga di G.

Contoh 2.1 (Sukirman, 2014 hal.60) Operasi $+$ pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan operasi biner, sebab operasi $+$ dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi dari $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$, yaitu untuk setiap (a, b) di $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ maka $(a + b)$ juga di $\mathbb{Z}$. Jumlah dari dua bilangan bulat adalah bilangan bulat pula.

Definisi 2.2 (Anderson, 2015 hal. 207). *Jika* G *adalah himpunan tidak kosong dan didefinisikan operasi biner* $*$ *,maka* $(G, *)$ *disebut grup jika memenuhi semua aksioma berikut ini:*

i. *Bersifat asosiatif, yaitu* $(a * b) * c = a * (b * c)$, *untuk setiap* a, b, c *di* G.
ii. *Terdapat elemen identitas, yaitu elemen e (disebut elemen identitas) pada* G *sedemikian sehingga* $a * e = e * a = a$ *untuk setiap* a *di* G.
iii. *Setiap elemen mempunyai invers, yaitu untuk setiap elemen* $a \in G$, *terdapat elemen* b *di* G *(disebut invers dari* a*) sedemikian sehingga* $a * b = b * a = e$.

Contoh 2.2 (Sukirman, 2014 hal. 72)

1. Himpunan bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan $(\mathbb{Z}, +)$, merupakan suatu grup.

   Bukti:

   a. Himpunan $\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif.

      Ambil sebarang a, b, c di $\mathbb{Z}$ maka,

      $(a + b) + c = a + b + c$

      $= a + (b + c)$

   b. Terdapat elemen identitas yaitu 0, sebab

      $a + 0 = 0 + a = a$

   c. Setiap elemen mempunyai invers

      Ambil sebarang a di $\mathbb{Z}$ terdapat $e = 0$ yaitu elemen identitas misalkan b invers dari a maka,

      $a + b = b + a = 0$

      $b = -a$

      Jadi invers untuk setiap a di $\mathbb{Z}$ adalah $-a$

2. Himpunan B dengan operasi $*$ didefinisikan oleh $a * b = a + b - 5$, untuk setiap a, b di B adalah suatu grup.

   Bukti:

   a. Himpunan B bersifat asosiatif

      Ambil sebarang a, b, c di B maka,

      $(a * b) * c = (a + b - 5) + c - 5$

      $= a + b - 5 + c - 5$

$$= a + (b + c - 5) - 5$$

$$= a * (b * c)$$

b. Terdapat elemen identitas

Ambil sebarang a di B maka terdapat e yaitu elemen identitas sedemikian sehingga,

$$a * e = e * a = a$$

$$a + e - 5 = a$$

$$e = 5$$

Jadi elemen identitasnya adalah 5

c. Setiap elemen mempunyai invers

$$a * b = b * a = e$$

$$a + b - 5 = 5$$

$$b = 10 - a$$

Jadi invers dari $a \in B$ adalah $10 - a$

Untuk selanjutnya penulisan $(G, *)$ disederhanakan menjadi G dan $a * b$ menjadi ab kecuali lambang operasinya diperlukan, maka lambang operasi harus dituliskan.

Order dari grup G yang dinotasikan dengan $o(G)$ atau $|G|$, adalah banyaknya elemen dari grup G. Suatu grup disebut grup hingga jika banyaknya elemen dari G adalah berhingga dan jika order dari G tak hingga, maka grup G disebut grup tak hingga.

Teorema 2.3 (Gallian, 2006 hal. 50). *Jika G suatu grup, maka untuk setiap a, b di G berlaku $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.*

Bukti :

Oleh karena G suatu grup, sehingga untuk setiap a di G berlaku bahwa $(ab)(ab)^{-1} = e$ dan $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = (a(bb^{-1})a^{-1}) = aea^{-1} = aa^{-1} = e$, maka $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Teorema 2.4 Sifat kanselasi (Gallian, 2006 hal. 48). *Misalkan G suatu grup, maka $\forall a, b, c \in G$ berlaku bahwa:*

i. Jika $ab = ac$, maka $b = c$.

ii. Jika $ac = bc$, maka $a = b$.

Bukti:

i. Ambil sembarang $a, b, c \in G$ dan diketahu bahwa $ab = ac$, maka

$a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac)$ (Karena G suatu grup dan $a \in G$ maka $a^{-1} \in G$)

$(a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c$ (asosiatif)

$eb = ec$ ($aa^{-1} = e$ (identitas))

$b = c$

ii. Bukti analog dengan (i)

Definisi 2.5 (Sukirman, 2014 hal. 91). *Misalkan G suatu grup, $a \in G$ dan m suatu bilangan bulat positif maka,*

$a^m = a\ a\ a\ a\ ....\ a$ *sebanyak m faktor.*

$a^{-m} = (a^{-1})^m$ *dengan a^{-1} invers dari a.*

$a^0 = e$ *elemen identitas.*

Teorema 2.6 (Sukirman, 2014 hal. 92). *Jika G suatu grup, m dan n sembarang bilangan-bilangan bulat, maka untuk setiap a di G berlaku*

$$a^m a^n = a^{m+n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Bukti:

Karena m dan n bilangan bulat maka terdapat tiga keadaan, yaitu:

Keadaan I : m dan n keduanya positif

$$a^m a^n = (a\ a\ a\ a\ a\ ....\ a)(a\ a\ a\ a\ a\ ...\ a)$$

(sebanyak m faktor) (sebanyak n faktor)

$= a\ a\ a\ a\ a \ldots a$ (sebanyak $(m+n)$ faktor)

$= a^{m+n}$

Keadaan II : m dan n keduanya negatif, misalnya $m = -k$ dan $n = -t$ dengan k dan t bilangan bulat positif.

$a^m a^n = a^{-k} a^{-t}$

$a^m a^n = (a^{-1})^k (a^{-1})^t$

$= (a^{-1}\ a^{-1} a^{-1} \ldots\ a^{-1})(a^{-1}\ a^{-1} a^{-1} \ldots\ a^{-1})$

(sebanyak k faktor) (sebanyak t faktor)

$= (a^{-1}\ a^{-1} a^{-1} \ldots\ a^{-1})$ (sebanyak $(k+t)$ faktor)

$= (a^{-1})^{k+t}$

$= a^{-(k+t)}$

$= a^{(-k)+(-t)}$

$= a^{m+n}$

Keadaan III : salah satu positif dan lainnya negatif, misalkan m bulat positif dan n bulat negatif dan $|m| > |n|$. Misalkan $n = -t$ dengan t suatu bilangan bulat positif.

$a^m a^n = a^m a^{-t} = a^m (a^{-1})^t$

$= (a\ a\ a\ a\ a \ldots . a)(a^{-1}\ a^{-1} a^{-1} \ldots\ a^{-1})$

(sebanyak m faktor)(sebanyak t faktor)

$= a\ a\ a \ldots (aa^{-1})\ a^{-1} a^{-1} \ldots\ a^{-1}$) (dan seterusnya sebanyak $(m-t)$ faktor)

$= a\ a\ a\ a\ a$

$= a^{m-t} = a^{m+(-t)}$

$= a^{m+n}$

Untuk kasus $|m| \leq |n|$ bukti analog.

B. Transformasi

Definisi 2.7 (Rotman, 2005 hal. 88) *Terdapat suatu fungsi* $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, *maka,*

i. *Fungsi* $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ *disebut injektif jika untuk setiap* A, B *di* $\mathbb{R}^2$ *dengan* $A \neq B$ *maka* $\tau(A) \neq \tau(B)$.
ii. *Fungsi* $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ *disebut surjektif jika untuk setiap* B *di* $\mathbb{R}^2$ *maka terdapat* $A \in \mathbb{R}^2$ *sedemikian sehingga* $B = \tau(A)$.

Contoh 2.3 (Umble, 2015 hal.35) Fungsi $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ yang dinyatakan sebagai $\tau(x, y) = (x + 2, y - 3)$ adalah fungsi injektif dan surjektif.

Bukti:

a. Akan dibuktikan $\tau(x, y) = (x + 2, y - 3)$ fungsi injektif. Ambil sebarang A, B di $\mathbb{R}^2$, $A = (x_1, y_1)$ dan $B = (x_2, y_2)$. Dengan menggunakan kontraposisi dari definisi fungsi injektif yaitu jika untuk setiap A, B di $\mathbb{R}^2$ dengan $\tau(A) = \tau(B)$ maka $A = B$, didapatkan

$$\tau(A) = \tau(B)$$

$$(x_1 + 2, y_1 - 3) = (x_2 + 2, y_2 - 3)$$

sehingga $x_1 + 2 = x_2 + 2 \leftrightarrow x_1 = x_2$ dan $y_1 - 3 = y_2 - 3 \leftrightarrow y_1 = y_2$. Terbukti bahwa $\tau(x, y) = (x + 2, y - 3)$ suatu fungsi injektif.

b. Akan dibuktikan $\tau(x, y) = (x + 2, y - 3)$ fungsi surjektif. Ambil sebarang A di $\mathbb{R}^2$, $A = (x_1, y_1)$ terdapat B di $\mathbb{R}^2$ dengan $B = (x_2, y_2) = (x_1 - 2, y_1 + 3)$ sehingga $\tau(B) = ((x_1 - 2) + 2, (y - 3) +$

$3) = (x_1, y_1) = A$. Terbukti bahwa $\tau(x, y) = (x + 2, y - 3)$ fungsi surjektif.

Definisi 2.8 (Leonard, 2014 hal. 212). *Suatu fungsi τ disebut transformasi jika:*

i. Fungsi tersebut memetakan dari satu himpunan ke himpunan yang sama.

ii. Fungsi tersebut injektif.

iii. Fungsi tersebut surjektif.

Contoh 2.4 (Eccles, 1971 hal.13)

1. Suatu fungsi $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dinyatakan sebagai $\tau(x, y) = (x + 1, y)$ adalah suatu transformasi.

   Bukti :

   a. Akan dibuktikan $\tau(x, y) = (x + 1, y)$ adalah suatu fungsi. $\tau(x, y) = (x + 1, y)$ adalah fungsi jika $A = B$ maka $\tau(A) = \tau(B)$. Ambil sebarang $A, B \in \mathbb{R}^2$, $A = (x_1, y_1)$ dan $B = (x_2, y_2)$. Jika $A = B$ maka $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$.

   $$\begin{aligned} \tau(x_1, y_1) &= (x_1 + 1, y_1) \\ &= (x_2 + 1, y_2) \\ &= \tau(x_2, y_2) \end{aligned}$$

   Dapat disimpulkan bahwa $\tau(x, y) = (x + 1, y)$ adalah suatu fungsi.

   b. τ satu-satu (injektif), sebab jika $\tau(x_1, y_1) = \tau(x_2, y_2)$ maka didapatkan Persamaan 2.1 berikut:

   $$(x_1 + 1, y_1) = (x_2 + 1, y_2) \qquad 2.1$$

   dari Persamaan 2.1 diperoleh

   $$x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \qquad 2.2$$

   $$y_1 = y_2 \qquad 2.3$$

dari Persamaan 2.2 diperoleh

$$x_1 + 1 = x_2 + 1 \leftrightarrow x_1 = x_2$$

sehingga $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

c. τ onto (surjektif), karena jika diambil sebarang (x_1, y_1) di $\mathbb{R}^2$, maka ada (x_2, y_2) di $\mathbb{R}^2$ yaitu $(x_2, y_2) = (x_1 - 1, y_1)$ sehingga $\tau(x_2, y_2) = \tau\,(x_2 - 1, y_2) = \tau\,(x_1 - 1 + 1, y_1) = (x_1, y_1)$

Jadi τ suatu transformasi.

C. Isometri

Definisi 2.9 (Gallian, 2006 hal. 453). *Suatu isometri pada dimensi- n pada ruang $\mathbb{R}^n$ adalah suatu fungsi dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^n$ yang mempertahankan jarak.*

Karena pembahasan dimensi pada penelitian ini adalah dimensi-2 sehingga, dengan kata lain fungsi $\tau: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ adalah suatu isometri jika titik A dan B pada $\mathbb{R}^2$ mempunyai jarak yang sama dengan titik $\tau(A)$ dan $\tau(B)$. Jarak kedua titik didefinisikan sebagai berikut:

$$AB = \sqrt{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)} \qquad 2.4$$

Contoh 2.5 (Umble, 2015 hal. 36) Suatu transformasi identitas adalah suatu isometri karena $A^{'} = \tau(A) = A$ dan $B^{'} = \tau(B) = B$ sedemikian sehingga $AB = A'B'$.

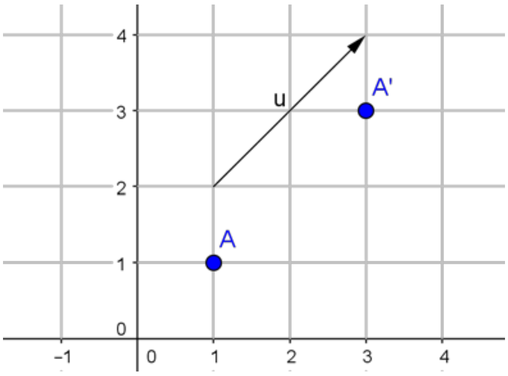
D. Translasi

Definisi 2.10 (Umble, 2015 hal. 47). *Diberikan titik P, Q dan vektor $\underline{v} = (a.b)$. Translasi dari P ke Q adalah suatu transformasi $\tau_{P,Q} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yang memenuhi:*

i. $Q = \tau_{P,Q}(P)$.

ii. Jika $P = Q$*, maka* $\tau_{P,Q} = I$.
iii. Jika vektor $\underline{v} = PQ$ *maka* $\tau_{\underline{v}} = \tau_{P,Q}$.

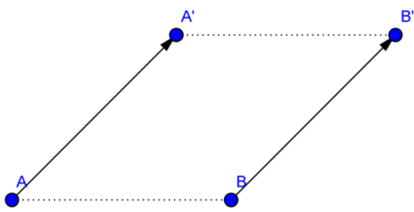
Contoh 2.6 Titik $A(1,1)$ ditranslasikan terhadap vektor $\underline{u} = (2.2)$ sehingga menghasilkan titik $A'(3,3)$ seperti pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Translasi titik A terhadap vektor $\underline{u}$

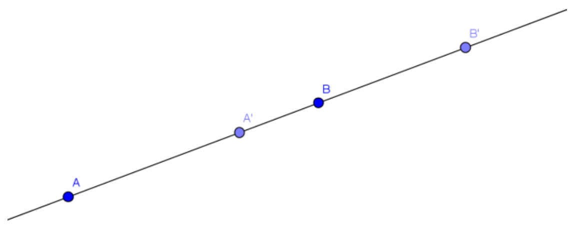
Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa translasi merupakan suatu isometri. Misalkan τ_v adalah suatu translasi dengan $\tau_v\,(A) = A'$ dan $\tau_v\,(B) = B'$ maka $\overline{AA'} = \underline{v}$ dan $\overline{BB'} = \underline{v}$ sehingga $\overline{AA'} = \overline{BB'}$. Terdapat dua kondisi titik-titik A, A', B, B', yaitu:

a. A, A', B, B' tidak segaris maka $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ dan $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$ sehingga A, A', B, B' adalah suatu jajargenjang, sehingga $\overline{A'B'} = \overline{AB}$.



Gambar 2.2 Jajar genjang $AA'BB'$

b. A, A', B, B' segaris, maka akan ditunjukkan pada Gambar 2.3



Gambar 2.3 A, A', B, B' segaris

Dari Gambar 2.3 tersebut didapat:

$$\overline{A'B'} = \overline{AB'} - \overline{AA'}$$

$$= \overline{AB'} - \overline{AA'} \quad \text{(sebab } AA' = BB' \text{)}$$

$$= \overline{AB}$$

Sehingga terbukti bahwa translasi merupakan suatu isometri.

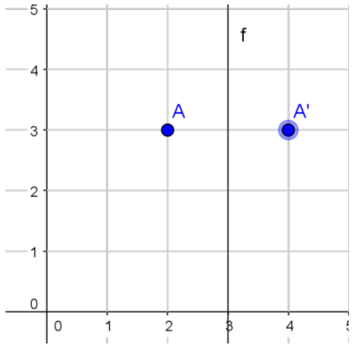
E. Refleksi

Definisi 2.11 (Umble, 2015 hal. 61). *Jika c suatu garis maka pencerminan terhadap garis c adalah suatu fungsi $\sigma_c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yang memenuhi:*

i. Jika titik P pada garis c, maka $\sigma_c(P) = P$.

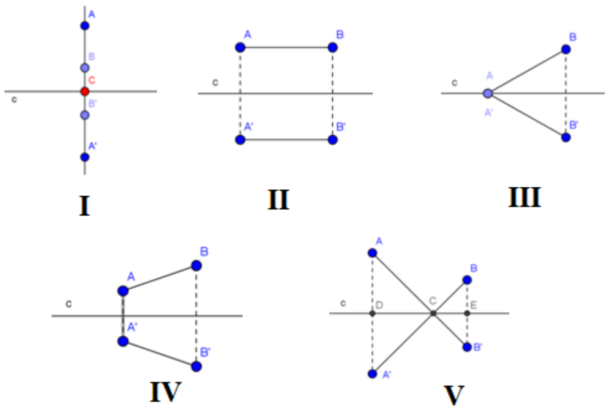
ii. Jika titik P tidak pada garis c dan $\sigma_c(P) = P'$ maka c tegak lurus ruas garis $\overline{PP'}$.

Contoh 2.7 Titik $A(3,2)$ direfleksikan terhadap garis f sehingga menghasilkan titik $A'(3,4)$ seperti pada Gambar 2.4, dituliskan sebagai $\sigma_f(A) = (A')$.



Gambar 2.4 Refleksi titik A terhadap garis f

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa refleksi merupakan suatu isometri. Misalkan $\sigma_c(A) = A'$ dan $\sigma_m(B) = B'$, ada beberapa keadaan khusus letak titik-titik $A, A', B,$ dan B' terhadap garis c, yaitu :



Gambar 2.5 Keadaan titik titik $A, A', B,$ dan B' terhadap garis c

a. Keadaan I

A, A', B, B' segaris, misalkan ruas garis $\overline{AA'}$ memotong garis c di titik C maka diperoleh $\overline{A'D} = \overline{AD}$ dan $\overline{B'D} = \overline{BD}$. Ruas garis $\overline{A'D}$ dikurangi dengan ruas garis $\overline{B'D}$ sehingga diperoleh $\overline{A'D} - \overline{B'D} = \overline{AD} - \overline{BD}$, maka $\overline{A'B'} = \overline{AB}$.

b. Keadaan II

A, A', B, B' adalah segiempat, sehingga $\overline{A'B'} = \overline{AB}$

c. Keadaan III

Misalkan BB' memotong garis c di titik D maka terdapat segitiga $\Delta\, A'B'D$ dan $\Delta\, ABD$. Besar sudut $\angle A^{'}DB^{'}$ adalah 90^o, demikian pula dengan besar sudut $\angle ADB$ adalah 90^o. Ruas garis $\overline{BD}$ sama dengan ruas garis $\overline{B'D}$, sedangkan ruas garis $\overline{AD}$ berimpit dengan ruas garis $\overline{A'D}$ sehingga $\Delta\, A^{'}B^{'}D \cong \Delta\, ABD$. Jadi dapat disimpulkan bahwa $\overline{A^{'}B^{'}} = \overline{AB}$.

d. Keadaan IV

Analog dengan bukti keadaan 3 maka diperoleh $\Delta\, ADE \cong \Delta\, A'DE$. Akibatnya $\overline{AE} = \overline{A'E}$ dan besar sudut $\angle AED$ sama dengan besar sudut $\angle A'ED$, sehingga besar sudut $\angle AEB$ sama dengan besar sudut $\angle A'EB$. Jadi dapat disimpulkan $\Delta\, ABE \cong \Delta\, A'B'E$, dan berakibat $\overline{A^{'}B^{'}} = \overline{AB}$.

e. Keadaan V

Menggunakan cara yang sama dengan keadaan sebelumnya, maka didapat $\Delta\, ADC \cong \Delta\, A'DC$ dan $\Delta\, ADC \cong \Delta\, A'DC$ akibatnya diperoleh $\overline{AC} = \overline{A^{'}C}$ dan $\overline{BC} = \overline{B'C}$. Ruas garis $\overline{AC}$ dijumlahkan dengan ruas garis $\overline{BC}$ didapat $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{A^{'}C} + \overline{B'C}$, sehingga $\overline{AB} = \overline{A^{'}B'}$.

Berdasarkan kelima keadaan tersebut maka terbukti bahwa refleksi merupakan isometri.

F. Rotasi

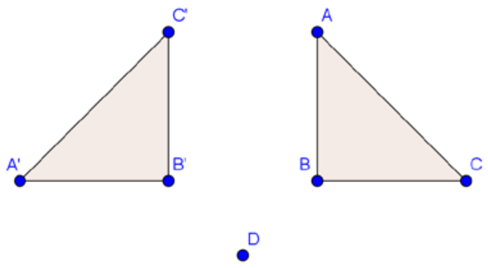
Definisi 2.12 (Umble, 2015 hal. 53). *Diberikan titik P, A,di $\mathbb{R}^2$ dan θ di $\mathbb{R}$. Rotasi terhadap titik P dengan sudut $\theta°$ adalah suatu fungsi $\rho_{P,\theta}$: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ yang memenuhi:*

i. $\rho_{P,\theta}(P) = P$.

ii. *Jika $P \neq A$ dan $\rho_{P,\theta}(A) = A'$ dengan $\overline{PA'} = \overline{PA}$ dan $m\angle APA' = \theta$.*

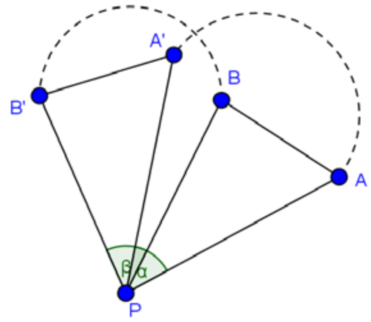
Sudut putar θ bernilai positif jika arah putaran berlawanan dengan arah perputaran jarum jam, sebaliknya sudut putar θ bernilai negatif jika arah perputarannya searah dengan arah perputaran jarum jam.

Contoh 2.8 Segitiga ABC dirotasikan sebesar 90° dengan titik pusat D. $\rho(D,\theta)(A) = A'$, $\rho(D,\theta)(B) = B'$, $\rho(D,\theta)(C) = C'$, sehingga menghasilkan segitiga $A'B'C'$ seperti pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Rotasi segitiga ABC sebesar 90° dengan titik pusat D

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa rotasi merupakan suatu isometri. Misalkan $\rho(P,\alpha)(A) = A'$ dan $\rho(P,\beta)(B) = B'$ seperti pada Gambar 2.7.



Gambar 2.7 Rotasi titik A dan B dengan pusat P

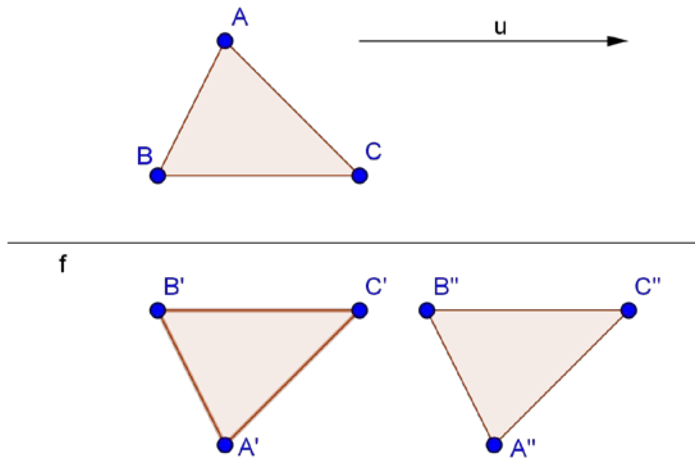
Berdasarkan definisi, maka $\overline{PA'} = \overline{PA}$, $m\angle APA' = \alpha$ dan $\overline{PB'} = \overline{PB}$, $m\angle BPB' = \beta$. Pandang $\Delta\, PAB$ dan $\Delta\, PA'B'$ maka $\overline{PA'} = \overline{PA}$, $\overline{PB'} = \overline{PB}$, dan $m\angle APB = m\angle A'PB'$ sehingga $\Delta\, PAB \cong \Delta\, PA'B'$. Karena $\Delta\, PAB \cong \Delta\, PA'B'$ maka $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Jadi terbukti bahwa rotasi merupakan isometri.

Untuk selanjutnya penulisan lambang rotasi $\rho(P,\theta)$ disederhanakan menjadi ρ_θ.

G. *Glide*/ Refleksi geser

Definisi 2.13 (Umble, 2015 hal. 96). *Diberikan c suatu garis dan vektor $\underline{v}$. Transformasi $\gamma_{c,\underline{v}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ disebut glide/ refleksi geser dengan sumbu c dan vektor $\underline{v}$ jika*
i. $\gamma_{c,\underline{v}} = \tau_v \sigma_c$.
ii. $\tau_v(c) = c$.

Contoh 2.9 Glide segitiga ABC terhadap sumbu f dan vektor $\underline{u}$ menghasilkan segitiga $A"B"C"$



Gambar 2.8 *Glide* segitiga ABC

Pada Gambar 2.8 di atas menunjukkan proses glide dari segitiga ABC sehingga menghasilkan segitiga $A"B"C"$. Pertama segitiga ABC direfleksikan terhadap garis f sehingga menghasilkan segitiga $A'B'C'$. Kemudian segitiga $A'B'C'$ ditranslasikan menggunakan vektor $\underline{u}$ sehingga menghasilkan segitiga $A"B"C"$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa *glide*/ refleksi geser merupakan suatu isometri. Misalkan terdapat garis f, vektor $\underline{u}$, $\gamma(B) = B"$, dan $\gamma(C) = C"$. Berdasarkan definisi $\gamma = \tau_v \sigma_{\overline{AB}}$, maka didapatkan Persamaan berikut:

$$\gamma(B) = \tau_v(B^{'})\sigma_{\overline{AB}}(B) \quad 2.5$$

$$\gamma(C) = \tau_v(C^{'})\sigma_{\overline{AB}}(C) \quad 2.6$$

Misalkan $\sigma_{\overline{AB}}(B) = B'$ dan $\sigma_{\overline{AB}}(C) = C'$, maka jarak $\overline{BC}$ sama dengan $\overline{B'C'}$ karena $\sigma_{\overline{AB}}$ adalah suatu isometri dan diperoleh Persamaan 2.7.

$$\overline{BC} = \overline{B'C'} \quad 2.7$$

Selanjutnya jika $\tau_v(B') = B"$ dan $\tau_v(C') = C"$, maka jarak $\overline{B'C'}$ sama dengan $\overline{B"C"}$ karena τ_v adalah suatu isometri dan diperoleh Persamaan 2.8.

$$\overline{B'C'} = \overline{B"C"} \qquad 2.8$$

Berdasarkan Persamaan 2.7 dan 2.8, maka dapat diperoleh Persamaan 2.9 yaitu:

$$\overline{BC} = \overline{B"C"} \qquad 2.9$$

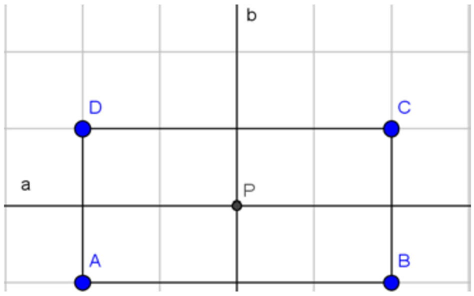
Dengan demikian maka jarak $\overline{BC}$ sama dengan jarak $\overline{B"C"}$ sehingga *glide*/refleksi geser merupakan suatu isometri.

H. Grup simetri

Definisi 2.14 Grup simetri pada $\mathbb{R}^n$ (Gallian, 2006 hal. 435). *Misalkan F adalah himpunan titik-titik pada* $\mathbb{R}^n$. *Grup simetri untuk F pada* $\mathbb{R}^n$ *adalah himpunan semua isometri pada* $\mathbb{R}^n$ *yang memuat F ke dirinya sendiri.*

Dengan kata lain misalkan B adalah suatu bangun dan $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5$ adalah suatu transformasi isometri, dimana $\tau_1(B) = B$, $\tau_2(B) = B, \tau_3(B) = B, \tau_4(B) = B, \tau_5(B) = B$ maka $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5$ membentuk grup simetri bangun B.

Contoh 2.10 Grup D_2: $\{\sigma_a,\ \sigma_b, \rho_{180°}, \rho_{360°} = I\}$ adalah grup simetri.



Gambar 2.9 Segiempat $ABCD$

Pada Gambar 2.9 terdapat suatu bangun $ABCD$. Himpunan isometri yang memuat bangun $ABCD$ yaitu:

σ_a : $ABCD \rightarrow DCBA$

σ_b : $ABCD \rightarrow BADC$

$\rho(P, 180°)$: $ABCD \rightarrow CDAB$

$\rho(P, 360°)$: $ABCD \rightarrow ABCD = e$

Komposisi fungsi dari setiap isometri-isometri diatas ada pada Tabel 2.1

Tabel 2.1 Komposisi fungsi dari tiap isometri

o	e	σ_a	σ_b	$\rho_{180°}$
e	e	σ_a	σ_b	$\rho_{180°}$
σ_a	σ_a	e	$\rho_{180°}$	σ_b
σ_b	σ_b	$\rho_{180°}$	e	σ_a
$\rho_{180°}$	$\rho_{180°}$	σ_b	σ_a	e

Dari Tabel 2.1 dapat diketahui bahwa,

1. Bersifat asosiatif

   Misalkan

   $\sigma_a(\sigma_b\rho_{180°}) = \sigma_a\sigma_a = e$

$(\sigma_a \sigma_b)\ \rho_{180^\circ} = \ \rho_{180^\circ}\rho_{180^\circ} = e$

Maka $\sigma_a(\sigma_b \rho_{180^\circ}) = (\sigma_a \sigma_b)\ \rho_{180^\circ}$

2. Terdapat elemen identitas yaitu ρ_{360°

   Hal itu dikarenakan,

   a. $\sigma_a \rho_{360^\circ} = \rho_{360^\circ}\sigma_a = \sigma_a$

   b. $\sigma_b \rho_{360^\circ} = \rho_{360^\circ}\sigma_b = \sigma_b$

   c. $\rho_{180^\circ}\rho_{360^\circ} = \rho_{360^\circ}\rho_{180^\circ} = \rho_{180^\circ}$

3. Setiap elemen memiliki invers, invers dari $(\sigma_a,\ \sigma_b, \rho_{180^\circ}, e)$ adalah $(\sigma_a,\ \sigma_b, \rho_{180^\circ}, e)$.

Jadi isometri isometri tersebut membentuk suatu grup yaitu D_2: $\{\sigma_a$, $\sigma_b, \rho_{180^\circ}, \rho_{360^\circ} = e\}$.

I. *Frieze Group*

Frieze group merupakan grup simetri tak hingga yang hanya memuat satu translasi (Umble, 2015). Grup ini membentuk suatu pola tertentu. Menurut (Gallian, 2006) terdapat 7 macam grup simetri tak hingga yang membentuk tujuh pola yang berbeda. Tujuh macam grup simetri tersebut adalah :

1. Pola I

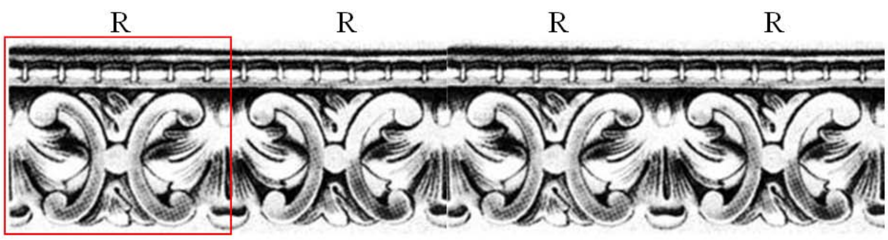
   Pada grup simetri di pola I hanya terdiri dari translasi. Misalkan τ adalah sebuah translasi maka grup pada pola I dapat ditulis sebagai :

$$F_1 = \{\ \tau^n\ | n \in \mathbb{Z}\ \}$$

Grup F_1 dapat diilustrasikan seperti pada Gambar 2.10

Gambar 2.10 Ilustrasi grup F_1

Contoh untuk pola grup F_1 ada pada Gambar 2.11



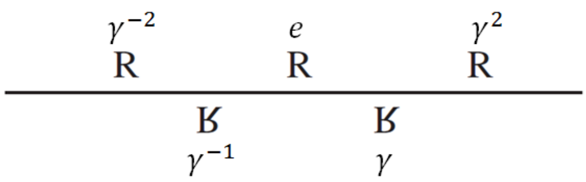
Gambar 2.11 Contoh untuk pola grup F_1

2. Pola II

Grup simetri pola II seperti pada pola I namun isometri yang digunakan adalah *glide*/ refleksi geser. Misalkan γ adalah *glide*/ refleksi geser maka grup pola II dapat ditulis sebagai :

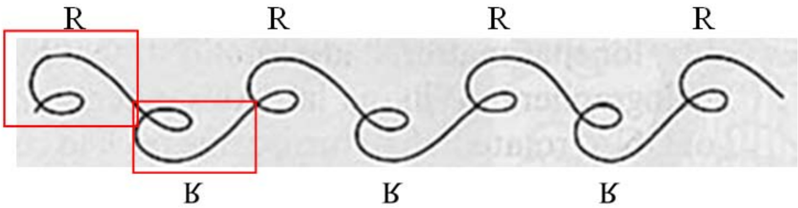
$$F_2 = \{ \gamma^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

Grup F_2 dapat diilustrasikan seperti pada Gambar 2.12



Gambar 2.12 Ilustrasi grup F_2

Contoh untuk pola grup F_2 ada pada Gambar 2.13



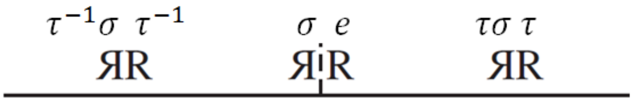
Gambar 2.13 Contoh untuk pola grup F_2

3. Pola III

   Grup simetri untuk pola III dibangun oleh translasi dan refleksi terhadap garis vertikal. Misalkan τ suatu translasi dan σ suatu refleksi, maka grup pola III dapat ditulis sebagai:

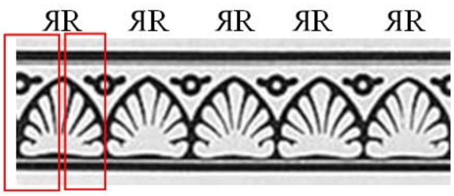
$$F_3 = \{ \tau^n \; \sigma^m \; | n \in \mathbb{Z}, m = 0 \; atau \; 1 \}$$

   Grup F_3 dapat diilustrasikan seperti pada Gambar 2.14.



Gambar 2.14 Ilustrasi grup F_3

   Contoh untuk pola grup F_3 ada pada Gambar 2.15



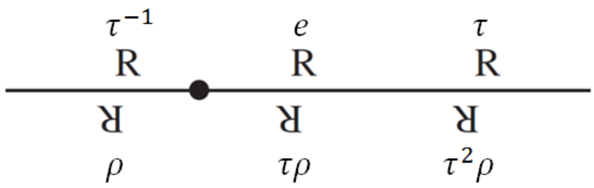
Gambar 2.15 Contoh untuk pola grup F_3

4. Pola IV

   Pada pola IV, grup simetri F_4 dibangun oleh translasi dan rotasi 180° dengan pusat p yaitu titik antara dua translasi. Misalkan τ suatu translasi dan ρ adalah rotasi 180° maka F_4 ditulis sebagai:

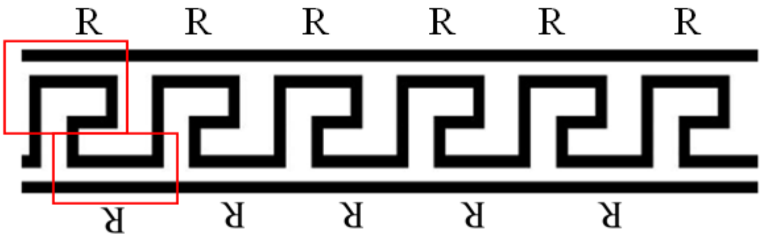
$$F_4 = \{ \tau^n \; \rho^m \; | n \in \mathbb{Z}, m = 0 \text{ atau } 1 \}$$

Grup F_4 dapat diilustrasikan seperti pada Gambar 2.16.



Gambar 2.16 Ilustrasi grup F_4

Contoh untuk pola grup F_4 ada pada Gambar 2.17.



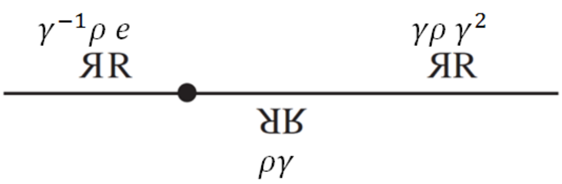
Gambar 2.17 Contoh pola grup F_4

5. Pola V

Grup simetri F_5 untuk pola V dibentuk oleh *glide*/ refleksi geser dan rotasi 180°. Jika γ suatu *glide* dan ρ adalah rotasi 180° maka grup untuk pola V dituliskan sebagai :

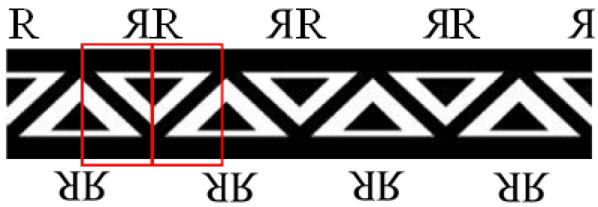
$$F_5 = \{ \gamma^n \rho^m \mid n \in \mathbb{Z}, m = 0 \text{ atau } 1 \}$$

Grup F_5 dapat diilustrasikan seperti pada Gambar 2.18.



Gambar 2.18 Ilustrasi grup F_5

Contoh untuk pola grup F_5 ada pada Gambar 2.19.



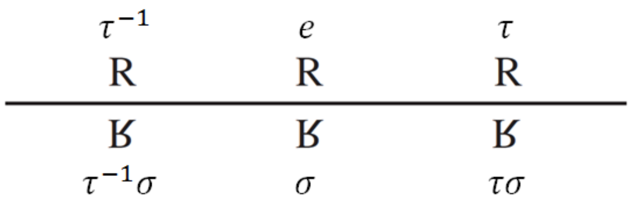
Gambar 2.19 Contoh pola grup F_5

6. Pola VI

Grup simetri F_6 untuk pola VI dibentuk oleh translasi dan refleksi terhadap garis horizontal. Jika τ adalah suatu translasi dan σ adalah refleksi terhadap garis horizontal, maka grup F_6 dapat ditulis sebagai berikut:

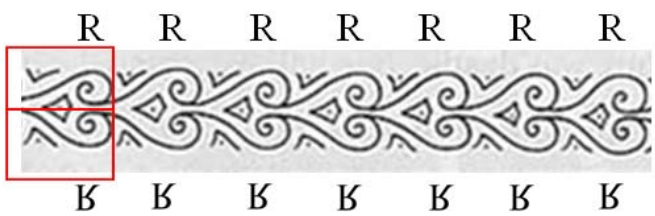
$$F_6 = \{ \tau^n \sigma^m \mid n \in \mathbb{Z}, m = 0 \text{ atau } 1 \}$$

Grup F_6 dapat diilustrasikan seperti pada Gambar 2.20.



Gambar 2.20 Ilustrasi grup F_6

Contoh untuk pola grup F_6 ada pada Gambar 2.21.



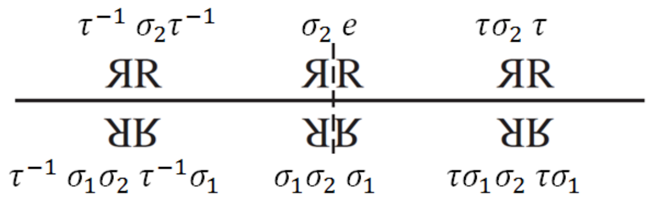
Gambar 2.21 Contoh pola grup F_6

7. Pola VII

Grup simetri F_7 untuk pola VI dibentuk oleh translasi , refleksi horizontal dan refleksi vertikal. Jika τ adalah suatu translasi, σ_1 suatu refleksi horizontal, dan σ_2 adalah refleksi vertikal maka grup F_7 dapat dituliskan sebagai berikut:

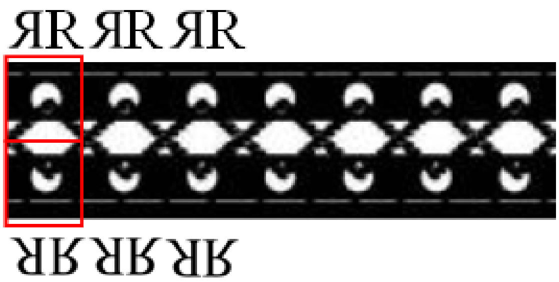
$$F_7 = \{\, \tau^n\ \sigma_1^m \sigma_2^k\ |n \in \mathbb{Z}, m, k = 0 \text{ atau } 1, \}$$

Grup F_7 dapat diilustrasikan seperti pada Gambar 2.22.



Gambar 2.22 Ilustrasi grup F_7

Contoh untuk pola grup F_7 ada pada Gambar 2.23.



Gambar 2.23 Contoh pola grup F_7

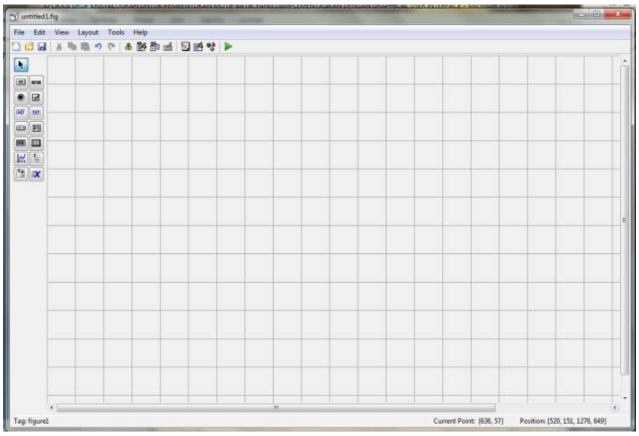
J. *Graphical User Interface* (GUI)

Untuk memudahkan pengguna dalam melihat aplikasi grup kristalografi dalam pembentukan motif batik maka digunakan program pada MATLAB yaitu *Grapichal User Interface* (GUI). GUI berguna untuk menampilkan *software* yang dibuat (Wittman, 2008). GUI merupakan tampilan yang dibangun dengan obyek grafik. Pada umumnya orang lebih mudah menggunakan GUI meskipun tidak mengetahui perintah yang ada didalamnya.

Keunggulan GUI pada MATLAB dibandingkan dengan bahasa pemrograman yang lain seperti, *visual basic*, *Delphi*, *visual* C++ adalah (Teuinsuka, 2009)

1. Banyak digunakan dan sesuai untuk aplikasi-aplikasi berorientasi sains.
2. Mempunyai fungsi *built-in* sehingga tidak mengharuskan pengguna membuat perintah sendiri.
3. Ukuran file (gambar dan M-file) yang relatif kecil.
4. Kemampuan grafis cukup baik.

GUI dapat ditampilkan dengan menuliskan "*guide*" pada *command window* lalu pilih *Blank GUI (Default)* untuk menampilkan halaman baru. Tampilan awal pada GUI terlihat dalam Gambar 2.24



Gambar 2.24 Layar *default* GUI