BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini dibahas tentang materi dasar yang digunakan untuk mendukung pembahasan pada bab-bab berikutnya, yaitu varians dan kovarians, distribusi normal, matriks, investasi, portofolio, saham, Jakarta Islamic Index (JII), *Capital Assets Pricing Model* (CAPM), bilangan *Fuzzy*, *Fuzzy Goal Programming*, *Fuzzy Compromise Programming*, model Black Litterman, dan Pendekatan *Fuzzy Compromise Programming* untuk *Views* dalam Portofolio Black Litterman.

A. Varians dan Kovarians

Definisi 2. 4 (Murray R. Spiegel, 2004)

Varians dari variabel random X didefinisikan dengan:

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2]. \tag{2. 1}$$

Notasi varians yang lain adalah σ^2, σ_x^2 atau $V(X)$. Standar deviasi dari X didefinisikan sebagai akar positif dari varians yaitu $\sigma = \sigma_x = \sqrt{Var(X)}$.

Rumus varians pada (2.1) dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i-1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{N-1} \text{ (untuk suatu populasi)} \tag{2. 2}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i-1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \text{ (untuk suatu sampel)} \tag{2. 3}$$

Definisi 2. 4 (Murray R. Spiegel, dkk, 2004)

Kovarians adalah suatu ukuran yang menyatakan varians bersama dari dua variabel random. Kovarians dari pasangan variabel random X dan Y didefinisikan sebagai:

$$\sigma_{XY} = Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \tag{2. 4}$$

Jika X dan Y adalah variabel random dan a dan b konstan, maka berlaku:

1. $Cov(aX,bY) = ab\,Cov(X,Y)$
2. $Cov(X+a,Y+b) = Cov(X,Y)$.
3. $Cov(X,aX+b) = a\,Var(X)$.
4. $Cov(X,Y) = 0$, jika X dan Y independen.

B. Distribusi Normal

1. Definisi Distribusi Normal

Definisi 2. 6 (Bain & Engelhardt, 1992)

Variabel random X dikatakan berdistribusi normal yang dinotasikan X~N(μ, σ²) dengan mean μ dan varians σ² mempunyai fungsi densitas probabilitas yaitu:

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\{(x-\mu)/\sigma\}^2/2} \tag{2.5}$$

untuk $-\infty < x < \infty$, dengan $-\infty < \mu < \infty$ dan $0 < \sigma < \infty$.

2. Uji Normalitas

Uji normalitas dapat dilakukan dengan bantuan software *SPSS* menggunakan pengujian *Kolmogorov-Smirnov*. Dalam hal investasi uji normalitas sering digunakan untuk melihat apakah *return* saham berdistribusi normal atau tidak. Apabila *return* saham berdistribusi normal, maka saham tersebut akan diperhitungkan untuk dimasukkan ke dalam portofolio. Tujuan pengujian normalitas dalam *return* saham adalah untuk mengantisipasi terjadinya ketidakstabilan harga, yang dikhawatirkan akan mengalami penurunan harga saham yang sangat signifikan sehingga merugikan investor. Uji normalitas *return* saham dapat dilakukan dengan uji *Kolomogorov-Smirnov* sebagai berikut (Gerhard Bohm & Gunter Zech, 2010) :

a. Hipotesis:

   H_0: data *return* saham berdistribusi normal.

   H_1: data *return* saham tidak berdistribusi normal.

b. Tingkat signifikansi $\alpha = 0.05$

c. Statistik uji:

   Kolmogornov-Smirnov $(KS) = \underset{X}{Sup} \left| F^*(X) - S(X) \right|$.

   F(X)* adalah distribusi kumulatif data sampel.

   S(X) adalah distribusi kumulatif yang berdistribusi normal.

d. Kriteria uji:

   H_0 ditolak jika $KS \geq KS_{tabel}$ atau *p-value* $KS < \alpha$.

e. Perhitungan.

f. Kesimpulan.

C. Matriks

Definisi 2. 8 (Anton, 2010)

Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan tersebut dinamakan entri dari matriks. Ukuran matriks dideskripsikan dengan banyaknya baris (garis horizontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks. Entri yang terdapat pada baris i *dan kolom* j *dari matriks* $\boldsymbol{A}$ *dapat dinyatakan dengan* a_{ij} *yaitu* $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$. *Secara umum bentuk matriks berukuran* $m \times n$ yaitu:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{m \times n}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{in} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (2.\ 6)$$

1. Perkalian matriks

Definisi 2. 9 (Anton, 2010)

Jika $\boldsymbol{A}$ *adalah suatu matriks dan c adalah skalar, maka hasil kali c*$\mathbf{A}$ *adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari* $\mathbf{A}$ *oleh c. Jika* $\boldsymbol{A} = a_{ij}$, *maka perkalian matriks ini dinotasikan sebagai* $c(\boldsymbol{A})_{ij} = (c\boldsymbol{A})_{ij} = [ca_{ij}]$.

Jika $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ sebuah matriks berukuran $m \times r$ dan $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$. sebuah matriks berukuran $r \times n$, maka hasil kali $\boldsymbol{A}$ dengan $\boldsymbol{B}$ yaitu $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\mathbf{B}$ adalah matriks yang entrinya didefinisikan dengan

$$\boldsymbol{AB_{m\times n}} = \begin{bmatrix} \sum_{\boldsymbol{l=1}}^{r} a_{il}b_{lj} & \sum_{\boldsymbol{l=1}}^{r} a_{il}b_{lj} & \dots \sum_{\boldsymbol{l=1}}^{r} a_{il}b_{lj} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{\boldsymbol{l=m}}^{r} a_{il}b_{lj} & \sum_{\boldsymbol{l=m}}^{r} a_{il}b_{lj} & \sum_{\boldsymbol{l=m}}^{r} a_{il}b_{lj} \end{bmatrix} \tag{2. 7}$$

dengan matriks $\boldsymbol{C}$ berukuran $m \times n$.

Contoh:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Maka, $\boldsymbol{AB_{m\times n}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,.\,\,2 + (-2)\,.(-1) + (-1)\,.\,\,1 \\ 4\,.\,\,2 + 1\,.\,\,(-1) + 2\,.\,\,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

2. Transpose Matriks

Definisi 2. 10 (Anton, 2010)

Jika $\boldsymbol{A}$ *adalah sebarang matriks m×r, maka transpose* $\boldsymbol{A}$ *dinyatakan oleh* $\boldsymbol{A'}$ *yang merupakan matriks berukuran r×m dengan mengubah baris dari* $\boldsymbol{A}$ *menjadi kolom pada* $\boldsymbol{A'}$*. dan transpose matriks* $\boldsymbol{A}$ *dapat dinyatakan dengan*:

$$(\boldsymbol{A})_{ij} = (\boldsymbol{A}')_{ji} \tag{2. 8}$$

Contoh:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ maka, } \boldsymbol{A'} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Minor dan Kofaktor Matriks

Definisi 2. 11 (Anton, 2010)

*Jika **A** merupakan matriks berukuran* $n \times n$, *maka minor dari entri* a_{ij} *dinotasikan dengan* $M_{i \times j}$ *yaitu determinan dari submatriks **A** yang didapat dengan menghapus baris ke-*i *dan kolom ke-*j. *Nilai* $(-1)^{i+j} M_{i \times j}$ *dinotasikan dengan* c_{ij} *disebut kofaktor dari entri* a_{ij}. Sehingga matriks kofaktor dari ***A*** dapat dinyatakan dengan:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2. 9}$$

Transpos dari matriks kofaktor ***A*** adalah adjoin ***A*** dan dinyatakan dengan adj(***A***).

Contoh:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

maka, minor dari entri a_{11} yaitu:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (-4).(-2) - 3.4 = 8 - 12 = -4,$$

kofaktor dari entri a_{11} yaitu:

$$c_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1.(-4) = -4.$$

4. Determinan Matriks

Definisi 2. 12 (Anton, 2010)

*Determinan matriks **A** berukuran n × n dapat dihitung dengan mengalikan entri pada suatu baris ke-i atau kolom ke-j dengan masing-masing kofaktor dan menjumlahkan hasil perkalian tersebut.* Determinan matriks ***A*** dinyatakan sebagai berikut:

$$|\boldsymbol{A}| = a_{1j}.c_{1j} + a_{2j}.c_{2j} + \cdots + a_{nj}.c_{nj}$$

Atau

$$|\boldsymbol{A}| = a_{i1}.c_{i1} + a_{i2}.c_{i2} + \cdots + a_{in}.c_{in}\ .$$

Contoh:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

maka,

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3[(-4).(-2) - 3.4] + 2[1.(-2) - 0.4] + 5[1.3 - 0.(-4)]$$

$$= 3.(-4) + 2.(-2) + 5.3$$

$$= -12 - 4 + 15 = 1$$

5. Invers Matriks

Definisi 2. 13 (Anton, 2010)

*Jika **A** matriks persegi dan jika terdapat suatu matriks **B** dengan ukuran yang sama sedemikian sehingga **AB**=**BA**=**I** dengan **I** merupakan matriks identitas, maka **A** invertible (dapat dibalik) dan **B** adalah invers dari **A**. Invers dari **A** dinotasikan dengan* $\boldsymbol{A}^{-1}$ *, sehingga* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \mathbf{I}$ *dan* $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \mathbf{I}$

Jika matriks ***A*** berukuran $n \times n$ maka invers adalah:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\,[adj(\boldsymbol{A})] \tag{2.10}$$

Contoh:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{adj}\ (\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3[1.2 - 1.2] - 2[1.(2) - 0.2] + 6[1.1 - 0.1]$$

$$= 3.0 - 2.(2) + 6.1$$

$$= 3 - 4 + 6$$

$$= 2.$$

maka,

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|A|}\ [adj(\boldsymbol{A})]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

D. Analisis Multivariat

Definisi 2. 14 (Johnson & Wichern, 2007)

Analisis statistik multivariat merupakan metode statistik untuk menganalisis hubungan antara lebih dari dua variabel secara bersamaan. Data sampel analisis multivariat secara umum dapat digambarkan dalam bentuk matriks dengan *n* objek dalam *p* variabel sebagai berikut:

	Variabel 1	Variabel 2	$\cdots$	Variabel *k*	$\cdots$	Variabel *p*
Objek 1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1k}	$\cdots$	x_{1p}
Objek 2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2k}	$\cdots$	x_{2p}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Objek *j*	x_{j1}	x_{j2}	$\cdots$	x_{jk}	$\cdots$	x_{jp}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Objek *n*	x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{nk}	$\cdots$	x_{np}

Tabel diatas dapat dinyatakan dalam bentuk matriks ***X*** dengan *n* baris dan *p* kolom berikut:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} & \cdots & x_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{j1} & x_{j2} & \cdots & x_{jk} & \cdots & x_{jp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

1. Multivariat Berdistribusi Normal

Definisi 2. 15 (Johnson & Wichern, 2007)

Fungsi distribusi multivariat normal merupakan fungsi distribusi dengan variabel normal lebih dari satu atau $p \geq 2$. *Jika* $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *adalah p-variat multivariat normal dengan rata-rata* $\boldsymbol{\mu}$ *dan varians-kovarians matriks* $\boldsymbol{\Sigma}$, dimana:

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p1} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

maka fungsi densitas multivariat normal adalah:

$$f(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \, |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} e^{-(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})/2} \tag{2. 11}$$

dengan $-\infty < X_i < \infty, i = 1,2,\ldots,p$.

2. Vektor random dan matriks random

Definisi 2. 16 (Johnson & Wichern, 2007)

Vektor random adalah vektor yang elemen-elemennya berupa variabel random. Jika suatu unit eksperimen hanya memiliki satu variabel terukur maka variabel terukur disebut variabel random, sedangkan jika terdapat lebih dari satu variabel terukur, misalkan n variabel maka variabel-variabel tersebut disebut vektor random dengan n komponen. Sedangkan matriks random adalah matriks yang mempunyai elemen variabel random.

3. Mean dan Kovarians Vektor Random

Definisi 2. 17 (Johnson & Wichern, 2007)

Dimisalkan $\boldsymbol{X}$ adalah variabel random dengan mean $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{E(X)}$ dan matriks kovarians $\boldsymbol{\Sigma}$. *Mean* vektor random $\boldsymbol{X}$ dengan ordo $p \times 1$ dapat dinyatakan dengan:

$$\boldsymbol{E(X)} = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu}. \tag{2. 12}$$

Sedangkan kovarians vektor random $\boldsymbol{X}$ dengan ordo $p \times 1$ adalah

$$\Sigma = \boldsymbol{E(X-\mu)(X-\mu)'}$$

$$= E\left(\begin{bmatrix} X_1-\mu_1 \\ X_2-\mu_2 \\ \vdots \\ X_p-\mu_p \end{bmatrix} (X_1-\mu_1 \quad X_2-\mu_2 \quad \cdots \quad X_p-\mu_p) \right)$$

$$= E\begin{bmatrix} (X_1-\mu_1)^2 & (X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) & \cdots & (X_1-\mu_1)(X_p-\mu_p) \\ (X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1) & (X_2-\mu_2)^2 & \cdots & (X_2-\mu_2)(X_p-\mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_p-\mu_p)(X_1-\mu_1) & (X_p-\mu_p)(X_2-\mu_2) & \cdots & (X_p-\mu_p)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E(X_1-\mu_1)^2 & E(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) & \cdots & E(X_1-\mu_1)(X_p-\mu_p) \\ E(X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1) & E(X_2-\mu_2)^2 & \cdots & E(X_2-\mu_2)(X_p-\mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(X_p-\mu_p)(X_1-\mu_1) & E(X_p-\mu_p)(X_2-\mu_2) & \cdots & E(X_p-\mu_p)^2 \end{bmatrix}.$$

Atau dapat dinyatakan $\sum = \boldsymbol{Cov(X)} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$. (2. 13)

Dengan σ_{ij} : kovarians dari X_i dan $X_j, i = 1,2,\dots p$ dan $j = 1,2,\dots p$.

Kovarians untuk sampel dinyatakan $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}$. (2. 14)

Dengan s_{ij} : kovarians dari $\widehat{X}_i$ dan $\widehat{X}_j, i = 1,2,\dots p$ dan $j = 1,2,\dots p$

E. Investasi

Investasi adalah menanamkan modal baik langsung maupun tidak langsung, dengan harapan pada waktunya nanti pemilik modal mendapatkan sejumlah keuntungan dari hasil penanaman modal tersebut (Eduardus, 2007). Seorang investor harus memahami dasar-dasar investasi untuk membuat keputusan investasi sehingga dapat meminimumkan risiko yang akan terjadi. Hal mendasar dalam proses keputusan investasi adalah pemahaman hubungan antara *return* yang diharapkan dan risiko suatu investasi. Hubungan risiko dan *return* yang diharapkan dari suatu investasi merupakan hubungan yang searah dan linear. Artinya, semakin besar risiko yang harus ditanggung, semakin besar pula *return* yang diharapkan (Eduardus Tandelilin, 2001, hal. 5).

Tahap-tahap keputusan investasi menurut Tandelilin (2001) yaitu :

1. **Penentuan tujuan investasi**

Tahap pertama dalam proses keputusan investasi adalah menentukan tujuan investasi yang akan dilakukan. Tujuan investasi untuk masing-masing investor bisa berbeda tergantung pada investor yang membuat keputusan tersebut.

2. **Penentuan kebijakan investasi**

Tahap penentuan kebijakan investasi dilakukan dengan penentuan keputusan alokasi aset. Keputusan ini menyangkut pendistribusian dana yang dimiliki pada berbagai kelas aset yang tersedia (saham, obligasi, bangunan maupun sekuritas luar negeri).

3. **Pemilihan strategi portofolio**

Strategi portofolio yang bisa dipilih yaitu strategi portofolio aktif dan strategi portofolio pasif. Strategi portofolio aktif meliputi kegiatan penggunaan informasi yang tersedia untuk mencari kombinasi portofolio yang lebih baik. Strategi portofolio pasif meliputi aktivitas investasi pada portofolio yang seiring dengan kinerja indeks pasar.

4. **Pemilihan aset**

Pemilihan aset yang dilakukan untuk membentuk suatu portofolio. Tahap ini memerlukan pengevaluasian setiap sekuritas yang ingin dimasukkan dalam portofolio untuk mencari kombinasi portofolio yang efisien oleh perusahaan.

Apabila kinerja keuangan perusahaan cukup bagus dan sudah mampu membayar kewajiban keuangan lainnya.

F. Portofolio

1. Pengertian Portofolio

Menurut Jogiyanto Hartono (2014) portofolio adalah suatu kumpulan sekuritas keuangan dalam suatu unit yang dipegang atau dibuat oleh seorang investor, perusahaan investasi, atau instansi keuangan. Tujuan dari pembentukan portofolio adalah untuk mendiversifikasi dana yang dimiliki investor pada beberapa sekuritas dengan harapan dapat memaksimalkan *return* dengan tingkat risiko yang minimal.

2. *Return* Portofolio

Return adalah hasil yang diperoleh dari suatu investasi. Hubungan positif antara *return* dan risiko portofolio dalam berinvestasi dikenal dengan *high risk – high return*, yang artinya semakin besar risiko yang diambil, maka semakin besar pula *return* yang diperoleh. Hal ini dimaksudkan bahwa harus ada pertambahan *return* sebagai kompensasi dari pertambahan risiko yang ditanggung oleh investor.

Return dapat berupa *realized return* yang sudah terjadi atau *expected return* yang belum terjadi dan diharapkan akan diperoleh pada masa mendatang (Jogiyanto Hartono, 2003).

Realized return portofolio dapat dirumuskan:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} w_i . R_i \qquad (2.\ 15)$$

keterangan:

R_p: *realized return* portofolio,

w_i: bobot dana investor pada sekuritas ke-*i*,

R_i: *realized return* dari sekuritas ke-*i*,

n : banyaknya sekuritas.

Return suatu sekuritas untuk dapat dihitung menggunakan rumus:

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}. \tag{2. 16}$$

keterangan:

P_t: harga sekuritas pada periode ke-*t*,

P_{t-1}: harga sekuritas pada periode ke-(*t*-1)

Expected return portofolio merupakan rata-rata tertimbang dari *expected return* masing-masing sekuritas dalam portofolio. *Expected return* portofolio dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i . E(R_i). \tag{2. 17}$$

keterangan:

$E(Rp)$: *expected return* dari portofolio,

w_i : bobot dana investor pada sekuritas ke-*i*,

$E(R_i)$: *expected return* dari sekuritas ke-*i*,

n : banyaknya sekuritas.

Nilai *expected return* pada persamaan (2.17) secara matematis dapat dibentuk dalam matriks adalah sebagai berikut:

$$E(Rp) = w_1(E(R_1)) + w_2(E(R_2)) + \cdots + w_n(E(R_n))$$

$$= \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(R_1) \\ E(R_2) \\ \vdots \\ E(R_n) \end{bmatrix} = \boldsymbol{w}' \boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}). \tag{2. 18}$$

keterangan:

$\boldsymbol{W}$: matriks bobot tiap sekuritas dalam portofolio,

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})$: matriks *expected return* tiap sekuritas dalam portofolio.

3. Risiko Portofolio

Risiko dalam portofolio dapat diartikan sebagai tingkat kerugian tidak terduga yang besarnya tergantung pada portofolio yang dibentuk. Risiko portofolio dapat diukur dengan besarnya varians dari nilai *return* saham-saham yang ada di dalam portofolio (Jogiyanto Hartono, 2003). Jika semakin besar nilai varians maka risiko yang ditanggung semakin tinggi. Banyaknya sekuritas dalam suatu portofolio dapat mempengaruhi nilai varians dari risiko. Untuk membentuk suatu portofolio diperlukan minimal dua sekuritas. Varians dengan dua sekuritas adalah sebagai berikut (Jogiyanto Hartono, 2003):

$$Var(Rp) = \sigma_P{}^2$$

$$= E[R_p - E(R_p)]^2$$

$$= E\left[\left(w_1R_1 + w_2R_2\right) - E\left(w_1R_1 + w_2R_2\right)\right]^2$$

$$= E\left[\left(w_1R_1 + w_2R_2\right) - E\left(w_1R_1\right) - E\left(w_2R_2\right)\right]^2$$

$$= E\left[\left(w_1R_1 + w_2R_2\right) - w_1E\left(R_1\right) - w_2E\left(R_2\right)\right]^2$$

$$= E\left[w_1\left(R_1 - E\left(R_1\right)\right) + w_2\left(R_2 - E\left(R_2\right)\right)\right]^2$$

$$= E\left[w_1^{\,2}\left(R_1 - E\left(R_1\right)\right)^2 + 2w_1w_2\left(R_1 - E\left(R_1\right)\right)\left(R_2 - E\left(R_2\right)\right) + w_2^{\,2}\left(R_2 - E\left(R_2\right)\right)^2\right]$$

$$= w_1^{\,2}E\left(\left(R_1 - E\left(R_1\right)\right)^2\right) + 2w_1w_2E\left(\left(R_1 - E\left(R_1\right)\right)\left(R_2 - E\left(R_2\right)\right)\right) + w_2^{\,2}E\left(\left(R_2 - E\left(R_2\right)\right)^2\right)$$

$$= w_1^{\,2}\sigma_1^{\,2} + 2w_1w_2\sigma_{12} + w_2^{\,2}\sigma_2^{\,2}. \qquad (2.\ 19)$$

Selanjutnya varians dengan *n* sekuritas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\sigma_P^{\,2} = \left[w_1^{\,2}\sigma_1^{\,2} + w_2^{\,2}\sigma_2^{\,2} + \cdots + w_n^{\,2}\sigma_n^{\,2}\right] + \left[2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_1w_3\sigma_{13} + \cdots + 2w_{n-1}w_n\sigma_{n-1n}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i^{\,2}\sigma_i^{\,2} + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{i\,j} \qquad (2.20)$$

Persamaan (2. 20) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks yaitu:

$$\sigma_p^2 = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{w}' \boldsymbol{\Sigma}\, \boldsymbol{w} \qquad (2.\ 21)$$

keterangan:

$\boldsymbol{\Sigma}$: matriks varians kovarians *n x n*,

$\boldsymbol{w}$: matriks bobot tiap sekuritas *n x* 1.

Risiko portofolio dihitung menggunakan rumus standar deviasi yang merupakan akar positif dari varians sebagai berikut:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} \quad (2.\ 22)$$

Risiko portofolio dapat dihitung dengan mensubstitusikan persamaan (2.21) pada rumus standar deviasi (2.22) sebagai berikut:

$$\sigma_p = \sqrt{\boldsymbol{w}'\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{w}} \quad (2.\ 23)$$

keterangan:

σ_p: standar deviasi portofolio.

G. Saham

Saham adalah surat berharga yang diperdagangkan di bursa efek berbentuk penyertaan modal yang menunjukkan kepemilikan perusahaan sehingga pemegang saham memiliki hak klaim atas *dividen* atau distribusi lain yang dilakukan perusahaan kepada pemegang saham lainnya. Menurut Suad Husnan (2005), Saham merupakan secarik kertas yang menunjukkan hak pemodal (yaitu pihak yang memiliki kertas tersebut) untuk memperoleh bagian dari prospek atau kekayaan organisasi yang menerbitkan sekuritas tersebut dan berbagai kondisi yang memungkinkan pemodal tersebut menjalankan haknya. Saham merupakan salah satu alternatif dari beberapa instrumen lainnya yang dapat dipilih untuk berinvestasi.

Pada dasarnya saham dapat digunakan untuk mencapai tiga tujuan investasi utama sebagaimana yang dikemukakan oleh Kertonegoro Senatnoe (2000) yaitu:

1. Sebagai gudang nilai, berarti investor mengutamakan keamanan prinsipal, sehingga akan dicari saham *blue chips* dan saham *non-spekulatif* lainnya.

2. Untuk pemupukan modal, berarti investor mengutamakan investasi jangka panjang, sehingga para investor akan mencari saham pertumbuhan untuk memperoleh *capital gain* atau saham sumber penghasilan untuk mendapat *dividen.*
3. Sebagai sumber penghasilan, berarti investor mengandalkan pada penerimaan *dividen* sehingga para investor akan mencari saham yang bermutu baik yaitu saham yang mempunyai tingkat pengembalian yang tinggi dan konsisten dalam membayar *dividen*.

H. Jakarta Islamic Index (JII)

PT Bursa Efek Indonesia (BEI) bekerjasama dengan PT Danareksa Invesment Management (DIM) meluncurkan indeks saham yang dibuat berdasarkan syariah Islam yaitu Jakarta Islamic Index (JII) pada tanggal 3 juli 2000. JII diharapkan dapat menjadi tolok ukur kinerja saham-saham yang berbasis syariah dan dapat mengembangkan pasar modal syariah. JII diperbarui setiap 6 bulan sekali, yaitu pada awal bulan Januari dan Juli.

Jakarta Islamic Index (JII) merupakan indeks yang berisi 30 saham perusahaan terdapat di lampiran 5 Halaman 124 dengan kriteria investasi yang telah dipenuhi berdasarkan syariah Islam (metode keuangan dalam Islam), dengan prosedur berikut ini:

1. Memilih kumpulan saham dengan jenis usaha utama yang tidak bertentangan dengan prinsip syariah dan sudah tercatat paling tidak 3 bulan terakhir, kecuali saham yang termasuk dalam 10 kapitalisasi terbesar.

2. Mempunyai rasio utang terhadap sekuritas tidak lebih dari 90% di laporan keuangan tahunan atau tengah tahun.
3. Dari yang masuk kriteria nomer 1 dan 2, dipilih 60 saham dengan rata-rata kapitalisasi pasar terbesar selama satu tahun terakhir. Kemudian dipilih 30 saham dengan urutan tingkat likuiditas rata-rata nilai perdagangan reguler selama satu tahun terakhir.

I. Model Mean Variance Markowitz

Harry Markowitz memperkenalkan model tentang pemilihan portofolio optimal pada tahun 1952 yang dikenal dengan model *mean variance* Markowitz (Markowitz, 1952). Menurut Eduardus Tandelilin (2001) Model *mean variance* Markowitz didasari oleh tiga asumsi yaitu:

1. Waktu yang digunakan hanya satu periode

I. Tidak ada biaya transaksi

J. Preferensi investor hanya berdasarkan pada *return* yang diharapkan dan risiko dari portofolio.

Berdasarkan asumsi ketiga, maka portofolio optimal menggunakan model *mean variance* Markowitz dapat dilakukan dengan mengoptimalkan portofolio efisien dengan preferensi investor yang dirumuskan dalam bentuk sebagai berikut:

a. Meminimumkan risiko untuk tingkat *return* tertentu:

$$Min\,Var(R_p) = \boldsymbol{w'\Sigma w} \text{ dengan } E(R_p) = \boldsymbol{w'\mu} \qquad (2.\,24)$$

b. Memaksimumkan *return* dengan tingkat risiko tertentu

$$Maks\ E(R_p) = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{\mu} \text{ dengan } Var(R_p) = \boldsymbol{w}'\,\boldsymbol{\Sigma w} \qquad (2.\ 25)$$

Bobot untuk masing-masing sekuritas dapat dinyatakan dengan $\boldsymbol{w}' = [w_1\ \dots\ w_n]$ dan $\boldsymbol{\mu}$ merupakan matriks *expected return* masing-masing sekuritas $n \times 1$.

Optimasi untuk memaksimumkan *return* dengan tingkat risiko tertentu dapat diselesaikan dengan menggunakan fungsi Lagrange L dan faktor pengali Lagrange λ sebagai berikut:

$$L = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{\mu} - \lambda(\boldsymbol{w}'\boldsymbol{\Sigma w}) \qquad (2.\ 26)$$

Turunan parsial L terhadap $\boldsymbol{w}$ adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial L}{\partial w} = \frac{\partial(\boldsymbol{w}'\boldsymbol{\mu} - \lambda(\boldsymbol{w}'\boldsymbol{\Sigma w})}{\partial \boldsymbol{w}}$$

$$= \boldsymbol{\mu} - 2\lambda\boldsymbol{\Sigma w} \qquad (2.\ 27)$$

Optimasi harus memenuhi syarat $\frac{\partial L}{\partial w} = 0$ sehingga:

$$\boldsymbol{\mu} - 2\lambda\boldsymbol{\Sigma w} = 0$$

$$\boldsymbol{\mu} - 2\lambda\boldsymbol{\Sigma w} = 0 \text{, karena } \lambda = \frac{\delta}{2}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \delta\Sigma\boldsymbol{w} \qquad (2.\ 28)$$

Dengan δ merupakan koefisien *risk aversion* (He & Litterman, 1999).

Rumus bobot portofolio model *mean variance* Markowitz untuk masing-masing sekuritas dalam pasar berdasarkan rumus (2.28) adalah sebagai berikut :

$$\boldsymbol{w_m} = (\boldsymbol{\delta}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\mu} \qquad (2.\ 29)$$

dengan $\boldsymbol{w_m}$ yaitu matriks bobot masing-masing sekuritas.

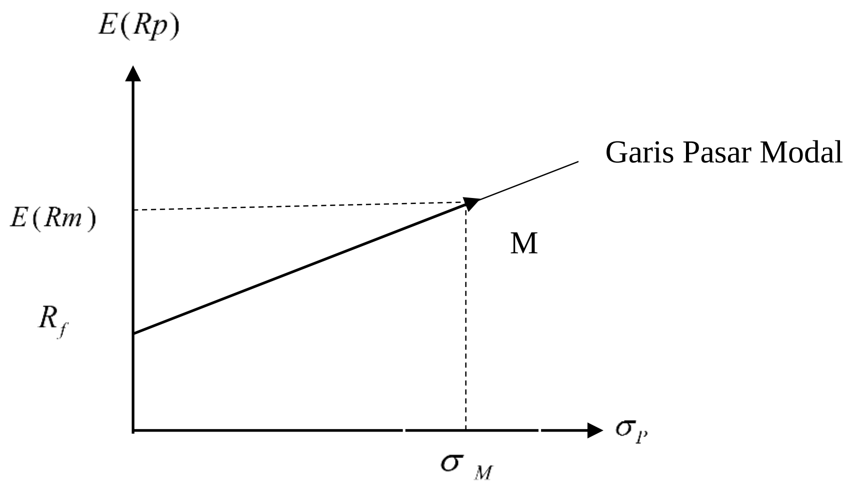
J. ***Capital Assets Pricing Model* (CAPM)**

William Sharpe, John Lintner, dan Jan Mossin antara tahun (1964-1966) memperkenalkan *Capital Assets Pricing* Model (CAPM) untuk pertama kali. CAPM merupakan suatu model yang bertujuan untuk memprediksi hubungan antar risiko dengan *return* yang diharapkan dari suatu sekuritas. Untuk memahami model CAPM, maka harus memahami asumsi-asumsi yang melandasi model ini walaupun dianggap tidak realistis. Oleh karena itu ada beberapa penyederhanaan asumsi supaya model CAPM lebih realistis. Berikut adalah hasil penyederhanaan asumsi-asumsi CAPM menurut Eduardus Tandelilin (2001) :

1. Semua investor mempunyai distribusi probabilitas tingkat *return* di masa depan yang sama, karena mereka mempunyai harapan yang hampir sama. Ini berarti para investor sepakat tentang *expected return*, standar deviasi, dan koefisien korelasi antar tingkat keuntungan.
2. Semua investor mempunyai satu periode waktu yang sama, misalnya satu tahun.
3. Semua investor dapat meminjamkan sejumlah dananya atau meminjam sejumlah dana dengan jumlah yang tidak terbatas pada tingkat *return* bebas risiko.
4. Tidak ada biaya transaksi.
5. Tidak terjadi inflasi.
6. Tidak ada pajak penghasilan bagi para investor.
7. Investor adalah penerima harga (*price-takers)*.

8. Pasar modal dalam kondisi ekuilibrium.

Jika semua asumsi tersebut dipenuhi, maka akan terbentuk kondisi pasar yang ekuilibrium. Hubungan *expected return* dan risiko dalam keadaan ekuilibrium pasar dapat digambarkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2. 1 *Capital Market Line*

Slope dalam *Capital Market Line* (CML) disimbolkan θ merupakan harga pasar dari risiko untuk portofolio. Besarnya *slope* CML mengindikasikan tambahan *return* yang disyaratkan pasar untuk setiap 1% kenaikan risiko portofolio. *Slope* CML dapat dihitung dengan menggunakan rumus:

$$\theta = \frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M}. \qquad (2.30)$$

Perubahan θ yang semakin kecil mengakibatkan risiko portofolio semakin besar dan sebaliknya. *Capital Market Line* (CML) menunjukan semua kemungkinan kombinasi portofolio efisien yang terdiri sekuritas-sekuritas berisiko dan sekuritas bebas risiko (Jogiyanto Hartono, 2003). *Capital Market Line* (CML) terbentuk sepanjang titik *expected return* sekuritas bebas risiko r_f sampai titik *M*. *Expected return* sekuritas bebas risiko didekati dengan tingkat *return* suku bunga Bank sentral, di Indonesia umumnya diambil dari tingkat *return* suku bunga Bank Indonesia. Portofolio CAPM diharapkan memberikan keuntungan lebih besar dibandingkan sekuritas yang di investasikan pada Bank (Jogiyanto Hartono, 2003). *Expected return* dalam portofolio CAPM berdasarkan Gambar 2. 1 dapat dirumuskan dengan:

$$E(R_p) = r_f + \frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M}\sigma_p . \tag{2. 31}$$

keterangan:

$E(R_p)$: *expected return* portofolio

r_f : *return* sekuritas bebas risiko

$E(R_M)$: *expected return* portofolio pasar

σ_M : standar deviasi dari *return* portofolio pasar

σ_p : standar deviasi dari *return* portofolio efisien yang ditentukan.

Persamaan (2.31) menggambarkan hubungan antara risiko dan *return* pada pasar yang seimbang untuk portofolio-portofolio yang efisien, sedangkan untuk menggambarkan hubungan risiko dan *return* dari sekuritas-sekuritas individual dapat dilihat dari kontribusi masing-masing sekuritas terhadap risiko portofolio pasar. Kontribusi masing-masing sekuritas terhadap risiko portofolio pasar tergantung dari besarnya kovarians *return* sekuritas tersebut terhadap portofolio pasar. Besarnya kontribusi risiko sekuritas terhadap risiko portofolio pasar yaitu:

$$\frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M}$$

dimana $\sigma_{i,M}$ adalah kovarians dari sekuritas ke-i dengan portofolio pasar. Dengan mensubstitusikan kontribusi sekuritas ke-i terhadap risiko portofolio pasar pada persamaan (2.31), maka dapat dihitung *expected return* CAPM untuk sekuritas *ke-i* adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E(r_i) &= r_f + \frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M} . \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M} \\ &= r_f + \frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M{}^2} . \sigma_{i,M} \\ &= r_f + \beta_i \left[E(R_M) - r_f \right] \end{aligned} \qquad (2.\ 32)$$

dengan $\beta_i = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M{}^2} = \frac{Cov(R_i, R_M)}{Var(R_M)}$ sebagai pengukur tingkat risiko dari suatu sekuritas terhadap risiko portofolio pasar dan $E(r_i)$ sebagai *expected return* CAPM masing-masing sekuritas. *Expected return* CAPM untuk suatu sekuritas dapat dinyatakan dengan persamaan sebagai berikut:

$$E(r_i) = r_f + \beta_i \left[E(R_M) - r_f \right]. \qquad (2.\ 33)$$

Pasar dalam model ini yaitu Indeks Harga Saham Gabungan (IHSG) yang merupakan penggambaran secara keseluruhan keadaan harga-harga saham. Indeks harga saham gabungan (IHSG) disebut juga *Jakarta Composite Index (JCI)* yang merupakan salah satu indeks pasar saham yang digunakan oleh Bursa Efek Indonesia (BEI).

K. Himpunan *Fuzzy*

1. Himpunan *Fuzzy*

Himpunan *fuzzy* merupakan perluasan dari himpunan klasik dimana keberadaan suatu elemen tidak lagi bernilai benar atau salah, tetapi akan selalu bernilai benar jika mempunyai derajat keanggotaan yang berada dalam rentang [0,1] (Klir dan Yuan, 1995). Himpunan klasik (*crisp set*) adalah himpunan yang membedakan anggota dan bukan anggota dengan batasan yang jelas (Ross, 2010). Pada himpunan klasik nilai keanggotaan suatu elemen x dalam himpunan A, memiliki 2 kemungkinan (Sri Kusumadewi dan Sri Hartati, 2010) yaitu:

1. Satu (1), yang berarti bahwa suatu elemen menjadi anggota dalam suatu himpunan,
2. Nol (0), yang berarti bahwa suatu elemen tidak menjadi suatu anggota dalam suatu himpunan

Adanya 2 kemungkinan tersebut menjelaskan bahwa cara pengambilan keputusan pada himpunan klasik dinilai kurang bijaksana untuk menyatakan hal-hal yang bersifat kontinu. Nilai keanggotaannya menunjukkan bahwa semesta pembicaraan tidak berada pada 0 atau 1, namun juga nilai yang terletak diantaranya. Mengakibatkan nilai kebenaran suatu item tidak bernilai benar atau salah (Prabowo Pudjo W dan Hardayanto, 2012). Jangkauan fungsi karakteristik tersebut memuat bilangan pada interval [0 1] sehingga didapat konsep himpunan *fuzzy* yang menjadi dasar dari logika *fuzzy*.

Antara keanggotaan *fuzzy* dengan probabilitas, keduanya memiliki nilai pada interval [0,1], namun interprestasi nilainya sangat berbeda antara kedua kasus tersebut. Keanggotaan *fuzzy* memberikan suatu ukuran terhadap pendapat atau keputusan, sedangkan probabilitas mengindikasikan proporsi terhadap keseringan suatu hasil bernilai benar dalam jangka panjang.

Definisi 2.1 (Zimmermann, 1987) :

Suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dalam himpunan semesta X dinyatakan sebagai himpunan pasangan berurutan,

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\} \tag{2.34}$$

dengan $\mu_{\tilde{A}}(x)$ adalah derajat keanggotaan x di A yang terletak pada interval [0,1].

Contoh 2.12 Misalkan sedang adalah himpunan *fuzzy* prediksi *views* investor terhadap *return* saham dan *U* adalah himpunan universal *views* investor = [0, 0.3], maka sedang dapat dinotasikan sebagai:

Sedang $=\{(x, \mu_{\text{sedang}}(x) | x \in U\}$, dengan

$$\mu_{sedang}[x] = \begin{cases} 0 & ; \quad x \geq 0.3 \text{ atau } x \leq 0 \\ \dfrac{(x)}{(0.1)} & ; \quad 0 \leq x \leq 0.1 \\ 1 & ; \quad 0.1 \leq x \leq 0.2 \\ \dfrac{(0.3 - x)}{(0.1)} & ; \quad 0.2 \leq x \leq 0.3 \end{cases}$$

Ada beberapa hal yang perlu diketahui dalam sistem *fuzzy*, yaitu :

a. Variabel *Fuzzy*

   Variabel *fuzzy* merupakan variabel yang akan dibahas dalam suatu sistem *fuzzy*. Contoh : *views* (opini) investor, umur, permintaan, persediaan, produksi dan sebagainya.

b. Himpunan *Fuzzy*

   Merupakan suatu kelompok yang mewakili suatu kondisi atau keadaan tertentu dalam suatu sistem *fuzzy*. Contoh: Variabel prediksi *views* (opini) investor terhadap *return* saham , terbagi menjadi tiga himpunan *fuzzy*, yaitu : Rendah, Sedang, dan Tinggi. Variabel suhu, terbagi menjadi lima himpunan *fuzzy*, yaitu: Dingin, Sejuk, Normal, Hangat, dan Panas.

   Himpunan *fuzzy* memiliki dua atribut, yaitu:

a. Linguistik, yaitu penamaan kelompok yang mewakili suatu keadaan atau kondisi tertentu dengan menggunakan bahasa alami, seperti: Rendah, Sedang, dan Tinggi.

b. Numerik, yaitu suatu nilai atau angka yang menunjukkan ukuran dari suatu variabel, seperti : 25, 40, 35, 50 dan sebagainya.

2. Bilangan *Fuzzy*

Definisi 29.1 (Klir dan Yuan, 1995) :

Terdapat $\tilde{A}$ suatu himpunan fuzzy pada $\mathbb{R}$. $\tilde{A}$ merupakan suatu bilangan fuzzy jika memenuhi sifat-sifat:

a. *$\tilde{A}$ merupakan himpunan fuzzy normal*

Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ adalah normal jika terdapat $x \in \mathbb{R}$ sehingga $\mu_{\tilde{A}} = 1$

b. *$\tilde{A}$ memiliki batas atas yang terbatas.*

c. *Semua $\alpha - cut\ \tilde{A}$ mendekati interval $\mathbb{R}$.*

Fungsi keanggotaan bilangan *fuzzy* trapesium $\tilde{A}$ adalah:

$$\mu_{\tilde{A}}[x] = \begin{cases} 0 & ; \quad x \le a \; atau \; x > d \\ \frac{(x-a)}{(b-a)} & ; \quad a \le x \le b \\ 1 & ; \quad b \le x \le c \\ \frac{(d-x)}{(d-c)} & ; \quad c \le x \le d \end{cases} \tag{2.35}$$

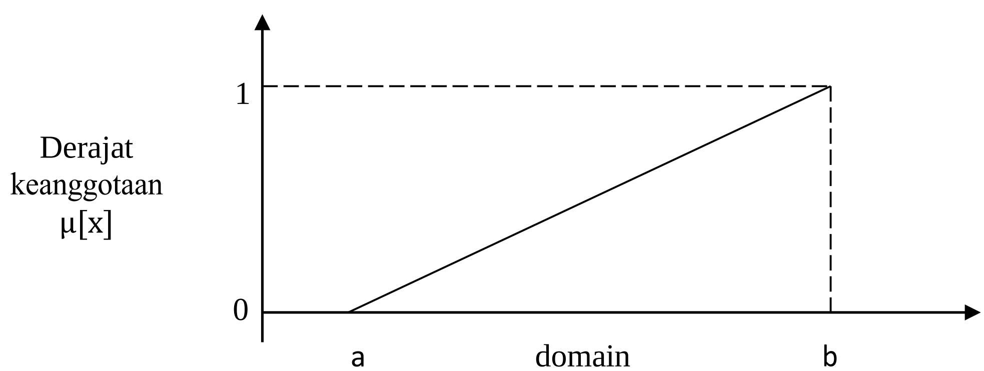
3. Fungsi Keanggotaan

Fungsi keanggotaan adalah suatu kurva yang menunjukkan pemetaan titik-titik *input* data kedalam nilai keanggotaannya (sering juga disebut dengan derajat keanggotaan) yang memiliki interval antara 0 sampai 1. Salah satu cara yang dapat digunakan untuk mendapatkan nilai keanggotaan adalah dengan melalui pendekatan fungsi. Apabila U menyatakan himpunan universal dan $\tilde{A}$ adalah himpunan fungsi *fuzzy* dalam U, maka $\tilde{A}$ dapat dinyatakan sebagai pasangan terurut (Wang, 1997). Ada beberapa fungsi yang bisa digunakan.

a. Representasi Linear

Pada representasi linear, pemetaan input ke derajat keanggotaannya digambarkan sebagai suatu garis lurus. Bentuk ini paling sederhana dan menjadi pilihan yang baik untuk mendekati suatu konsep yang kurang jelas.

Ada 2 keadaan himpunan *fuzzy* yang *linear*. Pertama, kenaikan himpunan dimulai pada nilai domain yang memiliki derajat keanggotaan nol (0) bergerak ke kanan menuju ke nilai domain yang memiliki derajat keanggotaan lebih tinggi (Kusumadewi S, Purnomo H, 2010). Seperti terlihat pada gambar



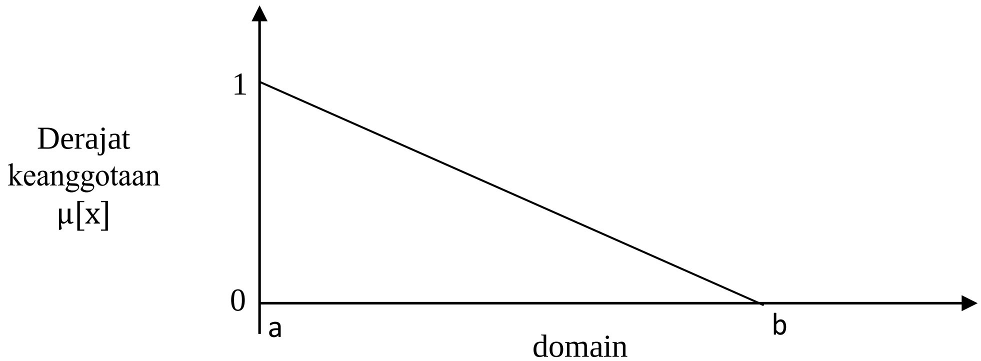
Gambar 2. 2 Representasi himpunan fuzzy linear

Fungsi Keanggotaan :

$$\mu[x] = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq a \\ \dfrac{x - a}{b - a} & ; \; a \leq x \leq b \\ 1 & ; \quad x \geq b \end{cases}$$

Fungsi keanggotaan yang kedua merupakan kebalikan dari yang pertama. Garis lurus dimulai dari nilai domain dengan derajat keanggotaan tertinggi pada sisi kiri, kemudian bergerak menurun ke nilai domain yang memiliki derajat keanggotaan lebih rendah.

Seperti terlihat pada gambar



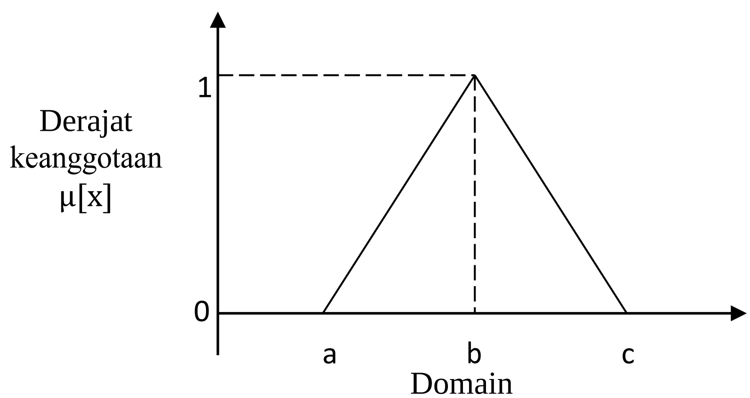
Gambar 2. 3Representasi himpunan fuzzy linear

Fungsi keanggotaan:

$$\mu[x] = \begin{cases} \dfrac{b-x}{b-a}; & a \leq x \leq b \\ 0; & x \geq b \end{cases}$$

b. Representasi kurva segitiga

Kurva segitiga pada dasarnya merupakan gabungan antara 2 garis (*linear*). Seperti terlihat pada gambar



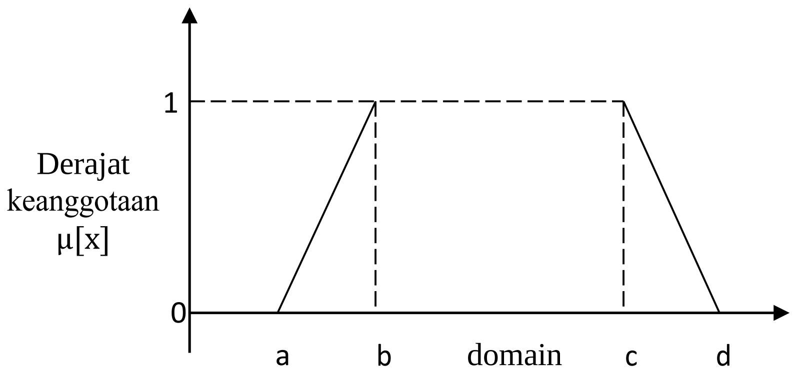
Gambar 2. 4 Representasi himpunan fuzzy segitiga

Fungsi Keanggotaan:

$$\mu[x] = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq a \text{ atau } x \geq c \\ \dfrac{(x-a)}{(b-a)} & ; \quad a \leq x \leq b \\ \dfrac{(c-x)}{(c-b)} & ; \quad b < x < c \end{cases}$$

c. Representasi kurva trapesium

Kurva trapesium pada dasarnya seperti bentuk segitiga, hanya saja ada titik yang memiliki nilai keanggotaan 1. Seperti terlihat pada gambar 2.5.



Gambar 2. 5 Representasi himpunan fuzzy trapesiun

Fungsi keanggotaan:

$$\mu[x] = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq a \text{ atau } x \geq d \\ \dfrac{(x-a)}{(b-a)} & ; \quad a \leq x \leq b \\ 1 & ; \quad b \leq x \leq c \\ \dfrac{(d-x)}{(d-c)} & ; \quad c \leq x \leq d \end{cases}$$

4. Operasi pada Himpunan *Fuzzy*

Pada subbab ini akan dibahas operasi-operasi dasar dalam himpunan samar lebih dari satu. Untuk selanjutnya akan dimisalkan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ merupakan himpunan samar yang terdefinisi pada semesta *U*.

Misalkan himpunan $\tilde{A}$ dan $\tilde{A}$ merupakan dua himpunan *fuzzy* pada semesta pembicaraan U dengan fungsi keangotaan $\mu\tilde{A}$ (x) dan μ_B(x) untuk setiap x ϵ

X. Nilai keanggotaan sebagai hasil dari operasi himpunan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ disebut juga sebagai *fire strength* atau *α-cut*.

Adapun operasi-operasi dasar himpunan *fuzzy* terdiri dari :

1. Penggabungan (*Union*). Gabungan dua himpunan *fuzzy* $\forall$ $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah himpunan *fuzzy* $\tilde{C}$ yang didefinisikan sebagai :

$$\tilde{C} = (\tilde{A} \cup \tilde{B})(t)$$

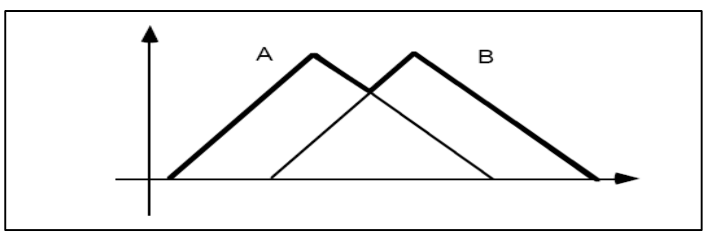
$$= \text{maks}\{\tilde{A}(t), \tilde{B}(t)\}$$

$$= \tilde{A}(t) \vee \tilde{B}(t), \forall t \in X . \qquad (2.36)$$

C memiliki derajat keanggotaan :

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \text{maks}\ (\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$$

$$= (\mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x)) \quad \text{untuk semua } x \in X \qquad (2.37)$$



Gambar 2. 6 Operasi Union *Himpunan Bagian A dan B*

2. Irisan (*Intersection*). Irisan dua himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah himpunan *fuzzy* $\tilde{C}$ dan didefinisikan sebagai :

$$\tilde{C} = (\tilde{A} \cap \tilde{B})(t)$$

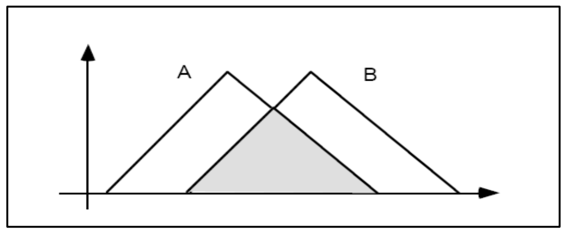
$$= \min\{\tilde{A}(t), \tilde{B}(t)\}$$

$$= \tilde{A}(t) \wedge \tilde{B}(t), \forall t \in X. \qquad (2.38)$$

Himpunan *fuzzy* $\tilde{C}$ memiliki derajat keanggotaan :

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \min\ (\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$$

$$= (\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x)) \qquad \text{untuk semua } x \epsilon X \qquad (2.\ 39)$$



Gambar 2. 7 Operasi Intersection *Himpunan Bagian A dan B*

3. Ingkaran (*Complement*). Komplemen himpunan bagian $\tilde{A}$ diberi tanda $-\tilde{A}$ (Bukan $\tilde{A}$) dan didefinisikan sebagai (-$\tilde{A}$)(t) = 1–$\tilde{A}$ (t). memiliki derajat keanggotaan

$$\mu_{-\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x). \qquad (2.\ 40)$$

5. $\boldsymbol{\alpha - Cuts}$ pada Himpunan *Fuzzy*

$\alpha - cut$ adalah suatu himpunan klasik yang membatasi derajat keanggotaan lebih dari atau sama dengan sebuah nilai α tertentu pada interval [0,1]. Apabila pada suatu himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ dibatasi oleh nilai α maka didapatkan himpunan bagian klasik dari himpunan universal *X*, maka $\tilde{A}_a$ didefinisikan sebagai (Klir, 1997) :

$$\tilde{A}_a = \{x \in X | A(x) \geq \alpha\} \qquad (2.\ 41)$$

untuk nilai α ∈ [0,1].

Suatu cara lain untuk menyatakan suatu himpunan *fuzzy*, yaitu dengan menggunakan alpha-cuts. Terdapat koefisien *fuzzy* yang berupa himpunan *fuzzy* trapesium $\tilde{V}$ yaitu ($v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$, $v^{(4)}$) dengan fungsi keanggotaan (Lee & Li, 1993) :

$$\mu_{\tilde{V}}[v] = \begin{cases} 0 & ; \quad v \leq v^{(1)}\ atau\ v \geq v^{(4)} \\ \frac{(v-v^{(1)})}{(v^{(2)}-v^{(1)})} & ; \quad v^{(1)} \leq v \leq v^{(2)} \\ 1 & ; \quad v^{(2)} \leq v \leq v^{(3)} \\ \frac{(v^{(4)}-v)}{(v^{(4)}-v^{(3)})} & ; \quad v^{(3)} \leq v \leq v^{(4)} \end{cases} \quad (2.\ 42)$$

α-cut untuk $\tilde{V}$ dapat dinyatakan dengan interval sebagai berikut:

$$(\tilde{V})_a = \left[(\tilde{V})_a^L, (\tilde{V})_a^U\right] = [v^{(1)} + (v^{(2)} - v^{(1)})a, v^{(4)} - (v^{(4)} - v^{(3)})a] \quad (2.43)$$

dengan $(\tilde{V})_a^L$ adalah batas bawah $(\tilde{V})_a$ dank $(\tilde{V})_a^U$ adalah batas atas dari $(\tilde{V})_a$.

Contoh ilustrasi:

Misalkan $\tilde{V}$ adalah bilangan fuzzy trapesium yaitu $\tilde{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}$, untuk α = 0.1

maka didapatkan *α-cut* $(\tilde{V})_{0.1}$ adalah

$$(\tilde{V})_{0.1} = \left[(\tilde{V})_{0.1}^L, (\tilde{V})_{0.1}^U\right] = [0 + (0.1 - 0)0.1, 0.3 - (0.3 - 0.2)a]$$

$$=[0.01,\ 0.29]$$

Artinya *x* yang derajat keanggotaannya ≥ 0.1 adalah semua *x* yang berada pada interval [0.01, 0.29]

L. Fuzzy Compromise Programming

1. Fuzzy Linear Programming

Fuzzzy Linear Programmming (FLP) adalah program linear yang diterapkan dalam lingkungan *fuzzy*, dimana akan dicari nilai dari fungsi objektif yang akan dioptimalkan sedemikian sehingga tunduk pada kendala-kendala yang dimodelkan menggunakan himpunan *fuzzy*. Dalam model FLP ini fungsi objektif dan pertidaksamaan kendala memiliki parameter *fuzzy*. Model FLP dapat direpresentasikan dengan rumusan sebagai berikut (Sri Kusumadewi dan Hari Purnomo, 2010)

$$Maks\ atau\ Min: Z \gtrsim\ C^T X$$

$$Kendala : AX \gtrsim\ B$$

$$X \geq 0 \tag{2. 44}$$

Tanda " $\lesssim$ " merupakan bentuk *fuzzy* dari " $<$ " yang diinterpretasikan sebagai "pada dasarnya kurang dari atau sama dengan**"** dan tanda " $\gtrsim$ " merupakan bentuk *fuzzy* dari " $>$ " yang diinterpretasikan sebagai "pada dasarnya lebih dari atau sama dengan" .

Persamaan (2.35) adalah bentuk umum dari FLP dengan nilai ruas kanan yang bernilai *fuzzy*. Tiap-tiap kendala akan direpresentasikan sebagai sebuah himpunan *fuzzy* dengan fungsi keanggotaan pada himpunan ke-i adalah $\mu i[Bix]$.

Berikut adalah contoh penyelesaian fuzzy linear programming kasus minimasi :

Tentukan x sedemikian hingga :

$$C^T X \lesssim \text{z}$$

$$\text{Ax} \gtrsim b \tag{2.45}$$

$$\text{x} \gtrsim 0$$

kemudian persamaan 2.45 dapat ditulis kembali menjadi :

Bx $\lesssim$ d

x $\gtrsim$ 0 (2.46)

dengan

B = $\begin{pmatrix} c \\ -A \end{pmatrix}$; dan

B = $\begin{pmatrix} z \\ -b \end{pmatrix}$;

Tiap – tiap baris / batasan (0,1,2, … , m) diwakilkan oleh sebuah himpunan *fuzzy* dengan fungsi keanggotaan pada himpunan ke I adalah $\mu i[Bix]$.

Untuk mendapatkan solusi yang terbaik yaitu solusi dengan nilai keanggotaan yang lebih besar maka solusinya adalah :

$$Maks\ \mu_D[Bx] = maks\ \min\{\mu_i\ [B_i x]\} \quad (2.47)$$

2. Multiobjective Optimization

Multiobjective linear programming adalah metode optimasi dengan beberapa fungsi tujuan yang tunduk pada beberapa batasan. Solusi permasalahan ini diperoleh seperti penyelesaian optimasi dengan 1 fungsi tujuan (Sri Kusumadewi dan Hari Purnomo, 2013).

Contoh :

$maks\ Z_0 = 5\ X_1 + 10\ X_2 + 12X_3$

$min\ Z_1 \ = \ X_1 + \ 2\ X_2 + 2X_3$ (2.48)

dengan kendala,

$2\ X_1 + 8\ X_2 + 4X_3 \ \leq 100$

$3\,X_1 + \quad X_2 + 4X_3 \;\leq\; 50$

$4\,X_1 \qquad\qquad + 2X_3 \leq 100$

$X_{\,1}, X_2, X_3 \leq 100$

Apabila diselesaikan satu persatu maka:

Kasus maksimasi,

$$maks\; Z_0 = 5\,X_1 + 10\,X_2 + 12X_3 \tag{2.49}$$

Dengan kendala,

$2\,X_1 + 8\,X_2 + 4X_3 \;\leq 100$

$3\,X_1 + \quad X_2 + 4X_3 \;\leq\; 50$

$4\,X_1 \qquad\qquad + 2X_3 \leq 100$

$X_{\,1}, X_2, X_3 \leq 100$

Akan diperoleh:

$X_1 = \; 0$

$X_2 = 7.1429$

$X_3 = 10.7143$

$Z_0 = 200$

$Z_1 = 35.7144$

Kasus minimasi,

$min\; Z_1 \quad = \quad X_1 \; + \;\; 2\,X_2 + 2X_3$

Dengan kendala,

$2\,X_1 + 8\,X_2 + 4X_3 \;\leq 100$

$3\,X_1 + \quad X_2 + 4X_3 \;\leq\; 50$

$4\,X_1 \qquad\qquad + 2X_3 \leq 100$

$X_{\,1}, X_2, X_3 \leq 100$

Akan diperoleh:

$X_1 = 0$

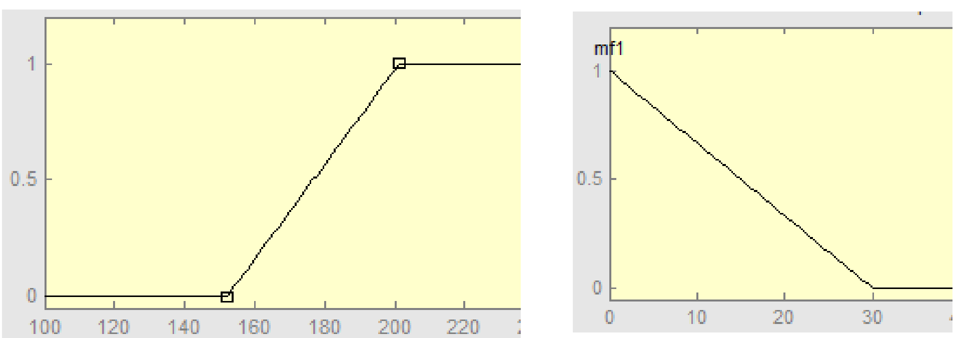
$X_2 = 0$

$X_3 = 0$

$Z_0 = 0$

$Z_1 = 0$

Fungsi keanggotaan dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 2.8 Fungsi Keanggotaan Program Linear Tujuan Ganda

$$Maks\,:\;\lambda \tag{2.50}$$

Dengan kendala,

$\lambda \leq 0.1\,X_1 + 0.2\,X_2 + 0.24X_3 - 3$

$\lambda \leq -0.33\,X_1 - 0.66\,X_2 - 0.660.24X_3 + 1$

$2\,X_1 + 8\,X_2 + 4X_3 \;\leq 100$

$3\,X_1 + \quad X_2 + 4X_3 \ \leq\ 50$

$4\,X_1 \qquad\quad + 2X_3 \leq 100$

$X_{\,1}, X_2, X_3 \leq 100$

Bentuk Program Linear dapat disusun menjadi:

$Maks:\ \lambda$

Dengan kendala,

$0.1\,X_1 + \ 0.2\,X_2 + \ 0.24X_3 - \lambda \geq 3$

$0.33\,X_1 + 0.66\,X_2 + 0.66X_3 + \lambda \leq 1$

$2\,X_1 + \ 8\,X_2 + \ 4X_3 \ \leq 100$

$3\,X_1 + \ X_2 + \ 4X_3 \ \leq\ 50$

$4\,X_1 \qquad + 2X_3 \ \leq 100$

$X_{\,1}, X_2, X_3 \ \leq 100$

Akan diperoleh hasil akhir:

$\lambda = 0.1293$

$X_1 = 0$

$X_2 = 0.9235$

$X_3 = 12.2691$

$Z_0 = 156.4642$

$Z_1 = 26.3852$

Dengan derajat keanggotaan:

$\mu_{z0}[x] = \frac{1156.4642-150}{50} = 0.1293$

$\mu_{z0}[x] = \frac{30-26.3852}{30} = 0.1205$

3. ***Compromise Programming***

Compromise Programming adalah cara yang digunakan untuk menentukan solusi kompromi untuk menentukan keputusan pada permasalahan tujuan ganda. Adapun hal yang diperhatikan dalam menemukan solusi kompromi adalah meminimumkan jarak antara solusi ideal dengan solusi yang diinginkan. Untuk lebih jelasnya, berikut contoh permasalahan program linear tujuan ganda (M.Zeleny, 1982) :

maks $Z(x) = \left(Z_{1,} Z_2, \dots, Z_{l,}\right)^T = (c_1x, c_2x, \dots, c_lx)^T$

min $W(x) = \left(W_{1,} W_2, \dots, W_{l,}\right)^T = (c_1x, c_2x, \dots, c_sx)^T$ (2.51)

Dengan kendala,

$Ax * b,$

$x \geq 0,$

Dimana $c_k,\ k = 1, 2, \dots, l,\ \ c_s, s = 1, 2, \dots, l,$ dan x adalah vekktor berdimensi n, b adalah vector berdimensi m. $\tilde{A}$ adalah matriks berukuran *m x m* dan * menunjukkan operator $\leq, =, atau\ \geq$.

Selanjutnya akan didapatkan solusi ideal dan solusi anti ideal dari permasalaahan diatas. Solusi ideal adalah solusi yang didapatkan dengan menyelesaikan setiap fungsi tujuan secara terpisah dengan kendala yang ada. Solusi ideal pada permasalahan diatas dapat ditulis menjadi:

$I^* = (Z_1^*, Z_2^*, \dots, Z_l^*; W_1^*, W_2^*, \dots, W_r^*)$ (2.52)

Solusi anti ideal permasalahan tersebut adalah dengan mengubah fungsi tujuan Z menjadi minimum dan fungsi tujuan W menjadi maksimum. Kemudian setiap fungsi tujuan diselesaikan dengan kendala yang ada, sehingga didapatkan solusi anti ideal yang ditulis sebagai berikut:

$$I^{-} = (Z_1^{-}, Z_2^{-}, \dots, Z_l^{-}; W_1^{-}, W_2^{-}, \dots, W_r^{-}) \tag{2.53}$$

Untuk mendapatkan solusi kompromi adalah dengan meminimumkan jarak berikut ini:

$$D_p = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k^p \left[\frac{Z_k^* - Z_k(x)}{Z_k^* - Z_k^-}\right]^p + \sum_{s=1}^{r} \alpha_k^p \left[\frac{W_s(x) - W_s^*}{W_s^- - W_s^*}\right]^p \tag{2.54}$$

Keterangan,

$p =$ parameter jarak; $1 \leq p \leq \infty$

a_k, a_s=bobot pada setiap fungsi objektif ; $a_k \geq 0, a_s \geq 0$

$\sum_{k=1}^{l} a_k + \sum_{s=1}^{r} a_s = 1$

Dengan uji coba, nilai p yang paling berpengaruh adalah *1,2, dan* ∞. Ketik $p \rightarrow \infty$ persamaan 2.54 menjadi:

$$D_\infty = maks_{k,s} \left[a_k \frac{Z_k^* - Z_k(x)}{Z_k^* - Z_k^-}, a_s \frac{W_s(x) - W_s^*}{W_s^- - W_s^*}\right] \tag{2.55}$$

Oleh karena itu, untuk $p = \infty$ permasalahannya menjadi

$$min: \ D_\infty \tag{2.56}$$

Dengan kendala,

$D_\infty \geq a_k \left[\frac{Z_k^* - Z_k(x)}{Z_k^* - Z_k^-}\right], k = 1, 2, \dots, l,$

$D_\infty \geq a_s \left[\frac{W_s(x) - W_s^*}{W_s^- - W_s^*}\right], s = 1, 2, \dots, r,$

$Ax * b$

$x \geq 0,$

4. Fuzzy Compromise Programming

Salah satu cara untuk menyelesaikan program linear tujuan ganda adalah dengan menggunakan konsep himpunan *fuzzy* (Zimmerman, 1987):

maks $Z(x) = (c_1x, c_2x, \dots, c_lx)^T$

min $W(x) = (\ c_1x, c_2x, \dots, c_sx)^T$ (2.57)

Dengan kendala,

$Ax * b,$

$x \geq 0,$

Fungsi keanggotaan untuk fungsi objektif adalah :

$\mu_k(Z_k) = \frac{Z_k(x) - Z_k^-}{Z_k^* - Z_k^-}, k = 1, 2, 3, \dots, l$

$\mu_s(W_k) = \frac{W_s^- - W_s(x)}{W_s^- - W_s^*}, s = 1, 2, 3, \dots, r$ (2.58)

Diketahui Z_k^*, W_s^* dan Z_k^-, W_s^- adalah solusi ideal dan solusi anti ideal permasalahan 2.57 diatas. Dengan menggunakan operator “min” permasalahan program linear diatas menjadi:

$maks\ \lambda$ (2.59)

Dengan kendala

$\lambda \leq \frac{Z_k(x) - Z_k^-}{Z_k^* - Z_k^-}\ , k = 1, 2, \dots, l,$

$$\lambda \leq \frac{W_s^- - W_s(x)}{W_s^- - W_s^*} \ , s = 1, 2, \dots, r,$$

$$x \ \in X$$

$$\lambda \ = min_i \, \mu_i(x) = min_{k,s}(\mu_k(Z_k), \mu_s(W_k))$$

Akan tetapi, persamaan 2.59 Yang didapatkan dari operator "min" tidak menghasilkan hasil yang baik. Hasil yang didapatkan pada operator "min" tersebut menggambarkan hasil yang terburuk dan tidak dapat mengkompensasi hasil yang lsangat baik. Oleh karena itu, *compensatory* operator digunakan untuk mendapatkan solusi kompromi yang optimal. Untuk menghindari hal-hal buruk yang dapat terjadi, digunakan rata-rata aritmetik operator. Sehingga persamaan (2.59) menjadi :

$$maks \ \tilde{\lambda} = \frac{1}{l+r} \left(\sum_{k=1}^{l} \lambda_k + \sum_{s=1}^{r} \lambda_s \right) \qquad (2.60)$$

dengan kendala

$$\lambda_k \leq \frac{Z_k(x) - Z_k^-}{Z_k^* - Z_k^-} \ , k = 1, 2, \dots, l,$$

$$\lambda_s \leq \frac{W_s^- - W_s(x)}{W_s^- - W_s^*} \ , s = 1, 2, \dots, r,$$

$$x \ \in X$$

5. Fuzzy Linear Programming Tujuan Ganda

Berikut adalah cara untuk menyelesaikan pemrograman linear *fuzzy* tujuan ganda dengan parameter *fuzzy*. Berikut adalah contoh penyelesaian masalah pemrograman linear tujuan ganda:

$$\text{maks} \, \tilde{Z}(x) = (\tilde{c}_1 x, \tilde{c}_2 x, \dots, \tilde{c}_l x)$$

$$\text{min} \, \widetilde{W}(x) = (\tilde{c}'_1 x, \tilde{c}'_2 x, \dots, \tilde{c}'_m x) \qquad (2.61)$$

dengan kendala

$x \epsilon X = \{x \in \mathbb{R}^n \middle| \tilde{A}x * \tilde{b}, x \geq 0\}$

Dimana $\tilde{c}_k, \tilde{c}'_s$ adalah vektor n-dimensi yang mewakili fungsi tujuan permasalahan maksimasi dan minimasi, $\tilde{b}$ adalah vector m-dimensi, $\tilde{A}$ adalah matriks m x n dan elementnya adalah bilangan *fuzzy*. Tanda bintang menunjukkan bahwa terdapat dua kemungkinan kendala yaitu kendala ≤ atau ≥. $(x)_\beta^\alpha$ adalah solusi dari permasalahan (2.61) dengan α ∈ [0,1] untuk menyatakan "tingkat kemungkinan" artinya suatu tingkat dimana semua koefisien *fuzzy* yang memungkinkan, dan γ ∈ [0,1] menyatakan "tingkat kompromi yang memenuhi semua tujuan *fuzzy*" yang sesuai pada tingkat kemungkinan α. Dengan aturan konjungsi cara Bellman - Zadeh (1970), parameter *fuzzy* α dapat dinyatakan sebagai

$$\alpha = min_{k,s,i,j}\{\mu_{\tilde{c}_{kj}}, \mu_{\widetilde{c'}_{sj}}, \mu_{\tilde{a}_{ij}}, \mu_{\tilde{b}_i} | k = 1, \dots, l, s = 1, \dots, r, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\} \qquad (2.62)$$

Persamaan (2.62) berarti bahwa kelayakan seluruh sistem adalah sama dengan kemungkinan komponen yang paling mungkin pada suatu sistem atau ekuivalen dengan komponen minimum yang mungkin. Dengan kata lain, semakin tinggi kemungkinan koefisien, semakin kuat keterbatasan pada koefisien. Untuk mendapatkan solusi optimal pada tingkat α tertentu yaitu saat persamaan (2.62) berlaku:

$$\mu_{\tilde{c}_{kj}} = \mu_{\widetilde{c'}_{sj,}} = \mu_{\tilde{a}_{ij}} = \mu_{\tilde{b}_i} = \alpha \qquad (2.63)$$

$\alpha - cut$ bilangan *fuzzy* $\tilde{V}$ yaitu :

$$\tilde{V}_\alpha = [\tilde{V}_\alpha^L, \tilde{V}_\alpha^U] \qquad (2.64)$$

Berdasarkan (Lee dan Li, 1993) saat *a* diketahui maka untuk menyelesaikan permalasahan 2.61 pada fungsi tujuan $\tilde{Z}_k$ yang akan dimaksimumkan dan $\widetilde{W}_s$ akan diminimumkan disubstitusikan oleh batas atas *a-cut* untuk kasus maksimasi dan batas bawah *a-cut* untuk kasus minimasi yan didapatkan melalui persamaan 2.43, yaitu :

$$\left(\tilde{Z}_k\right)_\alpha^U = \sum_{j=1}^n (\tilde{c}_{kj})_\alpha^U \,.\, x_j, k = 1, \ldots, l,$$

$$\left(\widetilde{W}_s\right)_\alpha^L = \sum_{j=1}^n (\tilde{c}'_{sj})_\alpha^L \,.\, x_j, s = 1, \ldots, r. \tag{2.65}$$

Berdasarkan 2.65 maka persamaan 2.61 dapat dinyatakan sebaga (Lee dan Li, 1993):

$$maks \left(\tilde{Z}_k\right)_\alpha^U = \sum_{j=1}^n (\tilde{c}_{kj})_\alpha^U \,.\, x_j, k = 1, \ldots, l,$$

$$min \left(\widetilde{W}_s\right)_\alpha^L = \sum_{j=1}^n (\tilde{c}'_{sj})_\alpha^L \,.\, x_j, s = 1, \ldots, r. \tag{2.66}$$

dengan kendala

$$x \epsilon X = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \tilde{A}x * \tilde{b}, x \geq 0\right\}$$

Persamaan tujuan ganda 2.66 ekuivalen dengan persamaan satu tujuan 2.67 berikut :

$\max \gamma$

dengan kendala

$$\gamma \leq \mu_k^\alpha(\tilde{Z}_k)$$

$$\gamma \leq \mu_s^\alpha\left(\widetilde{W}_s\right) \tag{2.68}$$

$$\gamma \in [0,1]$$

$$x \in X_\alpha$$

Dimana $\mu_k^{\alpha}(\tilde{Z}_k)$ dan $\mu_s^{\alpha}(\widetilde{W}_s)$ adalah tingkat realisasi fungsi objektif yang berbeda didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu_k^{\alpha}(\tilde{Z}_k) = \frac{[\sum_{j=1}^{n}(\tilde{c}_{kj})_{\alpha}^{U}.x_j - (\tilde{Z}_k)_{\alpha}^{-}]}{[(\tilde{Z}_k)_{\alpha}^{+} - (\tilde{Z}_k)_{\alpha}^{-}]} \quad (2.69)$$

$$\mu_s^{\alpha}(\widetilde{W}_s) = \frac{[(\widetilde{W}_s)_{\alpha}^{-} - \sum_{j=1}^{n}(\tilde{c}'{}_{kj})_{\alpha}^{L}.x_j]}{[(\widetilde{W}_s)_{\alpha}^{-} - (\widetilde{W}_s)_{\alpha}^{+}]}$$

Berdasarkan persamaan 2.68 dan 2.43 maka persamaan diatas dapat dibentuk menjadi :

$\max \gamma$

dengan kendala,

$$\gamma \leq \frac{[\sum_{j=1}^{n}[c_{kj}^{(4)} - (c_{kj-}^{(4)} c_{kj}^{(3)})a].x_j - (\tilde{Z}_k)_{\alpha}^{-}]}{[(\tilde{Z}_k)_{\alpha}^{+} - (\tilde{Z}_k)_{\alpha}^{-}]}$$

$$\gamma \leq \frac{[(\widetilde{W}_s)_{\alpha}^{-} - \sum_{j=1}^{n}[c_{sj}^{(1)} + (c_{sj-}^{(2)} c_{sj}^{(1)})a].x_j]}{[(\widetilde{W}_s)_{\alpha}^{-} - (\widetilde{W}_s)_{\alpha}^{+}]} \quad (2.69)$$

$\gamma \in [0,1]$

$x \in X_{\alpha}$

M. Metode Simpleks

Penyelesaian suatu permasalahan pemograman linear dapat menggunakan metode simpleks. Bentuk dasar yang digunakan yaitu pemograman linear yang mencari X yang memaksimumkan (atau meminimumkan) $f = CX$ (Susanta, 1994)

dengan kendala : $AX\ (\leq, =, \geq) B$

$X \geq 0$

dengan $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$, $A_{m\times n} = (x_{ij})$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$, $C = [c_1, c_2, \dots, c_n]$.

Kendala yang berbentuk pertidaksamaan $\sum_{j=1}^{P} a_{ij} X_j \leq b_i$, $\sum_{j=1}^{P} a_{ij} X_j \geq b_i$, dapat diubah menjadi persamaan sebagai berikut:

1. Untuk pertidaksamaan bertanda "≥" dapat dibentuk dalam suatu persamaan "=" dengan cara mengurangkan ruas kiri pembatas linear dengan *surplus variable* yaitu $\sum_{j=1}^{P} a_{ij} X_j - t_i = b_i \; atau \; \sum_{j=1}^{P} a_{ij} X_j = b_i + t_i$ dengan $t_i \geq 0$.
2. Untuk pertidaksamaan bertanda "≤" dapat dibentuk dalam suatu persamaan "=" dengan cara menambahkan *slack variable* pada ruas kiri pembatas linear yaitu $\sum_{j=1}^{P} a_{ij} X_j + s_i = b_i$, dengan $s_i \geq 0$.

Metode Simpleks merupakan suatu metode pemprograman linear dengan penyelesaian yang bertahap, mulai dari satu titik ekstrim lalu kemudian ke titik ekstrim berikutnya dengan tujuan memperbaiki optimalitas dengan mempertahankan kelayakan atau bergerak kearah kelayakan tanpa merusak optimalitas. Penyelesaian pemograman linear dengan metode simpleks dapat menggunakan tabel yang disebut dengan tabel simpleks yang ditunjukkan sebagai berikut:

Tabel 2. 1 Tabel Simpleks

	C_j	C_1	C_2	...	C_n	b_i	R_i
$\bar{C}_i$	$\bar{X}_i$ X_j	X_1	X_2	...	X_n		
$\bar{C}_1$ $\bar{C}_2$ $\vdots$ $\bar{C}_m$	$\bar{X}_1$ $\bar{X}_2$ $\vdots$ $\bar{X}_m$	a_{11} a_{21} $\vdots$ a_{m1}	a_{12} a_{22} $\vdots$ a_{m2}	... .	a_{1n} a_{2n} $\vdots$ a_{mn}	b_1 b_2 $\vdots$ b_m	R_1 R_2 $\vdots$ R_m
	Z_j	Z_1	Z_2	...	Z_n	Z	
	$z_j - c_j$	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	...	$z_n - c_n$	Z	

keterangan:

C_j : baris diisi dengan koefisien-koefisien fungsi tujuan

X_j : baris diisi dengan nama-nama variabel peubah

$\bar{X}_i$: kolom diisi dengan nama-nama variabel yang menjadi basis

$\bar{C}_i$: kolom diisi dengan koefisien-koefisien peubah yang mejadi basis

b_i : kolom diisi dengan konstanta kendala

Z_j : kolom diisi dengan rumus $Z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$ untuk j=1, 2, ..., n

R_i : kolom diisi dengan rumus $R_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$ (a_{ik} adalah elemen-elemen yang ada dalam kolom kunci ,dan R_i hanya dihitung untuk $a_{ik} > 0$) .

Setelah tabel simpleks terbentuk, maka langkah-langkah penyelesaian dari tabel tersebut adalah sebagai berikut:

1. Mengindentifikasi tabel layak atau tidak, fungsi kelayakan tabel dilihat dari solusi nilai kanan (R_i) jika solusi bernilai positif maka tabel layak dan jika ada nilai solusi yang negatif maka tabel tidak layak sehingga tidak bisa diteruskan.

2. Menentukan kolom kunci dilihat dari nilai $z_j - c_j$ dengan nilai negatif terbesar untuk fungsi tujuan memaksimumkan dan nilai positif terkecil untuk fungsi tujuan meminimumkan.
3. Memilih baris kunci dengan nilai terkecil dari selisih nilai solusi R_i dan nilai kolom kunci yang bersesuaian.
4. Menentukan nilai kunci yaitu nilai yang terletak diantara perpotongan baris kunci dan kolom kunci.
5. Mengubah nilai-nilai baris kunci dengan cara membaginya dengan angka kunci.
6. Mengubah nilai selain nilai pada baris kunci dengan cara mengurangkan nilai kolom kunci baris yang bersangkutan dikali baris kunci baru dalam satu kolom terhadap baris lamanya yang terletak dalam satu kolom juga.
7. Lihat tabel sudah optimum atau belum. Tabel dengan fungsi tujuan memaksimumkan berarti $z_j - c_j$ bernilai positif atau 0, tabel dengan fungsi tujuan meminimumkan memiliki nilai $z_j - c_j$ negatif atau 0. Jika tabel belum optimal maka langkah 2-7 dapat diulangi kembali hingga tabel optimum.

Contoh 2.7.

Memaksimumkan $f = 9x_1 + 2x_2 + 5x_3$

dengan fungsi kendala, $2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 12$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 3$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 2\ , \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

Penyelesaian:

Kendala dalam bentuk kanonik

$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + s_1 = 12$

$2x_1 + x_2 - 3x_3 + s_2 = 3$

$3x_1 + x_2 - 2x_3 + s_3 = 2$

dan memaksimumkan $f = 9x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

	C_j	9	2	5	0	0	0		
$\overline{C_i}$	$\overline{X_i} \diagdown X_j$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i	R_i
0	s_1	2	3	-5	1	0	0	12	6
0	s_2	2	-1	3	0	1	0	3	3/2
0	s_3	3	1	-2	0	0	1	2	2/3
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0	
	Z_j-C_j	-9	-2	-5	0	0	0		

	C_j	9	2	5	0	0	0		
$\overline{C_i}$	$\overline{X_i} \diagdown X_j$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i	R_i
0	s_1	0	7/3	-11/3	1	0	-2/3	32/3	-
0	s_2	0	-5/3	13/3	0	1	-2/3	5/3	15/3
9	x_1	1	1/3	-2/3	0	0	1/3	2/3	-
	Z_j	9	3	-6	0	0	3	6	
	Z_j-C_j	0	1	11	0	0	3	6	

	C_j	9	2	5	0	0	0		
$\overline{C_i}$	$\overline{X_i} \diagdown X_j$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i	R_i
0	s_1	0	12/13	0	1	11/13	-16/13	157/13	157/12
5	x_3	0	-5/13	1	0	3/13	-2/13	5/13	-
9	x_1	1	1/13	0	0	2/13	2/13	12/13	12
	Z_j	9	-16/13	5	0	33/13	17/13	133/13	
	Z_j-C_j	0	-42/13	0	0	33/13	17/13	133/13	

	C_j	9	2	5	0	0	0		
$\overline{C_i}$	$\overline{X_i} \diagdown X_j$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i	R_i
0	s_1	-12	0	0	1	-1	-4	1	
5	x_3	5	0	1	0	1	1	5	
2	x_2	13	1	0	0	2	3	12	
	Z_j	51	2	5	0	9	11	49	
	Z_j-C_j	42	0	0	0	9	11	49	

Karena semua nilai $Z_j - C_j \geq 0$, maka tabel simpleks tersebut sudah optimum, dengan nilai $x_1 = 0,\ x_2 = 12$, dan $x_3 = 5$ dan nilai f maksimumnya yaitu 49.

N. Model Black Litterman

1. Pengertian Model Black Litterman

Model Black Litterman diperkenalkan oleh Fischer Black dan Robert Litterman di Goldman Sachs pada tahun 1990. Model ini menggabungkan dua jenis informasi yaitu *return* ekuilibrium dari CAPM dan *expected return views* investor yang merupakan titik acuan dari model Black Litterman (He & Litterman, 1999). Satchell & Scowcroft (2000) menjelaskan mengenai pendekatan Bayes untuk menyelesaikan kombinasi distribusi probabilitas model Black Litterman. Model Black Litterman dengan pendekatan Bayes menggunakan *views* investor sebagai informasi prior dan informasi pasar sebagai data sampel yang kemudian dikombinasikan untuk membentuk data baru (data posterior).

Views model Black Litterman digunakan untuk menyesuaikan *expected return* ekuilibrium dalam memprediksi *return* di masa yang akan datang. Manajer investasi dapat menyatakan opininya yang berbeda dengan kondisi ekuilibrium, informasi yang berbeda ini mungkin karena berkaitan dengan *expected return* suatu sekuritas apakah akan meningkat atau turun berdasarkan *views* investor terhadap keadaan pasar, perekonomian ataupun isu-isu politik dan kenegaraan yang mungkin mempengaruhi pergerakan sekuritas di pasar.

2. *Views* Investor

Seorang investor dapat memiliki *views* hanya untuk sejumlah k saham dari d saham yang terdapat dalam portofolio, dengan kata lain investor tidak perlu menyatakan pandangannya pada setiap saham yang dimasukkan ke portofolio namun cukup pada sejumlah saham yang menjadi perhatian investor. Investor dapat menyatakan prediksinya mengenai *return* yang akan diperoleh untuk masing-masing saham pada masa mendatang dengan melihat plot pergerakan data harga dan data *return* masing-masing saham pada beberapa periode sebelumnya.

Views Investor dapat berupa pandangan pasti maupun relatif (Black & Litterman, 1992) yaitu:

1. Pandangan pasti *(absolute view)*

   Ketika seorang investor memberikan prediksinya tentang dua buah saham, maka investor tersebut akan yakin dengan nominal *return* yang akan diberikan masing-masing saham tersebut sebesar x%. Contoh: "Saya memprediksi sekuritas B akan memberikan *return* sebesar x%"

2. Pandangan relatif (*relative view*)

   Ketika seorang investor memberikan prediksinya tentang dua buah saham, maka investor tersebut akan melakukan perbandingan antara *return* yang akan diberikan kedua saham tersebut. Contoh: “Saya memprediksi bahwa *return* yang diberikan sekuritas A akan melampaui *return* yang diberikan sekuritas C sebesar y%”.

3. Tingkat Keyakinan Investor

Tingkat keyakinan merupakan vektor *error* yang menandakan *views* yang dimiliki investor masih belum pasti dan diasumsikan berdistribusi normal. Tingkat keyakinan ini dinyatakan dalam matriks diagonal $\boldsymbol{\Omega}$ (kovarians dari *views*) sebagai berikut (Idzorek, 2005) :

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{P}(\tau\boldsymbol{\Sigma})\boldsymbol{P}' \qquad (2.\ 70)$$

dengan,

$\boldsymbol{P}$ = matriks *views* dari *return*

τ = skala tingkat keyakinan dalam *views* (*range* 0-1)

$\boldsymbol{\Sigma}$ = matriks varians-kovarians dari *return* saham

Jika elemen $\boldsymbol{\Omega}$ adalah nol maka investor dianggap sangat yakin terhadap pandangannya, sedangkan ketika informasi prior yang dimiliki investor memiliki tingkat *views* yang tidak pasti, maka hal ini diindikasikan dengan nilai matriks kovarians *views* $\boldsymbol{\Omega}$ adalah tidak nol.

4. Asumsi Model

Aturan Bayes menyatakan bahwa distribusi probabilitas dari suatu kejadian B terjadi apabila kejadian A diketahui, maka:

$$\Pr(B \mid A) = \frac{\Pr(A \mid B)\Pr(B)}{\Pr(A)}. \tag{2. 71}$$

Aturan Bayes di atas lebih sering diungkapkan dalam bentuk berikut:

$$\Pr(B \mid A) \infty \Pr(A \mid B)\Pr(B). \tag{2. 72}$$

dengan notasi ∞ menyatakan "proposional terhadap"

$\Pr(B \mid A)$: probabilitas dari kejadian B dengan syarat kejadian A diketahui . Disebut juga dengan distribusi posterior.

$\Pr(A \mid B)$: probabilitas dari kejadian A, dengan syarat kejadian B diketahui. Disebut juga dengan distribusi bersyarat.

$\Pr(B)$: probabilitas B, disebut juga informasi prior.

$\Pr(A)$: probabilitas A, disebut juga normalisasi konstan.

Untuk membentuk model Black Litterman dibutuhkan dua jenis informasi yaitu *expected return* ekuilibrium CAPM dan *views* investor. Kedua informasi tersebut kemudian dikombinasikan dengan menggunakan aturan Bayes, dengan mengganti kejadian A adalah *return* ekuilibrium CAPM dan kejadian B adalah *expected return* investor, menggunakan persamaan Bayes dapat diperoleh:

$$Pr(\boldsymbol{E(r)} \mid \boldsymbol{\pi}) = \frac{Pr(\boldsymbol{\pi} \mid \boldsymbol{E(r)})\,Pr(\boldsymbol{E(r)})}{Pr(\boldsymbol{\pi})} \tag{2. 73}$$

dengan, :

E(r): vektor *expected return* investor ukuran $n \times 1$

$\boldsymbol{\pi}$: *return* ekuilibrium CAPM

dengan asumsi-asumsi sebagai berikut (Vita dan Retno Subekti, 2014) :

a. Asumsi Pertama

Diasumikan bahwa keyakinan prior ***E(r)*** dinyatakan sebagai ***PE(r)***, yang mempunyai bentuk k kendala linear dari vektor *expected return* ***E(r)*** dan ditulis dengan matriks ***P*** berukuran $k \times n$ sehingga:

$$\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{v} \tag{2. 74}$$

Notasi $\boldsymbol{q}$ adalah vektor k x 1 dari *views return* yang diberikan investor, sedangkan $\boldsymbol{v}$ adalah vektor *error* k x 1 yang menandakan adanya *views* yang masih belum pasti. Persamaan (2.74) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{k1} & P_{k2} & \dots & P_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(r_1) \\ E(r_2) \\ \vdots \\ E(r_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ \vdots \\ q_{k1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{k1} \end{bmatrix}$$

Diasumsikan $\boldsymbol{v}$ berdistribusi normal dengan *mean* nol dan variansi $\boldsymbol{\Omega}$, dinotasikan $\boldsymbol{v}$~N(0, $\boldsymbol{\Omega}$), $\boldsymbol{\Omega}$ adalah matriks kovarians $k \times k$, sehingga :

$$\boldsymbol{P}\ \boldsymbol{E(r)} \sim N(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\Omega}) \tag{2. 75}$$

a. Asumsi Kedua

Data *return* ekuilibrium $\boldsymbol{\pi}$ dengan syarat informasi prior diasumsikan berdistribusi normal multivariat dengan *mean* $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ dan varians $\tau\boldsymbol{\Sigma}$, sehingga dapat dinyatakan:

$$\boldsymbol{\pi} \mid \boldsymbol{E(r)} \sim N(\boldsymbol{E(r)}, \tau\boldsymbol{\Sigma}) \quad (2.\ 76)$$

dengan $\boldsymbol{E(\pi)}=\boldsymbol{E(r)}$, artinya terdapat asumsi bahwa *mean return* ekuilibrium sama dengan *mean return* pasar yang diperoleh melalui CAPM. Sedangkan nilai τ adalah suatu angka yang diberikan investor untuk menyatakan keyakinan dalam pandangannya. Kebanyakan peneliti menggunakan nilai τ yang berbeda. Stachell & Scowcroft (2000) menentukan nilai τ sama dengan 1, sedangkan He & Litterman (1999) menggunakan nilai τ yaitu 0,025. Nilai τ tergantung dari tingkat keyakinan investor terhadap *views*, sehingga nilai untuk τ berkisar antara 0 sampai 1.

5. Kombinasi *Return* Ekuilibrium dan *Views* Investor

Teorema Model Black Litterman (Salomons, 2007):

$(\boldsymbol{E(r)} \mid \boldsymbol{\pi})$ berdistribusi multivariat normal dengan *mean* $\boldsymbol{E(r)}=$ $[(\tau\Sigma)^{-1}+\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi}+\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]$ dan variansnya adalah $[(\tau\Sigma)^{-1}+\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}$

Bukti:

Asumsi 1:

$\boldsymbol{PE(r)}$ berdistribusi normal multivariat dengan *mean* $\boldsymbol{q}$ dan varians $\boldsymbol{\Omega}$ dinotasikan $\boldsymbol{PE(r)} \sim N(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\Omega})$, sehingga fungsi probabilitasnya adalah:

$$\boldsymbol{f(P\ E(r))} = \frac{1}{\sqrt{(2\boldsymbol{\pi})^k\ det(\boldsymbol{\Omega})}}\ exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{P\ E(r)}-\boldsymbol{q})'\,\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{PE(r)}-\boldsymbol{q})\right] \quad (2.\ 77)$$

Asumsi 2:

$\boldsymbol{\pi} \mid \boldsymbol{E(r)}$ berdistribusi normal multivariat dengan *mean* $\boldsymbol{\pi}$ dan varians-kovarians matriks

$\tau\Sigma$ dinotasikan $\boldsymbol{\pi} \mid \boldsymbol{E(r)} \sim N(\boldsymbol{E(r)}, \tau\boldsymbol{\Sigma})$, sehingga fungsi probabilitasnya:

$$\boldsymbol{f(\pi \mid E(r))} = \frac{1}{\sqrt{(2\boldsymbol{\pi})^n\ det(\tau\boldsymbol{\Sigma})}}\ exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}\ \text{-}\ \boldsymbol{E(r)})'(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}(\boldsymbol{\pi}\ \text{-}\ \boldsymbol{E(r)})\right] \quad (2.\ 78)$$

Teorema Bayes dalam konteks ini dapat dinyatakan sebagai:

$$Pr(\boldsymbol{E(r)} \mid \boldsymbol{\pi}) = \frac{Pr(\boldsymbol{\pi} \mid \boldsymbol{E(r)})\,Pr(\boldsymbol{E(r)})}{Pr(\boldsymbol{\pi})}$$

atau dapat dinyatakan sesuai dengan persamaan (2.72) sebagai berikut:

$$Pr(\boldsymbol{E(r)} \mid \boldsymbol{\pi}) \infty\ Pr\left(\boldsymbol{\pi} \middle| \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\right) Pr(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}))$$

Fungsi probabilitas (2.77) dan (2.78) disubstitusikan pada rumus (2.72) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} Pr(\boldsymbol{E(r)} \mid \boldsymbol{\pi}) \infty & \frac{1}{\sqrt{(2\boldsymbol{\pi})^n\ det(\tau\boldsymbol{\Sigma})}}\ exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}-\boldsymbol{E(r)})'(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}(\boldsymbol{\pi}-\boldsymbol{E(r)})\right] \\ & .\frac{1}{\sqrt{(2\boldsymbol{\pi})^k\ det(\boldsymbol{\Omega})}}\ exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{PE(r)}-\boldsymbol{q})'(\boldsymbol{\Omega})^{-1}(\boldsymbol{PE(r)}-\boldsymbol{q})\right] \end{aligned}$$

Dengan menghilangkan semua konstanta, maka yang tersisa adalah:

$$Pr(\boldsymbol{E(r)} \mid \boldsymbol{\pi}) \infty\ exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}-\boldsymbol{E(r)})'(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}(\boldsymbol{\pi}-\boldsymbol{E(r)})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{PE(r)}-\boldsymbol{q})'\,\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{PE(r)}-\boldsymbol{q})\right]$$

$$Pr(\boldsymbol{E(r)} \mid \boldsymbol{\pi}) \infty\ exp\left[-\frac{1}{2}\varphi\right]$$

Sehingga,

$$\varphi = (\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}))'(\tau\Sigma)^{-1}(\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})) + (\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{q})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{q})$$

$$= \boldsymbol{\pi}'(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}'(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) +$$

$$\left(\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r})\right)'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{q}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}))'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}$$

$$= \boldsymbol{\pi}'(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}'(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) +$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{q}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}$$

$$= \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'[(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\pi}'(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} -$$

$$\boldsymbol{\pi}'(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{q}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}$$

$$= \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'[(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{2}[(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi}' + \boldsymbol{P\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}']\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) +$$

$$\boldsymbol{\pi}'(\boldsymbol{\tau}\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{q}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}$$

untuk,

$\boldsymbol{C} = (\tau\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}$,

$\boldsymbol{H} = (\tau\Sigma)^{-1} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}$, dimana $\boldsymbol{H}$ simetris dengan $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}'$,

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\pi}'(\tau\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{q}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}$.

Menggunakan notasi di atas, maka dapat ditulis kembali mejadi:

$$\begin{aligned}\varphi &= \boldsymbol{E(r)'}\,\boldsymbol{HE(r)} - 2\boldsymbol{C'}\,\boldsymbol{E(r)} + \boldsymbol{A}\\ &= \boldsymbol{E(r)'}\,\boldsymbol{H'H}\,\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{E(r)} - 2\boldsymbol{C'}\,\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{H}\,\boldsymbol{E(r)} + \boldsymbol{A}\\ &= \boldsymbol{A} - \boldsymbol{C'}\,\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{C} + (\boldsymbol{H(E(r)} - \boldsymbol{C})'\,\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{HE(r)} - \boldsymbol{C})\end{aligned}$$

Dengan demikian $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{C'}\,\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{C}$ akan menjadi konstanta dan selanjutnya

$(\boldsymbol{HE(r)} - \boldsymbol{C})'\,\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{HE(r)} - \boldsymbol{C})$

$$= (\boldsymbol{HE}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{C})'\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{HE}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{C})$$

$$= (\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{HE}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{C})'\boldsymbol{HH}^{-1}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{HE}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{C})$$

$$= (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{C})'\boldsymbol{H}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{C})$$

Sehingga diperoleh:

$$Pr(\boldsymbol{E(r)} \mid \boldsymbol{\pi}) \infty\, exp[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{E(r)} - \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{C})'\,\boldsymbol{H}(\boldsymbol{E(r)} - \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{C})]$$

Maka *mean* posteriornya $\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{C}$ adalah

$\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{C} = [(\tau\Sigma)^{-1} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}]$ dan variansnya $\boldsymbol{H}^{-1}$ yaitu

$$\boldsymbol{H}^{-1} = [(\tau\Sigma)^{-1} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}$$

Jadi distribusi *return* kombinasi yang baru $(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|\boldsymbol{\pi})$ sebagai distribusi posterior berdistribusi normal

$$(\boldsymbol{E(r)} \mid \boldsymbol{\pi}) \sim N([(\tau\Sigma)^{-1} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}], [(\tau\Sigma)^{-1} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1})$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}_{BL} &= [(\tau\Sigma)^{-1} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}] \\
&= [(\tau\Sigma)^{-1} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}(\tau\Sigma)^{-1}(\tau\Sigma)[(\tau\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}] \\
&= [\boldsymbol{I} + \tau\boldsymbol{\Sigma P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[\boldsymbol{\pi} + \tau\boldsymbol{\Sigma P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}] \\
&= [\boldsymbol{I} + \tau\boldsymbol{\Sigma P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[(\boldsymbol{I} + \tau\boldsymbol{\Sigma P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P})\boldsymbol{\pi} + \tau\boldsymbol{\Sigma P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{P\pi})] \\
&= \boldsymbol{\pi} + (\boldsymbol{I} + \tau\boldsymbol{\Sigma P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P})^{-1}(\tau\boldsymbol{\Sigma P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{P\pi})) \\
&= \boldsymbol{\pi} + (\boldsymbol{I} + \tau\boldsymbol{\Sigma P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P})^{-1}(\tau\boldsymbol{\Sigma P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\{(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{P}'\tau\boldsymbol{\Sigma P})(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{P}'\tau\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{P})^{-1}\}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{P\pi}) \\
&= \boldsymbol{\pi} + (\boldsymbol{I} + \tau\boldsymbol{\Sigma P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P})^{-1}(\tau\boldsymbol{\Sigma P}' + \tau\sum\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}'\tau\boldsymbol{\Sigma P})(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{P}'\tau\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{P})^{-1}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{P\pi}) \\
&= \boldsymbol{\pi} + [(\boldsymbol{I} + \tau\boldsymbol{\Sigma P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P})^{-1}(\boldsymbol{I} + \tau\boldsymbol{\Sigma P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P})]\tau\boldsymbol{\Sigma P}'(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{P}'\tau\boldsymbol{\Sigma P})^{-1}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{P\pi}) \\
&= \boldsymbol{\pi} + \tau\boldsymbol{\Sigma P}'(\boldsymbol{\Omega} + \tau\boldsymbol{\Sigma P}')^{-1}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{P\pi}).
\end{aligned}$$

Sehingga, *expected return* Black Litterman dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\mu}_{BL} = E(\boldsymbol{r}_{BL}) = \boldsymbol{\pi} + \tau\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{P}\tau\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}')^{-1}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{\pi}) \quad (2.79)$$

dengan,

$\boldsymbol{E(r_{BL})}$: *expected return* model Black Litterman

$\boldsymbol{\pi}$: vektor k x 1 untuk *return* ekuilibrium CAPM

τ : skala tingkat keyakinan dalam *views* (*range* 0-1)

$\boldsymbol{\Sigma}$: matriks varians kovarians *return*

$\boldsymbol{\Omega}$: matriks diagonal kovarians dari *views*

$\boldsymbol{P}$: matriks k x n untuk *views* yang berkaitan dengan *return*

$\boldsymbol{q}$: vektor k x 1 untuk *views return* yang diberikan investor.

Pembobotan portofolio model Black Litterman berdasarkan persamaan (2.25) maka dapat dihitung bobot portofolio sebagai berikut:

$Maks\ E(R_p) = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{\mu}$ dengan $Var(R_p) = \boldsymbol{w}'\ \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$

Maka bobotnya adalah :

$$w_{BL} = (\delta\Sigma)^{-1}\mu_{BL} \quad (2.\ 80)$$

dengan,

$\boldsymbol{w}_{BL}$: bobot sekuritas pada model Black Litterman

δ : koefisien *risk aversion*

$\boldsymbol{\Sigma}$: matriks varians kovarians *return*

$\boldsymbol{\mu}_{BL}$: *expected return* Black Litterman.

O. *Sharpe Ratio*

Sharpe ratio dikembangkan oleh William Sharpe dan sering disebut juga dengan *reward-to-variability ratio* (RVAR). *Sharpe Ratio* membandingkan selisih antara *return* sekuritas dan *risk free rate* dengan standar deviasi dari sekuritas tersebut, artinya *Sharpe* mengukur besarnya perbedaan $(R_p - r_f)$ atau *risk* premium yang dihasilkan untuk tiap unit risiko yang diambil. Semakin tinggi nilai *Sharpe ratio*, maka semakin baik kinerja yang dihasilkan. Perhitungan *Sharpe ratio* dengan menggunakan *risk free rate* adalah sebagai berikut (William Sharpe, 1966):

$$S_p = \frac{R_p - r_f}{\sigma_p} \qquad (2.\ 81)$$

Untuk portofolio yang tidak menggunakan *risk free rate*, maka perhitungan kinerja portofolio *Sharpe ratio* menjadi:

$$S_p^{\ *} = \frac{R_p}{\sigma_p} \qquad (2.\ 82)$$

Keterangan:

S_p = *Sharpe ratio*

R_p = *Return* portofolio dalam suatu periode

r_f = Suku bunga bebas risiko dalam suatu periode

σ_p =Standar deviasi dari *return* portofolio suatu periode