BAB II
KAJIAN TEORI

Bab ini menjelaskan beberapa kajian literatur yang digunakan untuk analisis sistem antrean pada penelitian. Beberapa hal yang akan dibahas pada bab ini berkaitan dengan teori probabilitas, teori antrean, model-model antrean, uji distribusi *Kolmogorov-Smirnov*, *vacation*, antrean M/M/c dengan *Multiple Asynchronous Vacation* (AS, MV), serta profil PT Bank BPD DIY.

A. Teori Probabilitas

Probabilitas adalah sebuah bilangan yang terletak diantara 0 dan 1 yang berkaitan dengan suatu kejadian tertentu. Jika kejadian itu pasti terjadi, maka probabilitas kejadian itu adalah 1 dan jika kejadian itu mustahil terjadi, maka probabilitasnya adalah 0 (Harinaldi, 2005, p. 46).

Berikut ini merupakan beberapa definisi dan teorema tentang teori probabilitas, diantaranya:

Definisi 2.1 (Bain & Engelhardt, 1992, p. 9)

Untuk suatu percobaan dengan S sebagai ruang sampel dan $A, A_1, A_2, \ldots$ *mewakili kejadian yang mungkin. Fungsi yang berhubungan dengan nilai riil P(A) dengan tiap kejadian A disebut fungsi peluang dan P(A) disebut peluang dari A jika syarat berikut terpenuhi:*

$$0 \leq P(A), \quad \textit{untuk tiap A} \tag{2.1}$$

$$P(S) = 1 \tag{2.2}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{2.3}$$

Jika A_1, A_2, ... adalah kejadian yang saling lepas (mutually exclusive) satu sama lain, sedemikian sehingga

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$$

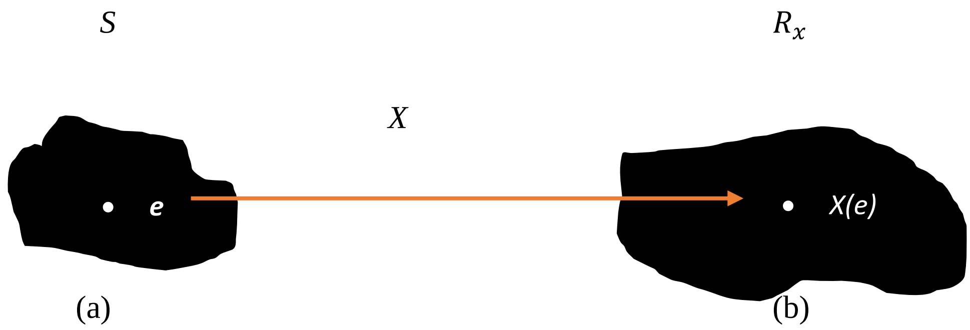
Teorema 2.1 (Walpole, 1995, p. 90)

Bila suatu percobaan mempunyai N hasil percobaan yang berbeda, dan masing-masing mempunyai kemungkinan yang sama untuk terjadi, dan bila tepat n diantara hasil percobaan itu menyusun kejadian A, maka probabilitas kejadian A adalah:

$$P(A) = \frac{n}{N} \tag{2.4}$$

1. Variabel Acak

Variabel acak adalah suatu fungsi yang memetakan setiap anggota ruang sampel *S* ke bilangan riil. Anggota ruang sampel dinotasikan dengan *e* dan fungsi yang memetakan anggota *e* ke bilangan riil *x* dinotasikan dengan *X*. Hasil pemetaan yaitu sebuah bilangan riil *x* untuk setiap *e* dari ruang sampel yang dinotasikan dengan *x=X(e)*. Berikut Gambar 2.1 yang menggambarkan sifat fungsi *X*:



Gambar 2.1 Konsep dari sebuah variabel acak

(a) S adalah ruang sampel dari e (b) R_x : ruang *range* dari X

Berikut definisi dalam teori probabilitas tentang variabel acak yang digunakan pada penelitian skripsi ini:

Definisi 2.2 (Bain & Engelhardt, 1992, p. 53)

Sebuah variabel acak X adalah fungsi yang didefinisikan atas ruang sampel S yang menghubungkan $e \in S$ *dengan bilangan riil* $x = X(e)$.

Variabel acak dibedakan menjadi dua yaitu variabel acak diskrit dan variabel acak kontinu. Berikut definisi mengenai kedua jenis variabel acak tersebut:

a. Variabel Acak Diskrit

Variabel acak diskrit adalah variabel acak yang memiliki nilai yang dapat dicacah atau *countable* (Harinaldi, 2005, p. 62). Berikut definisi dan teorema yang menjelaskan tentang variabel acak diskrit:

Definisi 2.3 (Bain & Engelhardt, 1992, p. 56)

Jika nilai-nilai yang mungkin dari variabel acak X dapat dihitung, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ atau $x_1, x_2, \ldots$, maka X disebut variabel acak diskrit. Fungsi

$$f(x) = P[X = x] \qquad x = x_1, x_2, \ldots \qquad \text{(2.5)}$$

menyatakan bahwa probabilitas $X = x$ disebut fungsi densitas probabilitas.

Teorema 2.2 (Bain & Engelhardt, 1992, p. 57)

Sebuah fungsi $f(x)$ adalah fungsi densitas probabilitas diskrit jika dan hanya jika fungsi tersebut memenuhi syarat

$$f(x_i) \geq 0 \qquad \text{(2.6)}$$

untuk semua nilai x_i, dan

$$\sum_{x_i} f(x_i) = 1 \qquad \text{(2.7)}$$

Bukti:

Syarat (2.6) mengikuti fakta dimana nilai dari fungsi densitas probabilitas diskrit adalah sebuah probabilitas dan tidak negatif. Karena $x_1, x_2, \ldots$ menunjukkan semua nilai yang mungkin dari X maka kejadian $[X = x_1], [X = x_2], \ldots$ merupakan partisi lengkap dari ruang sampel. Dengan demikian,

$$\sum_{x_i} f(x_i) = \sum_{x_i} P[X = x_i] = 1$$

untuk semua x_i. Hal ini mengakibatkan fungsi densitas probabilitas harus memenuhi syarat (2.6) dan (2.7) dan fungsi yang memenuhi syarat-syarat tersebut akan memberikan probabilitas yang sesuai dengan definisi (2.1).

Definisi 2.4 (Bain & Engelhardt, 1992, p. 58)

Fungsi distribusi kumulatif dari variabel acak X didefinisikan dengan:

$$F(x) = P[X \leq x], \qquad untuk\ semua\ bilangan\ riil\ x \tag{2.8}$$

Definisi 2.5 (Bain & Engelhardt, 1992, p. 61)

Jika X adalah variabel acak diskrit dengan fungsi densitas probabilitas $f(x)$, maka nilai harapan dari X didefinisikan sebagai:

$$\mu = E(X) = \sum_{x} x\, f(x) \tag{2.9}$$

b. Variabel Acak Kontinu

Variabel acak kontinu merupakan variabel acak yang memiliki nilai yang tak terhingga banyaknya, sepanjang sebuah interval tidak terputus. Variabel acak kontinu biasanya diperoleh dari hasil pengukuran (Harinaldi, 2005, p. 62). Berikut ini merupakan beberapa definisi dan teorema tentang variabel acak kontinu, antara lain:

Definisi 2.6 (Bain & Engelhardt, 1992, p. 64)

Variabel acak X dikatakan variabel acak kontinu jika ada fungsi f(x) yang merupakan fungsi densitas probabilitas dari X. Dengan demikian, fungsi distribusi kumulatifnya dapat direpresentasikan sebagai:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{2.10}$$

Teorema 2.3 (Bain & Engelhardt, 1992, p. 65)

Sebuah fungsi f(x) merupakan fungsi densitas probabilitas untuk suatu variabel acak kontinu X jika dan hanya jika fungsi tersebut memenuhi syarat:

$$f(x) \geq 0 \tag{2.11}$$

untuk semua riil x, dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \tag{2.12}$$

Definisi 2.7 (Bain & Engelhardt, 1992, p. 67)

Apabila X merupakan variabel acak kontinu dengan fungsi densitas probabilitas $f(x)$*, maka nilai harapan dari X didefinisikan dengan:*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx \tag{2.13}$$

jika integral pada persamaan (2.13) benar-benar terpusat atau konvergen. Jika sebaliknya, maka E(X) tidak ada.

2. Distribusi Poisson

Distribusi Poisson adalah distribusi nilai-nilai bagi suatu variabel acak diskrit, yaitu banyaknya hasil percobaan yang terjadi didalam suatu interval waktu tertentu atau suatu daerah tertentu (Hasan, 2002: 54). Berikut ini merupakan definisi tentang fungsi distribusi probabilitas Poisson yaitu:

Definisi 2.8 (Bain & Engelhardt, 1992, p. 103)

Variabel acak diskrit X dikatakan memiliki distribusi Poisson dengan parameter $\mu > 0$ *jika memiliki fungsi densitas probabilitas diskrit yang berbentuk*

$$f(x;\mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.14}$$

Keterangan:

x = hasil yang mungkin dari variabel acak diskrit X

e = konstanta dasar (basis) logaritma natural = 2,71828 . . .

μ = nilai harapan dari X, dimana X adalah variabel acak diskrit

3. Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial digunakan untuk menggambarkan distribusi waktu. Misalnya pada fasilitas jasa, dengan asumsi bahwa waktu pelayanan bersifat acak. Artinya waktu untuk melayani *customer* tidak tergantung pada lama waktu yang telah dihabiskan untuk melayani *customer* sebelumnya dan tidak bergantung pada jumlah *customer* yang menunggu untuk dilayani.

Berikut ini merupakan definisi yang menjelaskan tentang distribusi Eksponensial:

Definisi 2.9 (Djauhari, 1990, pp. 175-176)

Variabel acak X dikatakan berdistribusi Eksponensial dengan parameter λ jika memiliki fungsi kepadatan probabilitas sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & untuk\ x \geq 0 \\ 0, & untuk\ x\ yang\ lain \end{cases} \quad (2.15)$$

dimana x menyatakan waktu yang dibutuhkan sampai terjadi satu kali sukses dengan λ adalah rata-rata *banyaknya sukses dalam selang waktu satuan.*

Fungsi distribusi kumulatif Eksponensial merupakan integral dari persamaan (2.16), sehingga diperoleh:

$$F(x;\lambda) = \begin{cases} \int_0^x \lambda e^{-\lambda x}\, dt = 1 - e^{-\lambda x}, & \text{untuk } x \geq 0 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases} \quad (2.16)$$

B. Teori Antrean

Pembahasan teori antrean lebih difokuskan pada upaya penguraian waktu tunggu yang terjadi dalam barisan antrean. Antrean dapat dilihat dalam berbagai situasi yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari. Sebagai contoh, kendaraan yang menunggu pada *traffic light* atau pasien yang menunggu untuk diperiksa.

1. Konsep Dasar Teori Antrean

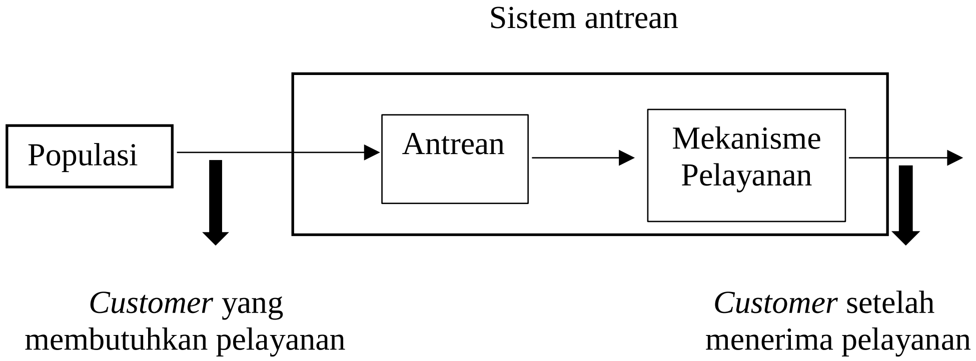
Teori antrean dikemukakan dan dikembangkan oleh A. K. Erlang, seorang insinyur Denmark pada tahun 1910. Erlang melakukan eksperimen tentang fluktuasi permintaan fasilitas telepon yang berhubungan dengan *automatic dialing equipment*, yaitu peralatan penyambungan telepon secara otomatis. Pada waktu-waktu sibuk, operator sangat kewalahan untuk melayani para penelepon, sehingga para penelepon atau *customer* harus antre menunggu giliran yang mungkin cukup lama.

Rata-rata *customer* mengantre tergantung pada rata-rata kecepatan pelayanan. Rata-rata pelayanan merupakan banyaknya pelayanan yang dapat diberikan dalam waktu tertentu. Lamanya waktu pelayanan dapat bersifat acak ataupun seragam. Sama halnya dengan kedatangan *customer* dapat bersifat seragam (*uniform*) selama dalam periode tertentu atau secara acak. Hal ini karena *customer* tidak datang pada waktu yang sama, demikian juga dengan waktu pelayanannya. Oleh karena itu, digunakan teori probabilitas untuk menentukan ukuran-ukuran keefektifan sistem antrean berdasarkan laju kedatangan dan pelayanan *customer*.

Kedatangan *customer* untuk mendapatkan pelayanan, mengalami suatu proses antrean terlebih dahulu. Proses antrean merupakan suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan *customer* pada suatu fasilitas pelayanan, menunggu dalam baris antrean jika belum dapat dilayani, dilayani dan akhirnya meninggalkan fasilitas tersebut sesudah dilayani (Kakiay, 2004, p. 10). Proses antrean terjadi pada sistem antrean yang mana merupakan suatu himpunan *customer*, pelayan dan suatu aturan yang mengatur pelayanan kepada *customer*.

2. Struktur Dasar Model Antrean

Proses dasar yang dianggap oleh model antrean ialah bahwa *customer* yang memerlukan pelayanan berasal dari suatu populasi yang disebut sumber masukan (*input source*). *Customer* memasuki sistem antrean (*queuing system*) dan menggabungkan diri atau membentuk suatu antrean. Pada waktu tertentu, anggota dalam antrean dipilih untuk memperoleh pelayanan dengan menggunakan aturan tertentu yang disebut disiplin pelayanan (*service discipline*). Pelayanan yang diperlukan oleh *customer* kemudian dilakukan oleh mekanisme pelayanan (*service mechanism*). Setelah pelayanan diperoleh, maka *customer* meninggalkan sistem (Suprapto, 2013, p. 325). Proses ini dapat dilihat pada gambar berikut:

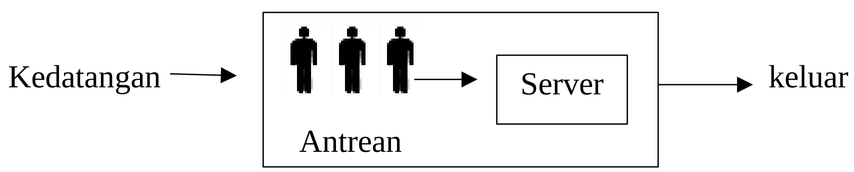


Gambar 2.2 Struktur antrean

Desain sarana pelayanan dapat diklasifikasikan dalam *channel* dan *phase* yang akan membentuk struktur antrean yang berbeda-beda. Istilah *channel* menunjukkan jumlah jalur untuk memasuki sistem pelayanan atau jumlah fasilitas pelayanan. Istilah *phase* berarti banyaknya stasiun-stasiun pelayanan, dimana *customer* harus melaluinya sebelum pelayanan dinyatakan lengkap. Ada beberapa struktur model antrean yang biasa digunakan dalam sistem antrean, antara lain:

a. *Single Channel Single Phase*

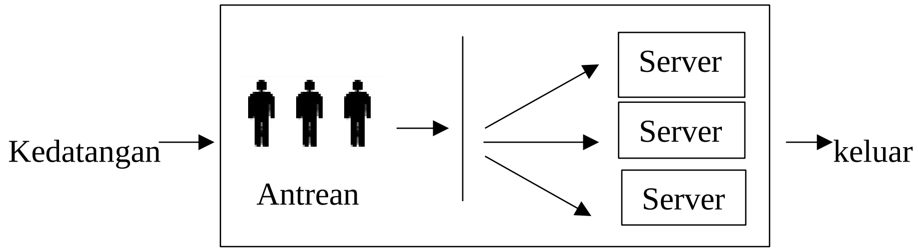
Single Channel Single Phase adalah suatu sistem antrean dimana *customer* hanya dilayani oleh satu penyedia layanan *(server)* dan melalui satu *phase* pelayanan. Desain dari sistem antrean ini merupakan desain yang paling sederhana. Sebagai contoh yaitu minimarket yang hanya memiliki satu kasir atau praktek seorang dokter gigi.



Gambar 2.3 Model *single channel single phase*

b. *Multiple Channel Single Phase*

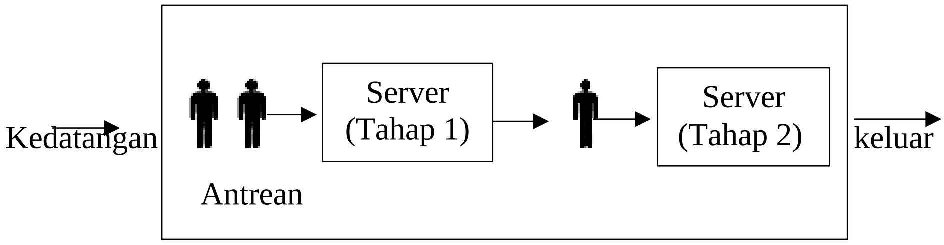
Multiple Channel Single Phase adalah suatu sistem antrean yang memiliki dua atau lebih fasilitas pelayanan *(server)* yang terdiri dari antrean tunggal. Misalnya, supermarket yang memiliki beberapa kasir atau pelayanan pembelian tiket yang dilayani lebih dari satu loket.



Gambar 2.4 Model *multiple channel single phase*

c. *Single Channel Multiple Phase*

Single Channel Multiple Phase adalah suatu sistem antrean yang memiliki dua atau lebih pelayanan yang dilaksanakan secara berurutan. Misalnya, tempat pencucian mobil atau mengurus surat izin usaha melalui beberapa orang pejabat pemerintahan.

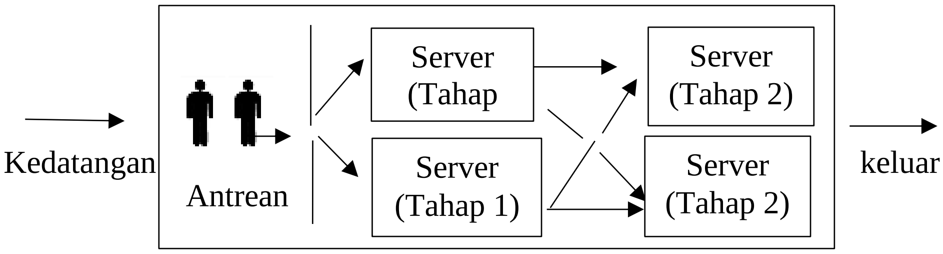


Gambar 2.5 Model *single channel multiple phase*

d. *Multiple Channel Multiple Phase*

Multiple Channel Multiple Phase adalah suatu sistem antrean yang memiliki beberapa *phase*, dimana setiap *phase* dilayani beberapa *server*.

Hal ini berarti ada lebih dari satu *customer* yang dilayani pada waktu yang bersamaan disetiap *phase*. Sebagai contoh salah satunya yaitu pelayanan kepada pasien di Rumah Sakit. Rumah Sakit mempunyai beberapa perawat yang memeriksa pasien secara teratur dan kontinu (sebagai suatu urutan pekerjaan). Secara skematis terlihat sebagai berikut:



Gambar 2.6 Model *multiple channel multiple phase*

3. Faktor Sistem Antrean

Terdapat beberapa faktor penting yang berpengaruh terhadap barisan antrean dan pelayanannya, antara lain:

a. Distribusi Kedatangan

Pada sistem antrean, distribusi kedatangan merupakan faktor penting yang berpengaruh besar terhadap kelancaran pelayanan. Distribusi kedatangan terbagi menjadi dua, diantaranya:

1) Kedatangan secara individu (*single arrivals*)

2) Kedatangan secara kelompok (*bulk arrivals*)

Distribusi kedatangan diasumsikan bahwa kedatangan *customer* mengikuti suatu proses dengan distribusi probabilitas tertentu. Distribusi probabilitas yang sering digunakan ialah distribusi Poisson, dimana kedatangan bersifat bebas, tidak terpengaruh oleh kedatangan sebelum ataupun sesudahnya. Asumsi distribusi Poisson menunjukkan bahwa kedatangan *customer* sifatnya acak dan mempunyai nilai rata-rata kedatangan sebesar *lamda* (λ) (Kakiay, 2004, p. 11).

b. Distribusi Pelayanan

Distribusi pelayanan berkaitan dengan banyaknya fasilitas pelayanan yang dapat disediakan. Distribusi pelayanan terbagi menjadi dua komponen penting, yaitu:

1) Pelayanan secara individual (*single service)*
2) Pelayanan secara kelompok (*bulk service*)

Distribusi probabilitas yang biasa digunakan pada ditribusi waktu pelayanan yaitu distribusi Poisson. Lain halnya dengan waktu antar pelayanan yang diasumsikan berdistribusi Eksponensial. Distribusi Eksponensial merupakan distribusi acak yang variabelnya berdiri sendiri tanpa memori masa lalu. Artinya, waktu antar pelayanan tidak bergantung dengan pelayanan sebelumnya. Rata-rata laju pelayanan dengan simbol μ (mu) merupakan banyaknya *customer* yang dapat dilayani dalam satuan waktu.

c. Fasilitas Pelayanan

Fasilitas pelayanan berkaitan erat dengan baris antrean yang dibentuk. Desain fasilitas pelayanan ini dapat dibagi dalam tiga bentuk, yaitu:

1) Bentuk series

   Fasilitas pelayanan dengan bentuk series merupakan fasilitas pelayanan yang berurutan dalam satu garis lurus.

2) Bentuk paralel atau sejajar

   Fasilitas pelayanan dengan bentuk paralel merupakan fasilitas pelayanan yang dilakukan secara bercabang dengan kesamaan fungsi.

3) Bentuk *network station* atau antrean jaringan

   Fasilitas pelayanan dengan bentuk *network station* merupakan fasilitas pelayanan series dan paralel yang terjadi secara bersama-sama.

d. Disiplin Pelayanan

Menurut Kakiay (2004, p. 12), disiplin antrean merupakan aturan dimana para *customer* dilayani, atau disiplin pelayanan *(service discipline)* yang memuat urutan *(order)* para *customer* menerima layanan. Aturan pelayanan menurut kedatangan ini dapat didasarkan pada:

1) *First Come First Served (FCFS)*

   FCFS merupakan suatu peraturan dimana yang memperoleh pelayanan terlebih dahulu adalah *customer* yang datang pertama. Misalnya, antrean di loket-loket penjualan karcis kereta api.

2) *Last Come First Served (LCFS)*

LCFS merupakan antrean dimana yang datang paling akhir akan dilayani paling awal. Misalnya, pada sistem bongkar muat barang di dalam truk, dimana barang yang masuk terakhir justru akan keluar terlebih dahulu.

3) *Service in Random Order (SIRO)*

SIRO merupakan antrean dimana pelayanan dilakukan secara acak. Misalnya arisan, dimana pelayanan atau *service* dilaksanakan berdasarkan undian *(random)*.

4) Prioritas pelayanan yang berarti pelayanan dilakukan khusus pada *customer* utama (*VIP customer*)

Prioritas pelayanan adalah antrean dimana pelayanan didasarkan pada prioritas khusus. Misalnya, dalam suatu pesta dimana tamu-tamu yang dikategorikan VIP akan dilayani terlebih dahulu.

e. Kapasitas Antrean

Kapasitas antrean merupakan besarnya sistem antrean dapat menampung banyaknya individu atau *customer*. Ada dua desain yang dapat dipilih untuk menentukan besarnya antrean. Desain pertama yaitu ukuran kedatangan *customer* tidak terbatas *(infinite queue),* sedangkan desain kedua yaitu ukuran kedatangan secara terbatas *(finite queue)*.

f. Sumber Pemanggilan

Sumber pemanggilan pada fasilitas pelayanan dapat berupa mesin maupun manusia. Bila ada sejumlah mesin yang rusak maka sumber pemanggilan akan berkurang dan tidak dapat melayani *customer*. Sumber pemanggilan dibedakan menjadi dua yaitu sumber pemanggilan terbatas *(finite calling source)* dan tidak terbatas *(infinite calling source)*.

4. Notasi Kendall

Karakteristik dan asumsi dari model antrean dirangkum dalam bentuk notasi. Menurut Kakiay (2004, pp. 17-18), bentuk kombinasi proses kedatangan dengan pelayanan pada umumnya dikenal sebagai standar universal. Standar universal disebut notasi Kendall yaitu:

$$(a/b/c) : (d/e/f)$$

Simbol *a, b, c, d, e,* dan *f* merupakan unsur-unsur model baris antrean. Penjelasan dari simbol-simbol tersebut adalah sebagai berikut:

a : Distribusi kedatangan *(Arrival Distribution)*

b : Distribusi waktu pelayanan atau keberangkatan

c : Banyaknya *server* dalam paralel (dimana $c = 1, 2, 3, . . \infty$)

d : Disiplin antrean, seperti *FCFS*, *LCFS*, *SIRO*.

e : Jumlah maksimum yang diizinkan dalam sistem *(Queue and System)*

f : Banyaknya *customer* yang ingin memasuki sistem sebagai sumber

Notasi standar ini dapat diganti dengan kode-kode yang sebenarnya dari distribusi-distribusi yang terjadi dan bentuk lainnya, seperti:

M : Distribusi kedatangan atau pelayanan dari proses Poisson.

D : *Deterministic inter arrival* atau *service time* (waktu pelayanan)

k : Banyaknya *server* dalam bentuk paralel atau seri

N : Jumlah maksimum *customer* dalam sistem

E_d : Erlang distribusi untuk waktu antar kedatangan dan pelayanan

G : Distribusi umum dari *service time* atau keberangkatan *(departure)*

GI : Distribusi umum yang independen dari proses kedatangan

GD : *General Discipline* (disiplin umum) dalam antrean (*FCFS*, *LCFS*, dll)

NPD: Non-*Preemptive Discipline*

PRD: *Preemptive Discipline*

Berikut ini merupakan contoh notasi Kendall yang digunakan untuk menentukan model antrean:

$$(M/M/k):(GD/\infty/\infty)$$

Hal ini berarti:

M = Markovian/ banyaknya kedatangan berdistribusi Poisson

M = Markovian/banyaknya pelayanan berdistribusi Poisson

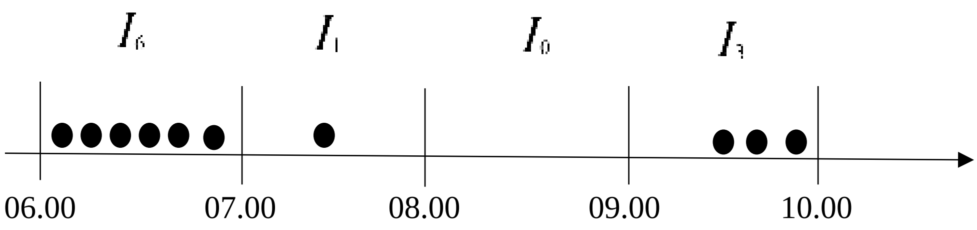
k = Banyaknya *server k*

GD = *General Discipline*

∞ = Kapasitas *customer* dan sumber pemanggilan tidak terbatas

5. Tingkat Kedatangan

Menurut pengamatan A. K. Erlang di Copenhagen Telephone, pola permintaan *customer* telepon yang meminta sambungan dalam kurun waktu yang tidak terputus *(continuous of time)* dapat dibagi dalam beberapa interval waktu yang sama. Dalam hal ini, permintaan *customer* terdistribusi secara acak pada masing-masing interval waktu tetap dalam kurun waktu yang tidak terputus disebut proses Poisson (Siswanto, 2007, p. 218). Berikut ilustrasi proses Poisson pada kedatangan *customer* dan interval waktu tetap dalam suatu kurun waktu:



Gambar 2.7 Proses Poisson berdasarkan interval waktu

Berdasarkan Gambar 2.7 terdapat 10 *customer* yang datang antara jam 06.00-10.00. Pada interval I_6 ada 6 *customer* yang datang, sedangkan pada interval I_0 tidak ada yang datang. Keadaan ini merupakan contoh fenomena yang diamati oleh A. K. Erlang dengan mengikuti proses Poisson. Dalam hal ini dapat diasumsikan:

1) Kedatangan *customer* bersifat acak

2) Kedatangan *customer* antar interval waktu tidak saling mempengaruhi

Dalam Gambar 2.7, kurun waktu observasi tersebut dibagi menjadi empat interval waktu tetap. Jika *I* menandai banyaknya interval waktu maka

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i \qquad (2.17)$$

dimana I_i adalah interval ke-*i*.

Dalam kasus ini, I_6 = 1 interval dengan 6 kedatangan; I_1 = 1 interval dengan 1 kedatangan; I_0 = 1 interval dengan 0 kedatangan; dan I_3 = 1 interval dengan 3 kedatangan. Dengan demikian diperoleh bahwa banyaknya interval yaitu 4 atau $I = 4$. Selanjutnya, jika *N* menandai banyaknya *customer* yang datang selama *I* interval dan di interval I_i ada K_i *customer*, maka banyaknya *customer* selama kurun waktu *I* adalah:

$$N = \sum_{i=1}^{n} K_i I_i \qquad (2.18)$$

dimana, K_i adalah banyaknya *customer* yang datang di interval I_i. Dalam kasus ini, $N = 6 + 1 + 0 + 3 = 10$.

Jadi, di dalam setiap interval yang sama tersebut *customer* datang secara acak *(random)*. Jika pada setiap interval tersebut dibagi menjadi *n* sub interval dengan asumsi dan proses yang sama, maka kedatangan pada setiap interval waktu tetap dapat dinyatakan dengan distribusi Poisson (Siswanto, 2007, p. 219). Dengan demikian, rata-rata laju kedatangan *customer* pada setiap interval waktu tersebut dapat diestimasi dengan:

$$\lambda = \frac{N}{I} \qquad (2.19)$$

Menggunakan persamaan (2.19), rata-rata laju kedatangan *(arrival rate)* pada contoh Gambar 2.7 diperoleh:

$$\lambda = \frac{N}{I} = \frac{10}{4} = 2,5\ \frac{customer}{jam}$$

Jadi, rata-rata laju kedatangan adalah 5 customer dalam 2 jam , maka rata-rata interval kedatangan antara satu *customer* dengan *customer* yang lain adalah:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2,5}\frac{jam}{customer} = \frac{60}{2,5}\frac{menit}{customer} = 24\frac{menit}{customer}$$

Dengan demikian, jika λ menyatakan rata-rata laju kedatangan *customer* per interval waktu, maka $1/\lambda$ menyatakan rata-rata waktu antar kedatangan *customer*.

6. Tingkat Pelayanan

Rata-rata waktu pelayanan *(mean server rate)* diberi simbol μ (mu) merupakan banyaknya *customer* yang dapat dilayani dalam satuan waktu. Lain halnya dengan rata-rata waktu yang dipergunakan untuk melayani setiap *customer* diberi simbol $1/\mu$ satuan (Kakiay, 2004, p. 11). Misalnya, kapasitas fasilitas suatu pelayanan mampu melayani 4 *customer* per jam. Artinya rata-rata tingkat pelayanan adalah $\mu = 4$ *customer*/jam, maka rata-rata waktu pelayanan setiap *customer* adalah:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{4}\frac{jam}{customer}$$

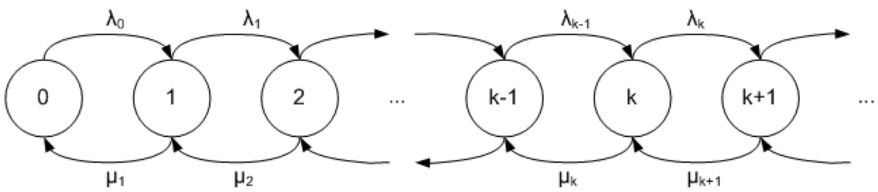
Selanjutnya, apabila rata-rata waktu antar pelayanan $1/\mu$ dalam satuan waktu per *customer* mengikuti distribusi Eksponensial, maka rata-rata pelayanan (μ) dalam *customer* per satuan waktu mengikuti distribusi Poisson (Siswanto, 2007, p. 221).

C. Model- Model Antrean

Bagian ini membahas sejumlah model antrean yang mencakup berbagai operasi pelayanan. Pembahasan ini terdiri dari: proses kelahiran dan kematian murni; model kelahiran murni; model kematian murni; *Quasy Birth-Death* (QBD) *Process*; solusi *steady-state* dari kinerja sistem antrean; dan antrean Poisson khusus *(M/M/c):(GD/∞/∞)*.

1. Proses Kelahiran dan Kematian *(Birth and Death)*

Kebanyakan model dasar antrean menganggap bahwa kedatangan (*input)* dan keberangkatan (*output)* dari sistem antrean terjadi menurut proses *birth-death* (kelahiran-kematian). Kelahiran adalah kedatangan *calling unit* yang baru dalam sistem antrean, sedangkan kematian adalah keberangkatan unit yang telah dilayani. Proses kelahiran dan kematian terjadi secara acak yang rata-rata terjadinya bergantung pada keadaan yang sedang berlangsung *(current state)* dari sistem (Dimyati & Dimyati, 2002, p. 356).



Gambar 2.8 Diagram Proses Kelahiran dan Kematian

Berikut ini merupakan penjelasan tentang proses kelahiran dan kematian:

1) *Birth postulate*

Sistem pada *state* $E_n(n = 0, 1, 2 \ldots)$ pada saat *t*, probabilitas bahwa tepat ada satu kelahiran selama interval waktu *t* sampai dengan $(t + \Delta t)$ adalah $[\lambda_n \, \Delta t + 0(\Delta t)]$, dimana λ_n positif konstan.

2) *Death postulate*

Sistem pada *state* $E_n(n = 0, 1, 2 \ldots)$ pada saat *t*, probabilitas bahwa tepat ada satu kematian selama interval waktu *t* sampai dengan $(t + \Delta t)$ adalah $[\mu_n \, \Delta t + 0(\Delta t)]$, dimana $\mu_0 = 0$ dan μ_n positif konstan untuk $n > 0$.

3) *Multiple jump postulate*

Sistem pada *state* $E_n(n = 0, 1, 2 \ldots)$ pada saat *t*, probabilitas bahwa jumlah kombinasi kelahiran dan kematian lebih dari satu selama interval waktu *t* sampai $(t + \Delta t)$ adalah $0(\Delta t)$ (keterangan: $0(\Delta t)$ adalah fungsi dari Δt yang mendekati nol). Dengan demikian, fungsi tersebut memenuhi persamaan:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{0(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

Sebagai akibat *postulate* ketiga, maka *postulate* pertama diasumsikan tepat ada 1 kelahiran dan tanpa kematian. Keadaan yang sama berlaku juga untuk *postulate* kedua yaitu ada 1 kematian dan tanpa kelahiran.

Proses kelahiran dan kematian selama interval waktu *t* sampai dengan $(t + \Delta t)$ harus terjadi salah satu dari kejadian *mutually exclusive* (saling lepas/saling asing/saling meniadakan) berikut:

1) Tepat ada 1 kelahiran tanpa kematian
2) Tepat ada 1 kematian tanpa kelahiran
3) Jumlah kelahiran dan kematian lebih besar dari 1
4) Tidak ada kelahiran atau kematian

Jumlah probabilitas kejadian tersebut adalah 1, sehingga probabilitas terjadi kejadian (4) adalah:

$$P(4) = 1 - [P(3) + P(2) + P(1)]$$

Dengan demikian, sistem dengan *state* $E_n(n = 0, 1, 2 \ldots)$ pada saat *t* probabilitas bahwa tidak terjadi kelahiran dan kematian pada interval waktu *t* sampai dengan $(t + \Delta t)$ adalah:

$$[1 - (\lambda_n \Delta t) - (\mu_n \Delta t) + 0(\Delta t)]$$

Probabilitas kejadian dapat mencapai *state* E_n pada saat *t* sampai $(t + \Delta t)$ dengan *n* > 0 yaitu:

Tabel 2.1 Probabilitas kejadian *mutually exclusive*

State pada saat *t*	Kejadian dari *t* sampai $(t+\Delta t)$		Probabilitas
	Kelahiran	Kematian	
E_{n-1}	1	0	$P_{n-1}(t)\ [\lambda_{n-1}\Delta t + 0(\Delta t)]$
E_{n+1}	0	1	$P_{n+1}(t)\ [\mu_{n+1}\Delta t + 0(\Delta t)]$
E_n	1	1	$0(\Delta t)$
E_n	0	0	$P_n(t)\ [1-\lambda_n\Delta t - \mu_n\Delta t + 0(\Delta t)]$

Berdasarkan Tabel 2.1 dengan 4 probabilitas kejadian *mutually exclusive* maka diperoleh:

$$P_n(t+\Delta t) = P_{n-1}(t)[\lambda_{n-1}\Delta t + 0(\Delta t)] + P_{n+1}(t)[\mu_{n+1}\Delta t + 0(\Delta t)] + 0(\Delta t) + P_n(t)[1-\lambda_n\Delta t - \mu_n\Delta t + 0(\Delta t)]$$

Selanjutnya, proses penggabungan $0(\Delta t)$

$$P_n(t+\Delta t) = P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}\Delta t + P_{n+1}(t)\mu_{n+1}\Delta + P_n(t)[1-\lambda_n\Delta t - \mu_n\Delta t] + 0(\Delta t)$$

Kedua ruas kemudian dikurangi oleh $P_n(t)$ dan dibagi oleh Δt, sehingga diperoleh:

$$\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = P_{n-1}(t)\lambda_{n-1} + P_{n+1}(t)\mu_{n+1} + P_n(t)[-\lambda_n - \mu_n] + \frac{0(\Delta t)}{\Delta t}$$

Untuk Δt positif, maka berlaku:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t\to 0}\left\{\begin{matrix} P_{n-1}(t)\lambda_{n-1} + P_{n+1}(t)\mu_{n+1} + \\ P_n(t)[-\lambda_n - \mu_n] + \dfrac{0(\Delta t)}{\Delta t} \end{matrix}\right\} \quad (2.20)$$

dengan mengingat kembali tentang definisi turunan berikut:

$$f'(x) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

maka persamaan (2.20) berubah menjadi:

$$P_n'(t) = \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)P_n(t)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)P_n(t), n > 0 \qquad (2.21)$$

Jika $n = 0$ maka nilai $\lambda_{-1} = 0$ dan $\mu_0 = 0$, sehingga diperoleh persamaan (2.21) yaitu:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu_1 P_1(t) - \lambda_0 P_0(t) \qquad (2.22)$$

2. Model Kelahiran Murni

Asumsikan bahwa $\lambda_n = \lambda$ dan $\mu_n = 0$ untuk seluruh n (n = 0, 1, 2,…). Keadaan ini menunjukkan bahwa kematian tidak akan pernah terjadi, sehingga prosesnya menjadi proses kelahiran murni dengan tingkat kedatangan konstan. Persamaan differensial dari persamaan (2.21) untuk kelahiran murni menjadi:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda\, P_0(t)\,, \qquad \text{untuk } n = 0 \qquad (2.23)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t), \qquad \text{untuk } n = 1, 2, \ldots \qquad (2.24)$$

Selanjutnya, diasumsikan bahwa sistem dalam *state* E_0 pada saat t = 0, maka didapatkan:

$$P_o(t) = e^{-\lambda t}\,, \qquad \text{untuk } n = 0$$

Jika n = 1, maka dengan menggunakan persamaan (2.24) diperoleh:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda\, P_0(t) - \lambda\, P_1(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda\, P_1(t) = \lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda\, P_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Kemudian kedua ruas dikalikan dengan $e^{\lambda t}$, maka diperoleh

$$e^{\lambda t}\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda e^{\lambda t} P_1(t) = \lambda$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} P_1(t)\right) = \lambda$$

Kedua ruas tersebut kemudian diintegralkan, sehingga diperoleh persamaan

$$e^{\lambda t} P_1(t) = \int \lambda\, dt$$

$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} + c$, karena P_1 adalah fungsi probabilitas maka nilai c yang memenuhi adalah 0. Sehingga didapatkan nilai P_1 yaitu :

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} \tag{2.25}$$

Jika n = 2, dengan menggunakan persamaan (2.24) diperoleh:

$$\frac{dP_{2(t)}}{dt} = \lambda P_1(t) - \lambda P_2(t)$$

$$\frac{dP_{2(t)}}{dt} = \lambda^2 t e^{-\lambda t} - \lambda P_2(t)$$

$$\frac{dP_{2(t)}}{dt} + \lambda P_2(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$$

Selanjutnya mengalikan kedua ruas dengan $e^{\lambda t}$, sehingga diperoleh:

$$e^{\lambda t}\frac{dP_{2(t)}}{dt} + \lambda e^{\lambda t} P_2(t) = \lambda^2 t$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} P_2(t)\right) = \lambda^2 t$$

Mengintegralkan kedua ruas tersebut, sehingga diperoleh:

$$e^{\lambda t}P_2(t) = \frac{1}{2}\lambda^2 t^2 + c$$

$P_2(t) = \frac{1}{2}\lambda^2 t^2 e^{-\lambda t} + ce^{-\lambda t}$, karena P_2 adalah fungsi probabilitas maka c = 0. Sehingga diperoleh nilai P_2 yaitu:

$$P_2(t) = \frac{1}{2}\lambda^2 t^2 e^{-\lambda t} \tag{2.26}$$

Berdasarkan persamaan (2.25) dan persamaan (2.26), maka dapat diperoleh rumus umum sebagai berikut:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n\,!} \tag{2.27}$$

Ingat kembali bahwa distribusi kemungkinan untuk *n* adalah distribusi Poisson dengan parameter λt. Sehingga harga rata-rata dan variansi dari panjang garis pada saat *t* adalah λt dengan rata-rata laju kedatangan λ. Selanjutnya, misalkan *n* merupakan kedatangan *customer* digantikan dengan simbol *x*, maka probabilitas untuk *x customer* yaitu:

$$P_x(t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x\,!}, \;\; x = 0, 1, 2 \ldots \tag{2.28}$$

3. Model Kematian Murni

Asumsikan bahwa $\lambda_n = 0$ untuk *n* = 0, 1, 2, . . . dan $\mu_n = \mu$ untuk *n* = 1, 2, 3, ... Asumsikan juga bahwa sistem dalam keadaan *state* E_N pada saat *t* = 0. Pada asumsi pertama menyatakan kelahiran tidak pernah terjadi, sehingga hanya terdapat kematian murni dengan tingkat pelayanan konstan sampai berakhir pada *state* E_0 (Dimyati & Dimyati, 2002, p. 360). Dengan demikian proses ini ekuivalen dengan kelahiran murni, kecuali proses ini bergerak dalam arah berlawanan, dan berhenti setelah *N* kejadian.

Persamaan diferensial untuk proses kematian murni yaitu:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \mu P_{n+1}(t) - \mu P_n(t), \qquad \text{untuk } n = 0, 1, 2, .., N \qquad (2.29)$$

$$\frac{dP_N(t)}{dt} = -\mu P_N(t), \qquad \text{untuk } n \approx N \qquad (2.30)$$

(N-n) adalah jumlah kejadian kematian yang telah terjadi dalam proses. Sehingga probabilitas bahwa tidak ada kejadian terjadi pada saat *t* adalah:

$$P_N(t) = e^{-\mu t} \qquad (2.31)$$

Selanjutnya mencari probabilitas bahwa *(N-n)* kejadian telah terjadi, dimana $(N - n) < N$. Misalkan n = *N-1*, maka dengan menggunakan persamaan (2.30) diperoleh:

$$\frac{dP_{N-1}(t)}{dt} = \mu P_N(t) - \mu P_{N-1}(t)$$

$$\frac{dP_{N-1}(t)}{dt} + \mu P_{N-1}(t) = \mu P_N(t)$$

$$\frac{dP_{N-1}(t)}{dt} + \mu P_{N-1}(t) = \mu e^{-\mu t}$$

Kedua ruas persamaan di atas kemudian dikalikan dengan $e^{\mu t}$, sehingga diperoleh:

$$e^{\mu t}\frac{dP_{N-1}(t)}{dt} + \mu e^{\mu t}P_{N-1}(t) = \mu$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\mu t}P_{N-1}(t)) = \mu$$

Selanjutnya kedua ruas diintegralkan, sehingga diperoleh:

$$e^{\mu t}P_{N-1}(t) = \int \mu\, dt$$

$e^{\mu t}P_{N-1}(t) = \mu t + c$, karena P_{N-1} adalah fungsi probabilitas maka c= 0.

Jadi diperoleh nilai P_{N-1} yaitu

$$P_{N-1}(t) = \mu t e^{-\mu t} \tag{2.32}$$

Jika n = N-2, maka dengan menggunakan persamaan (2.29) diperoleh:

$$\frac{dP_{N-2}(t)}{dt} = \mu P_{N-1}(t) - \mu P_{N-2}(t)$$

$$\frac{dP_{N-2}(t)}{dt} + \mu P_{N-2}(t) = \mu P_{N-1}(t)$$

$$\frac{dP_{N-2}(t)}{dt} + \mu P_{N-2}(t) = \mu^2 t e^{-\mu t}$$

Kedua ruas persamaan tersebut kemudian dikalikan dengan $e^{\mu t}$, maka diperoleh:

$$e^{\mu t}\frac{dP_{N-2}(t)}{dt} + \mu e^{\mu t}P_{N-2}(t) = \mu^2 t$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\mu t}P_{N-2}(t)) = \mu^2 t$$

Selanjutnya kedua ruas diintegralkan, sehingga diperoleh:

$$e^{\mu t}P_{N-2}(t) = \int \mu^2 t\ \ dt$$

$$e^{\mu t}P_{N-2}(t) = \frac{1}{2}\mu^2 t^2 + c$$

$P_{N-2}(t) = \frac{1}{2}\mu^2 t^2 e^{-\mu t} + c\ e^{-\mu t}$, karena P_{N-2} adalah fungsi probabilitas maka c = 0. Jadi diperoleh nilai P_{N-2} yaitu:

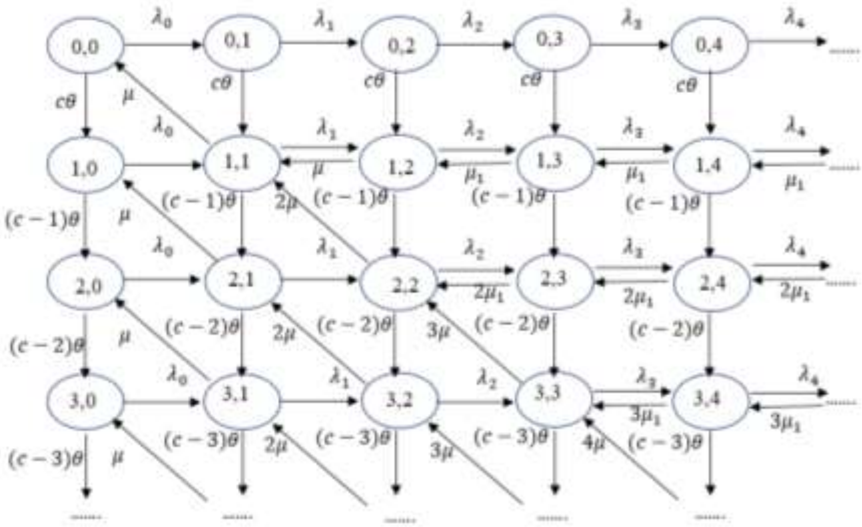
$$P_{N-2}(t) = \frac{1}{2}(\mu t)^2 e^{-\mu t} \tag{2.33}$$

Berdasarkan persamaan (2.32) dan (2.33), maka diperoleh rumus umum probabilitas untuk kematian murni yaitu:

$$P_N(t) = \frac{(\mu t)^{N-n} e^{-\mu t}}{(N-n)!} \tag{2.34}$$

4. *Quasy Birth- Death* (QBD) *Process*

Quasi Birth-Death (QBD) *process* merupakan generalisasi dari *Birth-Death Process* dari suatu *state space* berdimensi satu menjadi *state space* berdimensi lebih dari satu. Sistem antrean Markovian dapat dimodelkan dengan *Quasi Birth-Death* (QBD) *process* dengan menggunakan *Matrix Analytical Method* (MAM).



Gambar 2.9 Diagram *Quasy Birth- Death* (QBD) *Process*

Untuk sebuah proses Markov berdimensi dua $\{(L_v(t), J(t)), t \geq 0\}$ dengan *state space*

$$\Omega = \{(k,j) : k \geq 0, 1 \leq j \leq m\}$$

Dimana k merupakan level dari proses, j merupakan fase proses, dan m suatu bilangan bulat berhingga atau tak berhingga, memiliki matriks generator infinitesimal sebagai berikut:

$$Q = \begin{bmatrix} A_0 & C_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ B_1 & A_1 & C_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & B_2 & A_2 & C_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & B & A & C & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

Matriks Q memiliki elemen diagonal bernilai negatif dan elemen non-diagonal bernilai positif. Untuk sebuah sistem dengan c *server*, tidak hanya berlevel $k = 0$ tetapi $k = 1, 2, \ldots, c - 1$. Dapat dinotasikan *state* ke k dengan m_k, $0 \leq k \leq c - 1$. Submatriks-submatriks matriks generator infinitesimal Q adalah sebegai berikut:

$$A_0 = -\lambda$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -(\lambda + 2\theta) & 2\theta \\ 0 & -(\lambda + \mu) \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -(\lambda + 3\theta) & 3\theta & 0 \\ 0 & -(\lambda + \mu + 2\theta) & 2\theta \\ 0 & 0 & -(\lambda + 2\mu + \theta) \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A_k = \begin{bmatrix} -h_0 & c\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h_1 & (c-1)\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_{k-1} & (c-k+1)\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\lambda + k\mu + (c-k)\theta) \end{bmatrix}_{(k+1)\times(k+1)} \tag{2.36}$$

Dengan $h_k = \lambda + \mu k + (c-k)\theta$ untuk $1 \leq k \leq c - 1$

$$A = \begin{bmatrix} -h_0 & c\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h_1 & (c-1)\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_{c-1} & \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h_c \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

Dengan $h_k = \lambda + \mu k + (c-k)\theta$ untuk $1 \leq k \leq c-1$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu \\ 0 & 2\mu \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (k-1)\mu \\ 0 & 0 & 0 & k\mu \end{bmatrix}_{(k+1)\times k} \tag{2.38}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & (c-1)\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c\mu \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$C_k = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix}_{(k+1)\times(k+2)} \tag{2.40}$$

$$C = \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

Suatu *Quasi Birth-Death* (QBD) *process* yang memiliki *state-state* yang saling terhubung disebut dengan *Quasi Birth-Death* (QBD) *process* yang *irreducible*. Dalam menganalisis suatu *Quasi Birth-Death* (QBD) *process*, terlebih dahulu dicari solusi non-negatif minimum dari suatu persamaan matriks kuadratik sebagai berikut:

$$R^2B + RA + C = 0 \tag{2.42}$$

(Tian & Zhang, 2006, p. 198)

Matriks $\boldsymbol{R}$ disebut dengan *rate matrix* yang mempunyai entri-entri nonnegatif dengan struktur sebagai berikut:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_0 & r_{0,1} & \cdots & r_{0,c} \\ 0 & r_1 & \cdots & r_{1,c} \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & r_c \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

Selain persamaan (2.42) memiliki solusi non-negatif, persamaan (2.42) juga dapat dibentuk menjadi persamaan linier homogen

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{c-1}, \pi_c)B[R] = 0 \tag{2.44}$$

yang mempunyai solusi positif, dimana

$$B[\boldsymbol{R}] = \begin{bmatrix} A_0 & C_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & A_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{c-1} & A_{c-1} & C_{c-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_c & A_c & A + RB \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

5. Solusi *Steady State* dari Kinerja Sistem Antrean

Menurut Dimyati & Dimyati (2002, pp. 361-362), jika sistem antrean mencapai kondisi *steady state* maka probabilitas $\{P_n(t)\}$ menjadi konstan dan independen terhadap waktu. Solusi *steady state* untuk P_n dapat diperoleh melalui 2 pendekatan, antara lain:

1) Dengan menyelesaikan $P_n(t)$ dalam kasus transien dengan $t \to \infty$
2) Dengan menetapkan

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$$

Solusi transien tidak dapat digunakan untuk proses kelahiran dan kematian, maka digunakan pendekatan yang kedua dengan mengasumsikan bahwa:

$$\lim_{t\to\infty} P_n(t) = P_n$$

Sehingga:

$$\lim_{t\to\infty} \left\{\frac{dP_n(t)}{dt}\right\} = 0$$

Untuk $t \to \infty$ maka dipereoleh persamaan (2.21) dan persamaan (2.22) menjadi:

$$0 = \lambda_{n-1}P_{n-1} + \mu_{n+1}P_{n+1} - (\lambda_n + \mu_n)P_n \,, \quad \text{jika } n > 0 \qquad (2.46)$$

$$0 = \mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0 \,, \quad \text{jika } n = 0 \qquad (2.47)$$

Jika $n = 0$, maka dengan menggunakan persamaan (2.47) diperoleh:

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 \qquad (2.48)$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (2.46) untuk n = 1, maka diperoleh:

$$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = (\lambda_1 + \mu_1) P_1 \tag{2.49}$$

Substitusikan persamaan (2.48) ke dalam persamaan (2.49), sehingga diperoleh persamaan:

$$P_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0 \tag{2.50}$$

Berdasarkan persamaan (2.48) dan persamaan (2.50), diperoleh rumus umum yaitu :

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1} P_0 \tag{2.51}$$

berlaku untuk n =1, 2, 3.

Nilai P_0 ditentukan dengan menggunakan persamaan berikut ini:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \tag{2.52}$$

Ukuran-ukuran *steady state* dari kinerja sistem antrean dengan c= pelayanan parallel, sehingga diperoleh:

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P_n \tag{2.53}$$

$$L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n - c) P_n \tag{2.54}$$

Terdapat hubungan yang kuat antara L_s , L_q, W_s, dan W_q, sehingga salah satu ukuran secara otomasis dapat ditentukan dari ukuran lainnya. Anggap λ_{eff}

adalah rata-rata laju kedatangan efektif (tidak bergantung dengan jumlah sistem *n*), maka:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{eff}} \tag{2.55}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{eff}} \tag{2.56}$$

Hubungan langsung dari ukuran keefektifan juga terdapat antara W_s dan W_q, berdasarkan definisi

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Waktu}\\ \text{menunggu}\\ \text{yang}\\ \text{diperkirakan}\\ \text{dalam sistem}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{Waktu}\\ \text{menunggu}\\ \text{yang}\\ \text{diperkirakan}\\ \text{dalam}\\ \text{antrean}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{Waktu}\\ \text{pelayanan}\\ \text{yang}\\ \text{diperkirakan}\end{array}\right\}$$

Diketahui bahwa μ adalah rata-rata laju pelayanan, maka waktu pelayanan yang diperkirakan adalah $1/\mu$. Dengan demikian diperoleh:

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \tag{2.57}$$

Selanjutnya mensubstitusikan persamaan (2.57) dengan W_s dan W_q serta mengalikan kedua sisi persamaan dengan λ_{eff}, sehingga diperoleh:

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_{eff}}{\mu} \tag{2.58}$$

Pemanfaatan yang diperkirakan dari sebuah sarana pelayanan didefinisikan sebagai fungsi dari banyaknya rata-rata pelayan *(server)* yang sibuk. Karena selisih antara L_s dan L_q harus sama dengan banyaknya pelayan yang sibuk, maka diperoleh:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Jumlah pelayanan sibuk}\\ \text{yang diperkirakan}\end{array}\right\} = \bar{c} = L_s - L_q = \frac{\lambda_{eff}}{\mu} \qquad (2.59)$$

Persentase pemanfaatan sebuah sarana pelayanan dengan c pelayan yang paralel dapat dihitung sebagai:

$$\text{Persentase pemanfaatan} = \frac{\bar{c}}{c} \times 100\% \qquad (2.60)$$

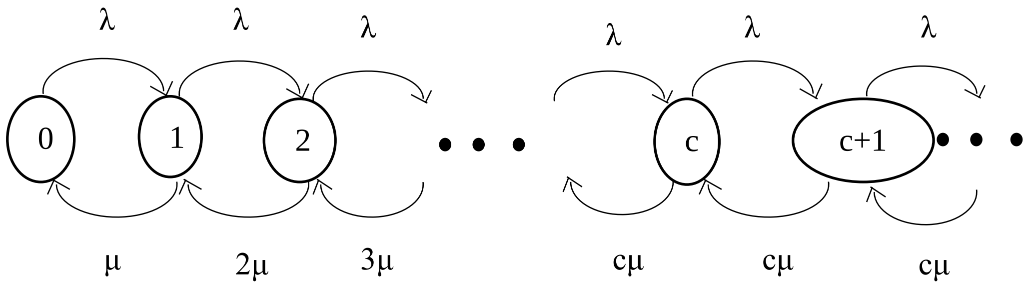
Solusi *steady state* dari kinerja sistem antrean diatas diturunkan dengan asumsi bahwa parameter-parameter λ_n dan μ_n adalah sedemikian sehingga kondisi *steady state* tercapai. Asumsi ini berlaku jika:

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1 \qquad (2.61)$$

Kondisi stabil (*steady state)* dapat terpenuhi jika $\rho < 1$ yang berarti $\lambda < \mu$. Jika nilai $\rho > 1$ maka kedatangan terjadi dengan laju yang lebih cepat dari pada yang dapat dilayani *server*. Keadaan ini menunjukkan bahwa panjang antrean yang diharapkan bertambah tanpa batas sehingga tidak *steady state*. Demikian juga jika $\rho = 1$, maka kedatangan terjadi dengan laju yang sama dengan laju pelayanan.

6. Antrean Poisson Khusus *(M/M/c):(GD/∞/∞)*

Pada model *(M/M/c):(GD/∞/∞)* kedatangan *customer* berdistribusi Poisson dengan rata-rata λ. Selain itu, terdapat *c server* dimana setiap *server* independen dan diidentifikasi waktu antar pelayanan (1/μ) berdistribusi Eksponensial (Gross, Shortle, Thompson, & Harris, 2008, pp. 66-67). Berikut ini merupakan diagram yang menggambarkan tentang model *(M/M/c):(GD/∞/∞)*:



Gambar 2.10 Diagram tingkat perpindahan model *(M/M/c):(GD/∞/∞)*

Seperti antrean *(M/M/c):(GD/∞/∞)* dapat dimodelkan sebagai proses kelahiran-kematian (Gambar 2.8). Dalam model ini, rata-rata laju kedatangan (λ) dan rata-rata laju pelayanan (μ) *customer* konstan. Selain itu juga terdapat maksimum *c (server)*, sehingga *customer* dapat dilayani secara bersamaan. Selanjutnya dari pembahasan pada bagian sebelumnya, yaitu solusi *steady state* dari kinerja sistem antrean dapat disimpulkan bahwa $\lambda_{eff} = \lambda$.

Pengaruh penggunaan *c server* yang paralel adalah mempercepat laju pelayanan dengan memungkinkan dilakukannya beberapa pelayanan secara bersamaan. Jika banyaknya *customer* dalam sistem sebanyak *n*, sama dengan atau lebih besar dari *c*, maka laju pelayanannya dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\lambda_n = \lambda\,, \qquad n \geq 0$$

$$\mu_n \begin{cases} n\mu, & n \leq c \\ c\mu, & n \geq c \end{cases}$$

Perhitungan P_n untuk $n \leq c$ dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$P_n = \rho^n P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)(3\mu)\ldots(n\mu)} P_0$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} P_0 \qquad (2.62)$$

dan P_n untuk $n \geq c$ yaitu:

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)\ldots(c-1)\mu(c\mu)(c\mu)\ldots(c\mu)} P_0$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\mu^n} P_0 \qquad (2.63)$$

Jadi, dari persamaan (2.62) dan persamaan (2.63) diperoleh persamaan:

$$P_n \begin{cases} \left(\frac{\rho^n}{n!}\right) P_0 & 0 \leq n \leq c \\ \left(\frac{\rho^n}{c^{n-c}c!}\right) P_0 & n > c \end{cases} \qquad (2.64)$$

Dengan menganggap bahwa $\rho = \lambda/\mu$. Nilai P_0 didapatkan dengan cara mensubstitusikan persamaan (2.64) ke dalam persamaan $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ seperti berikut:

$$P_0 \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\rho^n}{c^{n-c}c!} \right\} = 1$$

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\rho^{n-c}}{c^{n-c}} \right\}^{-1}$$

Jika dimisalkan $j = n - c$, maka diperoleh persamaan:

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^j \right\}^{-1}$$

karena $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^j$ merupakan deret geometri tak hingga, maka:

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \left(\frac{1}{1 - \rho/c}\right) \right\}^{-1}, \qquad \frac{\rho}{c} < 1 \qquad (2.65)$$

Selanjutnya, menentukan ukuran keefektifan yang terdiri atas L_q, L_s, W_q, dan W_s . Nilai L_q dapat dicari dengan menggunakan persamaan (2.54) berikut:

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty} (n - c) P_n$$

Jika dimisalkan $k = n - c$ dan mensubstitusikan persamaan (2.65) ke persamaan (2.54), maka diperoleh:

$$L_q = \sum_{k=0}^{\infty} k P_{k+c}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \rho^{k+c}}{c^k c!} P_0$$

$$L_q = P_0 \frac{\rho^c}{c!} \frac{\rho}{c} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{\rho}{c}\right)^{k-1}$$

Dimana

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{\rho}{c}\right)^{k-1} = \frac{d}{d\left(\frac{\rho}{c}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^k = \frac{d}{d\left(\frac{\rho}{c}\right)} \left[\frac{1}{1 - \frac{\rho}{c}}\right] = \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{c}\right)^2}$$

Sehingga diperoleh persamaan:

$$L_q = P_0 \frac{\rho^c}{c!} \frac{\rho}{c} \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{c}\right)^2}$$

$$= \left[\frac{\rho^{c+1}}{c!\, c \left(\frac{c-\rho}{c}\right)^2} \right] P_0$$

$$= \left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\, c^2 \frac{(c-\rho)^2}{c^2}} \right] P_0$$

$$L_q = \left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\, (c-\rho)^2} \right] P_0 \qquad (2.66)$$

Selanjutnya, menentukan nilai L_s dengan cara mensubstitusikan persamaan (2.66) ke dalam persamaan (2.58), sehingga diperoleh persamaan:

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= L_q + \rho$$

$$L_s = \left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\, (c-\rho)^2} \right] P_0 + \rho \qquad (2.67)$$

Nilai W_q dapat ditentukan dengan mensubstitusikan persamaan (2.66) ke dalam persamaan (2.56), seperti berikut

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W_q = \frac{\left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\, (c-\rho)^2} \right] P_0}{\lambda}$$

$$= \frac{\lambda \rho^c}{\mu (c-1)!\, (c-\rho)^2} P_0 \times \frac{1}{\lambda}$$

$$W_q = \frac{\rho^c}{\mu(c-1)!\,(c-\rho)^2} P_0 \qquad (2.68)$$

Nilai W_s ditentukan dengan mensubstitusi persamaan (2.68) ke dalam persamaan (2.57), sehingga diperoleh:

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$W_s = \frac{\rho^c}{\mu(c-1)!\,(c-\rho)^2} P_0 + \frac{1}{\mu} \qquad (2.69)$$

Dengan demikian, dapat dicari banyaknya pelayanan yang sibuk atau kepadatan *customer* ($\bar{c}$) dengan mensubstitusikan persamaan (2.66) dan persamaan (2.67) ke dalam persamaan (2.59), sehingga diperoleh persamaan:

$$\bar{c} = \left\{\left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\,(c-\rho)^2}\right] P_0 + \ \rho\right\} - \left\{\left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\,(c-\rho)^2}\right] P_0\right\} = \rho \qquad (2.70)$$

D. Uji Distribusi Kolmogorov-Smirnov

Tes statistik nonparametrik adalah tes yang memiliki model tidak menetapkan syarat-syarat mengenai parameter-parameter populasi yang merupakan induk sampel penelitian. Observasi independen dan variabel yang diteliti pada dasarnya memiliki kontinuitas. Salah satu tes statistik nonparametrik adalah tes Kolmogorov-Smirnov. Tes Kolmogorov-Smirnov merupakan suatu tes *goodness-of-fit*, yaitu tingkat kesesuaian antara distribusi serangkaian harga sampel (nilai yang diobservasi) dengan suatu distribusi tertentu misalnya distribusi Poisson. (Siegel, 1992, p. 38).

Misalkan $F_0(X)$ ialah suatu fungsi distribusi frekuensi kumulatif yang sepenuhnya ditentukan dari suatu distribusi Poisson. $S_N(X)$ adalah distribusi frekuensi kumulatif yang diobservasi dari suatu sampel acak dengan N observasi. Dari distribusi teoritis dapat ditarik asumsi bahwa dibawah H_0, diharapkan untuk setiap nilai X, $S_N(X)$ harus mendekati $F_0(X)$. Jadi, dibawah asumsi H_0 diharapkan selisih antara $S_N(X)$ dan $F_0(X)$ kecil dan ada dalam batas-batas kesalahan acak (Siegel, 1992, p. 59).

Tes Kolmogorov-Smirnov menitik beratkan pada penyimpangan (deviasi) terbesar. Nilai $F_0(X) - S_N(X)$ terbesar disebut deviasi maksimum, yang dirumuskan:

$$D = maksimum|F_0(X) - S_N(X)| \qquad (2.71)$$

Tes ini memperlihatkan dan menyelesaikan suatu observasi terpisah dari yang lain. Sehingga tidak akan kehilangan informasi karena kategori-kategori yang digabungkan. Bisa digunakan baik sampel kecil ($N \leq 25$) maupun besar ($N > 25$). Kekuatan dari tes Kolmogorov-Smirnov lebih besar dalam semua kasus dibandingkan dengan tes lain seperti tes χ^2.

E. *Vacation*

Dalam sebuah sistem antrean akan terdapat individu yang datang untuk mendapatkan pelayanan yang disebut dengan *customer*, juga individu yang akan memberikan pelayanan kepada pelanggan yang disebut dengan *server*. Sebuah sistem antrean yang memiliki satu *server* disebut dengan *single server* sedangkan sistem antrean dengan lebih dari satu *server* disebut *multiserver*. Dalam menjalankan tugasnya untuk melayani pelanggan, para *server* mungkin saja mempunyai tugas sekunder. Salah satu *server* yang terdapat di bank adalah *customer service*. Tugas *customer service* selain melayani *customer* atau pelanggan juga mempunyai tugas sekunder saat tidak melayani *customer* seperti merapikan data *customer* tersebut, memeriksa kembali mesin hitung yang digunakan, ataupun beristirahat sejenak. Sehingga ketika *server* tersebut melakukan tugas sekunder ataupun saat *server* tidak melayani pelanggan pada jam operasional, *server* disebut sedang melakukan *vacation*. *Vacation* dapat dianggap sebagai waktu istirahat *server*, waktu bagi *server* ketika melakukan tugas sampingan, atau gangguan teknis pada saat melakukan pelayanan (Tian & Zhang, 2006, p. 193).

Apabila hanya terdapat satu *server* pada sistem antrean, maka menggunakan *Single Server Vacation Models*. Tetapi apabila terdapat lebih dari satu *server* pada sistem antrean, maka digunakan *Multiserver Vacation Models*. Pada penulisan skripsi ini hanya akan dibahas mengenai model antrean *multiserver* dengan *vacation* yang dilakukan beberapa kali oleh satu atau lebih *server* secara tidak bersamaan. Model antrean yang demikian disebut *Asynchronous Multiple Vacation Model* (AS, MV).

Diasumsikan bahwa laju pelayanan (μ), laju kedatangan *customer* (λ), dan waktu *vacation* (θ) ketiganya saling bebas. Diberikan $L_v(t)$ adalah banyak pelanggan dalam sistem pada waktu t, dan diberikan $J(t)$ adalah banyak *server* yang bekerja atau tidak melakukan *vacation* pada waktu t. Sehingga $\{(L_v(t), J(t)), t \geq 0\}$ adalah sebuah *Quasi Birth Death (QBD)*.

F. Antrean M/M/c dengan *Multiple Asynchronous Vacation* (AS, MV)

Antrean M/M/c dengan *Multiple Asynchronous Vacation* adalah sistem antrean dengan *server* lebih dari satu, dimana *server-server* dalam sistem antrean tersebut melakukan beberapa *vacation* dengan tidak serempak. Sedangkan bila *server-server* tersebut melakukan *vacation* beberapa kali dengan serempak maka *server* tersebut melakukan apa yang disebut dengan *Multiple Synchronous Vacation*. Dalam skripsi ini diambil studi kasus pada sistem antrean di PT Bank BPD DIY Kantor Cabang Sleman sehingga model antrean yang digunakan adalah antrean M/M/c dengan *Multiple Asynchronous Vacation*.

Sistem antrean rata-rata kedatangan dilambangkan dengan λ dan rata-rata waktu pelayanan dilambangkan dengan μ. Diasumsikan bahwa waktu *vacation* mengikuti distribusi Eksponensial dengan parameter θ. Satu atau lebih server melakukan *vacation* mengikuti aturan (AS,MV). Dengan demikian model antrian M/M/c (AS,MV) dapat dipandang sebagai suatu *QBD Process* yang mempunyai generator infinitesimal berikut

$$Q = \begin{bmatrix} A_0 & C_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ B_1 & A_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & B_2 & A_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & B_{c-1} & A_{c-1} & C_{c-1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & A & C & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & A & C & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & A & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}$$

1. *Rate Matrix* R

Rate matrix ***R*** merupakan matriks yang memiliki entri-entri non-negatif. *Rate matrix* ***R*** digunakan untuk mencari solusi non-negatif minimum dari suatu persamaan matriks kuadratik (2.42) dalam suatu *Quasi Birth and Death Process.* Entri-entri diagonal *rate matrix* ***R*** dapat dicari dengan mensubstitusikan $k\mu$, $\lambda + k\mu + (c-k)\theta$, dan λ yang berturut-turut merupakan entri pada kolom terakhir dan baris terakhir dari matriks A_k, B_k, dan C_k ke dalam persamaan (2.42), sehingga diperoleh persamaan:

$$k\mu r^2 - [\lambda + k\mu + (c-k)\theta]r + \lambda = 0, \quad 1 \leq k \leq c \qquad (2.72)$$

r merupakan entri dari *rate matrix* **R**.

Teorema 3.1 (Tian & Zhang, 2006, p. 222)

Pada kondisi steady-state, persamaan:

$$k\mu r^2 - [\lambda + k\mu + (c-k)\theta]r + \lambda = 0, \quad 1 \leq k \leq c \qquad (2.73)$$

Mempunyai dua akar, yaitu $r_k < r^*_k$ *dan* $0 < r_k < 1, r_k^* \geq 1$

Bukti :

Akar-akar dari persamaan (2.72) dapat dicari dengan menggunakan rumus abc sebagai berikut:

$$a = k\mu$$

$$b = -[\lambda + k\mu + (c-k)\theta]$$

$$c = \lambda$$

$$r^*_k, r_k = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Maka

$$r^*{}_k = \frac{\lambda + k\mu + (c-k)\theta + \sqrt{(\lambda + k\mu + (c-k)\theta)^2 - 4k\mu\lambda}}{2k\mu} \qquad (2.74)$$

dan

$$r_k = \frac{\lambda + k\mu + (c-k)\theta - \sqrt{(\lambda + k\mu + (c-k)\theta)^2 - 4k\mu\lambda}}{2k\mu} \qquad (2.75)$$

Berdasarkan persamaan (2.74) dan persamaan (2.75) dapat ditentukan rumus untuk $r^*{}_{k+1}$ dan r_{k+1}, yaitu:

$$r^*{}_{k+1} = \frac{\lambda + (k+1)\mu + (c-k-1)\theta}{2(k+1)\mu} + \frac{\sqrt{(\lambda + (k+1)\mu + (c-k-1)\theta)^2 - 4(k+1)\mu\lambda}}{2(k+1)\mu} \qquad (2.76)$$

$$r_{k+1} = \frac{\lambda + (k+1)\mu + (c-k-1)\theta}{2(k+1)\mu} - \frac{\sqrt{(\lambda + (k+1)\mu + (c-k-1)\theta)^2 - 4(k+1)\mu\lambda}}{2(k+1)\mu} \qquad (2.77)$$

Selanjutnya persamaan (2.76) dikalikan dengan $(k + 1)\mu$, sehingga diperoleh persamaan:

$$(k+1)\mu r^*{}_{k+1} = \frac{\lambda + (k+1)\mu + (c-k-1)\theta}{2} + \frac{\sqrt{(\lambda + (k+1)\mu + (c-k-1)\theta)^2 - 4(k+1)\mu\lambda}}{2} \qquad (2.78)$$

Selanjutnya persamaan (2.77) dikalikan dengan $(k + 1)\mu$, sehingga diperoleh persamaan:

$$(k+1)\mu r_{k+1} = \frac{\lambda + (k+1)\mu + (c-k-1)\theta}{2} - \frac{\sqrt{(\lambda + (k+1)\mu + (c-k-1)\theta)^2 - 4(k+1)\mu\lambda}}{2} \tag{2.79}$$

Substitusikan persamaan (2.79) ke dalam persamaan (2.78), sehingga diperoleh persamaan:

$$(k+1)\mu r^*_{k+1} = \frac{2[\lambda + (k+1)\mu + (c-k-1)\theta]}{2} - (k+1)\mu r_{k+1}$$

$$(k+1)\mu r^*_{k+1} = \lambda + (k+1)\mu + (c-k-1)\theta - (k+1)\mu r_{k+1} \tag{2.80}$$

Nilai dari r_k digunakan untuk mengkonstruksi elemen diagonal dari *rate matrix* **R**. Sedangkan untuk r_0 dan r_c memiliki nilai:

$$r_0 = \lambda(\lambda + c\theta)^{-1} \text{ untuk } 0 \le k \le c-1, k+1 \le j \le c \tag{2.81}$$

$$r_c = \rho \text{ untuk } 0 \le k \le c-1, k+1 \le j \le c \tag{2.82}$$

Sedangkan untuk mencari entri-entri non-diagonal *rate matrix R*, nilai dari entri-entri nondiagonal memenuhi relasi rekursif

$$j\mu \sum_{i=k}^{j} r_{ki} r_{ij} + (c-j-1)\theta r_{k,j-1} - [\lambda + j\mu + (c-j)\theta] r_{kj} = 0$$
$$0 \le k \le c-1, k+1 \le j \le c \tag{2.83}$$

Dimana $r_{ij} = r_j, 0 \le j \le c$.

Dengan menggunakan persamaan (2.83) nilai entri-entri nondiagonal dapat dihitung secara rekursif dari nilai entri-entri pada diagonal matriks. Tentukan $j = k+1$ kemudian substitusikan pada persamaan (2.83), sehingga diperoleh persamaan:

$$j\mu \sum_{i=k}^{j} r_{ki} r_{ij} + (c-j-1)\theta r_{k,j-1} - [\lambda + j\mu + (c-j)\theta] r_{kj} = 0$$

$$(k+1)\mu\left(r_k r_{k,k+1} + r_{k,k+1} r_{k+1}\right) + (c-k)\theta r_k$$
$$- [\lambda + (k+1)\mu + (c-k-1)\theta] r_{k,k+1} = 0$$

$$\begin{aligned}&(k+1)\mu\left(r_k r_{k,k+1} + r_{k,k+1} r_{k+1}\right)\\ &-[\lambda + (k+1)\mu + (c-k-1)\theta] r_{k,k+1} = -(c-k)\theta r_k\end{aligned} \tag{2.84}$$

Dengan $0 \leq k \leq c-1$.

Persamaan (2.83) dikalikan dengan – 1, sehingga diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned}&\{\lambda + (k+1)\mu + (c-k-1)\theta - (k+1)\mu r_k - (k+1)\mu r_{k+1}\} r_{k,k+1}\\ &\quad = (c-k)\theta r_k\end{aligned} \tag{2.85}$$

Substitusikan persamaan (2.80) ke dalam persamaan (2.84), sehingga diperoleh persamaan:

$$r_{k,k+1} = \left(\frac{c-k}{k+1}\right)\left(\frac{\theta}{\mu}\right)\frac{r_k}{{r^*}_{k+1} - r_k}\ untuk\ 0 \leq k \leq c-1 \tag{2.86}$$

Dengan langkah yang sama, substitusikan $j = k+2, k+3, \ldots, k+n$ ke dalam persamaan (2.83), sehingga diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned}r_{k,k+2} &= \frac{(c-k)(c-k-1)}{(k+1)(k+2)}\left(\frac{\theta}{\mu}\right)^2 \frac{r_k {r^*}_{k+2}}{({r^*}_{k+2} - r_{k+1})({r^*}_{k+1} - r_k)}\\ &untuk\ 0 \leq k \leq c-2\end{aligned} \tag{2.87}$$

$$\begin{aligned}r_{k,k+3} &= \frac{(c-k)(c-k-1)(c-k-2)}{(k+1)(k+2)(k+3)}\left(\frac{\theta}{\mu}\right)^3 \ldots\\ &\ldots\frac{r_k {r^*}_{k+3}({r^*}_{k+2}{r^*}_{k+3} - r_k r_{k+1})}{({r^*}_{k+3} - r_{k+2})({r^*}_{k+2} - r_{k+1})({r^*}_{k+1} - r_k)}\\ &untuk\ 0 \leq k \leq c-3\end{aligned} \tag{2.88}$$

$$\vdots$$

$$r_{k,k+n} = \frac{(c-k)(c-k-1)(c-k-2)\dots(c-k-n)}{(k+1)(k+2)(k+3)\dots(k+n)}\left(\frac{\theta}{\mu}\right)^n \dots$$

$$\dots \frac{r_k {r^*}_{k+n}({r^*}_{k+n-1}{r^*}_{k+n} - r_k r_{k+1})}{({r^*}_{k+n} - r_{k+n-1})\dots({r^*}_{k+3} - r_{k+2})({r^*}_{k+2} - r_{k+1})({r^*}_{k+1} - r_k)} \quad (2.89)$$

$$untuk\ 0 \le k \le c - n$$

2. Matriks Generator B[R]

Menurut (Tian & Zhang, 2006, p. 200) *Quasi Birth-Death (QBD) process* yang *irreducible* merupakan suatu positif *recurrent* jika dan hanya jika persamaan matriks (2.42) memiliki solusi non-negatif minimum **R**, dan suatu persamaan linier homogen (2.44).

$$\pi_0 = \pi_{00}, \pi_1 = (\pi_{10}, \pi_{11}), \dots, \pi_k = (\pi_{k0}, \pi_{k1}, \dots, \pi_{k,k})$$

Dan $\pi_{jk} = P\{L_v = k, J = j\} = \lim_{t\to\infty} P\{L_v(t) = k, J(t) = j\}, (k,j) \in \Omega$. Untuk $0 \le k \le c$. Jika $k \ge c$ maka semua merupakan vektor baris berdimensi $c + 1$

$$\pi_k = (\pi_{k0}, \pi_{k1}, \dots, \pi_{k,c})$$

Dari matriks generator Q pada persamaan (2.35), matriks persegi *B*[**R**] dapat dikontruksi seperti pada persamaan (2.45).

B[**R**] merupakan suatu generator *irreducible* untuk *state* berhingga. Selanjutnya distribusi stationernya dapat dinyatakan sebagai matriks geometrik yang berbentuk sebagai persamaan:

$$\pi_k = \pi_c \boldsymbol{R}^{k-c}, k \ge c \quad (2.90)$$

Persamaan (2.90) disebut *modified matrix geometric distribution*. Secara umum representasi dari *matrix geometric distribution* adalah

$$\pi_k = \pi_0 R^k \tag{2.91}$$

Jika $\rho < 1$, maka distribusi dari $\{L_v, J\}$ diberikan oleh:

$$\pi_k = K\beta_k, 0 \leq k \leq c$$

$$\pi_k = K\beta_k \boldsymbol{R}^{k-c}, k \geq c \tag{2.92}$$

(Tian & Zhang, 2006, p. 226)

Dimana $0 \leq k \leq c$ dengan merupakan solusi positif untuk $(0, \beta_c)$, dan konstanta K adalah

$$K = \left\{\sum_{k=0}^{c-1} \beta_k e + \beta_c (I - R)^{-1} e\right\}^{-1}$$

3. Banyaknya *Customer* Dalam Sistem

Misal banyaknya *customer* dalam sistem antrean M/M/c (AS, MV) dinotasikan dengan $L_v^{(c)}$. Nilai banyaknya *customer* yang berada pada sistem antrean M/M/c (AS, MV) merupakan jumlahan dari banyak *customer* pada waktu *server* belum melakukan *vacation* dan banyak *customer* yang datang pada saat *server* melakukan *vacation*, atau dapat dituliskan sebagai persamaan berikut:

$$L_v^{(c)} = L_s + L_d$$

Dengan

L_s : menyatakan nilai harapan banyaknya *customer* pada sistem antrean multi*server* biasa

L_d : menyatakan nilai harapan panjang antrean tambahan saat terjadi penundaan pelayanan sebagai akibat dari adanya *vacation*

Misal sebanyak k *customer* memasuki sistem antrean pada saat d *server* melakukan *vacation.* Menurut (Tian & Zhang, 2006, p. 227) peluang $L_d = k$ didefinisikan sebagai berikut:

$$P\{L_d = k\} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma}\beta_{cc} & k = 0 \\ \frac{1}{\sigma}\delta H^{k-1}\eta & k \geq 1 \end{cases} \tag{2.93}$$

dengan $\sigma = \beta_{cc} + \delta H^{k-1}\eta$ dan $\delta = \beta_{c,0}, \beta_{c,1}, \beta_{c,2}, \ldots, \beta_{c,c-1}$ merupakan vektor baris berdimensi c. Sehingga $\beta_c = (\beta_{c0}, \beta_{c1}, \beta_{c2}, \ldots, \beta_{c,c-1}, \beta_{cc}) = (\delta, \beta_{cc})$, sedangkan $\boldsymbol{H}$ merupakan matriks persegi berukuran $c\ x\ c$ dan η adalah vektor kolom berukuran $c\ x\ 1$ sebagai berikut:

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} r_0 & r_{01} & \cdots & r_{0c-1} \\ 0 & r_1 & \cdots & r_{1c-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & r_{c-1} \end{bmatrix}$$

$$\eta = \begin{bmatrix} r_{0c} \\ r_{1c} \\ \vdots \\ r_{c-1,c} \end{bmatrix}$$

Dengan demikian persamaan (2.93) dapat disederhanakan menjadi:

$$P\{L_d = k\} = \frac{1}{\sigma}\{\beta_{cc} + \delta H^{k-1}\eta\}$$

Selanjutnya akan dicari fungsi pembangkit peluang dari L_d, yaitu:

$$L_d(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k\, P\{L_d = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left(\frac{1}{\sigma}\{\beta_{cc} + \delta \boldsymbol{H}^{k-1}\eta\}\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma}\sum_{k=0}^{\infty} z^k\, \{\beta_{cc} + \delta \boldsymbol{H}^{k-1}\eta\}$$

$$= \frac{1}{\sigma}([z\{\beta_{cc} + \delta\eta\}] + [z^2\{\beta_{cc} + \delta \boldsymbol{H}^1\eta\}] + \cdots)$$

$$L_d(z) = \frac{1}{\sigma}\{\beta_{cc} + z\delta(1 - z\boldsymbol{H})^{-1}\eta\} \tag{2.94}$$

Kemudian dari definisi fungsi pembangkit peluang dan persamaan (2.93) diperoleh nilai harapan L_d adalah:

$$E(L_d) = L'_d(1) = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\delta(I - z\boldsymbol{H})\eta - (z\delta\eta)(-\boldsymbol{H})}{(1 - zH)^2}\right)$$

$$E(L_d) = \frac{1}{\sigma}\delta(1 - \boldsymbol{H})^{-2}\eta$$

Jadi nilai harapan banyaknya *customer* dalam sistem antrean M/M/c (AS, MV) adalah:

$$L_v^{(c)} = L_s + L_d$$

$$L_v^{(c)} = \frac{\rho}{1 - \rho} + \frac{1}{\sigma}\delta(I - \boldsymbol{H})^{-2}\eta \tag{2.95}$$

4. Waktu Tunggu *Customer* Dalam Sistem

Waktu menunggu dalam sistem antrean M/M/c (AS, MV) yang dinotasikan dengan $W_v^{(c)}$, dapat dicari menggunakan *Little's Law* seperti pada sistem antrean M/M/c. Berdasarkan persamaan (2.56) dan persamaan (2.95), dapat ditentukan rumus untuk $W_v^{(c)}$, yaitu:

$$W_v^{(c)} = \frac{L_v^{(c)}}{\lambda}$$

$$W_v^{(c)} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\rho}{1 - \rho} + \frac{1}{\sigma}\delta(I - \boldsymbol{H})^{-2}\eta\right) \tag{2.95}$$

Substitusikan $\lambda = \rho c\mu$ ke dalam persamaan (2.95), sehingga diperoleh:

$$W_v^{(c)} = \frac{\rho}{c\mu(1-\rho)} + \frac{1}{c\mu\sigma}\delta(I - \boldsymbol{H})^{-2}\eta \qquad (2.96)$$

Sedangkan untuk menghitung faktor utilitas *server* dan persentase pemanfaatan sarana pelayanan, formula yang digunakan sama dengan formula yang digunakan pada model antrean M/M/c, yaitu $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$ untuk faktor utilitas *server* dan $\bar{c} = \rho \times 100\%$ untuk persentase pemanfaatan sarana pelayanan.

G. PT Bank BPD DIY

1. Sejarah Singkat

Bank BPD DIY didirikan pada tahun 1961, tanggal 15 Desember berdasarkan akta notaris Nomor 11, Notaris R.M. Soerjanto Partaningrat. Sebagai suatu perusahaan daerah, pertama kalinya Bank BPD DIY diatur melalui Peraturan Daerah Nomor 3 Tahun 1976. Seiring berjalannya waktu, dilakukan berbagai penyesuaian.

Landasan hukum pendirian Bank BPD DIY adalah Peraturan Daerah Propinsi Daerah Istimewa Yogyakarta Nomor 2 Tahun 1993, junctis Peraturan Daerah Nomor 11 Tahun 1997 dan Nomor 7 Tahun 2000. Tujuan pendirian bank adalah untuk membantu mendorong pertumbuhan perekonomian dan pembangunan daerah disegala bidang serta sebagai salah satu sumber pendapatan daerah dalam rangka meningkatkan taraf hidup rakyat banyak.

Bank BPD DIY merupakan salah satu alat kelengkapan otonomi daerah dibidang perbankan yang memiliki tugas sebagai penggerak, pendorong laju pembangunan daerah, sebagai pemegang kas daerah/ menyimpan uang daerah, dan sebagai salah satu sumber pendapatan daerah serta menjalankan usahanya sebagai bank umum.

(Sejarah Singkat Bank BPD DIY, 2017)

2. Visi Misi

Visi Bank BPD DIY adalah Menjadi Bank Terpercaya, Istimewa dan Pilihan Masyarakat. Sedangkan Misi Bank BPD DIY adalah:

a. Menyediakan solusi kebutuhan keuangan masyarakat dengan memberikan pengalaman perbankan yang berkesan
b. Menjalankan prinsip kehati-hatian dan menerapkan bisnis yang beretika untuk meningkatkan nilai perusahaan
c. Mencapai Sumber Daya Manusia (SDM) yang unggul, berintegritas dan profesional
d. Mengembangkan keunggulan kompetitif dengan layanan prima dan produk yang inovatif berbasis budaya untuk menjadi Regional Champion yang berkelanjutan
e. Menjalankan fungsi Agen Pembangunan yang fokus mengembangkan sektor Usaha Menengan Kecil Mandiri (UMKM), mendorong pertumbuhan perekonomian daerah dan menjaga lingkungan.

Budaya Kerja dan Perilaku Utama “ISTIMEWA”

a. Integritas: 1) Beriman dan bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa

2) Menerapkan kejujuran, keikhlasan, dan menjaga kepercayaan

b. Sigap: 1) Bertidak dengan cepat dan tanggap dalam bekerja

2) Menerapkan layanan yang peduli, cerdas, dan berbudaya

c. Tangguh : Bekerja keras, dan pantang menyerah dalam segala situasi
d. Inovatif : Melakukan pengembangan yang berkelanjutan
e. Mutu : Mengedepankan kesempurnaan dalam semua hasil kerja
f. Empati : Membangun hubungan saling menghormati dan menghargai
g. Waspada : Menerapkan prinsip kehati-hatian dan tata kelola yang baik
h. Antusias : Semangat tinggi dalam bekerja untuk mencapai hasil terbaik

Nilai-Nilai Utama “RAMAH”

a. Respek
b. Akurat
c. Modern
d. Amanah
e. Handal

(Visi Misi Bank BPD DIY, 2017)