BAB II
KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan landasan teori tentang optimasi, fungsi, turunan, pemrograman linear, metode simpleks, teorema dualitas, pemrograman nonlinear, persyaratan *karush kuhn tucker*, pemrograman kuadratik, dan metode fungsi penalty (metode *penalty)*.

A. Optimasi

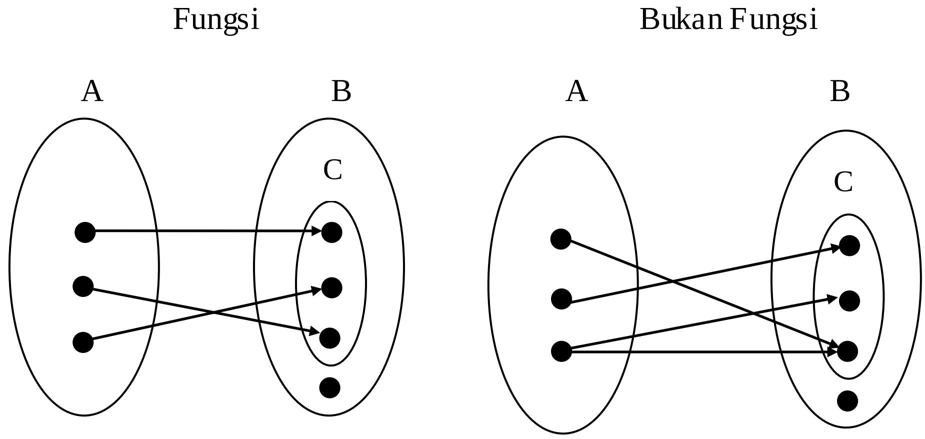
Menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia optimasi merupakan upaya atau cara untuk memperoleh hasil yang terbaik. Menurut Yuni (2015 : 10) optimasi adalah suatu cabang ilmu dalam matematika untuk memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan dengan mempertimbangkan beberapa kendala yang diberikan. Menurut Rao (2009 : 1) optimasi dapat didefinisikan sebagai proses untuk menemukan kondisi yang memberikan nilai maksimum dan minimum dari suatu fungsi. Berdasarkan beberapa definisi tersebut maka dapat disimpulkan bahwa optimasi adalah suatu proses atau cara untuk memperoleh nilai maksimum atau minimum dari sebuah fungsi dengan mempertimbangkan beberapa kendala yang diberikan.

B. Fungsi

Definisi 2.1 Fungsi (Varberg & Purcell, 2010 : 29)

Sebuah fungsi f adalah suatu aturan korespondensi yang menghubungkan tiap obyek x dalam suatu himpunan, yang disebut daerah asal (domain), dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ dari suatu himpunan kedua *yang disebut daerah kawan (kodomain). Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil (range) fungsi.*

Untuk menambah pemahaman, berikut ini akan diberikan ilustrasi dari suatu fungsi dan bukan fungsi.



Keterangan :
A = daerah asal
B = daerah kawan
C = daerah hasil

Gambar 2. 1 Ilustrasi Fungsi dan Bukan Fungsi

Sebuah fungsi yang berbentuk $f(x) = k$, dengan k konstanta (bilangan real) disebut fungsi konstanta. Fungsi $f(x) = x$, dengan x variabel disebut fungsi identitas. Sebarang fungsi yang dapat diperoleh dari fungsi konstanta dan fungsi identitas dengan menggunakan operasi penambahan, pengurangan, dan perkalian disebut fungsi polinomial. (Varberg & Purcell, 2010 : 39)

Suatu fungsi polinomial dapat ditulis dalam bentuk $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ dengan $a_0, a_1, \ldots, a_n$ anggota bilangan real. Jika $a_n \neq 0$, maka n adalah derajat fungsi polinomial tersebut. Secara khusus, bentuk $f(x) = ax + b$ adalah fungsi polinomial berderajat satu atau disebut fungsi linear, dan $f(x) = ax^2 + bx + c$ adalah fungsi polinomial berderajat dua atau fungsi kuadrat. (Varberg & Purcell, 2010 : 39). Berikut ini akan dijelaskan tentang fungsi konveks dan konkaf serta fungsi kontinu.

1. Fungsi Konveks dan Konkaf

Definisi 2.2 (Varberg dan Purcell, 2010 : 156)

Misalkan f *terdiferensial untuk semua* $x \in R$, f *dikatakan cekung keatas atau konveks jika* $f'(x)$ *naik untuk semua* $x \in R$ *dan* f *dikatakan cekung kebawah atau konkaf jika* $f'(x)$ *turun untuk semua* $x \in R$.

Turunan kedua fungsi f adalah turunan pertama dari f', sehingga dapat disimpulkan bahwa f' naik jika f'' positif dan f' turun jika f'' negatif atau dapat ditulis dalam teorema berikut ini

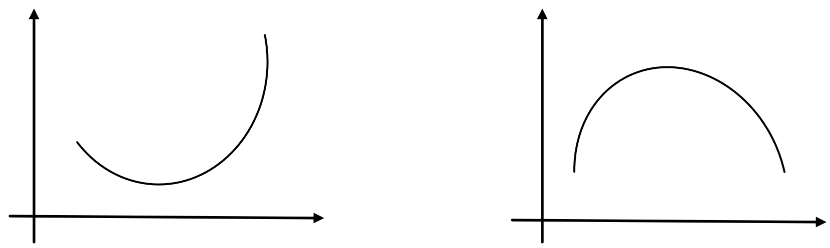
Teorema 2.1 (Varberg dan Purcell, 2010 : 157)

Misalkan f *terdiferensial dua kali untuk semua* $x \in R$

i. *Jika* $f''(x) > 0$, *maka* f *cekung keatas atau konveks untuk semua* $x \in R$,

ii. *Jika* $f''(x) < 0$, *maka* f *cekung kebawah atau konkaf untuk semua* $x \in R$.

Gambar 2.1 merupakan ilustrasi dari himpunan konveks dan konkaf



Konveks Konkaf

Gambar 2. 2 Ilustrasi Konveks dan Konkaf

2. Fungsi Kontinu

Sebelum memahami tentang fungsi kontinu, akan dibahas terlebih dahulu mengenai limit fungsi.

Definisi 2.3 (Varberg dan Purcell, 2010 : 62)

Suatu limit $f(x)$ *untuk* x *mendekati* c *adalah* L, *dan dapat ditulis* $lim_{x \to c} f(x) = L$ *yang berarti untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *yang diberikan terdapat* $\delta > 0$ *sedemikian sehingga jika* $0 < |x - c| < \delta$ *maka* $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Dengan kata lain nilai $f(x)$ mendekati limit L untuk x mendekati c, jika nilai mutlak dari selisih nilai $f(x)$ dan L dibuat sekecil mungkin dengan cara mengambil x cukup dekat tetapi tidak sama dengan c. Perlu diperhatikan bahwa definisi tersebut tidak mengharuskan ada $x = c$, agar fungsi f mempunyai nilai limit.

Definisi 2.4 (Varberg dan Purcell, 2010 : 83)

Misalkan f *terdefinisi pada suatu interval terbuka yang mengandung* c. *Fungsi* f *dikatakan kontinu di* c *jika* $lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Dengan kata lain f dikatakan kontinu di c jika memenuhi :

i. $f(c)$ ada

ii. $\lim_{x \to c} f(x)$ ada

iii. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Jika salah satu dari ketiga ini tidak terpenuhi, maka f diskontinu di c.

C. Turunan

Definisi 2.5 (Varberg dan Purcell, 2010 : 100)

Turunan fungsi f adalah fungsi lain f' yang nilainya pada sebarang bilangan x adalah

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Asalkan limit ini ada.

Teorema 2.2 (Varberg dan Purcell, 2010 : 102)

Jika $f'(c)$ ada maka f kontinu di c.

Bukti :

Bukti teorema ini menggunakan syarat fungsi kontinu, sebagai berikut

i. $f(c)$ ada

ii. $\lim_{x \to c} f(x)$ ada

iii. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Dari yang diketahui $f'(c)$ ada, maka $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ sehingga $f(c)$ ada. Jadi syarat i terpenuhi. Selanjutnya

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c) + f(x) - f(c) \\ &= f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c), \quad x \neq c \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c} f(x) &= \lim_{x \to c} \left[f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c) \right] \\ &= \lim_{x \to c} f(c) + \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \cdot \lim_{x \to c} (x - c) \\ &= f(c) + f'(c) \cdot 0 \\ &= f(c) \end{aligned}$$

Syarat ii dan iii terpenuhi. Sehingga Teorema 2.2 terbukti bahwa jika $f'(c)$ ada maka f kontinu di c.

Jika suatu fungsi f memiliki n variabel, maka turunan fungsi f merupakan turunan parsial.

Definisi 2.6 (Varberg dan Purcell, 2011 : 245)

Jika f suatu fungsi dengan n variabel, maka turunan parsial fungsi f terhadap x_1 di $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dinyatakan oleh $f_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ atau $\frac{\partial f\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_1}$ didefinisikan oleh :

$$f_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x}$$

Turunan parsial terhadap $x_2, \ldots, x_n$ didefinisikan dengan cara yang sama.

D. Matriks Hessian

Matriks Hessian adalah matriks yang tiap elemennya dibentuk dari turunan parsial kedua dari suatu fungsi. Misalkan $f(x)$ suatu fungsi dengan n variabel, matriks Hessian dari $f(x)$ yaitu :

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

E. Matriks Definit Positif dan Definit Negatif

Salah satu cara untuk menentukan apakah suatu matriks persegi merupakan definit positif, definit negatif atau tidak definit yaitu seperti yang dijelaskan berikut ini

Definisi 2.7 (Anton, 1995 : 320)

Diberikan A matriks persegi (nxn), *maka berlaku :*

a. *Matriks A disebut Definit Positif* $\Leftrightarrow$ $x^tAx > 0$ $\quad \forall x \in R^n$
b. *Matriks A disebut Definit Negatif* $\Leftrightarrow$ $x^tAx < 0$ $\quad \forall x \in R^n$
c. *Matriks A disebut Semi Definit Positif* $\Leftrightarrow$ $\quad \forall x \in R^n$
   $x^tAx \geq 0$
d. *Matriks A disebut Semi Definit Negatif* $\Leftrightarrow$ $\quad \forall x \in R^n$
   $x^tAx \leq 0$

Bentuk x^tAx disebut bentuk kuadratik, dimana x merupakan matriks $(n \times 1)$ dari n variabel dan x^t merupakan transpose dari matriks x. Untuk menambah pemahaman, diberikan sebuah contoh berikut

Contoh 2.1

Diketahui matriks $H = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Akan diselidiki apakah H definit positif, definit negatif atau tidak definit. Jika H dinyatakan dalam bentuk kuadratik,

maka $x^tHx = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$= [6x_1 \quad 4x_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 6{x_1}^2 + 4{x_2}^2 \geq 0$$

Jadi berdasarkan Definisi 2.7, matriks H adalah semi definit positif.

F. Titik Kritis

Tempat terjadinya nilai ekstrim baik itu nilai maksimum atau nilai minimum adalah di titik kritis (Varberg dan Purcell, 2010 : 152). Teorema 2.3 berikut akan menjelaskan keberadaan titik kritis.

Teorema 2.3 (Varberg dan Purcell, 2010 : 152)

Misalkan f didefinisikan pada interval I yang memuat titik c. Jika $f(c)$ adalah nilai ekstrim, maka c haruslah berupa suatu titik kritis; dengan kata lain, c adalah salah satu dari

i. *Titik ujung dari I,*

ii. *Titik stasioner dari f; yaitu titik dimana $f'(c) = 0$,*

iii. *Titik singular dari f; yaitu titik dimana $f'(c)$ tidak ada.*

Bukti :

Misal $f(c)$ berupa nilai maksimum f pada I dan c bukan titik ujung ataupun titik singular. Akan dibuktikan bahwa c adalah titik stasioner. Karena $f(c)$ adalah nilai maksimum maka $f(x) \leq f(c)$ untuk semua x dalam I, yaitu $f(x) - f(c) \leq 0$.

Jadi, jika $x < c$ sehingga $x - c < 0$, maka

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \qquad \textbf{(2.1)}$$

Sedangkan jika $x > c$, maka

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \qquad \textbf{(2.2)}$$

Akan tetapi, $f'(c)$ ada karena c bukan titik singular. Akibatnya, apabila $x \to c^-$ dalam Persamaan (2.1) dan $x \to c^+$ dalam Persamaan (2.2), maka diperoleh $f'(c) \geq 0$ dan $f'(c) \leq 0$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $f'(c) = 0$

Definisi 2.8 (Varberg dan Purcell, 2010 : 162)

Misalkan S daerah asal f, memuat titik c. Dapat dikatakan bahwa

i. *$f(c)$ nilai maksimum lokal f jika terdapat interval (a, b) yang memuat c sedemikian sehingga $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada $(a, b) \cap S$,*

ii. *$f(c)$ nilai minimum lokal f jika terdapat interval (a, b) yang memuat c sedemikian sehingga $f(c)$ adalah nilai minimum f pada $(a, b) \cap S$,*

iii. *$f(c)$ nilai ekstrim lokal f jika ia berupa nilai maksimum lokal atau minimum lokal.*

Titik-titik kritis (titik ujung, titik stasioner, dan titik singular) adalah titik tempat kemungkinan terjadinya ekstrim lokal (Varberg dan Purcell, 2010 : 163).

Definisi 2.9 (Varberg dan Purcell, 2010 : 155)

Misalkan f terdefinisi pada interval I (terbuka, tertutup, atau tidak satupun). Dapat dikatakan bahwa :

i. *f naik pada I jika, untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam I, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,*

ii. *f turun pada I jika, untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam I, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,*

iii. *f monoton murni pada I jika f naik pada I atau turun pada I.*

Teorema 2.4 (Varberg dan Purcell, 2010 : 155)

Misalkan f kontinu pada interval I dan terdiferensial pada setiap titik-dalam dari I

i. *Jika $f'(x) > 0$ untuk semua titik-dalam I, maka f naik pada I,*

ii. *Jika $f'(x) < 0$ untuk semua titik-dalam I, maka f turun pada I.*

Bukti :

Misalkan f terdefinisi pada selang I untuk semua x titik-dalam dari I.

Jika $x \leq x + h \in I$, maka dapat ditulis

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

i. $f'(x) > 0$ berarti

$$f(x+h) - f(x) > 0 \Longrightarrow f(x+h) > f(x)$$

Menurut Definisi 2.9 i, fungsi $f(x)$ naik.

ii. $f'(x) < 0$ berarti

$$f(x+h) - f(x) < 0 \Longrightarrow f(x+h) < f(x)$$

Menurut Definisi 2.9 ii, fungsi $f(x)$ turun.

Teorema 2.5 (Varberg dan Purcell, 2010 : 163)

Misalkan f kontinu pada interval terbuka (a, b) yang memuat sebuah titik kritis c.

i. *Jika $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (a, c) dan $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (c, b), maka $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal f,*

ii. *Jika $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (a, c) dan $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (c, b), maka $f(c)$ adalah nilai minimum lokal f,* *iii.* *Jika $f'(x)$ bertanda sama pada kedua pihak c, maka $f(c)$ bukan nilai ekstrim lokal f.*

Bukti :

i. Karena $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (a, c), maka menurut Teorema 2.4 f naik pada (a, c). Demikian pula karena $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (c, b), maka f turun pada (c, b). Jadi $f(x) < f(c)$ untuk semua x dalam (a, b), kecuali di $x = c$. Dapat disimpulkan bahwa $f(c)$ adalah maksimum lokal.

Demikian pula untuk pembuktian ii dan iii.

Teorema 2.6 (Varberg dan Purcell, 2010 : 164)

Misalkan f' dan f'' ada pada setiap titik interval terbuka (a, b) yang memuat c, dan misalkan $f'(c) = 0$.

i. *Jika $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ adalah nilai minimum lokal f,*

ii. *Jika $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal f.*

Bukti :

i. Jika $f'(c) = 0$ dan $f''(c) > 0$, maka ada selang buka (a, b) yang memuat c sedemikian sehingga

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - 0}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c} > 0$$

Untuk semua $x \neq c$ dalam (a, b). Jika $x < c$, maka $f'(x) > 0$. Demikian pula jika $x > c$, maka $f'(x) > 0$. Jadi, $f'(x)$ berubah dari negatif menjadi positif pada c, dan berdasarkan Teorema 2.5, $f(c)$ merupakan minimum lokal f.

Pembuktian ii serupa dengan pembuktian i tersebut.

G. Pemrograman Linear

Pemrograman Linear adalah metode matematis yang berkarakteristik linear untuk menemukan suatu penyelesaian optimal dengan cara memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan terhadap satu susunan kendala. (Siswanto, 2007 : 26). Model pemrograman linear mempunyai tiga unsur utama yaitu (Siswanto, 2007 : 25-26) :

1. Variabel Keputusan

   Variabel keputusan adalah variabel yang akan mempengaruhi nilai tujuan yang hendak dicapai. Pada proses pembentukan suatu model, menentukan variabel keputusan harus dilakukan terlebih dahulu sebelum menentukan fungsi tujuan dan kendala-kendalanya.

2. Fungsi Tujuan

   Pada pemrograman linear, tujuan yang hendak dicapai harus berbentuk fungsi linear. Selanjutnya, fungsi tujuan tersebut dimaksimalkan atau diminimumkan terhadap fungsi-fungsi kendala yang ada.

3. Fungsi Kendala

   Kendala merupakan suatu pembatas terhadap variabel-variabel keputusan yang dibuat. Fungsi kendala suatu pemrograman linear juga harus berbentuk linear.

   Secara umum, masalah pemrograman linear dapat dirumuskan sebagai berikut (B. Susanta, 1994 : 6)

   Mencari nilai X yang memaksimumkan (atau meminimumkan)

$$f = CX \qquad \textbf{(2.3)}$$

dengan kendala

$$AX\ (\leq, =, \geq) B \quad \textbf{(2.4)}$$
$$X \geq 0$$

Dalam hal ini,

$$C = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \quad \textbf{(2.5)}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.6)}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.7)}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.8)}$$

Matriks X merupakan matriks satu kolom dari variabel yang akan dicari, C merupakan matriks satu baris dari koefisien ongkos (c_j), matriks A adalah matriks koefisien dari persamaan kendala dan B adalah matriks kolom dari ruas kanan persamaan kendala.

Jika Persamaan (2.3) dan (2.4) diuraikan menjadi penjumlahan aljabar maka akan menjadi

Mencari nilai X yang memaksimumkan (atau meminimumkan)

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad \textbf{(2.9)}$$

dengan kendala

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n (\leq, =, \geq) b_1 \quad \textbf{(2.10a)}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n (\leq, =, \geq) b_2 \quad \textbf{(2.10b)}$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n (\leq, =, \geq) b_m \quad \textbf{(2.10c)}$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \quad \textbf{(2.10d)}$$

H. Metode Simpleks

Menghadapi persoalan pemrograman linear yang memiliki variabel keputusan lebih dari dua digunakan metode yang lebih efisien yaitu metode simpleks. Metode simpleks merupakan pengembangan metode aljabar yang hanya menguji sebagian dari jumlah solusi yang layak dalam bentuk tabel. Tanpa mengurangi keumuman, metode simpleks yang akan dibahas dalam hal ini untuk fungsi tujuan memaksimalkan.

Adapun pokok-pokok metode simpleks yaitu (Zulian, 1991 : 41) :

a. Mengubah persoalan pemrograman linear ke dalam bentuk kanonik, yaitu kondisi dimana nilai ruas AX sama dengan ruas B pada Persamaan (2.4) dengan cara memasukkan variabel slack/surplus atau variabel buatan.
b. Mengubah bentuk fungsi kendala ke dalam bentuk kanonik untuk mendapatkan solusi basis awal yang layak.
c. Memperbaiki solusi basis awal untuk mendapatkan solusi basis layak lainnya yang akan memperbaiki harga fungsi tujuan.
d. Mencari solusi basis layak lainnya, sehingga tidak ditemukan lagi solusi basis layak lainnya yang dapat memperbesar nilai fungsi tujuan.

Variabel slack dan variabel surplus berperan untuk membuat ruas (AX) pada Persamaan (2.4) yang semula longgar menjadi ketat, sehingga nilainya sama dengan ruas (B) pada Persamaan (2.4) (B. Susanta, 1994 : 69). Variabel basis adalah jika pada suatu persamaan variabel ini mempunyai koefisien 1 dan pada persamaan lain koefisiennya 0 (Zulian, 1991 : 46).

Contoh 2.2 :

Tentukan bentuk kanonik dari masalah pemrograman linear berikut

Memaksimumkan

$$f = -8x + 6y + 8z \qquad \textbf{(2.11)}$$

Dengan kendala

$$x + y + 2z \leq 12 \qquad \textbf{(2.12a)}$$

$$2x - 6y - z \geq 4 \qquad \textbf{(2.12b)}$$

Setelah dirubah ke bentuk kanonik Persamaan (2.11) dan (2.12) menjadi :

Memaksimumkan

$$f = -8x + 6y + 8z + 0s_1 + 0e_2 - Ma_1 \qquad \textbf{(2.13)}$$

Dengan kendala

$$x + y + 2z + s_1 = 12 \qquad \textbf{(2.14a)}$$

$$2x - 6y - z - e_2 + a_1 = 4 \qquad \textbf{(2.14b)}$$

Variabel e_2 merupakan variabel *surplus* dengan koefisien -1 sehingga tidak bisa menjadi basis. Oleh karena itu perlu ditambahkan suatu variabel yang bernilai +1 untuk menjadi basis, variabel tersebut dinyatakan sebagai variabel buatan (a_1). (B. Susanta, 1994 : 88)

Akibatnya muncul syarat perlu agar soal asli mempunyai penyelesaian optimum, yaitu dalam tabel optimum variabel buatan harus bernilai nol. Hal ini berarti bahwa masuknya variabel buatan kedalam susunan hanya sebagai katalisator supaya algoritma simpleks dapat berjalan. Sebagai upaya agar variabel buatan bernilai nol maka disusunlah fungsi tujuan baru dengan bentuk $\bar{f} = f - Ma$, dengan f fungsi tujuan awal, a adalah variabel buatan, dan M merupakan bilangan positif yang cukup besar. Dengan demikian diharapkan variabel buatan segera keluar dari basis karena koefisien ongkosnya negatif besar. (B. Susanta, 1994 : 89)

Setelah fungsi kendala diubah ke bentuk kanonik dan didapatkan solusi basis awal yang layak, maka langkah selanjutnya adalah membuat tabel simpleks yang ditunjukkan pada Tabel 2.1.

Tabel 2. 1 Bentuk tabel simpleks

	c_j	c_1	c_2	...	c_n		
c_i	x_i/x_j	x_1	x_2	...	x_n	b_i	r_i
c_1	x_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1	r_1
c_2	x_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2	r_2
.				...		.	.
.				...		.	.
c_m	x_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m	r_m
	z_j	z_1	z_2	...	z_n	z	
	$z_j - c_j$	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	...	$z_n - c_n$		

Keterangan

x_j : variabel-variabel keputusan

x_i : variabel yang menjadi basis dalam tabel yang ditinjau

c_j : koefisien ongkos

c_i : koefisien ongkos variabel basis x_i

a_{ij} : koefisien teknis (koefisien dalam kendala utama)

b_i : suku tetap (nilainya tidak negatif)

z_j : $\sum_{i=1}^{m} c_i \, a_{ij}$ (jumlah hasil kali c_i dengan kolom a_{ij})

z : $\sum_{i=1}^{m} c_i \, b_i$ (jumlah hasil kali c_i dengan kolom b_i)

$z_j - c_j$: selisih z_j dengan c_j

Apabila tabel yang bersangkutan belum optimum dan x_k terpilih sebagai basis baru maka disusun kolom r_i yang diperoleh dengan

$$r_i = \frac{b_i}{a_{ik}} \quad \text{, hanya untuk } a_{ik} > 0$$

(B. Susanta, 1994 : 75)

Kasus dimana semua fungsi kendalanya berupa pertidaksamaan satu jenis disebut sebagai kasus maksimum atau minimum baku (B. Susanta, 1994 : 77). Pada soal memaksimumkan, x_k yang terpilih untuk masuk menjadi basis adalah yang memiliki $z_k - c_k < 0$ yang paling kecil. Variabel yang terpilih untuk keluar dari basis adalah variabel yang memiliki nilai r_i terkecil (B. Susanta, 1994 : 78). Tabel pada masalah pemrograman linear dengan bentuk fungsi tujuan maksimum, dikatakan sudah optimum jika nilai pada baris $z_j - c_j \geq 0$ (Zulian, 1991 : 48).

I. Teorema Dualitas

Konsep dualitas menjelaskan secara matematis bahwa sebuah kasus pemrograman linear berhubungan dengan sebuah kasus pemrograman linear yang lain. Bila kasus pemrograman linear pertama disebut primal maka kasus pemrograman linear kedua disebut dual, sehingga penyelesaian kasus primal secara otomatis akan menyelesaikan kasus dual, demikian pula sebaliknya (Siswanto, 2007 : 149). Tanpa mengurangi keumuman, dualitas yang akan dibahas dalam hal ini untuk bentuk primal memaksimalkan.

Primal

Memaksimumkan : $f = C^T Y$ **(2.15)**

dengan kendala : $AX(\leq)B$, dan $X \geq 0$ **(2.16)**

Dual

Meminimumkan : $f = B^T Y$ **(2.17)**

dengan kendala : $A^T Y(\geq)C$, dan $Y \geq 0$ **(2.18)**

Dalam hal ini, $B^T = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m]$, **(2.19)**

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.20)}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.21)}$$

dan $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ **(2.22)**

Matriks A^T dan B^T merupakan transpose dari matriks A dan matriks B, sedangkan C adalah matriks satu kolom untuk setiap koefisien ongkos (c_j), dan Y merupakan matriks satu kolom dari variabel-variabel dual yang dicari. Jika Persamaan (2.17) dan (2.18) langsung ditulis dalam bentuk matriks secara keseluruhan, maka akan didapat bentuk :

Meminimumkan : $f = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$

dengan kendala : $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} (\geq) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

Bentuk perkalian matriks tersebut jika diuraikan menjadi penjumlahan aljabar akan menjadi :

Meminimumkan

$$f = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m = \sum_{i=1}^{m} b_iy_i \qquad \textbf{(2.23)}$$

dengan kendala

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m(\geq)c_1 \qquad \textbf{(2.24a)}$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m(\geq)c_2 \qquad \textbf{(2.24b)}$$

$$\vdots$$

$$ny_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m(\geq)c_n \qquad \textbf{(2.24c)}$$

Lemma 2.1 (Winston, 2003 : 306)

Jika $\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}$ merupakan solusi layak masalah primal, dan $\bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{bmatrix}$ merupakan solusi layak masalah dual, maka nilai f primal $\leq f$ dual.

Bukti :

Masalah primal yang dinyatakan dalam bentuk :

Memaksimumkan $f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$

dengan kendala :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \ dengan \ i = 1,2,\ldots,m$$

Sehingga bentuk masalah dualnya menjadi :

Meminimumkan $f = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m = \sum_{i=1}^{m} b_iy_i$

dengan kendala :

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \geq c_j \ dengan \ j = 1,2,\ldots,n$$

Diketahui bahwa $y_i \geq 0$, jika dikalikan dengan kendala masalah primal maka akan diperoleh

$$y_i a_{i1} x_1 + y_i a_{i2} x_2 + \cdots + y_i a_{in} x_n \leq b_i y_i \; dengan \; i = 1,2, \dots, m$$

Jika ada m kendala maka

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad \textbf{(2.25)}$$

Diketahui bahwa $x_j \geq 0$, jika dikalikan dengan kendala masalah dual maka akan diperoleh

$$x_j a_{1j} y_1 + x_j a_{2j} y_2 + \cdots + x_j a_{mj} y_m \geq c_j x_j \; dengan \; j = 1,2, \dots, n$$

Jika ada n kendala maka

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} x_j \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \textbf{(2.26)}$$

Dari Persamaan (2.25) dan (2.26) diperoleh

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$f \; primal \leq f \; dual$$

Jadi Lemma 2.1 terbukti.

Teorema 2.7 Teorema Dualitas (Winston, 2003 : 309)

Jika terdapat solusi optimal bagi suatu pemrograman primal, maka juga terdapat solusi optimal bagi pemrograman dual, dan kedua fungsi tujuannya memiliki nilai optimal yang sama.

Bukti :

Jika masalah primal ditulis dalam bentuk :

Meminimalkan / Memaksimalkan $f = C^T X$

Dan bentuk dualnya adalah :

Memaksimalkan / Meminimumkan $f = B^T Y$

i. Berdasarkan Lemma 2.1 didapatkan $C^T X \leq B^T \bar{Y}$. Suatu titik layak pada masalah primal harus menghasilkan sebuah nilai f primal yang tidak melebihi $B^T \bar{Y}$. Mengingat $\bar{X}$ merupakan solusi layak primal dan mempunyai suatu nilai fungsi tujuan primal yang memenuhi $C^T \bar{X} = B^T \bar{Y}$, maka haruslah $\bar{X}$ solusi optimal primal.

ii. Berdasarkan Lemma 2.1 didapatkan $C^T \bar{X} \leq B^T Y$, karena $\bar{X}$ solusi layak primal. Suatu titik layak masalah dual, yaitu Y harus menghasilkan sebuah nilai f dual yang melebihi $C^T \bar{X}$. Mengingat $\bar{Y}$ merupakan solusi layak dual dan mempunyai suatu nilai fungsi tujuan dual yang memenuhi $B^T \bar{Y} = C^T \bar{X}$, maka haruslah $\bar{Y}$ solusi optimal dual.Berdasarkan penjelasan pada i dan ii, maka Teorema 2.9 terbukti.

Berikut ini adalah contoh permasalahan primal dan dual

Contoh 2.3

Penyedia makanan suatu asrama tentara menyediakan dua jenis makanan, yaitu M_1 dan M_2. Setiap jenis makanan harus mengandung vitamin A, B dan C dengan kadar yang berbeda dan dinyatakan sebagai x_{ij}. Setiap vitamin memiliki batas maksimum kandungannya masing-masing di setiap jenis makanan yang dinyatakan sebagai y_i, sedangkan harga beli kedua jenis makanan dinyatakan sebagai z_i.

Dari ilustrasi Contoh 2.3 dapat dipresentasikan dalam Tabel 2.2.

Tabel 2.2 Contoh Tabel Dualitas

Vitamin	Makanan 1 (m_1)	Makanan 2 (m_2)	Batas Maksimal
A	x_{11}	x_{12}	y_1
B	x_{21}	x_{22}	y_2
C	x_{31}	x_{32}	y_3
Batas Minimal	z_1	z_2	

Bila Tabel 2.2 dibaca ke kanan diperoleh soal primal dan bila dibaca ke bawah diperoleh soal dual. Sehingga diperoleh :

Soal dual :

Memaksimumkan $f = y_1\mathrm{A} + y_2B + y_3C$

dengan kendala :

$$x_{11}A + x_{21}B + x_{31}C \leq z_1$$

$$x_{12}A + x_{22}B + x_{32}C \leq z_2$$

Soal primal :

Meminimumkan $g = z_1m_1 + z_2m_2$

dengan kendala :

$$x_{11}m_1 + x_{12}m_2 \geq y_1$$

$$x_{21}m_1 + x_{22}m_2 \geq y_2$$

$$x_{31}m_1 + x_{32}m_2 \geq y_3$$

Menurut Siswanto (2007) hubungan penyelesaian optimal antara primal dan dual sebuah kasus pemrograman linear adalah sebagai berikut

1. Nilai maksimum fungsi tujuan primal sama dengan nilai minimum fungsi tujuan dual.
2. Nilai optimal variabel keputusan primal sama dengan nilai b_i(ruas kanan kendala) dual.
3. Nilai b_i(ruas kanan kendala) primal sama dengan nilai optimal variabel keputusan dual.

Keoptimalan masalah dual dan masalah primal mengakibatkan suatu kondisi yang disebut dengan kondisi *complementary slackness* (B. Susanta, 1994 : 186) :

1. Jika dalam penyelesaian optimal masalah primal, kendala ke-h berupa pertidaksamaan maka dalam penyelesaian optimal masalah dual variabel ke-h bernilai nol.
2. Jika dalam penyelesaian optimal masalah primal, variabel ke-p bernilai positif (kendala tak negatif untuk x_p berupa pertidaksamaan $x_p > 0$) maka dalam penyelesaian optimal masalah dual kendala ke-p akan berupa persamaan.

Pada kondisi *complementary slackness* tersebut dapat ditulis secara matematis yaitu :

1. $s_h y_h = 0$
2. $x_p e_p = 0$

Dimana

s_h = kendala ke-h

y_h = variabel ke-h

x_p = variabel ke-p

e_p = kendala ke-p

J. Pemrograman Nonlinear

Tidak semua permasalahan dalam kehidupan sehari-hari bisa diselesaikan dengan pemrograman linear. Oleh karena itu munculah pemrograman non linear.

Bentuk umum masalah pemrograman nonlinear adalah menemukan nilai dari variabel keputusan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ agar

Memaksimumkan (atau meminimumkan) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Dengan kendala

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)(\leq, =, \text{atau } \geq)\ b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)(\leq, =, \text{atau } \geq)\ b_2 \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)(\leq, =, \text{atau } \geq)\ b_m \end{aligned} \qquad \textbf{(2.27)}$$

Dengan f fungsi non linear dan g fungsi linear atau non linear. (Winston, 2003 : 619)

Menurut Hillier (2001 : 664) terdapat 3 bentuk permasalahan pemrograman nonlinear, yaitu :

1. Pemrograman Nonlinear Tanpa Kendala

Pemrograman nonlinear tanpa kendala merupakan optimasi yang tidak memiliki kendala dengan fungsi tujuan berbentuk nonlinear. Bentuk model pemrograman nonlinear tanpa kendala untuk menentukan nilai $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dengan

Fungsi tujuan : maksimum / minimum $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Untuk menyelesaikan permasalahan pemrograman nonlinear tanpa kendala terdapat dua syarat keoptimalan, yaitu :

a. Syarat Perlu Keoptimalan

Syarat perlu keoptimalan digunakan untuk mencari titik-titik optimal x^* pada pendekatan analitis. Syarat perlu keoptimalan mengatakan bahwa :

Jika solusi $x = x^*$ adalah titik optimal dari $f(x)$ maka :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \qquad \text{di } x = x^* \text{ untuk } j = 1,2, \dots n \qquad \textbf{(2.28)}$$

b. Syarat Cukup Keoptimalan

Syarat cukup keoptimalan digunakan untuk menentukan apakah titik optimal yang didapatkan dari syarat perlu keoptimalan merupakan titik minimum atau titik maksimum.

Syarat cukup keoptimalan yaitu :

Jika $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ dan $\mathrm{H}(x^*)$ definit positif maka x^* titik minimum

Jika $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ dan $\mathrm{H}(x^*)$ definit negatif maka x^* titik maksimum

2. Pemrograman Nonlinear Dengan Kendala Linear

Pemrograman nonlinear dengan kendala linear merupakan optimasi dengan kendala berbentuk fungsi linear dan fungsi tujuan berupa fungsi nonlinear. Untuk menentukan nilai $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dengan bentuk umum adalah :

Maksimum/minimum : $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

dengan kendala : $g_m(x)(\leq, =, \geq)0$

Untuk $m = 1,2, \dots, n$.

3. Pemrograman Nonlinear Dengan Kendala Nonlinear

Menurut Taha (2007 : 699) pemrograman nonlinear dengan kendala non linear merupakan masalah optimasi dengan fungsi tujuan nonlinear dan fungsi kendala nonlinear. Pemrograman nonlinear berkendala nonlinear dibedakan menjadi dua yaitu :

a. Untuk $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ bentuk umum pemrograman nonlinear dengan kendala kesamaan (*equality*) adalah

Fungsi tujuan : Maksimum/minimum : $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Fungsi kendala : $g_m(x) = 0$

Dimana m menunjukkan jumlah kendala dan n menunjukkan jumlah variabel dengan $m \leq n$.

b. Bentuk umum pemrograman nonlinear dengan kendala pertidaksamaan adalah

Maksimum/minimum : $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Dengan kendala : $g_m(x)(\leq, \geq)0$ Untuk $m = 1,2, \dots, n$

$x \geq 0$

K. Persyaratan Karush Kuhn Tucker

Pada tahun 1951 Kuhn Tucker menemukan suatu teknik optimasi yang dapat digunakan untuk mencari titik optimum dari permasalahan berkendala baik permasalahan dalam bentuk linear maupun nonlinear. Metode ini membahas suatu kondisi untuk $x^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ menjadi solusi optimal untuk pemrograman non linear berikut

Memaksimumkan (atau meminimumkan) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Dengan kendala

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \quad \dots, x_n) &\leq b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \quad \dots, x_n) &\leq b_2 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, x_2, \quad \dots, x_n) &\leq b_m \end{aligned} \qquad \textbf{(2.29)}$$

Semua kendala yang akan diselesaikan dengan metode Karush Kuhn Tucker harus menggunakan tanda $(\leq)$. Kendala yang berbentuk $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b$ harus ditulis sebagai $-g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq -b$. Kendala dengan bentuk $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = b$ harus diganti dengan $\mathrm{h}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b$ dan $-h(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq -b$ (Winston, 2003 : 673).

Terdapat beberapa syarat *Karush Kuhn Tucker* untuk masalah optimasi berkendala. Syarat tersebut dirumuskan oleh Karush dan Kuhn Tucker. Teorema 2.8 dan 2.9 adalah syarat KKT untuk masalah maksimasi dan minimasi.

Teorema 2.8 (Winston, 2003 :676)

Andaikan Persamaan (2.29) adalah masalah maksimisasi. Jika $x^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ *merupakan solusi optimal untuk Persamaan (2.29) , maka* $x^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ *harus memenuhi kendala pada Persamaan (2.29) dan harus ada pengali* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ *serta variabel slack* $s_1, s_2, \dots, s_n$ *yang memenuhi :*

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} + s_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad \textbf{(2.30)}$$

$$\lambda_i [b_i - g_i(x)] = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m) \qquad \textbf{(2.31)}$$

$$\left[\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j}\right] {x^*}_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad \textbf{(2.32)}$$

$$\lambda_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m) \qquad \textbf{(2.33)}$$

$$s_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad \textbf{(2.34)}$$

Teorema 2.9 (Winston, 2003 : 676)

Andaikan Persamaan (2.29) adalah masalah minimisasi. Jika $x^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ *merupakan solusi optimal untuk Persamaan (2.29) , maka* $x^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ *harus memenuhi kendala pada Persamaan (2.29) dan harus ada pengali* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ *serta variabel surplus* $e_1, e_2, \dots, e_n$ *yang memenuhi :*

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} - e_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad \textbf{(2.35)}$$

$$\lambda_i [b_i - g_i(x)] = 0 \qquad (i = 1,2, \dots, m) \qquad \textbf{(2.36)}$$

$$\left[\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j}\right] {x^*}_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad \textbf{(2.37)}$$

$$\lambda_i \geq 0 \qquad (i = 1,2, \dots, m) \qquad \textbf{(2.38)}$$

$$e_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad \textbf{(2.39)}$$

Pada Persamaan (2.31) dan Persamaan (2.36) jika $\lambda_i = 0$ dan menurut bentuk umum fungsi kendala, yaitu $g_i(x^*) \leq b_i$ maka berakibat $g_i(x^*) - b_i \leq 0$

Menurut Hillier (2001 : 679) untuk masalah berkendala, kondisi *Karush Kuhn Tucker* merupakan syarat perlu keoptimalan, dan akan menjadi syarat cukup jika fungsi tujuannya merupakan fungsi konkaf dan fungsi kendalanya berupa fungsi konveks.

Corollary 2.1 (Hillier, 2001 : 680)

Diasumsikan bahwa f(x) adalah fungsi konkaf dan $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)$ *adalah fungsi konveks, dimana semua fungsi memenuhi bentuk Persamaan (2.29),* $x^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ *adalah solusi optimal jika dan hanya jika semua kondisi Karush Kuhn Tucker terpenuhi.*

L. Pemrograman Kuadratik

Pemrograman kuadratik merupakan pendekatan penyelesaian permasalahan optimasi nonlinear dengan kendalanya berupa fungsi linear dan fungsi tujuannya berupa fungsi nonlinear. Bentuk umum dari masalah pemrograman kuadratik menurut Peressini, dkk (1988) adalah

Meminimalkan $f(X) = CX + \frac{1}{2}XQX + d$ **(2.40)**

dengan kendala

$$AX \leq B \quad \textbf{(2.41a)}$$

$$X \geq 0 \quad \textbf{(2.41b)}$$

Dalam hal ini, konsep matriks C, X, A, B sama dengan Persamaan (2.5) – (2.8). Adapun d merupakan suatu konstanta dan Q merupakan matriks yang tersusun dari nilai q_{ij}, dimana q_{ij} diperoleh dari turunan parsial kedua terhadap x_i dan x_j dari fungsi tujuan. Matriks Q merupakan matriks simetris sehingga nilai $q_{ij} = q_{ji}$.

Persamaan (2.40) bila ditulis dalam bentuk penjumlahan aljabar maka akan menjadi

$$f(X) = C^T X + \frac{1}{2} XQX + d = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j + d \qquad \textbf{(2.40)}$$

Pada dasarnya, masalah pemrograman kuadratik dapat diselesaikan dengan persyaratan Karush Kuhn Tucker seperti pada Teorema 2.8 dan 2.9. Persyaratan Karush Kuhn Tucker digunakan untuk mengubah masalah nonlinear menjadi masalah linear melalui syarat Persamaan (2.30) dan (2.35) . Selanjutnya, masalah linear tersebut dapat diselesaikan dengan berbagai cara, salah satunya menggunakan metode simpleks. Pada pemrograman kuadratik terdapat kondisi *complementary slackness* khusus, hal inilah yang membedakan dari metode simpleks biasa yang kemudian disebut simpleks metode wolfe.

Sifat 2.1 *Complementary Slackness* pada *Pemrograman kuadratik* (Winston, 2003 : 687)

1) *e_j dan s_j pada kondisi Kuhn Tucker dan x_j tidak dapat kedua-duanya bernilai positif.*
2) *Variabel surplus (excess) ataupun slack untuk kendala ke-i dan λ_i tidak dapat kedua-duanya bernilai positif.*

Bukti :

1) Diketahui syarat Persamaan (2.30) dan (2.32) pada Teorema 2.8 , yaitu :

Syarat Persamaan (2.30) $\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_i} + s_j = 0,$

sehingga $\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_i} = -s_j$

Kemudian disubstitusikan ke Persamaan (2.32)

$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_i}\right) x_j = 0$

Diperoleh $s_j x_j = 0$.

Jika $s_j = 0$ maka $x_j \neq 0$, yaitu $x_j > 0$.

Jika $x_j = 0$ maka $s_j \neq 0$, yaitu $s_j > 0$ atau $s_j < 0$. Berdasarkan syarat Persamaan (2.33) maka $s_j > 0$.

Hal ini juga berlaku pada Teorema 2.9 , sehingga terbukti bahwa e_j dan s_j pada kondisi *Kuhn Tucker* dan x_j tidak dapat kedua-duanya bernilai positif.

2) Diketahui syarat Persamaan (2.31) dan (2.36) yaitu $\lambda_i[b_i - g_i(x)] = 0$

Pada fungsi kendala $g_i(x) \leq b_i$ maka bentuk kanonik kendala tersebut yaitu $g_i(x) + s_i' = b_i$, sehingga syarat Persamaan (2.31) dan (2.36) menjadi :

$$\lambda_i s_i' = 0$$

Jika $\lambda_i = 0$ maka $s_i' \neq 0$, yaitu $s_i' > 0$.

Jika $s_i' = 0$ maka $\lambda_i \neq 0$, yaitu $\lambda_i > 0$ atau $\lambda_i < 0$. Berdasarkan syarat Persamaan (2.34) dan (2.39) maka $\lambda_i > 0$.

Pada fungsi kendala $g_i(x) \geq b_i$ dapat diubah menjadi $g_i(x) - e_i' = b_i$. Dengan cara yang sama maka didapat pula $\lambda_i e_i' = 0$, sehingga terbukti bahwa variabel *surplus* ataupun *slack* untuk kendala ke-i dan λ_i tidak dapat kedua-duanya bernilai positif.

M. Metode Fungsi Penalti

Metode fungsi penalti adalah metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi nonlinear berkendala menjadi masalah tidak berkendala dengan menambahkan fungsi penalti dan parameter penalti pada fungsi tujuannya. Fungsi Penalti terjadi karena adanya pelanggaran terhadap fungsi tujuan, yaitu menghilangkan kendala pada permasalahan (Bazaraa, 2006 : 470). Metode Fungsi Penalti dibagi menjadi dua, yaitu Metode Fungsi Penalti Interior (Metode *Barrier*) dan Metode Fungsi Penalti Eksterior (Metode *Penalty*).

Fungsi Penalti Eksterior merupakan bentuk fungsi tambahan yakni, fungsi tujuan ditambahkan fungsi penalti. Jika $\alpha(x)$ merupakan fungsi penalti, yaitu

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{m} [maks\{0, g_i(x)\}]^p + \sum_{i=1}^{l} |h_i(x)|^p$$

Fungsi $f(x)$ merupakan fungsi tujuan, maka diperoleh z yang merupakan fungsi tambahan, yaitu

$$z = f(x) + \mu_k \sum_{i=1}^{m} [maks\{0, g_i(x)\}]^p + \mu_k \sum_{i=1}^{l} |h_i(x)|^p \qquad \textbf{(2.42)}$$

Jadi bentuk umum masalah Fungsi Penalti Eksterior adalah :

Meminimalkan

$$z = f(x) + \mu_k \sum_{i=1}^{m} [maks\{0, g_i(x)\}]^p + \mu_k \sum_{i=1}^{l} |h_i(x)|^p \qquad \textbf{(2.42)}$$

(Bazaraa, 2006 : 471)

Berikut ini teorema-teorema yang menjamin hasil dari penyelesaian dengan metode fungsi penalti eksterior adalah solusi dari masalah nonlinear.

Lemma 2.2 (Chong, 2001 : 448)

Jika $z(x, \mu_k) = f(x) + \mu_k G[g(x)] = f(x) + \mu_k \sum_{i=1}^{m} \langle g(x) \rangle^p$

Maka relasi-relasi berikut akan benar untuk setiap $0 < \mu_k < \mu_{k+1}$ *:*

i. $z({x^*}_k, \mu_k) \leq z({x^*}_{k+1}, \mu_{k+1})$

ii. $G[g({x^*}_k)] \geq G[g({x^*}_{k+1})]$

iii. $f({x^*}_k) \leq f({x^*}_{k+1})$

iv. $f(x^*) \geq z({x^*}_k, \mu_k) \geq f({x^*}_k)$

Bukti :

i. Diketahui $\mu_k < \mu_{k+1}$ dan solusi dicari dari luar daerah layak (*eksterior*) sehingga $G[g(x)] \geq 0$, maka diperoleh

$\mu_k G[g({x^*}_{k+1})] \leq \mu_{k+1} G[g({x^*}_{k+1})]$

Kedua ruas ditambah dengan $f({x^*}_{k+1})$, maka

$f({x^*}_{k+1}) + \mu_k G[g({x^*}_{k+1})] \leq f({x^*}_{k+1}) + \mu_{k+1} G[g({x^*}_{k+1})]$

$\Leftrightarrow f({x^*}_{k+1}) + \mu_k G[g({x^*}_{k+1})] \leq z({x^*}_{k+1}, \mu_{k+1})$

Selanjutnya, karena ${x^*}_k$ meminimalkan $z(x, \mu_k)$, maka

$z({x^*}_k, \mu_k) = f({x^*}_k) + \mu_k\ G[g({x^*}_k)] \leq f({x^*}_{k+1}) +$ **(2.43)**

$\mu_k G[g(x^*{}_{k+1})] \leq z(x^*{}_{k+1}, \mu_{k+1})$

$\Leftrightarrow z(x^*{}_k, \mu_k) \leq z(x^*{}_{k+1}, \mu_{k+1})$

Jadi terbukti bahwa $z(x^*{}_k, \mu_k) \leq z(x^*{}_{k+1}, \mu_{k+1})$

ii. Karena $x^*{}_k$ dan $x^*{}_{k+1}$ masing-masing meminimalkan $z(x, \mu_k)$ dan $z(x, \mu_{k+1})$, maka

$$f(x^*{}_k) + \mu_k\, G[g(x^*{}_k)] \leq f(x^*{}_{k+1}) + \mu_k G[g(x^*{}_{k+1})] \qquad \textbf{(2.44)}$$

$$f(x^*{}_{k+1}) + \mu_{k+1} G[g(x^*{}_{k+1})] \leq f(x^*{}_k) + \mu_{k+1}\, G[g(x^*{}_k)] \qquad \textbf{(2.45)}$$

Jika Persamaan (2.44) dan (2.45) dijumlahkan, maka diperoleh

$f(x^*{}_k) + \mu_k\, G[g(x^*{}_k)] + f(x^*{}_{k+1}) + \mu_{k+1} G[g(x^*{}_{k+1})] \leq f(x^*{}_{k+1}) +$

$\mu_k G[g(x^*{}_{k+1})] + f(x^*{}_k) + \mu_{k+1}\, G[g(x^*{}_k)]$

$\Leftrightarrow \mu_k\, G[g(x^*{}_k)] + \mu_{k+1} G[g(x^*{}_{k+1})] \leq \mu_k G[g(x^*{}_{k+1})] + \mu_{k+1}\, G[g(x^*{}_k)]$

$\Leftrightarrow \mu_k\, G[g(x^*{}_k)] - \mu_k G[g(x^*{}_{k+1})]] \leq \mu_{k+1}\, G[g(x^*{}_k)] - \mu_{k+1} G[g(x^*{}_{k+1})]]$

$$\Leftrightarrow \mu_k\, \{G[g(x^*{}_k)] - G[g(x^*{}_{k+1})]\} \leq \mu_{k+1}\{G[g(x^*{}_k)] - G[g(x^*{}_{k+1})]\} \qquad \textbf{(2.46)}$$

Tetapi karena $\mu_k < \mu_{k+1}$, maka Persamaan (2.46) akan berlaku jika

$G[g(x^*{}_k)] - G[g(x^*{}_{k+1})] \geq 0$

$\Leftrightarrow G[g(x^*{}_k)] \geq G[g(x^*{}_{k+1})]$

Jadi terbukti bahwa $G[g(x^*{}_k)] \geq G[g(x^*{}_{k+1})]$

iii. Dari Persamaan (2.43) diperoleh

$f(x^*{}_k) - f(x^*{}_{k+1}) \leq \mu_k G[g(x^*{}_{k+1})] - \mu_k\, G[g(x^*{}_k)]$

$$\Leftrightarrow f(x^*{}_k) - f(x^*{}_{k+1}) \leq \mu_k\{G[g(x^*{}_{k+1})] - G[g(x^*{}_k)]\} \qquad \textbf{(2.47)}$$

Karena $G[g(x^*{}_k)] \geq G[g(x^*{}_{k+1})]$ dan $\mu_k > 0$ maka Persamaan (2.47) akan berlaku jika $f(x^*{}_k) \leq f(x^*{}_{k+1})$

Jadi terbukti bahwa $f(x^*{}_k) \leq f(x^*{}_{k+1})$

iv. Karena $x^*{}_k$ meminimalkan $z(x, \mu_k)$, maka diperoleh

$f(x^*) + \mu_k G[g(x^*)] \geq z(x^*{}_k, \mu_k)$

$\Leftrightarrow f(x^*) + \mu_k G[g(x^*)] \geq f(x^*{}_k) + \mu_k G[g(x^*{}_k)]$

Karena x^* nilai minimum untuk masalah optimasi berkendala, maka $G[g(x^*)] = 0$, sehingga diperoleh

$f(x^*) \geq f(x^*{}_k) + \mu_k G[g(x^*{}_k)]$

Karena $G[g(x^*{}_k)] \geq 0$ dan $\mu_k > 0$ maka

$f(x^*) \geq z(x^*{}_k, \mu_k) \geq f(x^*{}_k)$

Teorema 2.10 (Chong, 2001 : 449)

Jika fungsi tujuan f kontinu, dan $\mu_k \to \infty$ ketika $k \to \infty$, maka limit dari barisan konvergen $\{f(x^*{}_k)\}$ adalah solusi masalah optimasi berkendala.

Bukti :

Diketahui $z(x^*{}_k, \mu_k)$ merupakan barisan naik yang dibatasi oleh solusi optimal masalah berkendala yaitu $f(x^*)$. Dimisalkan

$$\lim_{k\to\infty} z(x^*{}_k, \mu_k) = z^* \quad \textbf{(2.48)}$$

Karena fungsi $f(x)$ kontinu dan berdasarkan relasi ke (iv) Lemma 2.2, maka diperoleh

$$\lim_{k\to\infty} f(x^*{}_k) = f(\bar{x}) \leq f(x^*) \quad \textbf{(2.49)}$$

Jika Persamaan (2.48) dikurangi Persamaan (2.49) maka diperoleh

$$\lim_{k\to\infty} z(x^*{}_k, \mu_k) - \lim_{k\to\infty} z(x^*{}_k, \mu_k) = z^* - f(\bar{x})$$

$$\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} [z(x^*{}_k, \mu_k) - z(x^*{}_k, \mu_k)] = z^* - f(\bar{x})$$

$$\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \mu_k G[g(x^*{}_k)] = z^* - f(\bar{x})$$

Berdasarkan relasi (ii) Lemma 2.2, $G[g(x^*{}_k)]$ merupakan barisan turun dengan batas bawahnya yaitu nol. Sehingga

$$\lim_{k\to\infty} G[g(x^*{}_k)] = 0$$

Karena $G[g(x^*{}_k)]$ kontinu maka dapat dipilih titik layak $\bar{x}$, sehingga diperoleh

$\lim_{k\to\infty} G[g(x^*{}_k)] = 0 = G[g(\bar{x})]$,

sehingga $\bar{x}$ merupakan titik layak. Berdasarkan relasi (iv) Lemma 2.2, $f(x^*{}_k) \leq f(x^*)$ sehingga

$$f(\bar{x}) = \lim_{k\to\infty} f(x^*{}_k) \leq f(x^*)$$

Oleh karena itu $\bar{x}$ harus menjadi solusi masalah berkendala. Jadi Teorema 2.10 terbukti.