

BAB II

KAJIAN TEORI

Pada bab ini dijabarkan beberapa kajian literatur yang digunakan untuk analisis sistem antrean pada penelitian. Beberapa hal yang dibahas berkaitan dengan profil PT Bank Rakyat Indonesia (Persero), teori probabilitas, teori antrean, model antrean $(M/M/c):(NPD/\infty/\infty)$, uji distribusi Kolmogorov-Smirnov serta optimasi biaya antrean.

A. Profil PT Bank Rakyat Indonesia (Persero)

Pada profil PT Bank Rakyat Indonesia (BRI) (Persero) akan dibahas tentang sejarah singkat berdirinya PT Bank Rakyat Indonesia (Persero). Selain itu, akan dijelaskan visi dan misi yang dimiliki PT Bank Rakyat Indonesia (Persero).

1. Sejarah Singkat PT Bank Rakyat Indonesia (Persero)

Bank Rakyat Indonesia adalah salah satu bank milik pemerintah yang terbesar di Indonesia. Pada awalnya Bank Rakyat Indonesia (BRI) didirikan di Purwokerto, Jawa Tengah oleh Raden Bei Aria Wirjaatmadja dengan nama De Poerwokertosche Hulp en Spaarbank der Inlandsche Hoofdenatau "Bank Bantuan dan Simpanan Milik Kaum Priyayi Purwokerto", suatu lembaga keuangan yang melayani orang-orang berkebangsaan Indonesia (pribumi). Lembaga tersebut berdiri tanggal 16 Desember 1895, yang kemudian dijadikan sebagai hari kelahiran BRI.

Pada periode setelah kemerdekaan RI, berdasarkan Peraturan Pemerintah No. 1 tahun 1946 Pasal 1 disebutkan bahwa BRI adalah sebagai Bank Pemerintah pertama di Republik Indonesia. Dalam masa perang mempertahankan

kemerdekaan pada tahun 1948, kegiatan BRI sempat terhenti untuk sementara waktu dan baru mulai aktif kembali setelah perjanjian Renville pada tahun 1949 dengan berubah nama menjadi Bank Rakyat Indonesia Serikat. Pada waktu itu melalui PERPU No. 41 tahun 1960 dibentuklah Bank Koperasi Tani dan Nelayan (BKTN) yang merupakan peleburan dari BRI, Bank Tani Nelayan dan Nederlandsche Maatschappij (NHM). Kemudian berdasarkan Penetapan Presiden (Penpres) No. 9 tahun 1965, BKTN diintegrasikan ke dalam Bank Indonesia dengan nama Bank Indonesia Urusan Koperasi Tani dan Nelayan.

Setelah berjalan selama satu bulan, keluar Penpres No. 17 tahun 1965 tentang pembentukan bank tunggal dengan nama Bank Negara Indonesia. Dalam ketentuan baru itu, Bank Indonesia Urusan Koperasi, Tani dan Nelayan (eks BKTN) diintegrasikan dengan nama Bank Negara Indonesia unit II bidang Rural, sedangkan NHM menjadi Bank Negara Indonesia unit II bidang Ekspor Impor (Exim).

Berdasarkan Undang-Undang No. 14 tahun 1967 tentang Undang-undang Pokok Perbankan dan Undang-undang No. 13 tahun 1968 tentang Undang-undang Bank Sentral, yang intinya mengembalikan fungsi Bank Indonesia sebagai Bank Sentral dan Bank Negara Indonesia Unit II Bidang Rular dan Ekspor Impor dipisahkan masing-masing menjadi dua Bank yaitu Bank Rakyat Indonesia dan Bank Ekspor Impor Indonesia. Selanjutnya berdasarkan Undang-undang No. 21 tahun 1968 menetapkan kembali tugas-tugas pokok BRI sebagai bank umum.

Sejak 1 Agustus 1992 berdasarkan Undang-undang Perbankan No. 7 tahun 1992 dan Peraturan Pemerintah RI No. 21 tahun 1992 status BRI berubah menjadi

perseroan terbatas. Kepemilikan BRI saat itu masih 100% di tangan Pemerintah Republik Indonesia. Pada tahun 2003, Pemerintah Indonesia memutuskan untuk menjual 30% saham bank ini, sehingga menjadi perusahaan public dengan nama resmi PT. Bank Rakyat Indonesia (Persero) Tbk., yang masih digunakan sampai dengan saat ini.

2. Visi dan Misi PT Bank Rakyat Indonesia (Persero)

Visi dari PT Bank Rakyat Indonesia (Persero) adalah menjadi bank komersial terkemuka yang selalu mengutamakan kepuasan nasabah. Adapun misi dari PT Bank Rakyat Indonesia (Persero) adalah sebagai berikut:

- a. Melakukan kegiatan perbankan yang terbaik dengan mengutamakan pelayanan kepada usaha mikro, kecil dan menengah untuk menunjang peningkatan ekonomi masyarakat.
- b. Memberikan pelayanan prima kepada nasabah melalui jaringan kerja yang tersebar luas dan didukung oleh sumber daya manusia yang professional dan teknologi informasi yang handal dengan melaksanakan manajemen risiko serta praktek *Good Corporate Governance (GCG)* yang sangat baik.
- c. Memberikan keuntungan dan manfaat yang optimal kepada pihak-pihak yang berkepentingan (*stakeholders*).

B. Teori Probabilitas

Dalam suatu percobaan yang dilakukan secara acak, ada ketidakpastian mengenai suatu kejadian khusus akan terjadi atau tidak. Sebagai ukuran suatu probabilitas, ukuran yang diharapkan muncul dari suatu kejadian yaitu bilangan antara 0 dan 1. Jika suatu kejadian pasti terjadi, dapat dikatakan bahwa nilai

probabilitas kejadian ini adalah 1, tetapi jika suatu kejadian tidak akan terjadi maka dikatakan bahwa nilai probabilitas kejadian ini adalah 0. (Spiegel, Schiller & Srinivasan, 2004: 4-5).

Berikut ini merupakan definisi tentang teori probabilitas, yaitu:

Definisi 2.1 (Spiegel, Schiller & Srinivasan, 2004: 5) Suatu ruang sampel S dengan S diskrit, maka semua subhimpunan akan bersesuaian dengan kejadian-kejadian, begitu juga sebaliknya. Jika S nondiskrit, maka hanya subhimpunan-subhimpunan khusus (subhimpunan yang terukur) yang bersesuaian dengan kejadian-kejadian.

Untuk setiap kejadian A di dalam semua kejadian C , dapat diasosiasikan sebuah bilangan riil $P(A)$ dengan P disebut sebagai *fungsi probabilitas*, dan $P(A)$ sebagai *probabilitas* dari kejadian A apabila aksioma-aksioma berikut dipenuhi:

Aksioma 1. Untuk setiap kejadian A di dalam semua kejadian C ,

$$P(A) \geq 0 \quad (2.1)$$

Aksioma 2. Untuk kejadian pasti S di dalam semua kejadian C ,

$$P(S) = 1 \quad (2.2)$$

Aksioma 3. Untuk semua kejadian saling asing A_1, A_2, \dots , di dalam semua kejadian C ,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots \quad (2.3)$$

Secara khusus, untuk dua kejadian saling asing A_1, A_2 ,

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) \quad (2.4)$$

Berikut ini merupakan teorema tentang teori probabilitas, yaitu:

Teorema 2.1 (Walpole, 1992: 90) Jika suatu percobaan mempunyai N hasil percobaan yang berbeda, dan masing-masing mempunyai kemungkinan yang sama untuk terjadi, jika tepat n di antara hasil percobaan itu menyusun kejadian A , maka peluang kejadian A adalah

$$P(A) = \frac{n}{N} \quad (2.5)$$

Bukti :

Bila ruang contoh suatu percobaan mempunyai N unsur, dan masing-masing unsur tersebut mempunyai peluang yang sama untuk terjadi, maka pada setiap titik contoh diberikan peluang sebesar $1/N$. Dengan demikian, peluang kejadian A yang berisikan n titik contoh adalah rasio banyaknya titik contoh atau unsur dalam A dengan banyaknya titik contoh atau unsur dalam S .

Dalam teori probabilitas akan dibahas mengenai variabel acak, distribusi Poisson dan distribusi Eksponensial.

1. Variabel Acak

Berikut ini merupakan beberapa definisi tentang variabel acak dalam teori probabilitas, yaitu:

Definisi 2.2 (Walpole, 1992: 114) Variabel acak adalah suatu fungsi yang nilainya berupa bilangan yang ditentukan oleh setiap unsur dalam ruang sampel. Untuk melambangkan suatu variabel acak digunakan huruf kapital X sedangkan x digunakan untuk menyatakan salah satu diantara nilai-nilai yang terdapat pada ruang sampel.

Definisi 2.3 (Bain & Engelhardt, 1992: 53) Sebuah variabel acak X adalah fungsi yang didefinisikan atas ruang sampel S yang menghubungkan $e \in S$ dengan bilangan riil $x = X(e)$.

Variabel acak dibedakan menjadi dua yaitu variabel acak diskrit dan variabel acak kontinu. Berikut definisi mengenai kedua jenis variabel acak tersebut:

a. Variabel acak diskrit

Variabel acak diskrit adalah variabel acak yang nilai-nilainya berjumlah finit atau infinit-terhitung (Spiegel, Schiller & Srinivasan, 2004: 30).

Berikut ini merupakan definisi tentang variabel acak diskrit, yaitu:

Definisi 2.4 (Bain & Engelhardt, 1992: 56) Jika nilai-nilai yang mungkin dari variabel acak X dapat dihitung x_1, x_2, \dots, x_n atau x_1, x_2, \dots , maka X disebut variabel acak diskrit. Fungsi

$$f(x) = P[X = x] \quad x = x_1, x_2, \dots \quad (2.6)$$

menyatakan bahwa probabilitas $X = x$ disebut fungsi densitas probabilitas.

Berikut merupakan teorema tentang variabel acak diskrit, yaitu:

Teorema 2.2 (Bain & Engelhardt, 1992: 57) Sebuah fungsi $f(x)$ adalah fungsi densitas probabilitas diskrit jika dan hanya jika fungsi tersebut memenuhi syarat:

$$f(x_i) \geq 0 \quad (2.7)$$

untuk semua nilai x_i , dan

$$\sum_{x_i} f(x_i) = 1 \quad (2.8)$$

Bukti:

Syarat (2.7) mengikuti fakta nilai dari fungsi densitas probabilitas diskrit adalah sebuah probabilitas dan tidak negatif. Karena x_1, x_2, \dots menunjukkan semua nilai yang mungkin dari X maka kejadian $[X = x_1], [X = x_2], \dots$ merupakan partisi lengkap dari ruang sampel. Dengan demikian,

$$\sum_{x_i} f(x_i) = \sum_{x_i} P[X = x_i] = 1$$

untuk semua x_i . Hal ini mengakibatkan fungsi densitas probabilitas harus memenuhi syarat (2.7) dan (2.8) dan fungsi yang memenuhi syarat-syarat tersebut akan memberikan probabilitas yang sesuai dengan definisi (2.1).

Berikut ini merupakan beberapa definisi tentang variabel acak diskrit, yaitu:

Definisi 2.5 (Bain & Engelhardt, 1992: 58) Fungsi distribusi kumulatif dari variabel acak X didefinisikan dengan

$$F(x) = P[X \leq x], x \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

Definisi 2.6 (Bain & Engelhardt, 1992: 61) Jika X adalah variabel acak diskrit dengan fungsi densitas probabilitas $f(x)$, maka nilai harapan dari X didefinisikan sebagai

$$\mu = E(X) = \sum_x (x f(x)) \quad (2.10)$$

b. Variabel acak kontinu

Variabel acak kontinu merupakan variabel acak yang memiliki nilai tak terhingga banyaknya, sepanjang sebuah interval tidak terputus. Variabel acak kontinu biasanya diperoleh dari hasil pengukuran (Harinaldi, 2005: 62).

Berikut ini merupakan beberapa definisi tentang variabel acak kontinu, yaitu:

Definisi 2.7 (Spiegel, Schiller & Srinivasan, 2004: 32) Suatu variabel acak nondiskrit X dikatakan *kontinu* jika fungsi distribusinya dapat dinyatakan sebagai

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad (-\infty < x < \infty) \quad (2.11)$$

dengan sifat-sifat fungsi $f(x)$ sebagai berikut:

$$1) \quad f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R} \quad (2.12)$$

$$2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (2.13)$$

Definisi 2.8 (Bain & Engelhardt, 1992: 67) Jika X merupakan variabel acak kontinu dengan fungsi densitas probabilitas $f(x)$, maka nilai harapan dari X didefinisikan dengan

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx \quad (2.14)$$

jika integral pada persamaan (2.14) benar benar terpusat atau konvergen. Jika sebaliknya, maka $E(X)$ tidak ada.

2. Distribusi Poisson

Distribusi probabilitas Poisson adalah salah satu dari pola-pola kedatangan yang paling umum bila kedatangan-kedatangan terdistribusi secara acak. Hal ini terjadi karena distribusi Poisson menggambarkan jumlah kedatangan per unit waktu bila sejumlah besar variabel-variabel random mempengaruhi tingkat kedatangan.

Bila pola kedatangan individu-individu mengikuti suatu distribusi Poisson, maka waktu antarkedatangan atau *interarrival time* yang merupakan waktu antar

kedatangan setiap individu adalah bersifat acak dan mengikuti suatu distribusi Eksponensial (Subagyo, Asri & Handoko, 1985: 266).

Berikut merupakan definisi tentang distribusi Poisson, yaitu:

Definisi 2.9 (Bain & Engelhardt, 1992: 103) Variabel acak diskrit X dikatakan memiliki distribusi Poisson dengan parameter $\mu > 0$ jika memiliki fungsi densitas probabilitas diskrit yang berbentuk

$$f(x; \mu) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

Keterangan:

x = hasil yang mungkin dari variabel acak diskrit X

e = konstanta dasar logaritma natural = 2,71828 ...

μ = nilai harapan dari X dengan X adalah variabel acak diskrit

3. Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial digunakan untuk menggambarkan distribusi waktu. Sebagai contoh, pada fasilitas pelayanan jasa diasumsikan bahwa waktu pelayanan bersifat acak. Hal ini berarti waktu untuk melayani *customer* tidak tergantung pada lama waktu yang dihabiskan untuk melayani *customer* sebelumnya dan tidak bergantung pada jumlah *customer* yang menunggu untuk dilayani.

Berikut merupakan definisi tentang distribusi Eksponensial, yaitu:

Definisi 2.10 (Kakiay, 2004: 23) Suatu variabel acak kontinu x disebut mempunyai suatu distribusi eksponensial dengan parameter λ dengan $\lambda > 0$. Apabila fungsi densitas probabilitas diberikan sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{untuk } x \geq 0 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases} \quad (2.16)$$

dengan distribusi fungsi kumulatif sebagai berikut:

$$F(x) = \int_0^x f(y) dy = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{untuk } x \geq 0 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases} \quad (2.17)$$

C. Teori Antrean

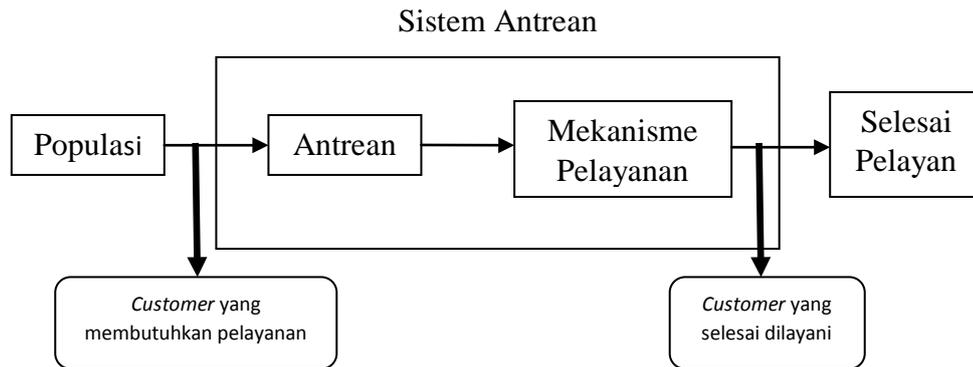
Pembahasan teori antrean lebih difokuskan pada upaya penguraian waktu tunggu yang terjadi dalam barisan antrean. Antrean seperti ini dapat dilihat dalam berbagai situasi yang terjadi pada kehidupan sehari-hari, seperti *customer* yang menunggu pada *checkout cashier* di supermarket atau nasabah yang menunggu untuk dilayani oleh *teller*, dan sebagainya.

1. Konsep Dasar Teori Antrean

Teori Antrean (*Queueing Theory*) diawali oleh Agner Kraup Erlang (1 Januari 1878 – 3 Februari 1929) yang pertama kali mempublikasikan makalah mengenai *Queueing Theory* pada tahun 1909. A.K Erlang adalah seorang insinyur asal Denmark yang bekerja di *Copenhagen Telephone Exchange*. Penemuan itu terjadi ketika mereka mengamati masalah kepadatan penggunaan telepon di *Copenhagen Telephone*. Pada saat itu permintaan hubungan telepon ke satu nomor masih dilayani secara manual oleh operator di mana pada saat-saat sibuk peminta harus menunggu untuk bisa disambungkan dengan nomor yang dikehendaki karena padatnya lalu lintas komunikasi (Siswanto, 2007:217).

Proses antrean dimulai saat pelanggan-pelanggan yang memerlukan pelayanan mulai datang. Mereka berasal dari suatu populasi yang disebut sebagai sumber masukan. Proses antrean merupakan suatu proses yang berhubungan

dengan kedatangan pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan, menunggu dalam baris antrean jika belum dilayani, dilayani dan akhirnya meninggalkan fasilitas tersebut sesudah dilayani. Sedangkan sistem antrean adalah suatu himpunan pelanggan, pelayan dan suatu aturan yang mengatur pelayanan kepada pelanggan (Kakiay, 2004: 10).



Gambar 2.1 Proses Dasar Antrean

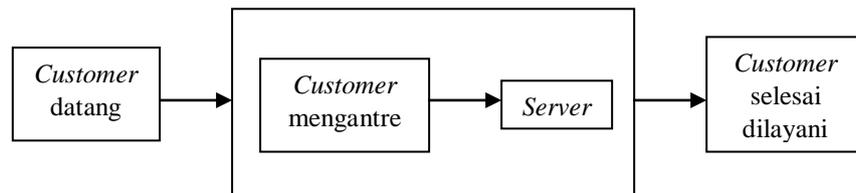
2. Struktur Dasar Model Antrean

Atas dasar sifat proses pelayanan, fasilitas-fasilitas pelayanan dapat diklasifikasikan dalam susunan saluran atau *channel* (*single* atau *multiple*) dan *phase* (*single* atau *multiple*) yang akan membentuk suatu struktur antrean yang berbeda-beda. Istilah *channel* menunjukkan jumlah jalur untuk memasuki sistem pelayanan, yang juga menunjukkan jumlah fasilitas pelayanan. Istilah *phase* berarti tahap-tahap pelayanan yang harus dilalui para *customer* dan semua tahap tersebut harus dilalui sebelum pelayanan dinyatakan lengkap (Subagyo, Asri & Handoko, 1985: 270).

Menurut Kakiay (2004, 13-16) ada 4 model struktur dasar antrean yang umum terjadi dalam sistem antrean, yaitu:

a. *Single Channel Single Phase*

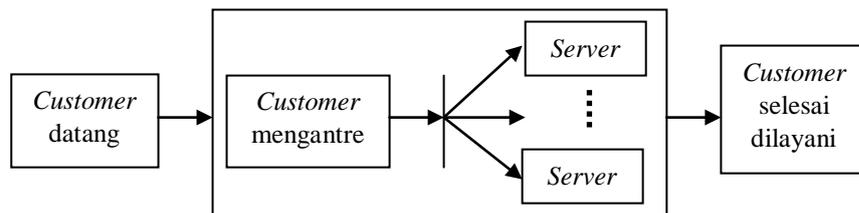
Model antrean *Single Channel Single Phase* berarti suatu sistem antrean yang dilayani oleh satu *server* dan melalui satu *phase* pelayanan. Sebagai contoh yaitu apotek yang hanya memiliki satu loket pelayanan.



Gambar 2.2 Model *Single Channel Single Phase*

b. *Multiple Channel Single Phase*

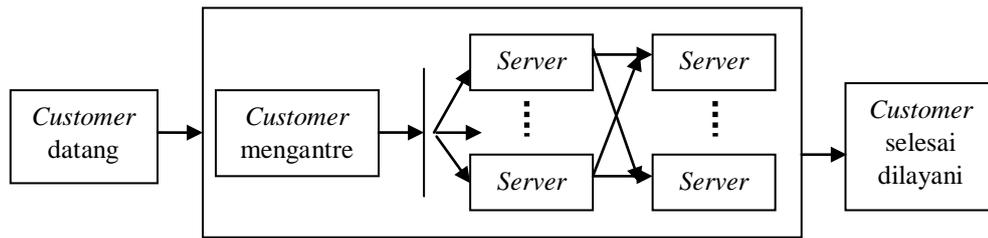
Model antrean *Multiple Channel Single Phase* berarti suatu sistem antrean yang dilayani oleh dua atau lebih *server* dan melalui satu *phase* pelayanan. Sebagai contoh yaitu supermarket yang memiliki lebih dari satu kasir.



Gambar 2.3 Model *Multiple Channel Single Phase*

c. *Multiple Channel Multiple Phase*

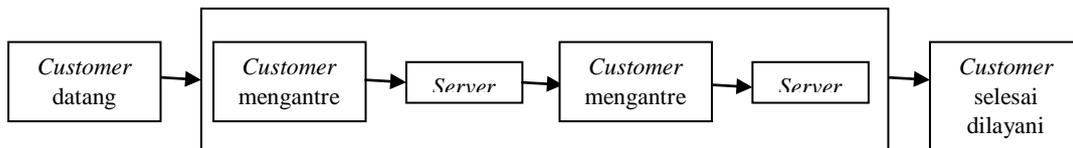
Model antrean *Multiple Channel Multiple Phase* berarti suatu sistem antrean yang dilayani oleh dua atau lebih *server* dan melalui dua atau lebih *phase* pelayanan. Sebagai contoh yaitu pelayanan pasien BPJS di rumah sakit. Apabila pasien ingin menggunakan jaminan kesehatan BPJS, pasien diharuskan mengurus berkas jaminan kesehatan BPJS terlebih dahulu untuk mendapatkan pelayanan dokter.



Gambar 2.4 Model *Multiple Channel Multiple Phase*

d. *Single Channel Multiple Phase*

Model antrean *Single Channel Multiple Phase* berarti suatu sistem antrean yang dilayani oleh satu *server* dan melalui dua atau lebih *phase* pelayanan. Sebagai contoh yaitu tempat pencucian mobil, di mana terdapat proses pencucian dan pengeringan mobil yang masing-masing hanya dilakukan oleh satu *server*.



Gambar 2.5 Model *Single Channel Multiple Phase*

3. Faktor Sistem Antrean

Menurut Kakiay (2004: 4-6), faktor-faktor dalam sistem antrean adalah sebagai berikut :

a. Distribusi Kedatangan

Pada sitem antrean, distribusi kedatangan merupakan faktor penting yang berpengaruh besar terhadap kelancaran pelayanan. Ditribusi kedatangan dibagi menjadi dua yaitu kedatangan secara individu (*single arrivals*) dan kedatangan secara kelompok (*bulk arrivals*).

Apabila bentuk kedatangan tidak disebutkan secara khusus, maka dianggap bahwa pelanggan tiba satu per satu. Diasumsikan bahwa kedatangan pelanggan

mengikuti suatu proses dengan distribusi probabilitas tertentu. Distribusi probabilitas yang sering digunakan adalah distribusi Poisson, di mana kedatangan bersifat bebas, tidak terpengaruh oleh kedatangan sebelum ataupun sesudahnya. Asumsi distribusi Poisson menunjukkan bahwa kedatangan pelanggan bersifat acak dan mempunyai rata-rata sebesar λ (Kakiay, 2004: 11).

b. Distribusi Waktu Pelayanan

Distribusi waktu pelayanan berkaitan dengan berapa banyak fasilitas pelayanan yang dapat disediakan. Distribusi waktu pelayanan dibagi menjadi dua komponen yaitu pelayanan secara individu (*single service*) dan pelayanan secara kelompok (*bulk service*).

Distribusi probabilitas yang sering digunakan pada distribusi waktu pelayanan adalah distribusi Poisson. Berbeda dengan distribusi waktu antar pelayanan yang diasumsikan berdistribusi Eksponensial. Bentuk pelayanan dapat konstan dari waktu ke waktu. Rata-rata pelayanan dengan simbol μ (μ) merupakan jumlah pelanggan yang dilayani dalam satuan waktu (Kakiay, 2004: 11).

c. Fasilitas Pelayanan

Fasilitas pelayanan berkaitan erat dengan baris antrean yang akan dibentuk. Desain fasilitas pelayanan dibagi dalam tiga bentuk, yaitu:

1) Bentuk series

Fasilitas pelayanan dalam bentuk series merupakan fasilitas pelayanan dalam satu garis lurus ataupun garis melingkar.

2) Bentuk paralel

Fasilitas pelayanan dalam bentuk paralel merupakan fasilitas pelayanan dalam beberapa garis lurus antara yang satu dengan yang lain paralel.

3) Bentuk *network station*

Fasilitas pelayanan dalam bentuk *network station* merupakan fasilitas pelayanan yang dapat didesain secara series dengan pelayanan lebih dari satu pada setiap stasiun. Bentuk ini dapat juga dilakukan secara paralel dengan stasiun yang berbeda-beda.

d. Disiplin Pelayanan

Disiplin pelayanan berkaitan erat dengan urutan pelayanan bagi *customer* yang memasuki fasilitas pelayanan. Disiplin pelayanan terbagi menjadi empat bentuk, yaitu:

1) *First Come First Service* (FCFS)

Disiplin pelayanan FCFS berarti *customer* yang lebih dulu datang akan lebih dulu dilayani.

2) *Last Come First Service* (LCFS)

Disiplin pelayanan LCFS berarti *customer* yang datang terakhir akan lebih dahulu selesai dilayani.

3) *Service In Random Order* (SIRO)

Disiplin pelayanan SIRO berarti pemanggilan *customer* didasarkan pada peluang secara acak tidak berdasarkan *customer* yang datang terlebih dahulu.

4) Prioritas Pelayanan (*VIP customer*)

Disiplin pelayanan prioritas berarti prioritas pelayanan diberikan kepada *customer* yang mempunyai prioritas lebih tinggi dibandingkan dengan *customer* yang mempunyai prioritas lebih rendah meskipun *customer* tersebut datang terlebih dahulu.

e. Ukuran dalam Antrian

Besarnya antrean *customer* yang akan memasuki fasilitas pelayanan perlu diperhatikan. Ada dua desain yang dapat dipilih untuk menentukan besarnya antrean yaitu ukuran kedatangan secara tidak terbatas (*infinite queue*) dan ukuran kedatangan secara terbatas (*finite queue*).

f. Sumber Pemanggilan

Dalam fasilitas pelayanan, yang berperan sebagai sumber pemanggilan dapat berupa mesin maupun manusia. Sumber pemanggilan dibagi menjadi dua yaitu sumber pemanggilan terbatas (*finite calling service*) dan sumber pemanggilan tak terbatas (*infinite calling service*).

4. Notasi Kendall Lee

Penulisan model antrean yang dikenal pada umumnya mengikuti notasi Kendall yang pertama kali dikemukakan oleh D.G.Kendall dalam bentuk $a/b/c$, kemudian oleh A.M. Lee ditambahkan simbol d dan e sehingga menjadi $a/b/c/d/e$ yang disebut notasi kendall-Lee (Taha, 1996:627). Menurut Taha (1996:186), notasi Kendall-lee tersebut perlu ditambah dengan simbol f . Sehingga karakteristik suatu antrian dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$(a/b/c) : (d/e/f)$$

simbol a, b, c, d, e dan f ini merupakan unsur-unsur dasar dari model baris antrian. Berikut merupakan penjelasan dari simbol-simbol tersebut :

a : Distribusi kedatangan (*Arrival Distribution*)

b : Distribusi waktu pelayanan atau keberangkatan (*Service Time Departure*)

c : Jumlah pelayan dalam parallel (dimana $c = 1, 2, 3, \dots, \infty$)

d : Disiplin pelayanan, seperti FCFS, LCFS, SIRO

e : Jumlah maksimum yang diizinkan dalam sistem (*Queue dan System*)

f : Jumlah *customer* yang ingin memasuki sistem sebagai sumber

Notasi standar ini dapat diganti dengan kode-kode yang sebenarnya dari distribusi-distribusi yang terjadi dan bentuk lainnya, seperti :

M : Distribusi kedatangan atau keberangkatan dari proses Poisson. Dapat juga distribusi tiba dan bertolak dari distribusi eksponensial.

D : Konstanta atau *deterministic inter arrival* atau *service time* (waktu pelayanan)

k : Jumlah pelayan dalam bentuk parallel atau seri

N : Jumlah maksimum *customer* dalam sistem

E_d : Erlang atau Gamma distribusi untuk waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan dengan parameter

G : Distribusi umum dari *service time* atau keberangkatan (*departure*)

GI : Distribusi umum yang independen dari proses kedatangan (*interactive time*)

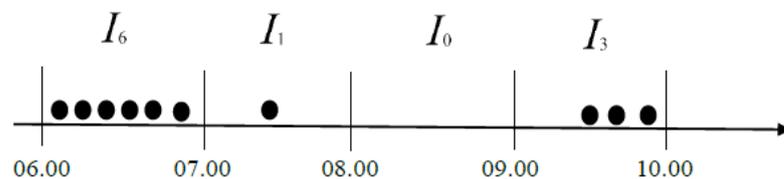
GD: General Discipline (disiplin umum) dalam antrian (FCFS, LCFS, SIRO)

NPD: Non-Preemptive Discipline

PRD: Preemptive Discipline

5. Tingkat Kedatangan dan Proses Poisson

Menurut Siswanto (2007: 219-220) berdasar pada pengamatan A.K. Erlang di Copenhagen Telephone, pola permintaan pelanggan telepon yang meminta sambungan dalam kurun waktu yang tidak terputus (*continuous of time*) dapat dibagi ke dalam beberapa interval waktu yang sama (*fixed interval*). Dalam hal ini, permintaan pelanggan terdistribusi secara acak pada masing-masing interval waktu tetap dalam kurun waktu yang tidak terputus dan disebut sebagai proses Poisson. Berikut ilustrasi proses kedatangan dengan interval waktu tetap dalam suatu kurun waktu tertentu:



Gambar 2.6 Proses Poisson berdasarkan interval waktu

Berdasarkan Gambar 2.6, ada 10 pelanggan yang datang antara jam 06.00-10.00. Namun, jumlah pelanggan yang datang pada setiap interval berbeda. Pada interval I_6 ada 6 pelanggan yang datang. Di sisi lain, pada interval I_0 tidak ada pelanggan yang datang sama sekali. Inilah contoh fenomena yang diamati oleh A.K. Erlang dengan mengikuti proses Poisson. Dalam hal ini, diasumsikan:

- a. Kedatangan pelanggan bersifat acak.
- b. Kedatangan pelanggan antar interval waktu saling tidak mempengaruhi.

Pada Gambar 2.6, kurun waktu pengamatan dibagi menjadi empat interval waktu tetap, yaitu per jam. Jika I merupakan jumlah interval waktu maka:

$$I = \sum_{i=1}^n I_i \quad (2.18)$$

dengan I_i adalah interval ke- i .

Dalam kasus ini, $I_1 = 1$ interval dengan 6 kedatangan; $I_2 = 1$ interval dengan 1 kedatangan; $I_3 = 1$ interval dengan 0 kedatangan; dan $I_4 = 1$ interval dengan 3 kedatangan. Jadi, $I = 4$ yaitu mulai dari I_1 hingga I_4 . Selanjutnya, jika N menandai jumlah pelanggan yang datang selama I interval dan di interval I_i ada K_i pelanggan maka jumlah pelanggan selama kurun waktu I adalah:

$$N = \sum_{i=1}^n K_i \times I_i \quad (2.19)$$

di mana, K_i adalah jumlah pelanggan yang datang di interval I_i . Dalam kasus ini, $N = 6 + 1 + 0 + 3 = 10$.

Jika di setiap interval dibagi lagi menjadi n subinterval dengan asumsi dan proses yang sama, maka kedatangan pada setiap interval waktu tetap dapat dinyatakan dengan distribusi Poisson. Dengan demikian, rata-rata kedatangan pelanggan atau tingkat kedatangan pelanggan pada setiap interval waktu tetap dapat dinyatakan dengan:

$$\lambda = \frac{N}{I} \quad (2.20)$$

Dengan menggunakan Persamaan (2.20), tingkat kedatangan pada Gambar 2.6 adalah

$$\lambda = \frac{N}{I} = \frac{10}{4} = 2,5 \frac{\text{pelanggan}}{\text{jam}}$$

artinya setiap jam rata-rata 2,5 pelanggan datang. Dengan demikian, λ menyatakan tingkat kedatangan pelanggan per interval waktu.

6. Tingkat Pelayanan dengan Distribusi Poisson

Menurut Supranto (2013: 329) rata-rata tingkat pelayanan pelanggan dinotasikan dengan μ dengan μ merupakan banyaknya *customer* yang dapat dilayani dalam satuan (unit) waktu dengan waktu pelayanan yang diperkirakan untuk melayani *customer* adalah $\frac{1}{\mu}$. Untuk menghitung tingkat pelayanan dengan distribusi Poisson, langkah yang dilakukan sama dengan proses penghitungan tingkat kedatangan dengan distribusi Poisson. Sebagai contoh, jika kapasitas fasilitas pelayanan mampu melayani 6 pelanggan per jam artinya rata-rata tingkat pelayanan adalah 6 pelanggan/jam.

D. Model Antrean ($M/M/C$): ($NPD/\infty/\infty$)

Dalam model-model antrean dengan prioritas, diasumsikan bahwa beberapa antrean yang paralel dibentuk di depan sebuah sarana pelayanan dengan setiap antrean diperuntukkan bagi para *customer* dengan prioritas tertentu. Jika sarana tersebut memiliki m antrean, diasumsikan bahwa antrean 1 memiliki prioritas pelayanan tertinggi, dan antrean m adalah untuk para *customer* dengan prioritas terendah. Laju kedatangan dan pelayanan dapat bervariasi untuk antrean dengan prioritas berbeda (Taha, 1996).

Pada tingkat kedatangan dapat ditentukan bahwa setiap pelanggan yang berada dalam antrian harus dilayani berdasarkan "yang pertama datang, juga pertama dilayani" (FCFS). Dalam prioritas pelayanan terdapat dua aturan yang dapat diikuti, yaitu:

1. Aturan *Preemptive*

Menunjukkan pelayanan pelanggan dengan prioritas lebih rendah dapat diinterupsi demi seorang pelanggan yang baru tiba dan memiliki prioritas yang lebih tinggi.

2. Aturan *Non-Preemptive* (NP)

Menunjukkan pelayanan seorang pelanggan begitu dilayani hanya akan meninggalkan sarana pelayanan tersebut setelah pelayanan diselesaikan dan tanpa bergantung pada prioritas para pelanggan yang baru tiba.

Aturan preemptive umumnya tidak menguraikan sistem antreannya secara mendalam, sedangkan pada sistem antrean non-preemptive diuraikan melalui pelayanan tunggal dan pelayanan majemuk. Pada model pelayanan tunggal dapat ditentukan untuk menggunakan distribusi Poisson sebagai tingkat kedatangan pada sistem antrian, sementara pelayanan menggunakan distribusi bebas (*arbitrary distribution*). Pada kasus pelayanan majemuk sudah ditentukan bahwa kedatangan dan pelayanan mengikuti distribusi Poisson (Kakiay, 2004: 173-174).

Menurut Gross, et al. (2008: 150-153) *customer* pada prioritas ke- k dengan nilai k yang lebih kecil menyatakan prioritas yang lebih tinggi dengan kedatangan pada antrean *server* tunggal berdistribusi Poisson dengan rata-rata λ_k ($k = 1, 2, \dots, r$) dan *customer* yang datang terlebih dahulu akan dilayani terlebih

dahulu dengan dasar prioritas masing-masing. Distribusi pelayanan pada prioritas ke- k berdistribusi Eksponensial dengan rata-rata waktu pelayanan $\frac{1}{\mu}$. Dalam hal ini, *customer* prioritas dengan prioritas lebih tinggi dilayani setelah *customer* sebelumnya selesai dilayani.

Dimulai dengan didefinisikan:

$$\rho_k = \frac{\lambda_k}{\mu_k} \quad (1 \leq k \leq r), \quad \sigma_k = \sum_{i=1}^k \rho_i \quad (\sigma_0 = 0, \sigma_r = \rho) \quad (2.21)$$

dengan $\lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_k$ dan sistem *steady state* atau mencapai kondisi stabil selama $\sigma_r = \rho < 1$.

Mempertimbangkan *customer* dengan prioritas i yang datang pada sistem diasumsikan terdapat n_1 *customer* prioritas 1 pada kedatangan antrean baru, n_2 pada proritas 2, n_3 pada prioritas 3 dan seterusnya. S_0 merupakan waktu yang diperlukan untuk menyelesaikan pelayanan *customer* yang saat itu sedang dilayani. Dalam hal ini, S_0 dapat bernilai 0 saat sistem dalam keadaan kosong. Selanjutnya, S_k merupakan waktu yang diperlukan untuk melayani n_k *customer* pada prioritas k dimana $1 \leq k \leq i$. Selama waktu tunggu *customer* baru yang dinotasikan dengan T_q , *customer* pada prioritas $k < i$ datang dan mulai dilayani. n'_k merupakan banyak *customer* pada prioritas k yang datang kemudian pergi dimana $k < i$ dengan S'_k merupakan waktu pelayanan n'_k *customer*. Sehingga waktu tunggu *customer* yaitu:

$$T_q = \sum_{k=1}^{i-1} S'_k + \sum_{k=1}^i S_k + S_0$$

Ambil nilai harapan dari kedua sisi, diberikan:

$$W_q^{(i)} = E[T_q] = \sum_{k=1}^{i-1} E[S'_k] + \sum_{k=1}^i E[S_k] + E[S_0] \quad (2.22)$$

Dengan proses Poisson, $E[n_k]$ sama dengan rata-rata waktu *customer* prioritas k pada antrean yang dinotasikan dengan $L_q^{(k)}$. Selanjutnya, diberikan rumus sederhana:

$$E[n_k] = L_q^{(k)} = \lambda_k W_q^{(k)}$$

Karena waktu pelayanan tidak bergantung pada n_k , maka:

$$E[S_k] = \frac{E[n_k]}{\mu_k} = \frac{\lambda_k W_q^{(k)}}{\mu_k} = \rho_k W_q^{(k)} \quad (2.23)$$

Untuk proses kedatangan yang berdistribusi Poisson, rata-rata banyaknya kedatangan *customer* prioritas ke- k selama menunggu kedatangan saat ini yang berada dalam antrean yaitu:

$$E[n'_k] = \lambda_k W_q^{(i)}$$

Oleh karena itu,

$$E[S'_k] = \frac{E[n'_k]}{\mu_k} = \frac{\lambda_k W_q^{(i)}}{\mu_k} = \rho_k W_q^{(i)} \quad (2.24)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (2.23) dan Persamaan (2.24) ke dalam Persamaan (2.22), diperoleh:

$$W_q^{(i)} = W_q^{(i)} \sum_{k=1}^{i-1} \rho_k + \sum_{k=1}^i \rho_k W_q^{(k)} + E[S_0]$$

atau

$$W_q^{(i)} = \frac{\sum_{k=1}^i \rho_k W_q^{(k)} + E[S_0]}{1 - \sigma_{i-1}} \quad (2.25)$$

Solusi Persamaan (2.25) ditemukan oleh Cobham pada tahun 1954. Solusi tersebut adalah:

$$W_q^{(i)} = \frac{E[S_0]}{(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)} \quad (2.26)$$

S_0 merupakan waktu yang diperlukan untuk menyelesaikan pelayanan *customer* yang saat itu sedang dilayani. S_0 dapat bernilai 0 saat sistem dalam keadaan kosong sehingga:

$$E[S_0] = Pr\{\text{sistem sibuk}\} \cdot E[S_0|\text{sistem sibuk}]$$

Probabilitas sistem dalam keadaan sibuk yaitu:

$$\lambda \cdot (\text{waktu pelayanan yang diharapkan}) = \lambda \sum_{k=1}^r \frac{\lambda_k}{\lambda} \frac{1}{\mu_k} = \rho$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} & E[S_0|\text{sistem sibuk}] \\ &= \sum_{k=1}^r (E[S_0|\text{sistem sibuk dengan customer prioritas ke k}]) \\ & \times Pr\{\text{sistem sibuk dengan customer prioritas ke k}|\text{sistem sibuk}\} \\ &= \sum_{k=1}^r \frac{1}{\mu_k} \frac{\rho_k}{\rho} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh:

$$E[S_0] = \rho \sum_{k=1}^r \frac{1}{\mu_k} \frac{\rho_k}{\rho} = \sum_{k=1}^r \frac{\rho_k}{\mu_k} \quad (2.27)$$

Substitusikan Persamaan (2.27) ke dalam Persamaan (2.26), diperoleh:

$$W_q^{(i)} = \frac{\sum_{k=1}^r \rho_k / \mu_k}{(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)} \quad (2.28)$$

Persamaan (2.28) dapat terjadi selama $\sigma_r = \sum_{k=1}^r \rho_k < 1$. Nilai harapan banyak *customer* yang mengantre yaitu:

$$L_q = \sum_{i=1}^r L_q^{(i)} = \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i \sum_{k=1}^r \frac{\rho_k}{\mu_k}}{(1 - \sigma_{i-1})(1 - \sigma_i)}$$

Pada antrean prioritas, rata-rata waktu tunggu untuk semua *customer* yaitu:

$$W_q \equiv \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i W_q^{(i)}}{\lambda}$$

Untuk antrean $M/M/1$, waktu rata-rata pelayanan sama dengan rata-rata semua kelas prioritas, yaitu:

$$\frac{1}{\mu} \equiv \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i}{\lambda} \frac{1}{\mu_1} \quad (2.29)$$

Menurut Gross, et al. (2008: 150-155) analisis untuk kasus antrean dengan disiplin pelayanan prioritas *non-preemptive multiple servers* sama dengan model-model terdahulu hanya saja diasumsikan bahwa pelayanan ditentukan berdistribusi Eksponensial untuk setiap prioritas pada setiap *server*. Selain itu, untuk *multiple servers* diasumsikan tidak ada perbedaan waktu pelayanan antar prioritas.

Dimulai dengan didefinisikan:

$$\rho_k = \frac{\lambda_k}{c\mu} \quad (1 \leq k \leq r), \quad \sigma_k = \sum_{i=1}^k \rho_i \quad (\sigma_r \equiv \rho = \lambda/c\mu) \quad (2.30)$$

dimana $\lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_k$ dan sistem *steady state* atau mencapai kondisi stabil saat $\rho < 1$. Kemudian,

$$W_q^{(i)} = \sum_{k=1}^{i-1} E[S'_k] + \sum_{k=1}^i E[S_k] + E[S_0]$$

S_k merupakan waktu yang diperlukan untuk melayani *customer* n_k pada prioritas ke- k pada sistem antrean sedangkan S'_k merupakan waktu yang diperlukan untuk

melayani *customer* n'_k pada prioritas k yang datang selama $W_q^{(i)}$. S_0 merupakan jumlah waktu yang tersisa sampai *server* berikutnya tersedia untuk melayani.

Untuk menurunkan $E[S_0]$ digunakan persamaan berikut:

$$E[S_0] = Pr\{\text{semua server sibuk}\} \cdot E[S_0|\text{semua server sibuk}]$$

Pobabilitas semua server dalam keadaan sibuk yaitu:

$$\sum_{n=c}^{\infty} p_n = p_0 \sum_{n=c}^{\infty} \frac{(cp)^n}{c^{n-c} c!} = p_0 \frac{(cp)^c}{C! (1-\rho)}$$

Sehingga,

$$E[S_0|\text{semua server sibuk}] = 1/c\mu$$

$$E[S_0] = \frac{(cp)^c}{c! (1-\rho)(c\mu)} \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(cp)^n}{n} + \frac{(cp)^c}{C! (1-\rho)} \right)^{-1}$$

Pada Persamaan (2.28),

$$W_q^{(i)} = \frac{E[S_0]}{(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)} = \frac{[c!(1-\rho)(c\mu) \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(cp)^{n-c}}{n!} + c\mu]^{-1}}{(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)} \quad (2.31)$$

Sehingga nilai harapan waktu menunggu *customer* untuk semua prioritas yaitu:

$$W_q = \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i}{\lambda} W_q^{(i)} \quad (2.32)$$

Dengan nilai harapan waktu *customer* tipe i berada dalam sistem yaitu:

$$W_s^{(i)} = \frac{\lambda \left[c! (1-\rho)(c\mu) \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(cp)^{n-c}}{n!} + c\mu \right]^{-1} + \rho(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)}{\lambda(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)}$$

Sehingga nilai harapan waktu *customer* tipe i berada dalam sistem yaitu:

$$W_s^{(i)} = W_q^{(i)} + \frac{1}{c\mu} \quad (2.33)$$

Sedangkan, nilai harapan banyak *customer* tipe *i* berada dalam sistem yaitu:

$$L_S^{(i)} = \frac{\lambda_i \left[c!(1-\rho)(c\mu) \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^{(n-c)}}{n!} + c\mu \right]^{-1} + \rho_i(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)}{(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)} \quad (2.34)$$

E. Uji Distribusi Kolmogorov-Smirnov

Menurut Siegel (1956:59) tes satu sampel Kolmogorov-Smirnov merupakan suatu tes goodness of-fit, artinya yang diperhatikan ialah tingkat kesesuaian antara distribusi sampel hasil observasi dengan suatu distribusi teoritis tertentu. Metode yang digunakan pada tes satu sampel Kolmogorov-Smirnov yaitu dengan menetapkan distribusi frekuensi kumulatif dari data-data sampel hasil observasi pada suatu interval tertentu. Tes satu sampel Kolmogorov-Smirnov dipilih untuk pengujian karena dapat digunakan pada yang sampel sangat kecil dan tidak menghilangkan informasi meski sampel digabungkan dalam beberapa kategori.

Menurut Siegel (1956: 62), langkah-langkah perhitungan dalam uji Kolmogorv-Smirnov adalah sebagai berikut:

- a. Menetapkan fungsi kumulatif teoritis, yaitu distribusi kumulatif yang diharapkan di bawah H_0 .
- b. Skor-skor yang diobservasi dalam suatu distribusi kumulatif diatur dengan memasang setiap interval $S_{(N)}(X)$ dengan interval $F_{(0)}(X)$ yang sebanding.
- c. Untuk tiap-tiap jenjang pada distribusi kumulatif, kurangkan $F_{(0)}(X)$ dengan $S_{(N)}(X)$.
- d. Gunakan rumus $D = \text{maksimum} |F_{(0)}(X) - S_{(N)}(X)|$ untuk menghitung nilai D, dengan:

D = Distribusi sampling

$F_{(0)}(X)$ = Fungsi distribusi kumulatif dari suatu distribusi di bawah asumsi H_0

$S_{(N)}(X)$ = Distribusi frekuensi kumulatif yang diobservasi dari suatu sampel acak dengan N observasi

- e. Menentukan D dengan mengacu pada tabel nilai kritis dari D pada tes satu sampel Kolmogorv-Smirnov.

Langkah-langkah pengujian menggunakan tes satu sampel Kolmogorov-Smirnov sebagai berikut:

Hipotesis nol (H_0) : Data sampel hasil observasi dapat dianggap berasal dari populasi yang berdistribusi Poisson.

Hipotesis Alternatif (H_1) : Data sampel hasil observasi tidak dapat dianggap berasal dari populasi yang berdistribusi Poisson.

Statistik uji : Tes satu sampel Kolmogorov-Smirnov.

Tingkat Signifikansi : alpha.

Daerah Penolakan : H_0 ditolak jika $D \geq D_{tabel}$.

F. Optimasi Biaya Antrean

Optimasi sistem antrean dapat dievaluasi dengan melihat biaya total yang diharapkan. Total biaya yaitu jumlah keseluruhan dari total biaya pelayanan per satuan waktu, dengan biaya menunggu *customer* per satuan waktu. Menurut Taha (2007: 598), model biaya dapat dicari dengan menggunakan rumus berikut:

$$ETC(x) = EOC(x) + EWC(x) \quad (2.35)$$

Keterangan:

x : Jumlah pelayan.

$ETC(x)$: *Expected Total Cost*

Total biaya dalam sistem antrian dengan x pelayan per satuan waktu.

$EOC(x)$: *Expected Operating Cost*

Biaya pelayanan yang diperkirakan untuk pengoperasian per satuan waktu apabila dalam sistem antrian terdapat x pelayan.

$EWC(x)$: *Expected Waiting Cost*

Biaya menunggu yang diperkirakan per satuan waktu apabila dalam sistem antrian terdapat x pelayan.

Biaya pelayanan dan biaya menunggu dapat dicari dengan menggunakan rumus berikut:

$$EOC(x) = C_1x \quad (2.36)$$

$$EWC(x) = C_2L_s(x) \quad (2.37)$$

Keterangan:

C_1 : Biaya penambahan seorang pelayan per satuan waktu.

C_2 : Biaya menunggu satu *customer* per satuan waktu.

$L_s(x)$: Jumlah *customer* yang diperkirakan dalam sistem dengan x pelayan.

Jika pendapatan Perkapita Indonesia Tahun 2010 sebesar Rp 27.000.000,00 maka perhitungan total biaya menunggu (C_2) dapat dihitung sebagai berikut:

$$C_2 = \frac{27.000.000}{12 \text{ bulan} \times 8 \text{ jam} \times 5 \text{ hari} \times 4 \text{ minggu}} \quad (2.38)$$

$$= \text{Rp } 14.063 \text{ per jam}$$

Jadi, total biaya menunggu yaitu Rp 14.063 per jam (Sekar & Mulyati, 2011:12).