BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini, akan diuraikan definisi-definisi dan teorema-teorema yang akan digunakan sebagi landasan pembahasan untuk bab III. Materi yang akan diuraikan antara lain persamaan diferensial, sistem persamaan diferensial,sistem persamaan diferensial linear dan non linear, nilai eigen dan vektor eigen, linearisasi, titik ekuilibrium, bilangan reproduksi dasar, kestabilan titik ekuilibrium, kriteria kestabilan *Routh-Hurwitz,* dan pemodelan matematika.

A. Persamaan Diferensial

Definisi 2.1 (Ross, 2010: 3)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang menyertakan turunan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Contoh 2.1

Berikut terdapat beberapa contoh persamaan diferensial :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \tag{2. 1}$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 4\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + 2x = \cos t \tag{2. 2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} = u \tag{2. 3}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \tag{2. 4}$$

Berdasarkan banyaknya variabel bebas yang terlibat dalam persamaan, persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

1. Persamaan Diferensial Biasa

Definisi 2.2 (Ross, 2010: 4)

Persamaan Diferensial Biasa adalah persamaan diferensial yang memuat turuanan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

Contoh 2.2

Persamaan (2.1) dan Persamaan (2.2) merupakan persamaan diferensial biasa. Variabel x pada Persamaan (2.1) merupakan variabel bebas tunggal dan y merupakan variabel terikat. Pada Persamaan (2.2) t merupakan variabel bebas dan x sebagai variabel terikat.

2. Persamaan Diferensial Parsial

Definisi 2.3 (Ross, 2010)

Persamaan Diferensial Parsial adalah persamaan diferensial yang memuat turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap lebih dari satu variabel bebas.

Contoh 2.3

Persamaan (2.3) dan (2.4) merupakan persamaan diferensial parsial. Variabel bebas pada Persamaan (2.3) berupa variabel s dan t, sedangkan u merupakan variabel tak bebas. Pada Persamaan (2.4) terdapat tiga (3) variabel bebas x, y, dan z, dan v merupakan variabel terikat.

B. Sistem persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah kumpulan beberapa persamaan diferensial. Diberikan vektor $x \epsilon K,$ dimana $K \subseteq \mathbb{R}^n$ dengan $x = (x_1, x_2, x_3, \dots., x_n)^T$ dan $(x_1, x_2, x_3, \dots., x_n) \epsilon \mathbb{R}^n$. Fungsi $f: K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dengan $f = (f_1, f_2, f_3, \dots., f_n)^T$, $f \in C^1(K)$ dimana $C^1(K)$ merupakan himpunan semua fungsi yang mempunyai turunan pertama yang kontinu di K. Jika $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ untuk menyatakan turunan pertama *x* terhadap *t*, maka

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, \dots., x_n)\\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, \dots., x_n)\\
\dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, \dots., x_n) \qquad (2.5)\\
&\vdots\\
\dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, x_3, \dots., x_n).
\end{aligned}
$$

Sistem pada Persaman (2.5) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\dot{x} = f(x) \qquad (2.6)$$

Berdasarkan kelineарannya sistem persamaan diferensial dibedakan menjadi dua yaitu sistem persamaan diferensial linear dan sistem persamaan diferensial non linear.

1. Sistem Persamaan Diferensial Linear

Secara umum sistem persamaan diferensial linear orde satu dengan variabel tak bebas $x_1, x_2, \dots, x_n$ dan variabel bebas t dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + k_1(t) \qquad (2.7)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + k_2(t)$$

$\vdots$

$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ ... + a_{nn}x_n + k_n(t).$

Persamaan (2.7) disebut sistem persamaan linear homogen jika $k_i, i = 1,2, \ldots, n$ bernilai nol, sedangkan jika k_i, i bernilai tak nol, maka Persamaan (2.7) disebut sistem persamaan diferensial linear non homogen. Persamaan (2.7) dapat ditulis dalam persamaan berikut

$$\dot{x} = Ax + K(t). \tag{2.8}$$

dengan A adalah matriks $n\, x\, n$ yang merupakan matriks koefisien dari variabel tak bebas $x \in \mathbb{R}^n$, dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1,2, \ldots, n, j = 1,2, \ldots, n,$ sedangkan $K(t)$ adalah matriks ukuran $n\, x\, i$ yang merupakan fungsi dari t.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \\ \vdots \\ k_n(t) \end{bmatrix}.$$

Contoh 2.4

Diberikan suatu sistem persamaan diferensial linear

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 4y \end{cases} \tag{2.9}$$

Sistem persamaan diferensial (2.9) merupakan sistem persamaan diferensial linear homogen.

2. Sistem Persamaan Diferensial Non linear

Definisi 2. 4 (Ross, 2010: 5)

Persamaan diferensial non linear adalah persamaan diferensial biasa yang tak linear.

Persamaan diferensial dikatakan non linear jika persamaan diferensial tersebut memenuhi paling sedikit satu dari kriteria berikut :

a. Memuat variabel tak bebas dari turunan-turunannya berpangkat selain satu.
b. Terdapat perkalian dari variabel tak bebas dan atau turunan-turunannya.
c. Terdapat fungsi transendental dari variabel tak bebas dan turunan-turunannya.

Contoh 2.5

Diberikan sistem persamaan diferensial non linear :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 4{x_1}^2 - 2x_2 \end{cases} \tag{2. 10}$$

Persamaan (2.10) merupakan sistem persamaan diferensial non linear dengan variabel bebas t dan variabel tak bebas x_1 dan x_2. Persamaan (2.10) disebut sistem diferensial non linear karena memuat perkalian antara variabel tak bebas x_1 dan x_2 pada persamaan pertama dan terdapat kuadrat dari variabel tak bebas x_1 pada persamaan kedua.

C. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.4 (Anton, 2010: 277)

Jika A matriks nxn, maka vektor tak nol x dalam $\mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari A jika Ax merupakan kelipatan skalar dari x, yaitu:

$$Ax = \lambda x \tag{2.11}$$

untuk skalar λ.

Skalar λ disebut nilai eigen dari A dan x dinamakan vektor yang bersesuaian dengan skalar λ.

Persamaan (2.11) dapat ditulis sebagai

$$Ax = \lambda I x$$

$$(\lambda I - A)x = 0 \tag{2. 12}$$

dengan I adalah matriks identitas.

Persamaan (2.12) memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika

$$|\lambda I - A| = 0 \tag{2. 13}$$

Persamaan (2.13) merupakan persamaan karakteristik dari matriks A dan skalar yang memenuhi Persamaan (2.13) adalah nilai eigen dari A.

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_n.$$

Sehingga persamaan karakteristik dari A menjadi

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_n = 0,$$

dengan $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Contoh 2.6

Diberikan matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

Tentukan nilai eigen,vektor eigen dan solusi umum dari matriks A.

Penyelesaian :

a. Akan ditentukan nilai eigen matriks A

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0.$$

Sehingga diperoleh nilai eigen matriks A dalah $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = 2$.

b. Akan ditentukan vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dari matriks A

Untuk $\lambda_1 = -1$

$(\lambda I - A)x = 0$

$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$

$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$

Persamaan $-2x_1 + x_2 = 0$ ekuivalen dengan $2x_1 = x_2$

Misalkan $x_1 = t$ maka $x_2 = 2t$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} t.$$

Diambil t = 1, maka diperoleh vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = -1$ adalah $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Untuk $\lambda_1 = 2$

$\beta(I - A)x = 0$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$

Persamaan $2x_1 + 2x_2 = 0$ ekuivalen dengan $x_1 = -x_2$

Misalkan $x_2 = t$ maka $x_1 = -t$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Diambil t = 1, maka diperoleh vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 2$ adalah $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

D. Titik Ekuilibrium

Definisi 2.5 (Perko, 2000: 102)

Diberikan sebuah sistem Persamaan (2.6) dengan $x \in \mathbb{R}^n$. $\bar{x}$ *dengan* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *disebut titik ekuilibrium dari sistem Persamaan (2.6) jika* $f(\bar{x}) = 0$.

Contoh 2.7

Diberikan suatu persamaan sebagai berikut :

$$\dot{x} = x^2 + 2x - 8.$$

Akan ditentukan titik ekuilibrium dari persamaan tersebut.

$$f(\bar{x}) = 0$$

$$x^2 + x - 8 = 0$$

$$(x - 2)(x + 4) = 0$$

Sehingga didapat dua titik ekuilibrium yaitu $x_1 = -4$ dan $x_2 = 2$.

E. Linearisasi

Linearisasi merupakan suatu proses yang digunakan untuk membentuk suatu sistem persamaan diferensial non linear menjadi sistem persamaan diferensial linear. Linearisasi sistem persamaan diferensial non linear dilakukan untuk mengetahui perilaku sistem disekitar titik ekulibrium sistem tersebut. Untuk mencari hasil linearisasi, digunakan Matrik Jacobian. Terlebih dahulu akan diberikan definisi mengenai Matriks Jacobian pada Teorema 2.1 sebagai berikut:

Teorema 2.1 (Perko, 2000:67)

Jika $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *terdeferensial di* x_0 *maka turunan parsial* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, 3, \dots., n$ *di* x_0 *ada untuk semua* $x \in \mathbb{R}^n$ *dan*

$$Df(x_0)x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)x_j$$

Bukti:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)x_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0)x_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0)x_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0)x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0)x_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0)x_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0)x_2 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0)x_n \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0)x_n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0)x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= Df(x_0)x.$$

Matriks $Df(x_0)x$ disebut Matriks Jacobian dari fungsi $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ yang terdeferensial di $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $Df(x_0)$ dinotasikan dengan $Jf(x_0)$. Selanjutnya akan diberikan penjelasan mengenai proses linearisasi dari sistem persamaan diferensial non linear ke dalam sistem persamaan diferensial linear.

Diberikan sistem persamaan diferensial non linear (2.6), dengan $x \in L \subseteq \mathbb{R}^n, f: L \to \mathbb{R}^n, f$ fungsi non linear dan kontinu. Diberikan pula $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ dan $f \in C^n(L)$. Misalkan $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$ adalah titik ekuilibrium dari Persamaan (2.6), maka pendekatan linear untuk sistem diperoleh dengan menggunakan ekspansi Taylor disekitar titik ekuilibrium $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T$ yaitu

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T = f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_1}$$

$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_2}$$

$$\vdots \qquad (2.\ 14)$$

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T = f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_n}\ .$$

Pendekatan linear untuk Sistem (2.6) adalah

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_1}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_1}$$

$$\vdots \qquad (2.\ 15)$$

$$\dot{x}_n = \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_n}\ ,$$

dengan $R_{f_1}, R_{f_2}, \ldots, R_{f_n}$ merupakan bagian non linear dan dapat diabaikan karena nilai $R_{f_1}, R_{f_2}, \ldots, R_{f_n}$ mendekati nol. Sehingga Sistem (2.15) dapat ditulis sebagai matriks seperti berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \\ \vdots \\ x_n - \bar{x}_n \end{bmatrix}.$$

Misalkan $y_1 = x_1 - \dot{x}_1$, $y_2 = x_2 - \dot{x}_2$, …, $y_n = x_n - \dot{x}_n$, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

dengan

$$J(f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \end{bmatrix}.$$

$J(f(\bar{x})$ adalah matriks *Jacobian* pada titik ekuilibrium $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$. Jika $J(f(\bar{x})$ tidak memiliki nilai eigen yang bernilai nol pada bagian realnya, maka sifat kestabilan sistem dapat dilihat dari

$$\dot{y} = J(f(\bar{x}))y \,. \tag{2.16}$$

Hasil linearisasi sistem dari Persamaan (2.6) berupa Persamaan (2.16). Selanjutnya, perilaku kestabilan sistem non linear di sekitar titik ekuilibrium dapat diselidiki dari perilaku linearisasi di sekitar titik yang sama, jika titik ekuilibrium dari sistem persamaan non linear tersebut hiperbolik. Berikut diberikan definisi titik ekuilibrium hiperbolik.

Definisi 2. 6 (Perko, 2000: 12)

Titik ekuilibrium $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekulibrium hiperbolik dari sistem persamaan (2.6) jika bagian real nilai eigen dari $J(f(\bar{x}))$ tidak sama dengan nol.

Contoh 2.8

Diberikan sistem persamaan diferensial non linear

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1x_2 - x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = 4{x_1}^2 - 2x_2 \end{cases} \qquad (2.\ 17)$$

Sistem (2.17) memiliki tiga titik ekuilibrium yaitu $(0,0)^T$, dan $(1,-2)^T$. Akan dicari matriks $J\big(f(\bar{x})\big)$ dengan $\bar{x}_1 = (0,0)^T$, dan $\bar{x}_2 = (1,-2)^T$. Selanjutnya akan diidentifikasi untuk setiap titik ekuilibrium.

Penyelesaian :

Matriks *Jacobian* dari Sistem (2.17) adalah

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})^T = \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 8x_1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matriks Jacobian untuk $\bar{x}_1 = (0,0)^T$

$$J(f(0,0)^T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Akan dicari nilai eigen untuk $J(f(0,0)^T)$

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda) = 0.$$

Didapatkan dua nilai eigen, yaitu $\lambda = 0$ dan $\lambda = 2$. Berdasarkan yang diketahui, dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium $\bar{x}_1 = (0,0)^T$ adalah titik ekulibrium nonhiperbolik karena ada nilai eigen nol dibagian realnya. Kemudian, Matriks *Jacobian* untuk $\bar{x}_2 = (1,-2)^T$ adalah

$$J(f(1,-2)^T) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

Akan dicari nilai eigen untuk $J(f(1,-2)^T)$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 8 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

Diperoleh dua nilai eigen, yaitu $\lambda = -2$ dan $\lambda = 2$. Dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium $\bar{x}_2 = (1,-2)^T$ adalah titik ekulibrium hiperbolik karena tidak ada nilai eigen nol pada bagian realnya.

F. Kestabilan Titik Ekuilibrium

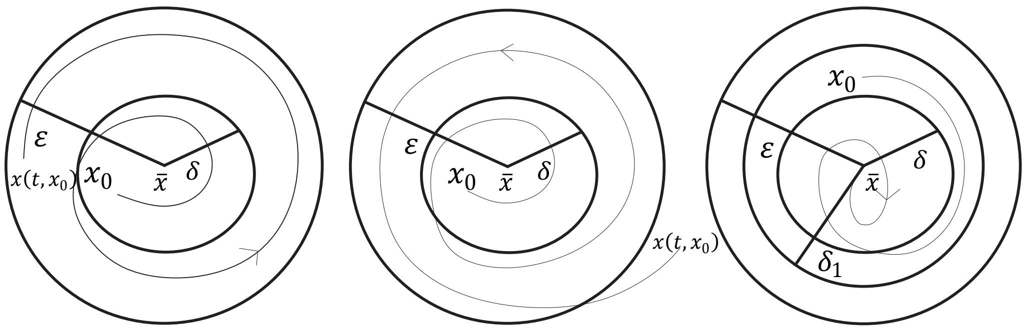
Kestabilan titik ekuilibrium dari suatu sistem persamaan diferensial linear maupun non linear diuraikan dalam definisi berikut.

Definisi 2.7 (Olsder dan Woude, 2004)

Diberikan sistem persamaan diferensial orde satu $\dot{x} = f(x)$ *dan* $x(t, x_0)$ *adalah solusinya pada saat* t *dengan kondisi awal* $x(0) = x_0$.

1. *Vektor* $\bar{x}$ *memenuhi* $f(\bar{x}) = 0$ *dikatakan sebagai titik ekuilibrium.*
2. *Titik ekuilibrium* $\bar{x}$ *dikatakan stabil jika diberikan* $\varepsilon > 0$, *terdapat* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *sedemikian sehingga jika* $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$ *(dengan* $\|\cdot\|$ *adalah norm pada* $\mathbb{R}^n$) *maka* $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ *untuk* $t \geq 0$.
3. *Titik ekuilibrium* $\bar{x}$ *dikatakan stabil asimtotik jika titik-titik ekuilibriumnya stabil dan terdapat* $\delta_1 > 0$ *sedemikian sehingga* $lim_{t\to\infty}\|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$, *asalkan* $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta_1$.
4. *Titik ekuilibrium* $\bar{x}$ *dikatakan tidak stabil jika titik ekuilibrium tidak memenuhi (2).*

Berikut potret fase dari kestabilan titik ekuilibrium :



(a) Stabil (b) Tidak Stabil (c) Stabil Asimtotik

Gambar 2. 1 Simulasi Kestabilan Titik Ekuilibrium

Matriks *Jacobian* $J\big(f(\bar{x})\big)$ dapat digunakan untuk menyelidiki perilaku kestabilan sistem non linear di sekitar titik ekuilibrium $\bar{x}$, jika diketahui titik ekuilibrium sistem tersebut adalah titik ekuilibrium hiperbolik. Berikut diberikan teorema mengenai perilaku kestabilan suatu sistem non linear berdasarkan nilai eigen matriks *Jacobian* $\big(f(\bar{x})\big)$.

Teorema 2.2 (Olsder and Woude, 2004)

(i) *Diberikan semua bagian real nilai eigen matriks Jacobian* $J\big(f(\bar{x})\big)$ *bernilai negatif, maka titik ekuilibrium* $\bar{x}$ *dari sistem (2.17) stabil asimtotik lokal.*

(ii) *Sementara, jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen matriks Jacobian* $J\big(f(\bar{x})\big)$ *yang bagian realnya positif maka titik ekuilibrium* $\bar{x}$ *dari sistem (2.17) tidak stabil.*

Bukti :

(i) Diberikan sistem yang terlinearisasi pada titik ekuilibrium $\bar{x}$ yaitu $\dot{y} = J(f(\bar{x}))y$ maka solusi sistem tersebut selalu memuat bentuk $e^{\Re e(y_i)t}$ sehingga jika semua bagian real dari y_i bernilai negatif, maka untuk $t \to \infty$ nilai $e^{\Re e(y_i)t}$ akan menuju nol. Dengan kata lain, saat $t \to \infty$ solusi sistem akan menuju titik kesetimbangan, sehingga sistem tersebut stabil asimtotik lokal.

(ii) Diberikan sistem yang terlinearisasi pada titik ekuilibrium $\bar{x}$ yaitu $\dot{y} = J(f(\bar{x}))y$ maka solusi sistem tersebut selalu memuat bentuk $e^{\Re e(y_i)t}$ sehingga jika ada bagian real dari y_i bernilai positif $\Re e(y_i) > 0$, maka untuk $t \to \infty$ nilai $e^{\Re e(y_i)t}$ akan menuju ∞. Sehingga sistem tersebut tidak stabil.

Selanjutnya, diberikan pula teorema yang menyajikan sifat kestabilan suatu sistem $\dot{x} = Ax$ dengan nilai eigen $y_1, y_2, \dots, y_k$ dimana $(k \leq n)$.

Teorema 2.3 (Olsder and Woude, 2004)

Diberikan sistem persamaan diferensial $\dot{x} = Ax$ *, dengan* A *suatu matriks* $n\ x\ n$ *yang mempunyai* k *nilai eigen berbeda* $y_1, y_2, \dots, y_k$ *dengan* $(k \leq n)$.

1. *Titik ekuilibrium* $\bar{x} = 0$ *dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika* $\Re e\ (y_i) < 0$ *untuk setiap* $i\ =\ 1, 2, \dots, k$.
2. *Titik ekuilibrium* $\bar{x} = 0$ *dikatakan stabil jika dan hanya jika* $\Re e\ (y_i) \leq 0$ *untuk setiap* $i\ =\ 1, 2, \dots, k$ *dan jika setiap nilai eigen , imajiner dengan* $\Re e\ (y_i) = 0$ *, maka multiplisitas aljabar dan geometri untuk nilai eigen harus sama.*
3. *Titik ekuilibrium* $\bar{x} = 0$ *dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika terdapat paling sedikit satu* $\Re e(y_i) > 0$ *untuk* $i\ =\ 1, 2, \dots$,

Bukti:

1. Bukti ke kanan

Akan dibuktikan bahwa jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik, maka $\Re e\ y_i < 0$ untuk setiap $i\ =\ 1, 2, \dots, k$..

Berdasarkan Definisi (2.9), titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika $\lim_{t \to \infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$. Dalam artian untuk $t \to \infty$, $x(t, x_0)$akan menuju $\bar{x} = 0$. Karena $x(t, x_0)$ merupakan solusi dari sistem persamaan diferensial, maka $x(t, x_0)$ memuat $e^{\Re e(y_i)t}$, sehingga y harus bernilai negatif, agar $e^{\Re e(y_i)t}$ menuju $\bar{x} = 0$.

Bukti ke kiri

Akan dibuktikan bahwa jika $\Re e(\ y_i) < 0$ untuk setiap $=\ 1, 2, \dots, k$, maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik.

$x(t, x_0)$ merupakan solusi dari sistem persamaan diferensial, maka $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{\Re e(y_i)t}$. Jika $\Re e\ (y_i) < 0$, maka untuk $t \to \infty$, $x(t, x_0)$ akan menuju $\bar{x} = 0$. Berdasarkan Definisi (2.7) dapat disimpulkan titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik.

2. **Bukti ke kanan**

Akan dibuktikan bahwa jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil, maka $\Re e\ y_i \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, k$

Jika $\Re e(\ y_i) > 0$, maka solusi persamaan diferensial $x(t, x_0)$ yang selalu memuat $e^{\Re e(y_i)t}$ akan menuju ∞ (menjauh dari titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$) untuk $t \to \infty$, sehingga sistem tidak stabil. Hal ini sesuai dengan kontraposisi pernyataan jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil, maka $\Re e\ y_i \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, k$. Jadi terbukti bahwa jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil, maka $\Re e\ y_i \leq 0$ untuk setiap $= 1, 2, \ldots, k$.

Bukti ke kiri

Akan dibuktikan bahwa titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil jika dan hanya jika $\Re e\ (y_i) \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, k$, dan terdapat $\Re e(y_i) = 0$ dimana multiplisitas aljabar dan geometri untuk nilai eigen harus sama.

$x(t, x_0)$ adalah solusi dari sistem persamaan diferensial, maka $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{\Re e(y_i)t}$. Jika $\Re e\ (y_i) < 0$, maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik. Jika $\Re e\ (y_i) = 0$, maka nilai eigen berupa bilangan kompleks murni. Menurut Luenberger (1979:85) dalam multiplisitas aljabar berhubungan dengan nilai eigen sedangkan geometri berhubungan dengan vektor eigen. Oleh karena itu, akan dibuktikan banyak nilai eigen dan vektor eigen adalah sama.

Ambil sembarang sistem pada $\mathbb{R}^2$ yang memilki nilai eigen bilangan kompleks murni.

$$\begin{bmatrix} \dot{y_1} \\ \dot{y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -p \\ q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \text{ dengan } p > 0, q > 0 \tag{2.18}$$

Akan ditentukan nilai eigen dari Sistem (2.18)

$|A - yI| = 0$

$\begin{bmatrix} 0 & -p \\ q & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = 0$

$\begin{bmatrix} -y & -p \\ q & -y \end{bmatrix} = 0.$

Diperoleh persamaan karakteristik

$$y^2 + pq = 0. \tag{2.19}$$

Akar-akar dari Persamaan (2.19) adalah

$$y_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4pq}}{2} = \frac{\pm 2i\sqrt{pq}}{2} = \pm i\sqrt{pq}$$

$$y_1 = i\sqrt{pq} \text{ atau } y_2 = -i\sqrt{pq}.$$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $y_{1.} = i\sqrt{pq}$,

$$\begin{bmatrix} -i\sqrt{pq} & -p \\ q & -i\sqrt{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriks augmentasi dari sistem yaitu

$\left(\begin{array}{cc|c} -i\sqrt{pq} & -p & 0 \\ q & -i\sqrt{pq} & 0 \end{array}\right) \qquad R_1 \rightarrow R_2$

$\left(\begin{array}{cc|c} q & -i\sqrt{pq} & 0 \\ -i\sqrt{pq} & -p & 0 \end{array}\right) \qquad \frac{1}{q} R_1$

$$\left(\begin{matrix} 1 & -\frac{i\sqrt{pq}}{q} \\ -i\sqrt{pq} & -p \end{matrix}\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right.\right) \qquad \sqrt{pq}i\, R_1 + \, R_2$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & -\frac{i\sqrt{pq}}{q} \\ 0 & 0 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right.\right)$$

diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{i\sqrt{pq}}{q} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_1 - \frac{i\sqrt{pq}}{q} y_2 = 0$$

Misalkan $y_2 = t$ maka $y_1 = \frac{i\sqrt{pq}}{q} t$ sehingga,

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{pq}}{q} \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Diambil $t = 1$ diperoleh $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{pq}}{q} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Sehingga vektor eigen yang bersesuaian dengan $y_1 = i\sqrt{pq}$ adalah

$y = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{pq}}{q} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $y_2 = -\sqrt{pq}i$

$$\begin{bmatrix} i\sqrt{pq} & -p \\ q & i\sqrt{pq}i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriks augmentasi dari sistem yaitu

$$\left(\begin{matrix} i\sqrt{pq} & -p \\ q & i\sqrt{pq} \end{matrix}\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right.\right) \qquad R_1 \to R_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} q & \sqrt{pq}i & 0 \\ i\sqrt{pq} & -p & 0 \end{array}\right) \qquad \frac{1}{q}R_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{i\sqrt{pq}}{q} & 0 \\ i\sqrt{pq} & -p & 0 \end{array}\right) \qquad -i\sqrt{pq}\,R_1 + R_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{i\sqrt{pq}}{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Diperoleh,

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{i\sqrt{pq}}{q} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_1 + \frac{i\sqrt{pq}}{q}y_2 = 0$$

Misalkan $y_2 = t$ maka $y_1 = -\frac{i\sqrt{pq}}{q}t$ sehingga

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\sqrt{pq}}{q} \\ 1 \end{bmatrix}t$$

Diambil $t = -1$ maka diperoleh $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{pq}}{q} \\ -1 \end{bmatrix}$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $y_2 = -i\sqrt{pq}$ adalah

$$y = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{pq}}{q} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Sehingga terbukti banyaknya nilai eigen sama dengan banyaknya vektor eigen.

3. Bukti ke kanan

Akan dibuktikan bahwa jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil maka $\Re e(y_1) > 0, \forall i = 1, 2, 3, \ldots, k$.

Titik ekuilibrium tidak stabil apabila $t \longrightarrow \infty, x(t, x_0)$ menuju ∞. Hal tersebut dapat dipenuhi jika $\Re e(y_1) > 0$.

Bukti ke kiri

Akan dibuktikan ika $\Re e(y_1) > 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots, k$ maka titik ekuilibrium $\bar{\mathrm{x}} = 0$ tidak stabil.

Apabila $\Re e(y_1) > 0, x(t, x_0)$ yang memuat $e^{\Re e(\lambda_1)t}$ akan selalu menuju ∞. Sehingga itu, titik ekuilibrium $\bar{\mathrm{x}} = 0$ tidak stabil.

Titik ekuilibrium $\bar{x} \epsilon \mathbb{R}^n$ disebut stabil asimtotik lokal apabila semua nilai eigen matriks Jacobian mempunyai bagian real negatif.

G. Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar merupakan bilangan yang menyatakan banyaknya jumlah individu rentan yang dapat terinfeksi penyakit akibat tertular oleh individu terinfeksi.

Definisi 2.8 (Diekmann & Heesterbeek, 2000)

Bilangan reproduksi dasar didefinisikan sebagai jumlah rata-rata kasus sekunder yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi selama masa terinfeksinya dalam keseluruhan populasi rentan.

Bilangan Reproduksi dasar dinotasikan dengan R_0. Jika $R_0 < 1$ maka satu tanaman padi yang terinfeksi akan menginfeksi kurang dari satu tanaman padi rentan sehingga virus tungro kemungkinan akan hilang dari populasi. Sebaliknya jika $R_0 > 1$ maka satu tanaman padi yang terinfeksi oleh virus tungro akan menginfeksi lebih dari satu tanaman padi yang rentan sehingga individu yang terinfeksi virus tungro ada dalam populasi atau virus tungro akan menyebar ke populasi.

Misalkan

$n =$ kelas terinfeksi

$m =$ kelas tidak terinfeksi

Selanjutnya dimisalkan variabel x sebagai subpopulasi kelas terinfeksi dan y sebagai subpopulasi kelas tidak terinfeksi (rentan dan atau sembuh), dan $x \in \mathbb{R}^n$, dan $y \in \mathbb{R}^n$, untuk $m, n \in \mathbb{N}$, sehingga

$$\dot{x} = \varphi_i(x, y) - \psi_i(x, y), \text{dengan } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\dot{y} = \eta_j(x, y), \text{dengan } j = 1,2, \dots, m$$

dengan ϕ_i adalah laju infeksi sekunder yang menambah populasi kelas terinfeksi dan ψ_i adalah laju perkembangan penyakit, kematian, dan atau kesembuhan yang mengurangi kelas terinfeksi.

Bilangan reproduksi dasar (R_0) dapat ditentukan dengan linearisasi dari sistem persamaan diferensial yang didekati pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Persamaan kompartemen terinfeksi yang telah dilinearisasi dapat dituliskan sebagai berikut

$$\dot{x} = (F - V)x \tag{2.20}$$

dengan

F, V : matriks berukuran $n \ x \ n$,

$F = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(0, y_0)$

$V = \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}(0, y_0)$.

Selanjutnya didefinisikan matriks K sebagai

$$K = FV^{-1},$$

dengan K dinyatakan sebagai *next generation matrix*. Nilai harapan dari infeksi pada populasi rentan adalah nilai eigen terbesar dari matriks K (Driesse dan Watmough, 2001) sehingga

$$R_0 = \rho(K) = \rho(FV^{-1}). \tag{2.21}$$

Contoh 2.9

Diberikan sistem persamaan diferensial berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \mu - \beta S(t)I(t) - \mu(S) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) - \mu I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) - \mu R(t) \end{aligned} \tag{2.22}$$

dengan

$S(t)$: populasi individu rentan pada saat t

$I(t)$: populasi individu terinfeksi pada saat t

$R(t)$: populasi individu sembuh dari infeksi pada saat t

Sistem Persamaan (2.22) memiliki titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (1, 0, 0)$. *Next generation matrix* dapat diperoleh dari kelas I, sehingga kelas I dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\dot{I}(t) = \varphi\big((S,R), I\big) - \psi((S,R), I) \tag{2.23}$$

dengan

$\varphi = [\beta S(t)I(t)]$

$\psi = [\gamma I(t) + \mu I(t).$

Maka hasil linearisasi dari φ dan ψ masing-masing adalah $F = [\beta S(t)]$ dan $V = [\gamma + \mu]$. Sehingga diperoleh *Next generation matrix* berikut

$$K = FV^{-1} = [\beta S(t)]\left[\frac{1}{\gamma+\mu}\right] = \frac{\beta S(t)}{\gamma+\mu}. \qquad (2.24)$$

Selanjutnya substitusikan nilai titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (1,0,0)$ ke Persamaan (2.24) diperoleh

$$K = \frac{\beta}{\gamma+\mu}\,.$$

Maka diperoleh nilai R_0 dari Sistem (2.22) adalah

$$R_0 = \rho(K) = \frac{\beta}{\gamma+\mu}\,.$$

H. Kriteria ***Routh-Hurwitz***

Nilai eigen dapat diperoleh dengan menentukan akar-akar persamaan karakteristik $c(\gamma) = |\gamma I - A| = \gamma^n + c_1\gamma^{n-1} + .. + c_n$. Namun kadang kala, nilai eigen dari sistem persamaan sulit untuk ditentukan. Diperlukan adanya suatu kriteria yang dapat digunakan untuk mengetahui akar-akar persamaan bernilai negatif atau ada akar persamaan yang bernilai positif. Tanda negatif ataupun positif digunakan untuk menentukan kestabilan dari suatu titik ekuilibrium. Analisis kestabilan titik ekuilibrium dapat menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz* sebagai alternatif menentukan tanda bagian real dari nilai-nilai eigen Matrik Jacobian.

Diberikan suatu persamaan karakteristik dari matriks A_{nxn} ,

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n, \qquad (2.25)$$

dengan $a_i \neq 0, i = 1,2,3,\ldots,n$.

Menurut Olsder (2004:60), kriteria *Routh-Hurwitz* dipakai untuk mengecek kestabilan secara langsung dengan mempertimbangkan nilai koefisien a_i tanpa menghitung akar-akar dari Persamaan (2.25). Koefisien-koefisien dari Persamaan (2.25) dapat disusun ke dalam sebuah tabel *Routh-Hurwitz* berikut ini.

Tabel 2.1 Tabel *Routh-Hurwitz*

a_0	a_2	a_4	...
a_1	a_3	a_5	...
b_1	b_2	b_3	...
c_1	c_2	c_3	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Dimana koefisien b_1, b_2, c_1, c_2 didefinisikan sebagai

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}.$$

Perhitungan pada tabel *Routh-Hurwitz* terus dilakukan sampai kolom pertama tabel *Routh-Hurwitz* bernilai nol. Matriks A_{nxn} memiliki nilai eigen yang bagian realnya negatif, jika dan hanya jika semua nilai atau elemen pada kolom pertama tabel *Routh-Hurwitz* bertanda sama. Berdasarkan biimplikasi di atas dapat disimpulakan jika ada elemen pada kolom pertama Tabel 2.1 bertanda tidak sama maka Matriks A_{nxn} memiliki nilai eigen yang bagian realnya positif dan jika

Matriks A_{nxn} memiliki nilai eigen yang bagian realnya positif maka ada elemen pada kolom pertama Tabel 2.1 bertanda tidak sama.

Menurut Olsder (2004: 61) akar-akar dari Polinomial (2.25) semuanya mempunyai bagian real bernilai negatif jika dan hanya jika Tabel 2.1 terdiri dari *n+1* baris dan semua elemen pada kolom pertama dari tabel bertanda sama (semua elemen dari kolom pertama bernilai positif atau negatif).

Contoh 2.10

$$R(\alpha) = \alpha^3 + 5\alpha^2 + 2\alpha - 4. \tag{2.26}$$

Selidiki apakah persamaan karakteristik diatas termasuk kriteria *Routh-Hurwitz.*

Penyelesaian

Berdasarkan Persamaan (2.26) maka $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 2$ dan $a_3 = -4$.

Akan dibuktikan semua matriks *Routh-Hurwitznya* adalah positif.

$$a_0 = 1 > 0$$

$$a_1 = 5 > 0$$

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$$

$$= \frac{5(2) - 1(-4)}{1}$$

$$b_1 = 14 > 0$$

$$c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$$

$$= \frac{14(-4) - 0}{14}$$

$$c_1 = -4 < 0.$$

Karena $c_1 < 0$ maka persamaan karakteristik di atas tidak memenuhi kriteria *Routh-Hurwitz.*

Contoh 2.11

$$R(\alpha) = \alpha^3 + 5\alpha^2 + 2\alpha + 5. \qquad (2.27)$$

Selidiki apakah persamaan karakteristik diatas termasuk kriteria *Routh-Hurwitz*.

Penyelesaian

Berdasarkan Persamaan (2.27) maka $a_0 = 1$ $a_1 = 5, a_2 = 2$ dan $a_3 = 5.$

Akan dibuktikan semua matriks *Routh-Hurwitznya* adalah positif.

$$a_0 = 1 > 0$$

$$a_1 = 5 > 0$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$= \frac{5(2) - 1(5)}{1}$$

$$b_1 = 5 > 0$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$= \frac{5(5) - 0}{5}$$

$$c_1 = 5 > 0.$$

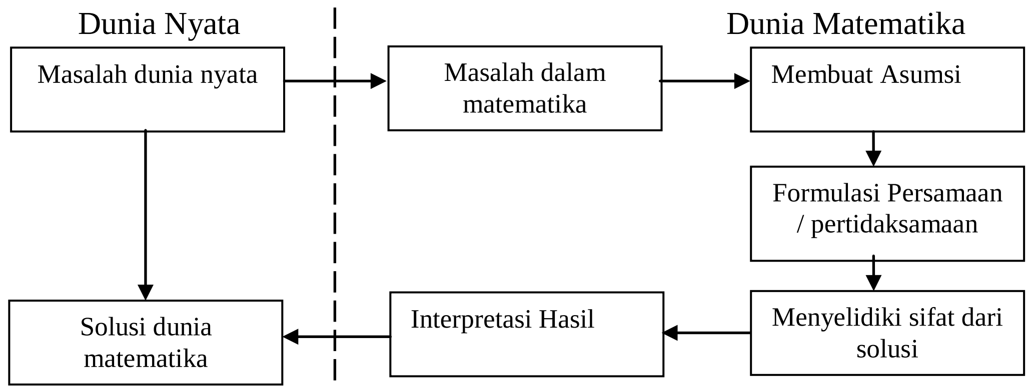
Karena $a_0 > 0, a_1, > 0 b_1, > 0 c_1 > 0$, maka berdasarkan Tabel 2.1 persamaan karakteristik diatas memenuhi kriteria *Routh-Hurwitz.*

I. Model Matematika

Definisi 2.9 (Widowati & Sutimin, 2007: 1)

Model matematika merupakan representasi matematika yang dihasilkan dari pemodelan matematika. Pemodelan matematika merupakan suatu proses merepresentasikan dan menjelaskan permasalahan pada dunia nyata ke dalam pernyataan matematis.

Menurut Widowati & Sutimin (2007:3) proses pemodelan Matematika dinyatakan dalam diagram alur sebagai berikut :



Gambar 2.2. Proses Pemodelan Matematika

Berdasarkan Gambar 2.2, diberikan langkah-langkah pemodelan matematika menurut Widowati & sutimin (2007:3-5)

1. Menyatakan Permasalahan Nyata Ke Dalam Permasalahan Matematika

   Memodelkan permasalahan dunia nyata ke dalam bahasa matematis. Langkah ini meliputi identifikasi variabel permasalahan dan membentuk beberapa hubungan antar variabel yang dihasilkan dari permasalahan tersebut.

2. Membuat Asumsi

   Asumsi dalam pemodelan matematika memperlihatkan proses berpikir sehingga mendapatkan model yang sistematis.

3. Formulasi persamaan/pertidaksamaan

   Formulasi model merupakan langkah yang terpenting, oleh karena itu diperlukan pengujian kembali asumsi-asumsi yang digunakan, agar didapatkan formulasi model yang tepat dan realistis.

4. Menyelidiki sifat dari solusi

   Menyelidiki sifat dari solusi diartikan sebagai pengecekan apakah solusi sistem stabil atau tidak stabil.

5. Interpretasi Hasil

   Interpretasi hasil merupakan proses menghubungkan formula matematika dengan permasalahan dunia nyata. Interpretasi hasil dapat berupa grafik yang digambarkan berdasarkan solusi yang diperoleh dan selanjutnya diinterpretasikan sebagai solusi permasalahan dalam dunia nyata.