BAB II
KAJIAN TEORI

Bab ini menjabarkan beberapa kajian literatur yang digunakan untuk analisis sistem antrean. Beberapa hal yang akan dibahas berkaitan dengan teori probabilitas, teori antrean, model-model antrean, analisis biaya antrean, uji distribusi Kolmogorov-Smirnov dan uji kecukupan data.

A. Teori Probabilitas

Probabilitas adalah besarnya kesempatan (kemungkinan) suatu peristiwa akan terjadi. Berdasarkan pengertian probabilitas tersebut, terdapat hal-hal yang penting yaitu besarnya kesempatan dan peristiwa akan terjadi. Besarnya kesempatan dari suatu peristiwaa akan terjadi adalah antara 0 sampai dengan 1. Jika suatu peristiwa memiliki kesempatan akan terjadi 0, maka peristiwa tersebut pasti tidak akan terjadi. Jika suatu peristiwa memiliki kesempatan akan terjadi 1, maka peristiwa tersebut pasti akan terjadi. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa semakin kecil probabilitas suatu peristiwa (probabilitas semakin mendekati 0), semakin kecil kesempatan peristiwa tersebut akan terjadi. Sebaliknya, semakin besar probabilitas suatu peristiwa (probabilitas semakin mendekati 1), semakin besar kesempatan peristiwa tersebut akan terjadi. (Sudaryono, 2012: 3)

Berikut ini merupakan beberapa definisi dan teorema mengenai teori probabilitas, diantaranya:

Definisi 2.1(Bain & Engelhardt, 1992: 9)

Untuk suatu percobaan dengan S sebagai ruang sampel dan $A, A_1, A_2, \ldots$ *mewakili kejadian yang mungkin terjadi. Fungsi yang berhubungan dengan nilai riil P(A) dengan setiap kejadian A disebut fungsi peluang dan P(A) disebut peluang dari A jika syarat berikut terpenuhi:*

$$0 \leq P(A), \quad \textit{untuk setiap } A \tag{2.1}$$

$$P(S) = 1 \tag{2.2}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{2.3}$$

untuk $A_1, A_2, \ldots$ *adalah kejadian saling mutually exclusive satu sama lain, sedemikian sehingga*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$$

Teorema 2.1 (Walpole, 1995: 90)

Jika suatu percobaan mempunyai N hasil percobaan yang berbeda, dan masing-masing mempunyai kemungkinan yang sama untuk terjadi, dan jika tepat n diantara hasil percobaan itu menyusun kejadian A, maka probabilitas kejadian A adalah

$$P(A) = \frac{n}{N} \tag{2.4}$$

1. Variabel Acak

Variabel acak adalah fungsi yang memetakan setiap anggota dari ruang sampel S ke bilangan riil. Anggota dari ruang sampel S dinotasikan dengan e dan fungsi yang memetakan anggota e ke bilangan riil x dinotasikan dengan X. Hasil dari pemetaannya berupa bilangan riil x untuk setiap anggota ruang sampel S yang dinotasikan dengan $x=X(e)$. Berikut definisi variabel acak dalam teori probabilitas yang digunakan pada penelitian skripsi ini:

Definisi 2.2 (Bain & Engelhardt, 1992: 53)

Sebuah variabel acak X adalah sebuah fungsi yang didefinisikan atas ruang sampel S yang menghubungkan bilangan riil $x = X(e)$ *dengan setiap hasil yang mungkin e di S.*

Variabel acak dibedakan menjadi dua yaitu variabel acak diskrit dan variabel acak kontinu. Berikut definisi mengenai kedua jenis variabel acak tersebut:

a. Variabel Acak Diskrit

Jika suatu ruang sampel memiliki jumlah titik sampel yang terhingga atau suatu barisan unsur yang tidak pernah barakhir tetapi yang sama banyaknya dengan bilangan cacah, maka ruang sampel tersebut dikatakan ruang sampel diskrit (Walpole,1992: 115). Jadi, variabel acak diskrit adalah variabel acak yang dapat dihitung (*countable)*. Berikut definisi dan teorema yang menjelaskan tentang variabel acak diskrit:

Definisi 2.3 (Bain & Engelhardt, 1992: 56)

Jika himpunan dari semua nilai yang mungkin dari variabel acak X *dapat dihitung,* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *atau* $x_1, x_2, \ldots$*, maka* X *disebut variabel acak diskrit.Fungsi*

$$f(x) = P[X = x] \qquad x = x_1, x_2, \ldots \tag{2.5}$$

menyatakan bahwa probabilitas $X = x$ *disebut fungsi densitas probabilitas diskrit.*

Teorema 2.2 (Bain & Engelhardt, 1992: 57)

Sebuah fungsi $f(x)$ *adalah fungsi densitas probabilitas diskrit jika dan hanya jika fungsi tersebut untuk himpunan bilangan riil tak hingga yang dapat dihitung* $x_1, x_2, \ldots$ *memenuhi syarat*

$$f(x_i) \geq 0 \tag{2.6}$$

untuk semua nilai x_i*, dan*

$$\sum_{x_i} f(x_i) = 1 \tag{2.7}$$

Bukti:

Berdasarkan Syarat (2.6), nilai dari fungsi densitas probabilitas diskrit adalah sebuah probabilitas dan tidak negatif. Karena $x_1, x_2, \ldots$

menunjukkan semua nilai yang mungkin dari X maka kejadian $[X = x_1], [X = x_2], \ldots$ merupakan partisi lengkap dari ruang sampel. Dengan demikian,

$$\sum_{x_i} f(x_i) = \sum_{x_i} P[X = x_i] = 1$$

untuk semua x_i. Hal ini mengakibatkan fungsi densitas probabilitas harus memenuhi syarat (2.6) dan (2.7) dan fungsi yang memenuhi syarat-syarat tersebut akan memberikan probabilitas yang sesuai dengan definisi (2.1).

Definisi 2.4 (Bain & Engelhardt, 1992: 58)

Fungsi distribusi kumulatif dari variabel acak X didefinisikan untuk semua bilangan riil x dengan

$$F(x) = P[X \leq x] \tag{2.8}$$

Definisi 2.5 (Bain & Engelhardt, 1992: 61)

Jika X adalah variabel acak diskrit dengan fungsi densitas probabilitas $f(x)$*, maka nilai harapan dari X didefinisikan sebagai*

$$\mu = E(X) = \sum_{x} x\, f(x) \tag{2.9}$$

b. Variabel Acak Kontinu

Menurut Harinaldi (2005: 62), variabel acak kontinu adalah variabel acak yang memiliki nilai yang tak terhingga banyaknya, sepanjang sebuah interval tidak terputus. Variabel acak kontinu dapat diperoleh dari hasil pengukuran. Beberapa definisi dan teorema mengenai variabel acak kontinu, diantaranya:

Definisi 2.6 (Bain & Engelhardt, 1992: 64)

Variabel acak X disebut variabel acak kontinu jika ada fungsi f(x) yang merupakan fungsi densitas probabilitas dari X, *dimana fungsi distribusi kumulatifnya dapat direpresentasikan sebagai*

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{2.10}$$

Teorema 2.3 (Bain & Engelhardt, 1992: 65)

Sebuah fungsi f(x) merupakan fungsi densitas probabilitas untuk suatu variabel acak kontinu X jika dan hanya jika fungsi tersebut memenuhi syarat

$$f(x) \geq 0 \tag{2.11}$$

untuk semua riil x, *dan*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \tag{2.12}$$

Definisi 2.7 (Bain & Engelhardt, 1992: 67)

Apabila X merupakan variabel acak kontinu dengan fungsi densitas probabilitas $f(x)$, maka nilai harapan dari X didefinisikan dengan

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx \qquad (2.13)$$

jika integral pada persamaan (2.13) benar-benar terpusat atau konvergen. Jika sebaliknya, maka E(X) tidak ada.

2. Distribusi Poisson

Menurut Walpole (1992 : 173), percobaan yang menghasilkan nilai-nilai bagi peubah acak X, yaitu banyaknya hasil percobaan yang terjadi selama suatu selang waktu tertentu atau di suatu daerah tertentu disebut percobaan Poisson. Percobaan Poisson memiliki ciri-ciri berikut :

1. Banyaknya hasil percobaan yang terjadi dalam suatu selang waktu atau suatu daerah tertentu, tidak bergantung pada banyaknya hasil percobaan yang terjadi pada selang waktu atau daerah lain yang terpisah.
2. Probabilitas terjadinya satu hasil percobaan selama suatu selang waktu yang singkat sekali atau dalam suatu daerah yang kecil, sebanding dengan panjang selang waktu tersebut atau besarnya daerah tersebut, dan tidak bergantung pada banyaknya hasil percobaan yang terjadi diluar selang waktu atau daerah tersebut.

3. Probabilitas bahwa lebih dari satu hasil percobaan akan terjadi dalam selang waktu yang singkat tersebut atau dalam daerah yang kecil tersebut, dapat diabaikan.

Bilangan X yang menyatakan banyaknya hasil percobaan dalam suatu percobaan Poisson disebut variabel acak Poisson dan distribusi probabilitasnya disebut distribusi Poisson.

Definisi 2.8 (Walpole, 1992:174)

Distribusi probabilitas bagi variabel acak Poisson X yang menyatakan banyaknya hasil percobaan yang terjadi selama selang waktu atau daerah tertentu, adalah

$$f(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \quad x = 0,1,2, \dots dan\ \lambda > 0 \tag{2.14}$$

Keterangan:

x = hasil yang mungkin dari variabel acak diskrit X

e = konstanta dasar (basis) logaritma natural = 2,71828 . . .

λ= nilai harapan dari X, dimana X adalah variabel acak diskrit

3. Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial digunakan untuk menggambarkan distribusi waktu pelayanan. Contohnya yaitu fasilitas jasa, dimana waktu pelayanan diasumsikan bersifat acak. Dengan kata lain waktu untuk melayani *customer* tidak bergantung pada lamanya waktu pelayanan *customer* sebelumnya dan tidak bergantung pada jumlah *customer* yang menunggu untuk dilayani. Berikut ini merupakan definisi yang menjelaskan tentang distribusi Eksponensial:

Definisi 2.9 (Djauhari, 1990: 175-176)

Variabel acak X dikatakan berdistribusi Eksponensial dengan parameter λ jika memiliki fungsi densitas probabilitas sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{untuk } x \geq 0 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases} \tag{2.15}$$

dimana x menyatakan waktu yang dibutuhkan sampai terjadi satu kali sukses dengan λ adalah rata-rata banyaknya sukses dalam selang waktu satuan.

Fungsi distribusi kumulatif Eksponensial merupakan integral dari persamaan (2.15), sehingga diperoleh

$$F(x;\lambda) = \begin{cases} \int_0^x \lambda e^{-\lambda x}\, dt = 1 - e^{-\lambda x}, & \text{untuk } x \geq 0 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ yang lain.} \end{cases} \tag{2.16}$$

B. Teori Antrean

Teori antrean (*queueing theory*) atau *waiting line theory*, yaitu teori yang membahas mengenai proses mengantre dari *customer* datang, mengantre untuk dilayani hingga dilayani dan meninggalkan fasilitas pelayanan.Antrean terjadi karena adanya ketidaksesuaian antara jumlah *customer* yang akan dilayani dengan jumlah pelayanan yang tersedia. Sebagai contoh, kendaraan yang mengantre untuk mengisi bahan bakar atau antrean nasabah yang menunggu untuk bertransaksi di perusahaan asuransi.

1. Konsep Dasar Teori Antrean

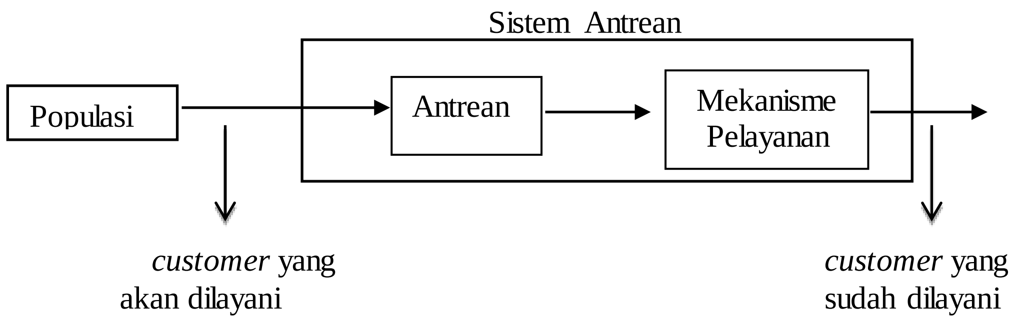
Teori antrean dikemukakan dan dikembangkan pada tahun 1910 oleh seorang insinyur dari Denmark yaitu A. K. Erlang. Erlang yang melakukan percobaan mengenai fluktuasi permintaan fasilitas telepon yang berhubungan dengan *automatic dialing equipment*, yaitu peralatan penyambungan telepon secara otomatis. Pada saaat waktu sibuk, operator sangat kewalahan untuk melayani para penelepon, sehingga para penelepon atau *customer* harus mengantre menunggu giliran yang cukup lama.

Rata-rata waktu menunggu bergantung pada rata-rata kecepatan *server* melayani *customer*. Rata-rata kedatangan *customer* yaitu jumlah kedatangan *customer* ke fasilitas pelayanan dalam satuan waktu tertentu, misalnya dalam menit, jam, hari dan sebagainya. Rata-rata pelayanan *customer* yaitu jumlah *customer* yang dapat dilayani dalam satuan waktu tertentu.

Kedatangan customer dan lamanya waktu pelayanan bersifat seragam (*uniform*) atau acak. Hal ini dikarenakan *customer* datang ke fasilitas pelayanan tidak dalam waktu yang sama. Begitu halnya dengan lamanya waktu pelayanan setiap *customer* berbeda-beda sesuai dengan kecepatan *server*. Oleh karena itu, teori probabilitas digunakan untuk menentukan ukuran keefektifan sistem antrean berdasarkan rata-rata laju kedatangan dan rata-rata lamanya waktu pelayanan *customer*.

2. Struktur Dasar Model Antrean

Proses dasar yang dianggap oleh model antrean ialah bahwa *customer* yang memerlukan pelayanan berasal dari suatu populasi yang disebut sumber masukan (*input source*). *Customer* memasuki sistem antrean (*queuing system*) dan menggabungkan diri atau membentuk suatu antrean. Pada waktu tertentu, anggota dalam antrean dipilih untuk memperoleh pelayanan dengan menggunakan aturan tertentu yang disebut disiplin pelayanan (*service discipline*). Pelayanan yang diperlukan oleh *customer* kemudian dilakukan oleh mekanisme pelayanan (*service mechanism*). Setelah pelayanan diperoleh, maka *customer* meninggalkan sistem (Supranto, 2013: 325). Proses ini dapat dilihat pada gambar berikut:

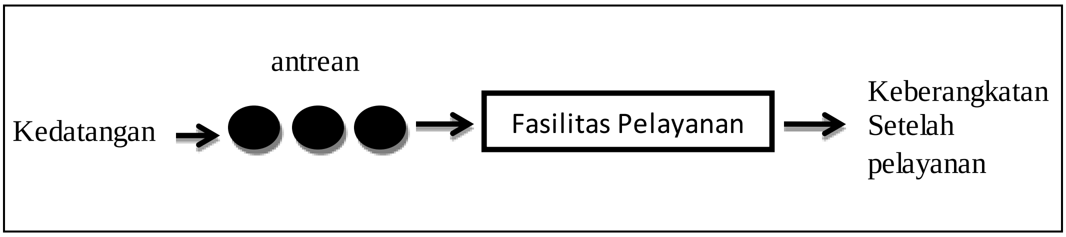


Gambar 2.1 Struktur antrean

Desain sarana pelayanan dapat diklasifikasikan dalam *channel* dan *phase* yang akan membentuk struktur antrean yang berbeda-beda. Istilah *channel* menunjukkan jumlah jalur untuk memasuki sistem pelayanan atau jumlah fasilitas pelayanan. Istilah *phase* berarti banyaknya stasiun-stasiun pelayanan, dimana *customer* harus melaluinya sebelum pelayanan dinyatakan lengkap. Menurut Heizer & Render (2001: 806), struktur antrean dasar yang umum terjadi dalam seluruh sistem antrean yaitu:

a. *Single Channel Single Phase*

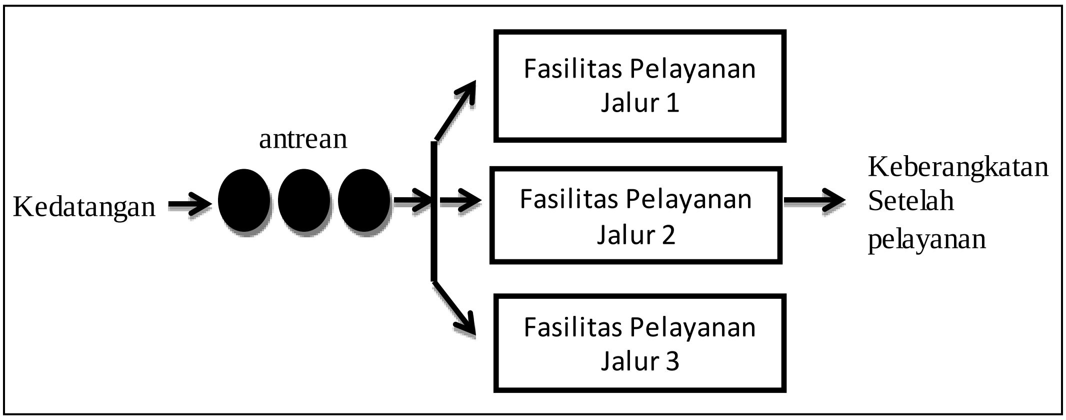
   Single Channel berarti bahwa hanya ada satu jalur yang memasuki sistem pelayanan atau ada satu fasilitas pelayanan. *Single Phase* menunjukkan bahwa hanya ada satu fasilitas pelayanan. Setelah menerima pelayanan, *customer* keluar dari sistem antrean. Contoh model ini yaitu antrean di kantor pos yang memiliki satu loket pelayanan dan antrean di supermarket yang memiliki satu kasir sebagai tempat pembayaran.



Gambar 2.2 Model *single channel single phase*

b. *Multiple Channel Single Phase*

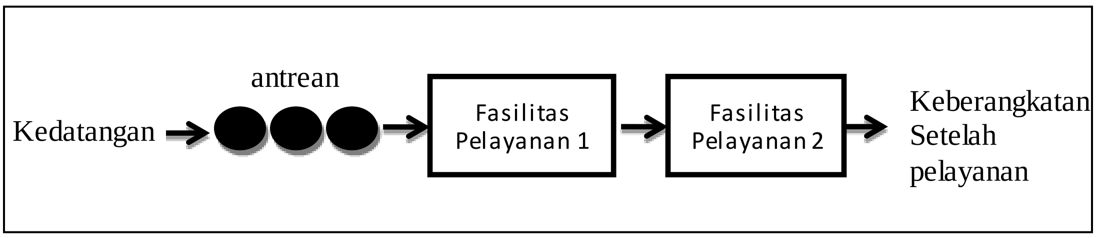
Sistem *Multiple Channel Single Phase* terjadi dimana ada dua atau lebih fasilitas pelayanan dialiri oleh antrean tunggal. Contoh model ini yaitu antrean pada sebuah bank dengan beberapa *teller* dan antrean pembelian tiket kereta api yang dilayani beberapa loket.



Gambar 2.3 Model *multiple channel single phase*

c. *Single Channel Multiple Phase*

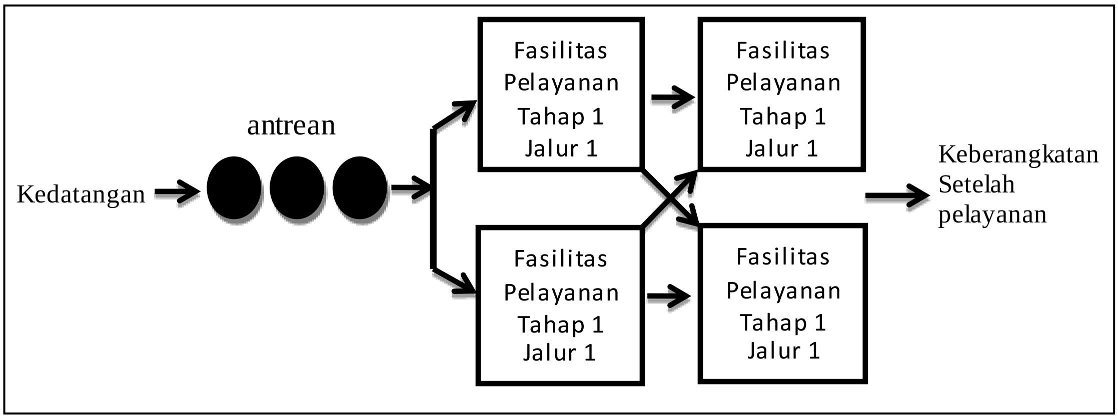
Single Channel berarti bahwa hanya ada satu jalur untuk memasuki sistem pelayanan atau ada satu fasilitas pelayanan. *Multiple Phase* menunjukkan ada dua atau lebih pelayanan yang dilaksanakan secara berurutan. Contoh model ini yaitu antrean pencucian mobil, dan antrean pada perusahan perakitan mobil.



Gambar 2.4 Model *single channel multiple phase*

d. *Multiple Channel Multiple Phase*

Sistem *Multiple Channel Multiple Phase* ini menunjukkan setiap sistem mempunyai beberapa fasilitas pelayanan pada setiap tahap sehingga terdapat lebih dari satu pelanggan yang dapat dilayani pada waktu bersamaan. Contoh model ini yaitu pada pelayanan yang diberikan kepada pasien di rumah sakit dimulai dari pendaftaran, diagnose, tindakan media, sampai pembayaran.



Gambar 2.5 Model *multiple channel multiple phase*

3. Faktor Sistem Antrean

Beberapa faktor penting yang berpengaruh terhadap barisan antrean dan pelayanannya, antara lain:

a. Distribusi Kedatangan

Distribusi kedatangan pada sistem antrean merupakan faktor penting yang berpengaruh terhadap kelancaran pelayanan. Distribusi kedatangan terbagi dua, yaitu:

1. Kedatangan secara individu (*single arrivals*)
2. Kedatangan secara kelompok (*bulk arrivals*)

Distribusi kedatangan diasumsikan bahwa kedatangan *customer* mengikuti suatu proses dengan distribusi probabilitas tertentu. Distribusi probabilitas yang sering digunakan yaitu distribusi Poisson, dimana kedatangan bersifat bebas, tidak terpengaruh oleh kedatangan sebelum ataupun sesudahnya. Asumsi distribusi Poisson menunjukkan bahwa kedatangan *customer* sifatnya acak dan mempunyai nilai rata-rata kedatangan sebesar *lamda* (λ) (Kakiay, 2004: 11).

b. Distribusi Pelayanan

Menurut Kakiay (2004: 5), distribusi pelayanan berkaitan dengan berapa banyak fasilitas pelayanan yang dapat disediakan. Distribusi pelayanan terbagi menjadi dua komponen penting, yaitu:

1. Pelayanan secara individual (*single service)*
2. Pelayanan secara kelompok (*bulk service*)

Waktu pelayanan diasumsikan berdistribusi Eksponensial. Distribusi Eksponensial merupakan distribusi acak yang variabelnya bebas tanpa memori masa lalu. Hal ini berarti bahwa lamanya waktu pelayanan *customer* tidak bergantung pada lamanya pelayanan *customer* sebelumnya.

c. Fasilitas Pelayanan

Menurut Kakiay (2004: 5), fasilitas pelayanan berkaitan erat dengan baris antrean yang akan dibentuk. Desain fasilitas pelayanan ini dapat dibagi dalam tiga bentuk, yaitu:

1) Bentuk series

   Fasilitas pelayanan dengan bentuk series merupakan fasilitas pelayanan yang berurutan dalam satu garis lurus atau garis melingkar.

2) Bentuk paralel

   Fasilitas pelayanan dengan bentuk paralel merupakan fasilitas pelayanan yang memiliki beberapa garis lurus yang antara satu dengan lainnya saling sejajar.

3) Bentuk *network station*

   Fasilitas pelayanan dengan bentuk *network station* merupakan fasilitas pelayanan series dan paralel yang terjadi secara bersama-sama.

d. Disiplin Pelayanan

Menurut Sinalungga (2008: 251), disiplin pelayanan adalah suatu aturan yang dikenalkan dalam memilih *customer* dari barisan antrean untuk segera dilayani. Berikut merupakan beberapa macam disiplin pelayanan yang sering digunakan,

1. *First Come First Served (FCFS)*

    FCFS merupakan suatu peraturan dimana yang akan dilayani terlebih dahulu adalah *customer* yang pertama datang pertama. Misalnya, antrean di loket-loket penjualan karcis kereta api.

2. *Last Come First Served (LCFS)*

    LCFS merupakan antrean dimana yang datang paling akhir akan dilayani paling awal. Misalnya, pada sistem bongkar muat barang di dalam truk, dimana barang yang masuk terakhir justru akan keluar terlebih dahulu.

3. *Service in Random Order (SIRO)*

    SIRO merupakan antrean dimana pelayanan dilakukan secara acak. Misalnya, arisan, dimana pelayanan atau *service* dilaksanakan berdasarkan undian *(random)*.

4. Prioritas pelayanan

    Prioritas pelayanan adalah antrean dimana pelayanan didasarkan pada prioritas khusus. Misalnya, dalam suatu pesta dimana tamu-tamu yang dikategorikan VIP akan dilayani terlebih dahulu.

e. Kapasitas Sistem

Menurut Bronson (1996: 310), kapasitas sistem adalah maksimum banyaknya *customer*, baik *customer* yang sedang berada dalam pelayanan maupun dalam antrean, yang ditampung oleh fasilitas pelayanan pada waktu yang sama. Hal ini dapat berupa kapasitas yang terbatas seperti pada area tunggu antara dua mesin yang berurutan dan kapasitas yang tak terbatas pada fasilitas pemesanan melalui pos.

f. Sumber Pemanggilan

Menurut Taha (2007: 552), sumber pemanggilan customer dapat bersifat terbatas atau tak terbatas. Sumber yang terbatas *(finite source)* yaitu customer yang datang untuk mendapatkan pelayanan terbatas, seperti kerusakan pada mesin-mesin yang menunggu servis dari montir mesin tersebut. Sumber yang tak terbatas *(infinite calling source)* yaitu *customer* yang terus datang tanpa henti, seperti panggilan pada sentra telepon.

4. Notasi Kendall Lee

Karakteristik dan asumsi dari model antrean dirangkum dalam bentuk notasi. Menurut Kakiay (2004: 17-18), bentuk kombinasi proses kedatangan dengan pelayanan pada umumnya dikenal sebagai standar universal. Standar universal disebut notasi Kendall Lee yaitu:

$$(a/b/c) : (d/e/f)$$

dimana simbol *a, b, c, d, e,* dan *f* merupakan unsur-unsur model baris antrean. Penjelasan dari simbol-simbol tersebut adalah sebagai berikut:

a : Distribusi kedatangan *(Arrival Distribution)* *b* : Distribusi waktu pelayanan atau keberangkatan

c : Banyaknya *server* dalam paralel (dimana *c*= 1, 2, 3, . . ∞)

d : Disiplin antrean, seperti *FCFS, LCFS, SIRO.*

e : Kapasitas maksimum *customer* dalam sistem *(Queue* dan *System)*

f : Banyaknya *customer* yang ingin memasuki sistem sebagai sumber

Notasi standar ini dapat diganti dengan kode-kode yang sebenarnya dari distribusi-distribusi yang terjadi dan bentuk lainnya, seperti:

M (*Markov*) : Laju kedatangan berdistribusi Poisson atau waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial

D (Desterministic) : Antar kedatangan atau waktu pelayanan konstan

c : Banyaknya *server* dalam bentuk paralel atau seri

N : Jumlah maksimum *customer* dalam sistem

E_d *(Erlang*) : Erlang distribusi untuk waktu antar kedatangan dan pelayanan dengan parameter d.

G (General) : Distribusi umum dari *service time* atau *(departure)*

GI (General independen) : Distribusi umum yang independen dari proses kedatangan

GD (General Discipline) : *General Discipline* disiplin umum dalam antrean (*FCFS*, *LCFS*, dll)

NPD : Non-*Preemptive Discipline*

PRD : *Preemptive Discipline*

Berikut ini merupakan contoh notasi Kendall Lee yang digunakan untuk menyatakan model antrean:

$$(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$$

Hal ini berarti:

M = laju kedatangan berdistribusi Poisson atau waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial

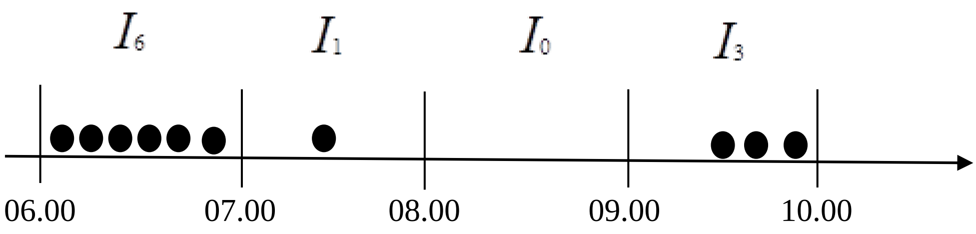
c = Banyaknya *server*

GD = *General Discipline*

∞ = Kapasitas sistem dan sumber pemanggilan tidak terbatas

5. Tingkat Kedatangan

Pengamatan A. K. Erlang di Copenhagen Telephone, pola permintaan *customer* telepon yang meminta sambungan dalam kurun waktu yang tidak terputus *(continuous of time)* dapat dibagi ke dalam beberapa interval waktu yang sama *(fixed interval)*. Dalam hal ini, permintaan *customer* terdistribusi secara acak pada masing-masing interval waktu tetap dalam kurun waktu yang tidak terputus disebut proses Poisson (Siswanto, 2007: 219). Berikut ilustrasi proses Poisson pada kedatangan *customer* dan interval waktu tetap dalam suatu kurun waktu:



Gambar 2.6 Distribusi kedatangan *customer* dan interval waktu tetap

Berdasarkan Gambar 2.6 ada 10 *customer* yang datang antara jam 06.00-10.00. Jumlah pelanggan yang datang pada setiap interval berbeda. Pada interval I_6 ada 6 *customer* yang datang, sedangkan di interval I_0 tidak ada yang datang sama sekali. Inilah contoh fenomena yang diamati oleh A. K. Erlang dengan mengikuti proses Poisson dan banyak terjadi di berbagai kasus antrean. Dalam hal ini, diasumsikan:

1. Kedatangan *customer* bersifat acak
2. Kedatangan *customer* antar interval waktu tidak saling mempengaruhi

Pada Gambar 2.6, kurun waktu observasi tersebut dibagi menjadi empat interval waktu tetap, yaitu per jam. Jika I menandai jumlah interval waktu maka

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i \tag{2.17}$$

dimana I_i adalah interval ke-i.

Dalam kasus ini, $I_6 =$ 1 interval dengan 6 kedatangan; $I_1 =$ 1 interval dengan 1 kedatangan; $I_0 =$ 1 interval dengan 0 kedatangan; dan $I_3 =$ 1 interval dengan 3 kedatangan. Dengan demikian diperoleh jumlah interval yaitu 4 atau $I = 4$. Selanjutnya, jika N menandai jumlah *customer* yang datang selama I interval dan di interval I_i ada K_i *customer*, maka jumlah *customer* selama kurun waktu I adalah:

$$N = \sum_{i=1}^{n} K_i I_i \tag{2.18}$$

dimana, K_i adalah jumlah*customer* yang datang di interval I_i. Dalam kasus ini, $N = 6 + 1 + 0 + 3 = 10$.

Jadi, di dalam setiap interval yang sama tersebut *customer* datang secara acak *(random)*. Jika di setiap interval tersebut dibagi lagi menjadi *n* sub interval dengan asumsi dan proses yang sama, maka kedatangan pada setiap interval waktu tetap dapat dinyatakan dengan distribusi Poisson (Siswanto, 2007: 219). Dengan demikian, rata-rata laju kedatangan atau tingkat kedatangan *customer* pada setiap interval waktu tetap tersebut dapat diestimasi dengan:

$$\lambda = \frac{N}{I} \tag{2.19}$$

Menggunakan persamaan (2.19), tingkat kedatangan *(arrival rate)* pada contoh Gambar 2.6 diperoleh:

$$\lambda = \frac{N}{I} = \frac{10}{4} = 2{,}5\ \frac{customer}{jam}$$

Artinya setiap jam rata-rata ada 2,5 *customer* yang datang, maka rata-rata interval kedatangan antara satu *customer* dengan *customer* yang lain adalah:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2{,}5}\frac{jam}{customer} = \frac{60}{2{,}5}\frac{menit}{customer} = 24\frac{menit}{customer}$$

Dengan demikian, jika λ menyatakan rata-rata laju kedatangan *customer* per interval waktu, maka $1/\lambda$ menyatakan rata-rata waktu antar kedatangan *customer*.

6. Tingkat Pelayanan

Rata-rata pelayanan *(mean server rate)* diberi simbol μ (mu) merupakan banyaknya *customer* yang dapat dilayani dalam satuan waktu. Lain halnya dengan rata-rata waktu yang dipergunakan untuk melayani setiap *customer* diberi simbol $1/\mu$ satuan (Kakiay, 2004: 11). Jika kapasitas fasilitas pelayanan mampu melayani 4 *customer* per jam. Artinya rata-rata tingkat pelayanan adalah $\mu = 4$ *customer*/jam, maka rata-rata waktu pelayanan setiap *customer* adalah:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{4}\frac{jam}{customer}$$

Selanjutnya, apabila waktu pelayanan atau $1/\mu$ dalam satuan waktu per *customer* mengikuti distribusi Eksponensial, maka rata-rata tingkat pelayanan atau μ dalam *customer* per satuan waktu mengikuti distribusi Poisson (Siswanto, 2007: 221).

C. Model – Model Antrean

Bagian ini membahas model – model antrean yang mencakup berbagai operasi pelayanan. Pembahasan ini terdiri dari: proses kelahiran dan kematian murni; model kelahiran murni; model kematian murni; solusi *steady-state* dari kinerja sistem antrean, model-model antren yaitu *(M/M/c):(GD/∞/∞), (M/G/c):(GD/∞/∞), (G/G/c):(GD/∞/∞),* dan optimasi biaya antrean.

1. Proses Kelahiran dan Kematian *(Birth and Death)*

Kebanyakan model dasar antrean beranggapan bahwa kedatangan (*input)* dan keberangkatan (*output)* dari sistem antrean terjadi berdasarkan proses *birth-death* (kelahiran-kematian). Kelahiran adalah kedatangan *calling unit* yang baru dalam sistem antrean dan kematian adalah keberangkatan unit yang selesai dilayani. Proses kelahiran dan kematian terjadi secara acak yang rata-rata terjadinya bergantung pada keadaan yang sedang berlangsung *(current state)* dari sistem (Dimyati & Dimyati, 2002: 356).

Berikut ini merupakan penjelasan tentang proses kelahiran dan kematian:

1. *Birth postulate*

Sistem pada *state* $E_n(n = 0, 1, 2 \ldots)$pada saat t, probabilitas bahwa tepat ada satu kelahiran selama interval waktu t sampai dengan $(t + \Delta t)$ adalah $[\lambda_n \Delta t + 0(\Delta t)]$, dimana λ_n positif konstan.

2. *Death postulate*

Sistem pada *state* $E_n (n = 0, 1, 2 \ldots)$pada saat t, probabilitas bahwa tepat ada satu kematian selama interval waktu t sampai dengan $(t + \Delta t)$ adalah $[\mu_n \Delta t + 0(\Delta t)]$, dimana $\mu_0 = 0$ dan μ_n positif konstan untuk $n > 0$.

3. *Multiple jump postulate*

Sistem pada *state* $E_n (n = 0, 1, 2 \ldots)$ pada saat t, probabilitas bahwa jumlah kombinasi kelahiran dan kematian lebih dari satu selama interval waktu t sampai $(t + \Delta t)$ adalah $0(\Delta t)$ (keterangan: $0(\Delta t)$ adalah fungsi dari Δt yang mendekati nol). Dengan demikian, fungsi tersebut memenuhi persamaan:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{0(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

Akibat *postulate* ketiga, maka *postulate* pertama diasumsikan tepat 1 kelahiran tanpa adanya kematian. Hal yang sama berlaku juga untuk *postulate* kedua yaitu 1 kematian tanpa adanya kelahiran.

Proses kelahiran dan kematian selama interval waktu t sampai dengan $(t + \Delta t)$ harus terjadi salah satu dari kejadian *mutually exclusive* (saling independen) berikut:

1. Tepat ada 1 kelahiran tanpa kematian
2. Tepat ada 1 kematian tanpa kelahiran
3. Jumlah kelahiran dan kematian lebih besar dari 1

4. Tidak ada kelahiran atau kematian

Jumlah dari probabilitas kejadian tersebut yaitu 1, sehingga probabilitas terjadi kejadian (4) yaitu:

$$P(4) = 1 - [P(3) + P(2) + P(1)]$$

Dengan demikian, sistem dengan *state* $E_n (n = 0, 1, 2 \ldots)$ pada saat t, probabilitas tidak terjadi kelahiran dan kematian pada saat interval waktu t sampai dengan $(t + \Delta t)$ yaitu:

$$[1 - (\lambda_n \, \Delta t) - (\mu_n \, \Delta t) + 0(\Delta t)]$$

Probabilitas bahwa kejadian dapat mencapai *state* E_n pada saat t sampai $(t + \Delta t)$ dengan $n > 0$ yaitu:

Tabel 2.1 Probabilitas kejadian *mutually exclusive*

State pada saat t	Kejadian dari t sampai $(t + \Delta t)$		Probabilitas
	Kelahiran	Kematian	
E_{n-1}	1	0	$P_{n-1}(t)[\lambda_{n-1}\Delta t + 0(\Delta t)]$
E_{n+1}	0	1	$P_{n+1}(t)[\mu_{n+1}\Delta t + 0(\Delta t)]$
E_n	1	1	$0(\Delta t)$
E_n	0	0	$P_n(t)[1 - \lambda_n \Delta t - \mu_n \Delta t + 0(\Delta t)]$

Berdasarkan Tabel 2.1 dengan 4 probabilitas kejadian yang *mutually exclusive* maka didapatkan:

$$P_n(t + \Delta t)$$
$$= P_{n-1}(t)[\lambda_{n-1}\Delta t + 0(\Delta t)] + P_{n+1}(t)[\mu_{n+1}\Delta t + 0(\Delta t)]$$
$$+ 0(\Delta t) + P_n(t)[1 - \lambda_n \Delta t - \mu_n \Delta t + 0(\Delta t)]$$

Selanjutnya, proses penggabungan $0(\Delta t)$, sehingga didapatkan:

$$P_n(t+\Delta t) = P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}\Delta t + P_{n+1}(t)\mu_{n+1}\Delta t + P_n(t)[1-\lambda_n\Delta t - \mu_n\Delta t]$$
$$+0(\Delta t)$$

Kemudian kedua ruas dikurangi dengan $P_n(t)$, lalu dibagi dengan Δt, maka didapatkan:

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} = P_{n-1}(t)\lambda_{n-1} + P_{n+1}(t)\mu_{n+1} + P_n(t)[-\lambda_n - \mu_n]$$
$$+\frac{0(\Delta t)}{\Delta t}$$

Untuk Δt positif, maka berlaku:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t\to 0}\begin{bmatrix} P_{n-1}(t)\lambda_{n-1} + P_{n+1}(t)\mu_{n+1} + \\ P_n(t)[-\lambda_n - \mu_n] + \dfrac{0(\Delta t)}{\Delta t}\end{bmatrix} \quad (2.20)$$

dengan menggunakan definisi turunan berikut:

$$f'(x) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

maka persamaan (2. 20) akan menjadi:

$$P_n'(t) = \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)P_n(t)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)P_n(t), n > 0 \quad (2.21)$$

Jika $n =$ 0 maka nilai $\lambda_{-1} = 0$ dan $\mu_0 = 0$, sehingga persamaan (2.21) akan menjadi:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu_1 P_1(t) - \lambda_0 P_0(t) \quad (2.22)$$

2. Model Kelahiran Murni

Diasumsikan $\lambda_n = \lambda$ dan $\mu_n = 0$ untuk semua nilai n (n = 0, 1, 2,…). Hal ini menunjukkan bahwa kematian tidak akan terjadi, sehingga prosesnya menjadi proses kelahiran murni dengan tingkat kedatangan konstan. Persamaan differensial untuk kelahiran murni dari persamaan (2.21) akan menjadi:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda\, P_0(t)\,, \qquad \text{untuk } n = 0 \tag{2.23}$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t), \qquad \text{untuk } n = 1, 2, \ldots \tag{2.24}$$

Kemudian asumsikan bahwa sistem dalam *state* E_0pada saat t = 0, sehingga didapatkan:

$$P_o(t) = e^{-\lambda t}\,, \qquad \text{untuk } n = 0$$

Jika n = 1, maka dengan menggunakan persamaan (2.24) didapatkan:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda\, P_0(t) - \lambda\, P_1(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda\, P_1(t) = \lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda\, P_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Kedua ruas dikalikan dengan $e^{\lambda t}$, maka didapatkan

$$e^{\lambda t}\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda e^{\lambda t} P_1(t) = \lambda$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} P_1(t)\right) = \lambda$$

Selanjutnya, kedua ruas diintegrakan, sehingga didapatkan

$$e^{\lambda t}P_1(t) = \int \lambda \, dt$$

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} + c$$

P_1 adalah fungsi probabilitas, sehingga nilai c yang memenuhi yaitu 0. Jadi nilai P_1 yaitu :

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} \tag{2.25}$$

Jika n = 2, maka dengan menggunakan persamaan (2.24) didapatkan:

$$\frac{dP_{2(t)}}{dt} = \lambda P_1(t) - \lambda P_2(t)$$

$$\frac{dP_{2(t)}}{dt} = \lambda^2 t e^{-\lambda t} - \lambda P_2(t)$$

$$\frac{dP_{2(t)}}{dt} + \lambda P_2(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$$

Kedua ruas dikalikan dengan $e^{\lambda t}$, maka didapatkan

$$e^{\lambda t}\frac{dP_{2(t)}}{dt} + \lambda e^{\lambda t} P_2(t) = \lambda^2 t$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} P_2(t)\right) = \lambda^2 t$$

Selanjutnya, kedua ruas diintegralkan, sehingga didapatkan

$$e^{\lambda t} P_2(t) = \frac{1}{2}\lambda^2 t^2 + c$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2}\lambda^2 t^2 e^{-\lambda t} + c e^{-\lambda t}$$

P_2 adalah fungsi probabilitas, sehingga nilai c yang memenuhi yaitu 0. Jadi nilai P_2 yaitu

$$P_2(t) = \frac{1}{2}\lambda^2 t^2 e^{-\lambda t} \quad (2.26)$$

Berdasarkan persamaan (2.25) dan (2.26), maka dapat diambil rumus umum yaitu:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n\,!} \quad (2.27)$$

Distribusi kemungkinan untuk n adalah distribusi Poisson dengan parameter λt. Dengan demikian, rata-rata dan variansi dari panjang garis pada saat t adalah λt dengan rata-rata laju kedatangan λ.

Kemudian, dimisalkan n adalah kedatangan *customer* yang diubah dengan simbol x, sehingga probabilitas untuk x *customer* yaitu:

$$P_x(t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x\,!}, \quad x = 0, 1, 2 \ldots \quad (2.28)$$

3. Model Kematian Murni

Diasumsikan bahwa $\lambda_n = 0$ untuk $n = 0, 1, 2, \ldots$ dan $\mu_n = \mu$ untuk $n = 1, 2, 3, \ldots$. Diasumsikan juga bahwa sistem dalam keadaan *state* E_N saat $t = 0$. Asumsi pertama menyatakan bahwa kelahiran tidak pernah terjadi, sehingga hanya terdapat kematian murni dengan tingkat pelayanan konstan sampai berakhir pada *state* E_0 (Dimyati & Dimyati, 2002: 360). Dengan demikian, proses tersebut ekuivalen dengan kelahiran murni, kecuali proses tersebut bergerak dengan arah berlawanan, dan berhenti setelah N kejadian.

Persamaan diferensial untuk proses kematian murni yaitu:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \mu P_{n+1}(t) - \mu P_n(t), \qquad \text{untuk } n = 0, 1, 2, .., N-1 \tag{2.29}$$

$$\frac{dP_N(t)}{dt} = -\mu P_N(t), \qquad \text{untuk } n \approx N \tag{2.30}$$

(N-n) adalah jumlah kejadian kematian yang telah terjadi selama proses. Oleh karena itu, probabilitas tidak ada kejadian yang terjadi pada saat *t* adalah:

$$P_N(t) = e^{-\mu t} \tag{2.31}$$

Kemudian mencari probabilitas *(N-n)* kejadian yang telah terjadi, dimana $(N-n) < N$. Misalkan *n* = *N-1*, sehingga dengan menggunakan persamaan (2.29) didapatkan:

$$\frac{dP_{N-1}(t)}{dt} = \mu P_N(t) - \mu P_{N-1}(t)$$

$$\frac{dP_{N-1}(t)}{dt} + \mu P_{N-1}(t) = \mu P_N(t)$$

$$\frac{dP_{N-1}(t)}{dt} + \mu P_{N-1}(t) = \mu e^{-\mu t}$$

Kedua ruas dikalikan dengan $e^{\mu t}$, maka didapatkan

$$e^{\mu t}\frac{dP_{N-1}(t)}{dt} + \mu e^{\mu t} P_{N-1}(t) = \mu$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\mu t} P_{N-1}(t)) = \mu$$

Kemudian kedua ruas diintegralkan, sehingga didapatkan

$$e^{\mu t} P_{N-1}(t) = \int \mu \, dt$$

$$e^{\mu t} P_{N-1}(t) = \mu t + c$$

P_{N-1} adalah fungsi probabilitas , sehingga nilai $c = 0$. Jadi nilai P_{N-1} yaitu

$$P_{N-1}(t) = \mu t e^{-\mu t} \tag{2.32}$$

Jika $n = N - 2$, maka dengan menggunakan persamaan (2.29) didapatkan

$$\frac{dP_{N-2}(t)}{dt} = \mu P_{N-1}(t) - \mu P_{N-2}(t)$$

$$\frac{dP_{N-2}(t)}{dt} + \mu P_{N-2}(t) = \mu P_{N-1}(t)$$

$$\frac{dP_{N-2}(t)}{dt} + \mu P_{N-2}(t) = \mu^2 t e^{-\mu t}$$

Kedua ruas dikalikan dengan $e^{\mu t}$, sehingga didapatkan

$$e^{\mu t}\frac{dP_{N-2}(t)}{dt} + \mu e^{\mu t} P_{N-2}(t) = \mu^2 t$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\mu t} P_{N-2}(t)) = \mu^2 t$$

Kemudian kedua ruas diintegralkan, sehingga didapatkan

$$e^{\mu t} P_{N-2}(t) = \int \mu^2 t \, dt$$

$$e^{\mu t} P_{N-2}(t) = \frac{1}{2}\mu^2 t^2 + c$$

$$P_{N-2}(t) = \frac{1}{2}\mu^2 t^2 e^{-\mu t} + c\, e^{-\mu t}$$

P_{N-2} adalah fungsi probabilitas, sehingga nilai$c = 0$. Jadi nilai P_{N-2} yaitu

$$P_{N-2}(t) = \frac{1}{2}(\mu t)^2 e^{-\mu t} \tag{2.33}$$

Berdasarkan persamaan (2.33) dan (2.33), maka diperoleh rumus umum probabilitas untuk kematian murni yaitu:

$$P_n(t) = \frac{(\mu t)^{N-n} e^{-\mu t}}{(N-n)!} \tag{2.34}$$

4. Solusi *Steady State*

Kondisi *steady* state yaitu keadaan sistem tidak tergantung pada keadaan awal maupun waktu yang telah dilalui. Jika suatu sistem antrean telah mencapai kondisi *steady state*, maka peluang terdapat n customer dalam sistem pada waktu t $\{P_n(t)\}$ tidak tergantung pada waktu (Ecker & Kupferschmid, 1988: 394). Solusi *steady state* untuk P_n bisa didapatkan dengan 2 pendekatan, antara lain:

1. Menyelesaikan $P_n(t)$ dalam kasus transien dengan $t \to \infty$
2. Menetapkan

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$$

Proses kelahiran dan kematian tidak dapat digunakan untuk solusi transien, sehingga digunakan pendekatan kedua. Dengan mengasumsikan bahwa:

$$\lim_{t\to\infty} P_n(t) = P_n$$

sehingga

$$\lim_{t\to\infty} \left\{\frac{dP_n(t)}{dt}\right\} = 0$$

Untuk $t \to \infty$ persamaan (2.21) dan (2.22) menjadi:

$$0 = \lambda_{n-1}P_{n-1} + \mu_{n+1}P_{n+1} - (\lambda_n + \mu_n)P_n\,, \text{ jika } n > 0 \tag{2.35}$$

$$0 = \mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0\,, \text{ jika } n = 0 \tag{2.36}$$

Jika n = 0, maka menggunakan persamaan (2.36) didapatkan:

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 \tag{2.37}$$

Menggunakan persamaan (2.35) untuk n = 1, didapatkan

$$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = (\lambda_1 + \mu_1) P_1 \tag{2.38}$$

Persamaan (2.38) disubtitusikan ke dalam persamaan (2.39), sehingga persamaannya menjadi

$$P_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0 \tag{2.39}$$

Berdasarkan persamaan (2.37) dan (2.39), didapatkan rumus umum yaitu :

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1} P_0 \tag{2.40}$$

berlaku untuk n =1, 2, 3.

Nilai P_0 didapat dengan menggunakan persamaan berikut ini:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \tag{2.41}$$

Ukuran-ukuran *steady state* dari kinerja sistem antrean dengan c pelayanan didapatkan,

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P_n \tag{2.42}$$

$$L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n - c) P_n \tag{2.43}$$

Ada hubungan yang kuat antara L_s ,L_q, W_s, dan W_q, sehingga salah satu ukuran dapat ditentukan dari ukuran lainnya. Diasumsikan bahwa λ_{eff} adalah rata-rata laju kedatangan efektif, maka

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{eff}} \tag{2.44}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{eff}} \tag{2.45}$$

Hubungan langsung dari ukuran keefektifan juga terdapat antara W_s dan W_q, berdasarkan definisi

$$\begin{pmatrix} waktu\ berada \\ dalam\ sistem \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} waktu\ menunggu \\ dalam\ antrean \end{pmatrix} + (waktu\ pelayanan)$$

Diketahui μ adalah rata-rata laju pelayanan, sehingga waktu pelayanan yang diperkirakan adalah $1/\mu$. Dengan demikian didapatkan

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \tag{2.46}$$

Kedua sisi pada persamaan (2.46) dikalikan dengan λ_{eff}, sehingga didapatkan

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_{eff}}{\mu} \tag{2.47}$$

Perkiraan pemanfaatan dari sarana pelayanan didefinisikan sebagai fungsi dari banyaknya rata-rata pelayanan *(server)* yang sibuk. Selisih antara L_s dan L_q sama dengan banyaknya pelayan yang sibuk, sehingga didapatkan

$$\begin{pmatrix} jumlah\ pelayanan \\ yang\ sibuk \end{pmatrix} = \bar{c} = L_s - L_q = \frac{\lambda_{eff}}{\mu} \tag{2.48}$$

Persentase dari pemanfaatan sarana pelayanan dengan c pelayanan dapat dihitung sebagai berikut

$$\text{Persentase pemanfaatan} = \frac{\bar{c}}{c} \times 100\% \tag{2.49}$$

Solusi *steady state* dari kinerja sistem antrean diatas dapat diturunkan dengan asumsi bahwa parameter-parameter λ_n dan μ_n adalah sedemikian sehingga tercapai kondisi *steady state*. Asumsi ini berlaku jika,

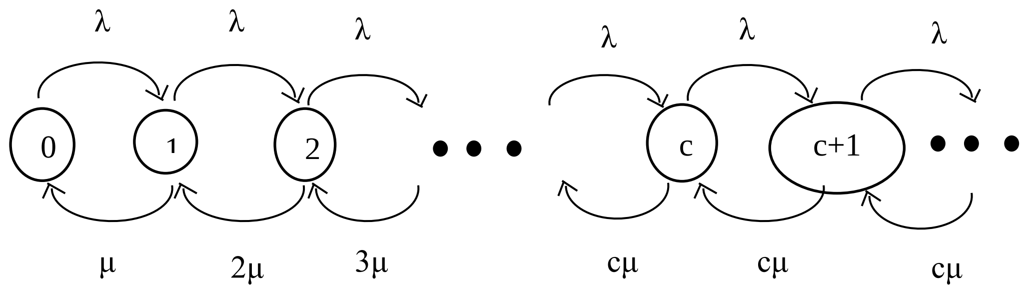
$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1 \tag{2.50}$$

Kondisi *steady state* dapat terpenuhi jika $\rho < 1$ yang berarti bahwa $\lambda < \mu$. Jika nilai $\rho > 1$ maka laju kedatangan *customer* lebih cepat dibandingkan dengan laju pelayanan. Hal ini berarti panjang antrean yang diharapkan akan bertambah tanpa batas sehingga sistem tidak *steady state*. Sama halnya jika $\rho = 1$, maka kedatangan terjadi dengan laju yang sama dengan laju pelayanan.

5. Model Antrean *(M/M/c):(GD/∞/∞)*

Pada model *(M/M/c):(GD/∞/∞)* kedatangan *customer* berdistribusi Poisson dengan rata-rata λ. Selain itu, terdapat *c server* dimana setiap *server* independen dan diidentifikasi waktu antar pelayanan (1/µ) berdistribusi Eksponensial (Gross, et al, 2008: 66). Diagram yang menggambarkan tentang model *(M/M/c):(GD/∞/∞)* dapat dilihat pada gambar 2.7.

Model antrean *(M/M/c):(GD/∞/∞)*dapat dimodelkan sebagai proses kelahiran-kematian pada Gambar 2.7. Rata-rata laju kedatangan (λ) dan rata-rata waktu pelayanan (µ) *customer* adalah konstan. Selain itu, terdapat *c server*, sehingga *customer* dapat dilayani secara bersamaan. Berdasarkan pembahasan sebelumnya, solusi *steady state* dari kinerja sistem antrean dapat disimpulkan bahwa $\lambda_{eff} = \lambda$.



Gambar 2.7 Diagram tingkat perpindahan untuk model M/M/c

Pengaruh penggunaan *c server* yaitu mempercepat laju pelayanan, sehingga pelayanan dapat dilakukan secara bersamaan. Jika banyaknya *n customer* sama dengan atau lebih besar dari *c*, maka laju pelayanannya dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\lambda_n = \lambda \,, \qquad n \geq 0$$

$$\mu_n \begin{cases} n\mu, & n \leq c \\ c\mu, & n \geq c \end{cases}$$

Perhitungan P_n untuk $n \leq c$ dapat dijabarkan sebagai berikut,

$$P_n = \rho^n P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)(3\mu)\ldots(n\mu)} P_0$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} P_0 \tag{2.51}$$

Selanjutnya, P_n untuk $n \geq c$ yaitu,

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)\ldots(c-1)\mu(c\mu)(c\mu)\ldots(c\mu)} P_0$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{c!\, c^{n-c} \mu^n} P_0 \qquad (2.52)$$

Berdasarkan persamaan (2.51) dan persamaan (2.52) didapatkan

$$P_n \begin{cases} \left(\frac{\rho^n}{n!}\right) P_0 & 0 \le n \le c \\ \left(\frac{\rho^n}{c^{n-c} c!}\right) P_0 & n > c \end{cases} \qquad (2.53)$$

Asumsikan bahwa $\rho = \lambda/\mu$. Nilai P_0 didapatkan dari persamaan (2.53) yang disubstitusikan ke dalam persamaan $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$, sehingga didapatkan

$$P_0 \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\rho^n}{c^{n-c} c!} \right\} = 1$$

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\rho^{n-c}}{c^{n-c}} \right\}^{-1}$$

Misalkan $j = n - c$, sehingga didapatkan

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^j \right\}^{-1}$$

$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^j$ merupakan deret geometri tak hingga, sehingga didapatkan

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \left(\frac{1}{1 - \rho/c} \right) \right\}^{-1}, \qquad \frac{\rho}{c} < 1 \qquad (2.54)$$

Selanjutnya yaitu menentukan ukuran keefektifan sistem antrean yang terdiri dari L_q, L_s, W_q, dan W_s . Nilai L_q dapat dicari dengan meggunakan persamaan (2.43) berikut

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c)P_n$$

Misalkan $k=n–c$ dan persamaan (2.53) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.43), sehingga didapatkan

$$L_q = \sum_{k=0}^{\infty} kP_{k+c}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\rho^{k+c}}{c^k c!} P_0$$

$$L_q = P_0 \frac{\rho^c}{c!} \frac{\rho}{c} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{\rho}{c}\right)^{k-1}$$

dimana

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{\rho}{c}\right)^{k-1} = \frac{d}{d\left(\frac{\rho}{c}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^k = \frac{d}{d\left(\frac{\rho}{c}\right)} \left[\frac{1}{1-\frac{\rho}{c}}\right] = \frac{1}{\left(1-\frac{\rho}{c}\right)^2}$$

Akibatnya,

$$L_q = P_0 \frac{\rho^c}{c!} \frac{\rho}{c} \frac{1}{\left(1-\frac{\rho}{c}\right)^2}$$

$$= \left[\frac{\rho^{c+1}}{c!\, c \left(\frac{c-\rho}{c}\right)^2}\right] P_0$$

$$= \left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\, c^2 \frac{(c-\rho)^2}{c^2}}\right] P_0$$

$$L_q = \left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\,(c-\rho)^2}\right] P_0 \qquad (2.55)$$

Nilai L_s ditentukan dengan cara persamaan (2.55) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.47), sehingga didapatkan

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= L_q + \rho$$

$$L_s = \left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\,(c-\rho)^2}\right] P_0 \ + \rho \qquad (2.56)$$

Nilai W_q dapat ditentukan dengan cara, persamaan (2.55) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.45), sehingga didapatkan

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W_q = \frac{\left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\right] P_0}{\lambda}$$

$$= \frac{\lambda\rho^c}{\mu(c-1)!\,(c-\rho)^2} P_0 \times \frac{1}{\lambda}$$

$$W_q = \frac{\rho^c}{\mu(c-1)!\,(c-\rho)^2} P_0 \qquad (2.57)$$

Nilai W_s ditentukan dengan cara, persamaan (2.57) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.46), sehingga didapatkan

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$W_s = \frac{\rho^c}{\mu(c-1)!\,(c-\rho)^2} P_0 + \frac{1}{\mu} \qquad (2.58)$$

Banyaknya pelayanan yang sibuk atau kepadatan *customer* ($\bar{c}$) dapat ditentukan dengan cara persamaan (2.55) dan (2.56) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.48), sehingga didapatkan

$$\bar{c} = \left\{\left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\,(c-\rho)^2}\right]P_0 + \rho\right\} - \left\{\left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\,(c-\rho)^2}\right]P_0\right\} = \rho \qquad (2.59)$$

6. Model Antrean *(M/G/c):(GD/∞/∞)*

Model antrean *(M/G/c):(GD/∞/∞)* model ini adalah model antrean dengan pelayanan ganda, distribusi kedatangan Poisson dan distribusi pelayannan general. Menurut Gross, et al. (2008: 255), rata-rata waktu tunggu dalam antrean didapat dari persamaan

$$\pi_n^q = P_r \text{ \{n dalam antrean setelah keberangkatan)}$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^\infty (\lambda t)^n\, e^{-\lambda t}\, dW_q(t)$$

Dengan probabilitas banyaknya pelanggan dalam antrean, yaitu Lq adalah

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_n^q$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{n!}\int_0^\infty (\lambda t)^n\, e^{-\lambda t}\, dW_q(t)\right)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dW_q(t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}(\lambda t)^n$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dW_q(t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n(n-1)!}(\lambda t)^n$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dW_q(t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}\lambda t}{(n-1)!}$$

$$= \int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t}\, dW_q(t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t}\, dW_q(t) e^{\lambda t}$$

$$= \int_0^\infty \lambda t\, dW_q(t)$$

$$= \lambda \int_0^\infty t\, dW_q(t)$$

$$= \lambda E\left[T_q\right]$$

$$= \lambda W_q$$

Menurut Shirley & Ross (1978: 832), rata-rata waktu tunggu dalam antrean dapat dicari dengan rumus :

$$W_q = \frac{\lambda^c E[t^2](E[t])^{c-1}}{2(c-1)!\,(c-\lambda E[t])^2 \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda(E[t])^n}{n!} + \frac{\lambda(E[t])^c}{(c-1)!(\lambda E[t])}\right]}$$

Rata-rata banyaknya pelanggan dalam sistem yaitu jumlah pelanggan yang mengantre dan sedang dilayani. Menurut Ross (1997: 414), jumlah rata-rata customer yang sedang dilayani dinyakatan dengan $\lambda E(t)$, sehingga rata-rata banyaknya pelanggan dalam sistem dapat dicari dengan rumus:

$$L_s = L_q + \lambda E(t)$$

Waktu tunggu dalam sistem model (*M/G/c*) didapat dari *Little's formula* (Little, 1961: 383-387):

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda}$$

7. Model Antrean *(G/G/c):(GD/∞/∞)*

Model antrean *(G/G/c):(GD/∞/∞)* adalah model antrean dengan laju kedatangan berdistribusi General dan waktu pelayanan berdistribusi General dengan jumlah fasilitas pelayanan sebanyak c pelayanan. Disiplin antrean yang digunakan pada model ini adalah umum yaitu *General Discipline*, kapasitas maksimum dan sumber pemanggilan tak terbatas.

Ukuran kinerja sistem pada model General ini mengikuti ukuran kinerja pada model *M/M/c*, kecuali untuk perhitungan jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam antrean (Lq) adalah sebagai berikut :

$$L_q = L_{qM/M/c} \cdot \frac{\mu^2 v(t) + v(t')\lambda^2}{2}$$

(Sugito & Fauziah M., 2009: 113)

dengan

$$v(t) = \left(\frac{1}{\mu^2}\right)^2$$

$$v(t') = \left(\frac{1}{\lambda^2}\right)^2$$

Untuk ukuran kinerja sistem yang lain yaitu :

Jumlah rata-rata kedatangan yang diperkirakan dalam sistem (L_s)

$$L_s = L_q + \rho$$

Waktu menunggu yang diperkirakan dalam antrean (W_q)

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Waktu yang diperkirakan dalam sistem

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

8. Optimasi Biaya Antrean

Optimasi sistem antrean dapat dievaluasi dengan melihat biaya total yang diharapkan. Total biaya yaitu jumlah keseluruhan dari total biaya pelayanan per satuan waktu, dengan biaya menunggu *customer* per satuan waktu. Menurut Taha (2007: 598), model biaya dapat dicari menggunakan rumus berikut

$$ETC(x) = EOC(x) + EWC(x) \tag{2.60}$$

Keterangan:

x: banyaknya *server*

ETC (Expected Total Cost) : Total biaya per satuan waktu

EOC (Expected Operating Cost) : Biaya pelayanan per satuan waktu

EWC (Expected Waiting Cost) : Biaya menunggu per satuan waktu

Biaya pelayanan dan biaya menunggu dapat dicari menggunakan rumus berikut

$$EOC(x) = C_1 x \tag{2.61}$$

$$EWC(x) = C_2 L_s \tag{2.62}$$

Keterangan :

C_1 : biaya pelayanan per *server* dalam satuan waktu

C_2 : biaya menunggu per satuan waktu

Jika pendapatan Perkapita Indonesa Tahun 2010 sebesar Rp 27.000.000, perhitungan total biaya menunggu (C_2) dapat hitung sebagai berikut

$$C_2 = \frac{27.000.000}{12\ bulan \times 8\ jam\ \times 5\ hari \times 4\ minggu} \tag{2.63}$$

$$= Rp\ 14.063 \text{ per jam}$$

Jadi, total biaya menunggu yaitu Rp 14.063 per jam (Sekar & Mulyati, 2011: 12).

D. Uji Distribusi Kolmogorov-Smirnov

Menurut Siegel (2011: 59), uji Kolmogorov-Smirnov adalah suatu uji *goodness of-fit*, artinya yang diperhatikan adalah tingkat kesesuian antara distribusi serangkaian nilai sampel (data yang diobservasi) dengan suatu distribusi teoritis tertentu. Uji ini menetapkan apakah data-data dalam sampel berasal dari suatu populasi dengan distribusi teoritis tertentu

Misalkan $F_0(X)$ merupakan suatu fungsi distribusi frekuensi kumulatif yang diharapkan, yaitu distribusi kumulatif teoritis dibawah asumsi H_0. Artinya, untuk nilai N yang besarnya sembarang, nilai $F_0(X)$ adalah proporsi kasus yang diharapkan mempunyai nilai yang sama atau kurang dari X. Misalkan $S_N(X)$ merupakan distribusi kumulatif yang diobservasi dari suatu sampel acak dengan N observasi. Dimana X adalah sembarang nilai yang mungkin, dan k adalah banyaknya observasi yang sama atau kurang dari X, sehingga

$$S_N(X) = \frac{k}{N} \tag{2.64}$$

Berdasarkan distribusi teoritis dibawah asumsi H_0, maka diharapkan untuksetiap harga X, $S_N(X)$ harus jelas mendekati $F_0(X)$. Artinya, dibawah asumsi H_0 selisih antara $S_N(X)$ dan $F_0(X)$diharapkan menghasilkan nilai yang kecil dan ada dalam batas-batas kesalahan acak.

Uji Kolmogorov-Smirnov memusatkan perhatian pada penyimpangan (deviasi) terbesar. Nilai $F_0(X) - S_N(X)$ terbesar dinamakan deviasi maksimum, yang dirumuskan:

$$D_{hitung} = maksimum\ |F_0(X) - S_N(X)| \quad (2.65)$$

Langkah-langkah melakukan uji Kolmogorov-Smirnov untuk laju kedatangan dan waktu pelayanan nasabah, sebagai berikut:

1. Menentukan H_0 dan H_1, yaitu

   H_0: Laju kedatangan berdistribusi Poisson atau waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial.

   H_1 : Laju kedatangan tidak berdistribusi Poisson atau waktu pelayanan tidak berdistribusi Eksponensial. Dengan kata lain, laju kedatangan atau waktu pelayanan berdistribusi *General* (Umum).
2. Menentukan taraf signifikansi (α) yaitu tingkat kesalahan atau *error* dalam pengujian data.
3. Menentukan statistik Uji yang digunakan . Dalam hal ini, statistik uji yang digunakan yaitu uji Kolmogorov Smirnov dengan mencari nilai deviasi maksimum menggunakan persamaan (2.64).
4. Menentukan wilayah kritis untuk uji Kolmogorov-Smirnov yaitu H_0 ditolak jika nilai dari $D_{hitung} > D_{tabel}$.
5. Melakukan perhitungan data dengan mencari selisih nilai $F_0(X)$ dan $S_N(X)$.
6. Menarik kesimpulan.

Uji Kolmogorov-Smirnov memperlihatkan dan mengerjakan suatu observasi terpisah dari yang lain. Lain halnya dengan uji *Chi-Square,* uji Kolmogorov-Smirnov tidak akan kehilangan banyak informasi karena adanya penggabungan kategori. Selain itu, uji *Chi-Square* untuk sampel yang sangat kecil tidak dapat dijalankan, sedangkan uji Kolmogorov-Smirnov dapat digunakan untuk menguji sampel yang sangat kecil. Fakta tersebut menunjukkan bahwa uji Kolmogorov-Smirnov kekuatannya lebih besar dibandingkan dengan uji lainnya seperti uji *Chi-Square*. (Siegel, 2011: 63)

E. Uji Kecukupan Data

Uji kecukupan data digunakan untuk melihat apakah data yang diambil sudah mewakili keseluruhan populasi. Menurut Sutalaksana (1979: 136), uji kecukupan data dapat dicari dengan menggunakan persamaan berikut:

$$N' = \left[\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{N \times \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}}{s \times \sum X_i} \right]^2 \qquad (2.66)$$

Keterangan:

X_i : pengamatan ke-i

$Z_{\frac{\alpha}{2}}$: nilai wilayah kurva normal dengan tingkat signifikansi sebesar α

s : tingkat error data

N': jumlah observasi yang diperlukan

N : jumlah observasi yang telah dilakukan