SEKILAS TENTANG SUKUBANYAK MATRIKS MONIKAL

A GLIMPSE OF A MONIC MATRIX POLYNOMIAL OLATION

Oleh: Faizah
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

Abstrak

Artikel ini membahas tentang sukubanyak-sukubanyak matriks monik. Pembahasan meliputi sifat-sifat sederhana pasangan dan tripel matriks baku, representasi-representasi dari suatu sukubanyak matriks monik, serta syarat cukup agar suatu tripel matriks merupakan suatu tripel matriks baku dari suatu sukubanyak matriks monik. Skop artikel ini adalah Aljabar. Hasil pembahasan menunjukkan bahwa : 1. sebarang dua pasangan matriks baku dari suatu suku banyak matriks monik adalah serupa, dan sebarang pasangan matriks yang serupa dengan suatu pasangan matriks baku dari sukubanyak matriks monik P merupakan suatu pasangan matriks baku dari P; 2. sebarang dua tripel matriks baku dari suatu sukubanyak matriks monik adalah serupa, dan sebarang tripel matriks yang serupa dengan suatu tripel matriks baku dari sukubanyak matriks monik P merupakan suatu tripel matriks baku dari P; 3. suatu sukubanyak matriks monik P mempunyai representasi-representasi : i. bentuk kanonik kanan; ii. bentuk kanonik kiri; iii. bentuk resolvent; dan 4. suatu syarat cukup agar suatu tripel matriks (A,B,C) merupakan suatu tripel matriks baku dari sukubanyak matriks P adalah $[P(\lambda)]^{-1} = A(I\lambda - B)^{-1} C, \lambda \notin \sigma(B)$.

Kata kunci : Pasangan dan tripel matriks baku, sukubanyak matriks monik

Abstract

This article explains about monic matrix polynomials. The explanations involve the simple properties of standard pairs and triples of matrices, representations of a monic matrix polynomial, and sufficient condition in order a triple of matrices to be a standard triple of matrices of a monic matrix polynomial. The scope of this article is Algebra. The results of the explainations show that : 1. any two standard pairs of matrices of a monic matrix polynomial are similar, and any pair of matrices that similar with a standard pair of matrices of a monic matrix polynomial P is a standard pair of matrices of P; 2. any two standard triples of matrices of a monic matrix polynomial are similar, and any triple of matrices that similar with a standard triple of matrices of a monic matrix polynomial P is a standard triple of matrices of P; 3. a monic matrix polynomial P has representations : i. Right canonic form; ii. Left canonic form; iii. Resolvent form, and 4. a sufficient condition in order a triple of matrices (A,B,C) to be a standard triple of matrices of a monic matrix polynomial P is $[P(\lambda)]^{-1} = A(I\lambda - B)^{-1}C, \lambda \notin \sigma(B)$.

Key words : standard pair and triple of matrices, monic matrix polynomial.

PENDAHULUAN

Suatu sukubanyak matriks monik nxn berderajat l adalah suatu sukubanyak berderajat l dengan koefisien-koefisien matriks nxn dan koefisien pemimpin (*leading coefficient*) suatu matriks identitas. Suatu sukubanyak matriks monik nxn berderajat l dapat juga dipandang sebagai suatu matriks nxn. Untuk suatu sukubanyak matriks monik terdapat pasangan-pasangan dan tripel-tripel matriks terkait, antara lain pasangan-pasangan dan tripel-tripel matriks baku. Selain itu, suatu sukubanyak matriks monik juga mempunyai representasi-representasi tertentu.

Bagaimanakah sifat-sifat dari pasangan-pasangan dan tripel-tripel baku dari suatu sukubanyak matriks monik ? Juga, bagaimanakah representasi-representasi dari suatu sukubanyak matriks monik? Kemudian, apakah syarat cukup agar suatu tripel matriks merupakan suatu tripel baku dari suatu sukubanyak matriks monik ?

Tulisan ini akan menjawab pertanyaan-pertanyaan seputar sukubanyak matriks monik tersebut.

Hasil pembahasan dalam tulisan ini diharapkan dapat menambah wawasan tentang sukubanyak matriks. Pada khususnya, dapat diterapkan pada teori Sistim Linier.

PEMBAHASAN

Dalam seluruh pembahasan ini kita pandang sukubanyak matriks monik nxn P dengan $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{l-1} P_i\lambda^i + I\lambda^l$. Selain itu operasi-operasi matriks yang dilakukan dalam pembahasan sebagian besar merupakan operasi blok matriks, dengan memandang sebagian besar matriks terkait terdiri dari baris-baris atau kolom-kolom blok matriks.

Pasangan dan Tripel Matriks Baku

Suatu pasangan matriks (A,B) dengan A $\in C^{nxnl}$, B $\in C^{nlxnl}$ dan C adalah lapangan seluruh bilangan kompleks sehingga berlaku i) $\mathrm{col}(AB^i)_{i=0}^{l-1} = [A \;\; AB \;\; \ldots \;\; AB^{l-1}]^t$ non singular dan ii) $\sum_{i=0}^{l-1} P_iAB^i + AB^l = 0$, disebut suatu **pasangan matriks baku**, selanjutnya kita singkat pasangan baku, dari P. Pasangan matriks (L_1,K_1) dengan $L_1 = [\,I \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0]$ dan K_1 adalah matriks kompanion pertama dari P, yaitu

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & I & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & . & . & I \\ -P_0 & -P_1 & . & . & -P_{l-1} \end{pmatrix},$$

adalah suatu pasangan baku dari P, sebab $\mathrm{col}(L_1K_1^i)_{i=0}^{l-1} = I$ dan $\sum_{i=0}^{l-1} P_iL_1K_1^i + L_1K_1^l = 0$. Dua pasangan baku (A,B) dan (A_1,B_1) dari P dikatakan **serupa** jika terdapat suatu matriks non singular S sehingga $A_1 = AS$ dan $B_1 = S^{-1}BS$

Selanjutnya, misalkan (A,B) dan (A_1,B_1) keduanya adalah pasangan baku dari P. Pandang matriks nlxnl non singular

$$S = [\mathrm{col}(AB^i)_{i=0}^{l-1}]^{-1}\mathrm{col}(A_1B_1^i)_{i=0}^{l-1}. \qquad (1)$$

Juga perhatikan bahwa $K_1\,\mathrm{col}(AB^i)_{i=0}^{l-1} = \mathrm{col}(A_1B_1^i)_{i=0}^{l-1}B_1$. Akibatnya $B_1 = S^{-1}BS$ dan $A_1 = AS$. Ini berarti (A,B) dan (A_1,B_1) serupa. Kemudian, misalkan (A,B) adalah suatu pasangan baku dari P dan (A_1,B_1) adalah suatu pasangan matriks sehingga $A_1 = AS_1$ dan $B_1 = S_1^{-1}BS_1$ untuk matriks non singular S_1. Maka $\mathrm{col}(A_1B_1^i)_{i=0}^{l-1} = \mathrm{col}(AB^i)_{i=0}^{l-1}S_1$, sehingga non singular. Juga

$$\sum_{i=0}^{l-1} P_iA_1B_1^i + A_1B_1^l = (\sum_{i=0}^{l-1} P_iAB^i + AB^l)S_1 = 0.$$

Ini berarti (A_1,B_1) merupakan suatu pasangan baku dari P.

Selanjutnya, misalkan (A,B) adalah suatu pasangan baku P. Didefinisikan matriks nlxn C dengan $C = [\mathrm{col}(AB^i)_{i=0}^{l-1}]^{-1}[0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; I]^t$. Tripel matriks (A,B,C) dengan (A,B) suatu pasangan baku dari P dan C didefinisikan seperti itu disebut suatu **tripel matriks baku,** selanjutnya kita singkat tripel baku, dari P. Suatu contoh tripel baku dari P adalah tripel matriks (L_1,K_1,Y_1) dengan (L_1,K_1) adalah suatu pasangan baku dari P pada contoh terdahulu dan $Y_1 = [0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; I]^t$. Dua tripel baku (A,B,C) dan (A_1,B_1,C_1) dari P dikatakan **serupa** jika terdapat suatu matriks non singular S sehingga $A_1 = AS$, $B_1 = S^{-1}BS$, dan $C_1 = S^{-1}C$

Sekarang misalkan (A,B,C) dan (A_1,B_1,C_1) adalah sebarang dua tripel baku dari P. Maka kita punyai bahwa $A_1 = AS$, $B_1 = S^{-1}BS$, dan $C_1 = S^{-1}C$ dengan S adalah matriks non singular yang didefinisikan oleh (1). Dengan demikian (A,B,C) dan (A_1,B_1,C_1) serupa. Kemudian, misalkan (A,B,C) adalah suatu tripel baku dari P, dan (A_1,B_1,C_1) adalah sebarang tripel matriks yang serupa dengan (A,B,C). Maka (A_1,B_1) merupakan suatu pasangan baku dari P, karena serupa dengan (A,B). Juga $C_1 = S_2^{-1}C = [\mathrm{col}(A_1B_1^i)_{i=0}^{l-1}]^{-1}[0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; I]^t$ dengan S_2 didefinisikan seperti S oleh (1). Ini berarti (A_1,B_1,C_1) merupakan suatu tripel baku dari P.

Kemudian pandang K_2, matriks kompanion kedua dari P, yaitu

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 0 & -P_0 \\ I & 0 & .. & 0 & -P_1 \\ & I & & & \\ & & . & & \\ 0 & . & .. & I & -P_{l-1} \end{pmatrix}$$

Maka berlaku $K_2 = NK_1N^{-1}$, dengan

$$N = \begin{pmatrix} P_1 & . & . & P_{l-1} & I \\ P_2 & . & . & I & 0 \\ : & : & : & : & : \\ P_{l-1} & I & & & \\ I & 0 & . & . & 0 \end{pmatrix} \text{dan}$$

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & . & . & 0 & N_0 \\ 0 & . & . & N_0 & N_1 \\ : & : & : & : & : \\ 0 & N_0 & & & \\ N_0 & N_1 & . & . & N_{l-1} \end{pmatrix}$$

dimana $N_0 = I$ dan N_r, $r = 1, \ldots, l-1$ didefinisikan secara rekursif oleh $N_{r+1} = -(P_{l-1}N_r + P_{l-2}N_{r-1} + \ldots + P_{l-1-r}N_0)$ untuk $r = 0, 1, \ldots, l-2$. Sekarang perhatikan kembali tripel baku (A,B,C) dari P, dan kita definisikan matriks non singular $R = (NQ)^{-1}$ dengan $Q = \mathrm{col}(AB^i)_{i=0}^{l-1}$. Maka kita punyai $RNQ = I$, yang disebut **kondisi biorthogonalitas dari R dan Q**. Akibat selanjutnya, $K_2 = NQBQ^{-1}N^{-1} = R^{-1}BR$, atau $RK_2 = BR$.

Kita nyatakan $R = [R_1 \; R_2 \; \ldots \; R_l] = \mathrm{row}(R_i)_{i=1}^{l}$. Maka $R_1 = Q^{-1}N^{-1}[I \; 0 \; \ldots \; 0]^t = Q^{-1}[0 \; 0 \; \ldots \; 0 \; I]^t = C$, dan $[R_2 \; R_3 \ldots R_l \; (\sum_{i=0}^{l-1} -R_{i+1}P_i)] = \mathrm{row}(R_i)_{i=1}^{l} K_2 = \mathrm{row}(BR_i)_{i=1}^{l}$, sehingga $R_{i+1} = BR_i$, untuk $i = 1, 2, \ldots, l-1$ dan $\sum_{i=0}^{l-1} -R_{i+1}P_i = BR_l$. Akibatnya, $R_{i+1} = B^iC$, untuk $i = 0, 1, \ldots, l-1$, dan $\sum_{i=0}^{l-1} B^iCP_i + B^lC = 0$. Karena R non singular berarti $\mathrm{row}(B^iC)_{i=0}^{l-1}$ non singular.

Selain itu, $A = [I \; 0 \; \ldots \; 0]Q = [0 \; \ldots \; 0 \; I]NQ = [0 \; \ldots \; 0 \; I][\mathrm{row}(B^iC)_{i=0}^{l-1}]^{-1}$. Suatu pasangan matriks (B,C) dengan $B \in C^{nlxnl}$ dan $C \in C^{nlxn}$ yang memenuhi sifat $\mathrm{row}(B^iC)_{i=0}^{l-1}$ non singular dan $\sum_{i=0}^{l-1} B^iCP_i + B^lC = 0$ disebut suatu **pasangan matriks baku kiri** dari P. Suatu definisi yang ekuivalen adalah bahwa suatu pasangan matriks (B,C) disebut suatu pasangan baku kiri dari P jika tripel matriks (A,B,C) merupakan suatu tripel baku dari P dengan $A = [0 \; \ldots \; 0 \; I][\mathrm{row}(B^iC)_{i=0}^{l-1}]^{-1}$.

Misalkan (A,B,C) adalah suatu tripel matriks sehingga (B,C) merupakan suatu pasangan baku kiri dari P. Maka $\mathrm{col}(C^tB^{ti})_{i=0}^{l-1} = [\mathrm{row}(B^iC)_{i=0}^{l-1}]^t$ non singular. Selain itu, $\sum_{i=0}^{l-1} P_i^tC^tB^{ti} + C^tB^{tl} = \left(\sum_{i=0}^{l-1} B^iCP_i + B^lC\right)^t = 0$. Dengan demikian (C^t, B^t) merupakan suatu pasangan baku dari sukubanyak matriks monik P^t dengan $P^t(\lambda) = \sum_{i=0}^{l-1} P_i^t\lambda^i + I\lambda^l$.

Sementara, $A^t = \{[0 \; \ldots \; 0 \; I]\mathrm{row}(B^iC)_{i=0}^{l-1}]^{-1}\}^t = [\mathrm{col}(C^tB^{ti})_{i=0}^{l-1}]^{-1}[0 \; \ldots \; 0 \; I]^t$. Akibatnya, (C^t, B^t, A^t) merupakan suatu tripel baku dari P^t.

Dengan cara serupa dapat kita tunjukkan bahwa jika (A,B,C) adalah suatu tripel matriks sehingga (B,C) merupakan suatu pasangan baku kiri dari P, maka (C^*, B^*) merupakan suatu pasangan baku dari sukubanyak matriks monik P^* dengan $P^*(\lambda) = \sum_{i=0}^{l-1} P_i^*\lambda^i + I\lambda^l$ dan (C^*, B^*, A^*) merupakan suatu tripel baku dari P^*, dimana tanda * menyatakan konjugate transpose dari matriks terkait.

Representasi Suatu Sukubanyak Matriks Monik

Setelah mengetahui sifat-sifat sederhana dari pasangan-pasangan baku dan tripel-tripel baku dari suatu sukubanyak matriks monik P, pembahasan kita lanjutkan dengan menyelidiki bagaimanakah representasi-representasi dari suatu sukubanyak matriks monik.

Misalkan (A,B,C) adalah suatu tripel baku dari P. Misalkan pula $\mathrm{row}(V_i)_{i=1}^{l} = [\mathrm{col}(AB^i)_{i=0}^{l-1}]^{-1}$. Kemudian pandang kembali tripel baku (L_1,K_1,Y_1) dari P. Maka $A = L_1S_3$, $B = S_3^{-1}K_1S_3$, dan $C = S_3^{-1}Y_1$, dengan $S_3 = \mathrm{col}(AB^i)_{i=0}^{l-1}$. Akibatnya, $AB^l\ \mathrm{row}(V_i)_{i=1}^{l}\ \mathrm{col}(I\lambda^i)_{i=0}^{l-1} = L_1K_1^l\ \mathrm{col}(I\lambda^i)_{i=0}^{l-1} = \mathrm{row}(-P_i)_{i=0}^{l-1}\mathrm{col}(I\lambda^i)_{i=0}^{l-1} = -\sum_{i=0}^{l-1}P_i\lambda^i$. Dengan demikian, $P(\lambda) = I\lambda^l - AB^l\ \mathrm{row}(V_i)_{i=1}^{l}\ \mathrm{col}(I\lambda^i)_{i=0}^{l-1}$, suatu bentuk kanonik kanan dari P.

Selanjutnya, pandang tripel baku (L_2,K_2,Y_2) dari P dengan $L_2 = [0\ \dots\ 0\ I]$, K_2 matriks kompanion kedua dari P, dan $Y_2 = [I\ 0\ \dots\ 0]^t$. Maka $A = L_2S_4$, $B = S_4^{-1}K_2S_4$, dan $C = S_4^{-1}K_2$ dengan $S_4 = [\mathrm{col}(AB^i)_{i=0}^{l-1}]^{-1}\mathrm{col}(L_2K_2^i)_{i=0}^{l-1}$. Selain itu, (K_2,Y_2) adalah suatu pasangan baku kiri dari P dengan $\mathrm{row}(K_2^iY_2)_{i=0}^{l-1} = I$ dan $K_2^lY_2 = \mathrm{col}(-P_i)_{i=0}^{l-1}$. Misalkan pula, $\mathrm{col}(W_i)_{i=1}^{l} = [\mathrm{row}(B^iC)_{i=0}^{l-1}]^{-1}$. Maka $\mathrm{row}(I\lambda^i)_{i=0}^{l-1}\mathrm{col}(W_i)_{i=1}^{l}B^lC = \mathrm{row}(I\lambda^i)_{i=0}^{l-1}\ \mathrm{col}(-P_i)_{i=0}^{l-1} = -\sum_{i=0}^{l-1}P_i\lambda^i$. Dengan demikian, $P(\lambda) = I\lambda^l - \mathrm{row}(I\lambda^i)_{i=0}^{l-1}\mathrm{col}(W_i)_{i=1}^{l}B^lC$, suatu bentuk kanonik kiri dari P.

Kemudian, dengan mengingat bahwa $I\lambda - K_1$ adalah suatu linierisasi dari P (Gohberg et. al., 1982 : 12), misalkan $(P(\lambda)\oplus I) = E(\lambda)(I\lambda-K_1)[F(\lambda)]^{-1}$ dengan

$$E(\lambda) = \begin{pmatrix} E_{l-1}(\lambda) & E_{l-2}(\lambda) & .. & E_1(\lambda) & E_0(\lambda) \\ -I & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & -I & .. & 0 & 0 \\ : & : & .. & : & : \\ 0 & 0 & & -I & 0 \end{pmatrix},$$

dengan $E_0(\lambda) = I$, $E_{r+1}(\lambda) = \lambda E_r(\lambda) + P_{l-1-r}$ untuk $r = 0, 1, \dots, l-2$, dan

$$F(\lambda) = \begin{pmatrix} I & 0 & & . & 0 \\ -\lambda I & I & & . & 0 \\ : & : & .. & . & : \\ 0 & 0 & .. & I & 0 \\ 0 & 0 & .. & -\lambda I & I \end{pmatrix}$$

Maka untuk $\lambda\notin\sigma(P)$, $([P(\lambda)]^{-1}\oplus I) = F(\lambda)(I\lambda-K_1)^{-1}[E(\lambda)]^{-1}$. Oleh karena itu kita peroleh untuk $\lambda\notin\sigma(P)$, $[P(\lambda)]^{-1} = [I\ \ 0\ \dots\ 0]F(\lambda)(I\lambda-K_1)^{-1}[E(\lambda)]^{-1}[I\ \ 0\ \dots\ 0]^t = [I\ \ 0\ \dots\ 0](I\lambda-K_1)^{-1}[0\ \dots\ 0\ \ I]^t = L_1(I\lambda-K_1)^{-1}Y_1 = A(I\lambda-B)^{-1}C$, suatu bentuk resolvent dari P.

Dengan demikian kita punyai hasil berikut.

Teorema 1 : Misalkan P dengan $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{l-1}P_i\lambda^i + I\lambda^l$ adalah suatu sukubanyak matriks monik nxn dan (A,B,C) adalah suatu tripel baku dari P. Maka P mempunyai representasi-representasi berikut.

i. Bentuk kanonik kanan : $P(\lambda) = I\lambda^l - AB^l\ \mathrm{row}(V_i)_{i=1}^{l}\mathrm{col}(I\lambda^i)_{i=0}^{l-1}$, dengan $\mathrm{row}(V_i)_{i=1}^{l} = [\mathrm{col}(AB^i)_{i=0}^{l-1}]^{-1}$.
ii. Bentuk kanonik kiri : $P(\lambda) = I\lambda^l - \mathrm{row}(I\lambda^i)_{i=0}^{l-1}\ \mathrm{col}(W_i)_{i=1}^{l}B^lC$, dengan $\mathrm{col}(W_i)_{i=1}^{l} = [\mathrm{row}(B^iC)_{i=0}^{l-1}]^{-1}$.
iii. Bentuk resolvent : $[P(\lambda)]^{-1} = A(I\lambda-B)^{-1}C$, $\lambda\notin\sigma(P)$.

Syarat Cukup Suatu Tripel Baku

Hal terakhir yang akan kita lihat tentang sukubanyak matriks monik P adalah syarat cukup agar suatu tripel matriks merupakan suatu tripel baku dari P.

Misalkan J adalah suatu blok Jordan nxn dengan nilai karakteristik 0, yaitu

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .. & 0 \\ : & : & : & .. & : \\ 0 & 0 & 0 & .. & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix},$$

suatu matriks super diagonal kedua. Maka resolvent dari J, yaitu

$$(I\lambda-J)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & \lambda^{-2} & \lambda^{-3} & .. & \lambda^{-n} \\ 0 & \lambda^{-1} & \lambda^{-2} & .. & \lambda^{-(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & .. & \lambda^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & .. & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

Akibatnya, jika Γ adalah suatu lingkaran dengan 0 berada di dalam interiornya, dan dengan Integral Kontur (Saff & Snider, 1976 : 105-106) kita punyai $\oint_\Gamma \lambda^j \, d\lambda = 0$ untuk j ≠ -1 dan = 2πi untuk j = -1, maka untuk j = 0, 1, … berlaku :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \lambda^j (I\lambda - J)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \begin{pmatrix} \lambda^{j-1} & \lambda^{j-2} & \lambda^{j-3} & .. & \lambda^{j-n} \\ 0 & \lambda^{j-1} & \lambda^{j-2} & .. & \lambda^{j-n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & .. & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda^{j-2} \\ 0 & 0 & 0 & .. & \lambda^{j-1} \end{pmatrix} d\lambda = \begin{pmatrix} 0 & .. & 1 & .. & 0 \\ . & .. & . & .. & . \\ . & .. & . & .. & 1 \\ . & .. & . & .. & . \\ 0 & .. & 0 & .. & 0 \end{pmatrix},$$

suatu matriks super diagonal ke j+1. Dengan demikian untuk j = 0, 1, …, $\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \lambda^j (I\lambda - J)^{-1} d\lambda = J^j$.

Selanjutnya, misalkan J'adalah suatu blok Jordan nxn dengan nilai karakteristik λ_0 yang tidak perlu sama dengan 0, yaitu

$$J' = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & .. & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & .. & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & .. & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .. & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Maka J'-λI adalah suatu matriks super diagonal kedua, sehingga :

$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \lambda^j [\lambda I - (J' - \lambda_0 I)]^{-1} d\lambda = (J' - \lambda_0 I)^j$, untuk j = 0, 1, …. Di lain pihak, misalkan β = $\lambda+\lambda_0$ maka $\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \lambda^j [\lambda I - (J' - \lambda_0 I)]^{-1} d\lambda =$ $\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \lambda^j (\beta I - J')^{-1} d\beta$ untuk j = 0, 1, ….

Akibatnya kita punyai untuk j = 0, 1, …, $\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \beta^j (\beta I - J')^{-1} d\beta = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (\lambda_0 + \lambda)^j (\beta I - J')^{-1} d\beta$

$= \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \{\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \lambda_0^{\,j-k} \lambda^j \}(\beta I - J')^{-1} d\beta = J'^j$.

Sekarang misalkan B' adalah sebarang matriks persegi. Misalkan pula T adalah suatu matriks non singular dan $\mathrm{diag}[J_k]_{k=1}^{m}$ dengan m suatu bilangan asli adalah suatu matriks Jordan sehingga $B' = T^{-1}\mathrm{diag}[J_k]_{k=1}^{m} T$. Maka untuk j = 0, 1,

$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \lambda^j (\lambda I - B')^{-1} d\lambda =$

$T^{-1}\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \lambda^j (\lambda I - diag[J_k]_{k=1}^{m})^{-1} d\lambda T =$

$T^{-1}\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \lambda^j diag[(\lambda I - J_k)^{-1}]_{k=1}^{m} d\lambda T =$

$T^{-1} diag[J_k{}^j]_{k=1}^{m} T = T^{-1}(\mathrm{diag}[J_k]_{k=1}^{m})^j T = B'^j$.

Selanjutnya, misalkan (A,B,C) adalah suatu tripel matriks dengan $A \in \mathbf{C}^{nxnl}$, $B \in \mathbf{C}^{nlxnl}$, $C \in \mathbf{C}^{nlxn}$ sehingga $[P(\lambda)]^{-1} = A(\lambda I-B)^{-1}C$, untuk $\lambda \notin \sigma(B)$. Untuk |λ| cukup besar , yaitu lebih besar daripada $|\lambda'|, \forall \lambda' \in \sigma(P)$, $[P(\lambda)]^{-1} = \lambda^{-l}I + \lambda^{-(l+1)}K_1 + \lambda^{-(l+2)}K_2 + \ldots$, dengan K_i, i = 1, 2, … adalah matriks-matriks nxn. Misalkan $[P(\lambda)]^{-1} = \sum_{i=-\sim}^{\sim} a_i\lambda^i$. Maka :

$a_i = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \lambda^{-(i+1)} [P(\lambda)]^{-1} d\lambda$ untuk i = …, -1, 0, 1, …, dengan Γ adalah suatu lingkaran dalam bidang kompleks dengan σ(B) berada dalam interiornya. Oleh karena itu kita peroleh

$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \lambda^j [P(\lambda)]^{-1} d\lambda = 0$, untuk j = 0, 1, .. , l-2, = I untuk j = l-1, dan = K_{j-l+1} untuk j = l, l+1, ….

Selain itu dapat kita pilih Γ cukup besar sehingga untuk j = 0, 1, …, $\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \lambda^j (I\lambda - B)^{-1} d\lambda = B^j$. Akibatnya,

$$\mathrm{col}(AB^j)_{j=0}^{l-1}\,\mathrm{row}(B^jC)_{j=0}^{l-1} = \begin{pmatrix} AC & ABC & .. & .. & AB^{l-1}C \\ ABC & AB^2C & .. & .. & AB^lC \\ : & : & .. & .. & : \\ : & : & .. & .. & : \\ AB^{l-1}C & AB^lC & .. & .. & AB^{2l-2}C \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & .. & \lambda^{l-1} \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & .. & \lambda^l \\ : & : & : & .. & : \\ : & : & : & .. & : \\ \lambda^{l-1} & \lambda^l & \lambda^{l+1} & .. & \lambda^{2l-2} \end{pmatrix} A(I\lambda - B)^{-1}Cd\lambda =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & .. & \lambda^{l-1} \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & .. & \lambda^l \\ : & : & : & .. & : \\ : & : & : & .. & : \\ \lambda^{l-1} & \lambda^l & \lambda^{l+1} & .. & \lambda^{2l-2} \end{pmatrix} [P(\lambda)]^{-1} d\lambda =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & .. & I \\ 0 & 0 & 0 & .. & K_1 \\ : & : & : & .. & : \\ 0 & I & K_1 & .. & K_{l-2} \\ I & K_1 & K_2 & .. & K_{l-1} \end{pmatrix},$$ sehingga non singular.

Akibatnya $\mathrm{col}(AB^j)_{j=0}^{l-1}$ maupun $\mathrm{row}(B^jC)_{j=0}^{l-1}$ keduanya non singular. Kemudian, menurut Teorema Integral Cauchy (Saff & Snider, 1976 : 138) kita punyai untuk j = 0,1,…,

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \begin{pmatrix} \lambda^j & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda^j & 0 & .. & 0 \\ : & : & : & .. & : \\ : & : & : & .. & : \\ 0 & 0 & 0 & .. & \lambda^j \end{pmatrix} d\lambda =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \lambda^j I d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \lambda^j P(\lambda)[P(\lambda)]^{-1} d\lambda =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \lambda^j \left(\sum_{k=0}^{l-1} P_k\lambda^k + I\lambda^l\right) A(I\lambda - B)^{-1}Cd\lambda =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \left(\sum_{k=0}^{l-1} P_k A\lambda^{j+k} + A\lambda^{j+l}\right)(I\lambda - B)^{-1}Cd\lambda =$$

$$\left(\sum_{k=0}^{l-1} P_k AB^k + AB^l\right)B^jC.$$

Oleh karena itu :

$$\left(\sum_{k=0}^{l-1} P_k AB^k + AB^l\right)\mathrm{row}(B^jC)_{j=0}^{l-1} = 0.$$

Dengan demikian $\sum_{k=0}^{l-1} P_k AB^k + AB^l = 0$.

Sampai disini kita simpulkan (A,B) adalah suatu pasangan baku dari P. Selain itu kita punyai $\mathrm{col}(AB^j)_{j=0}^{l-1} C = [0 \;\ldots\; 0 \;\; I]^t$, sehingga

$C = [\mathrm{col}(AB^j)_{j=0}^{l-1}]^{-1}[0 \;\ldots\; 0 \;\; I]^t$. Akibatnya (A,B,C) merupakan suatu tripel baku dari P.

Dengan demikian kita punyai hasil berikut.

Proposisi 2 : Jika P adalah suatu sukubanyak matriks monik nxn berderajat l dan (A,B,C) dengan $A \in \mathbf{C}^{nxnl}$, $B \in \mathbf{C}^{nlxnl}$, $C \in \mathbf{C}^{nlxn}$ adalah suatu tripel matriks yang memenuhi $[P(\lambda)]^{-1} = A(I\lambda\text{-}B)^{-1}C$ untuk $\lambda \notin \sigma(B)$, maka (A,B,C) merupakan suatu tripel baku dari P.

Dari semua uraian di atas dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Sebarang dua pasangan baku dari suatu sukubanyak matriks monik adalah serupa, dan sebarang pasangan matriks yang serupa dengan suatu pasangan baku dari suatu sukubanyak matriks monik P merupakan suatu pasangan baku dari P.
2. Sebarang dua tripel baku dari suatu sukubanyak matriks monik adalah serupa, dan sebarang tripel matriks yang serupa dengan suatu tripel baku dari suatu sukubanyak matriks monik P merupakan suatu tripel baku dari P.
3. Jika (A,B,C) adalah suatu tripel baku dari suatu sukubanyak matriks monik P maka (C^t,B^t,A^t) adalah suatu tripel baku dari P^t dan (C^*,B^*,A^*) adalah suatu tripel baku dari P^*.
4. Suatu sukubanyak matriks monik mempunyai representasi-representasi : i. bentuk kanonik kanan; ii. Bentuk kanonik kiri; iii. Bentuk resolvent.
5. Suatu syarat cukup agar suatu tripel matriks (A,B,C) merupakan suatu tripel baku dari suatu sukubanyak matriks monik P adalah $[P(\lambda)]^{-1} = A(I\lambda\text{-}B)^{-1}C$, $\lambda \notin \sigma(B)$.

Itulah sekilas tentang sukubanyak matriks monik, yang dapat mendasari pengetahuan kita tentang sukubanyak matriks monik pada khususnya, dan sukubanyak matriks pada umumnya.

DAFTAR PUSTAKA

Ferrar, W.L., (....). *Finite Matrices*. Oxford : At The Clarendon Press.

Gohberg, I., Lancaster, P., & Rodman, L. (1982). *Matrix Polynomials*. New York: Academic Press, Inc.

Lancaster, P. & Tismenetsky, M. (1985). *The Theory of Matrices with Applications*. Orlando : Academic Press.

Saff, E.B. & Snider, A.D. (1976). Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics, Science and Engineering . New Jersey: Prentice-Hall, Inc.