

BAB II

KAJIAN TEORI

Pada bab ini akan dijabarkan tentang dasar-dasar yang digunakan dalam pembahasan model antrean dengan disiplin pelayanan *Preemptive*, mencakup tentang teori antrean, pola kedatangan model antrean satu server dengan disiplin pelayanan *Preemptive* yang berdistribusi Poisson, waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial, dan *Probability Generating Function (PGF)*

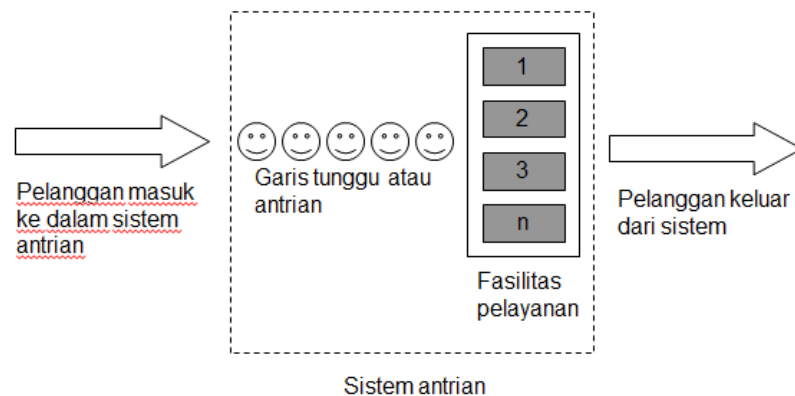
A. Sistem Antrean

Prinsip utama pada situasi mengantri adalah pelanggan dan server. Kedatangan pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan dari suatu sumber populasi, dapat terjadi dua kemungkinan yaitu pelanggan langsung mendapatkan pelayanan dari fasilitas atau harus mengantri diantrean jika fasilitas sibuk. Berdasarkan titik pokok dari analisis antrean, kedatangan dari pelanggan diwakili dengan waktu antar kedatangan antara pelanggan yang datang berturut-turut dan pelayanan diwakili dengan waktu pelayanan tiap pelanggan. Secara umum, waktu antar kedatangan dan pelayanan dapat bersifat suatu kemungkinan atau tidak pasti, sebagaimana pelanggan datang pada suatu restoran, atau bersifat telah ditentukan atau dijadwalkan seperti kedatangan pelamar pekerjaan pada suatu wawancara (Taha, 2007:551).

Menurut Bronson (1996:310), proses antrean merupakan proses yang berhubungan dengan kedatangan pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan, menunggu panggilan dalam baris antrean jika belum mendapat pelayanan

dan akhirnya meninggalkan fasilitas pelayanan setelah mendapat pelayanan. Proses ini dimulai saat pelanggan-pelanggan yang memerlukan pelayanan mulai datang. Mereka berasal dari suatu populasi yang disebut sebagai sumber input.

Sistem antrean adalah himpunan pelanggan, pelayan, dan suatu aturan yang mengatur kedatangan para pelanggan dan pelayannya. Sistem antrean merupakan proses kelahiran dan kematian dengan suatu populasi yang terdiri atas para pelanggan yang sedang menunggu pelayanan atau yang sedang dilayani. Kelahiran terjadi jika seorang pelanggan memasuki fasilitas pelayanan, sedangkan kematian terjadi jika pelanggan meninggalkan fasilitas pelayanan. Keadaan sistem adalah jumlah pelanggan dalam suatu fasilitas pelayanan (Wospakrik, 1996: 302).



Gambar 2.1 Sistem Antrean

B. Faktor Sistem Antrean

Terdapat beberapa faktor penting yang berpengaruh terhadap sistem antrean dan pelayanannya, antara lain:

1. Distribusi Kedatangan

Pada sistem antrean, distribusi kedatangan merupakan faktor penting yang berpengaruh besar terhadap kelancaran pelayanan.

Distribusi kedatangan terbagi menjadi dua, diantaranya:

- a. Kedatangan secara individu (*single arrivals*)
- b. Kedatangan secara kelompok (*bulk arrivals*)

Distribusi kedatangan diasumsikan bahwa kedatangan customer mengikuti suatu proses dengan distribusi probabilitas tertentu. Distribusi probabilitas yang sering digunakan ialah distribusi Poisson, dimana kedatangan bersifat bebas, tidak terpengaruh oleh kedatangan sebelum ataupun sesudahnya. Asumsi distribusi Poisson menunjukkan bahwa kedatangan customer sifatnya acak dan mempunyai nilai rata-rata kedatangan sebesar λ (λ) (Kakiay, 2004: 11).

2. Distribusi Pelayanan

Distribusi pelayanan berkaitan dengan banyaknya fasilitas pelayanan yang dapat disediakan. Distribusi pelayanan terbagi menjadi dua komponen penting, yaitu:

- a. Pelayanan secara individual (*single service*)
- b. Pelayanan secara kelompok (*bulk service*)

Distribusi probabilitas yang biasa digunakan pada distribusi waktu pelayanan yaitu distribusi Poisson. Lain halnya dengan waktu antar pelayanan yang diasumsikan berdistribusi Eksponensial. Distribusi Eksponensial merupakan distribusi acak yang variabelnya berdiri sendiri tanpa memori masa lalu. Artinya, waktu antar pelayanan tidak bergantung dengan pelayanan sebelumnya. Rata-rata laju pelayanan dengan simbol μ (*mu*) merupakan banyaknya customer yang dapat dilayani dalam satuan waktu.

3. Kapasitas Sistem

Menurut Bronson (1996:310), kapasitas sistem adalah banyak maksimum pelanggan, baik pelanggan yang sedang berada dalam pelayanan maupun dalam antrean, yang ditampung oleh fasilitas pelayanan pada waktu yang sama. Suatu sistem yang tidak membatasi jumlah pelanggan di dalam fasilitas pelayanannya dikatakan memiliki kapasitas tak terbatas (*infinite*), sedangkan suatu sistem yang membatasi jumlah pelanggan di dalam fasilitas pelayanannya dikatakan memiliki kapasitas yang terbatas (*finite*), jika pelanggan memasuki sistem pada saat fasilitas pelayanan penuh maka pelanggan akan ditolak dan meninggalkan sistem tanpa memperoleh pelayanan.

4. Disiplin Antrean

Menurut Kakiay (2004:12), disiplin antrean merupakan aturan dimana para pelanggan dilayani, atau disiplin pelayanan (*service discipline*) yang memuat urutan (*order*) para pelanggan menerima

layanan. Aturan pelayanan menurut kedatangan ini dapat didasarkan pada:

a. *First Come First Served (FCFS)*

FCFS merupakan suatu aturan dimana pelanggan yang datang lebih awal yang akan dilayani terlebih dahulu. Contohnya antrean di suatu kasir penjualan tiket menonton di bioskop, pelanggan yang datang paling awal akan mendapatkan tiket terlebih dahulu.

b. *Last Come First Served (LCFS)*

LCFS merupakan suatu aturan dimana pelanggan yang datang paling akhir yang akan dilayani terlebih dahulu. Contohnya antrean pada sistem bongkar muat barang di dalam truk, dimana barang yang terakhir masuk berada di tumpukan paling atas sehingga harus keluar terlebih dahulu.

c. *Service In Random Order (SIRO)*

SIRO atau pelayanan dalam urutan acak yang sering dikenal juga *Random Selection For Service (RSS)*, merupakan suatu aturan pelayanan yang dilakukan secara acak, tidak mempermasalahkan siapa yang lebih dahulu datang. Contohnya pada saat arisan, dimana pelayanan dilakukan berdasarkan undian (*Random*) untuk ditentukan pemenangnya.

d. *Priority Service (PS)*

PS merupakan suatu aturan dimana pelanggan yang memiliki prioritas paling tinggi akan dilayani terlebih dahulu dari pada

pelanggan yang memiliki prioritas paling rendah. Contohnya dalam suatu pesta, dimana tamu-tamu yang dikategorikan VIP akan mendapat pelayanan terlebih dahulu dibandingkan tamu dengan kategori biasa. Dalam prioritas pelayanan terdapat dua aturan yang dapat diikuti, yaitu:

i. Aturan *Preemptive (PRD)*

Disiplin pelayanan *Preemptive* menggambarkan situasi dimana pelayan sedang melayani seseorang, kemudian beralih melayani orang yang diprioritaskan meskipun belum selesai melayani orang sebelumnya.

ii. Aturan *Non-Preemptive (NPD)*

Disiplin pelayanan *Non-Preemptive* menggambarkan situasi dimana pelayan akan menyelesaikan pelayanannya baru kemudian beralih melayani orang yang diprioritaskan.

5. Perilaku Customer

Perilaku manusia merupakan perilaku – perilaku yang mempengaruhi suatu sistem antrian ketika manusia mempunyai peran dalam sistem baik sebagai pelanggan maupun pelayan. Jika manusia berperan sebagai pelayan, dapat melayani pelanggan dengan cepat atau lambat sesuai kemampuannya sehingga mempengaruhi lamanya waktu tunggu (Taha, 1997:178).

Menurut Gross dan Harris (1998:3), perilaku manusia dalam sistem antrian jika berperan sebagai pelanggan sebagai berikut:

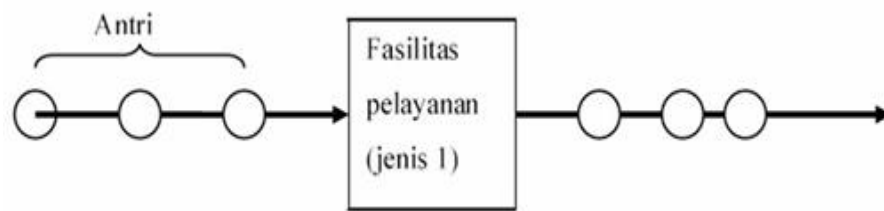
- a. *Jockeying* adalah suatu perilaku manusia untuk mengurangi waktu tunggu dengan berpindah dari antrean satu ke yang lainnya.
- b. *Balking* adalah suatu perilaku dimana seseorang tidak masuk dalam antrean dan langsung meninggalkan tempat antrean.
- c. *Reneging* adalah suatu perilaku dimana seseorang masuk dalam antrean, namun belum memperoleh pelayanan, kemudian meninggalkan antrean tersebut.

6. Desain Pelayanan

Desain sarana pelayanan dapat diklasifikasikan dalam *channel* dan *phase* yang akan membentuk struktur antrean yang berbeda-beda (Sinalungga, 2008:249). Istilah *channel* menunjukkan jumlah jalur untuk memasuki sistem pelayanan atau jumlah fasilitas pelayanan. Istilah *phase* berarti banyaknya stasiun-stasiun pelayanan, dimana pelanggan harus melaluinya sebelum pelayanan dinyatakan lengkap. Ada beberapa struktur model antrean yang biasa digunakan dalam sistem antrean, diantaranya yaitu:

a. *Single Channel Single Phase*

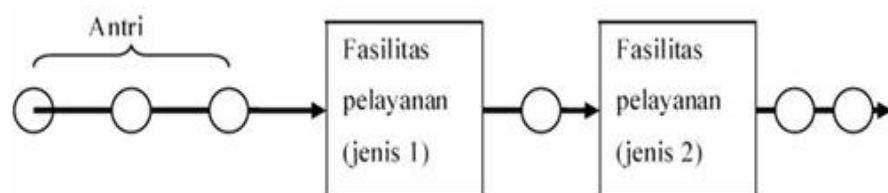
Single Channel Single Phase adalah suatu sistem antrean dimana pelanggan hanya dilayani oleh satu penyedia layanan (*server*) dan melalui satu *phase* pelayanan. Desain dari sistem antrean ini merupakan desain yang paling sederhana. Contohnya pada penjualan karcis masuk obyek wisata yang hanya memiliki satu loket saja.



Gambar 2.2 Sistem Antrean Single Channel Single Phase

b. *Single Channel Multiple Phase*

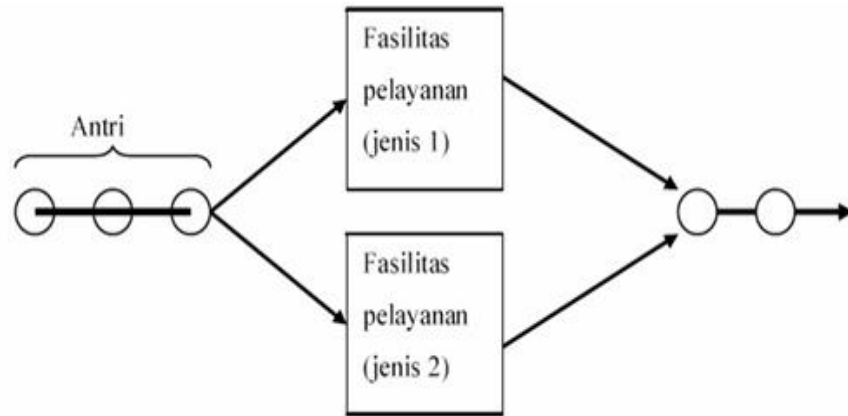
Single Channel Multiple Phase adalah suatu sistem antrean yang memiliki dua atau lebih pelayanan yang dilaksanakan secara berurutan atau seri atau bisa disebut juga disusun menjadi beberapa *phase*. Desain pelayanan seperti ini biasa diterapkan pada saat memperpanjang surat ijin mengemudi (SIM). Untuk memperpanjang SIM tersebut, seseorang diharuskan untuk menyelesaikan proses melalui loket – loket yang tersusun secara berurutan.



Gambar 2.3 Sistem Antria Single Channel Multiple Phase

c. *Multiple Channel Single Phase*

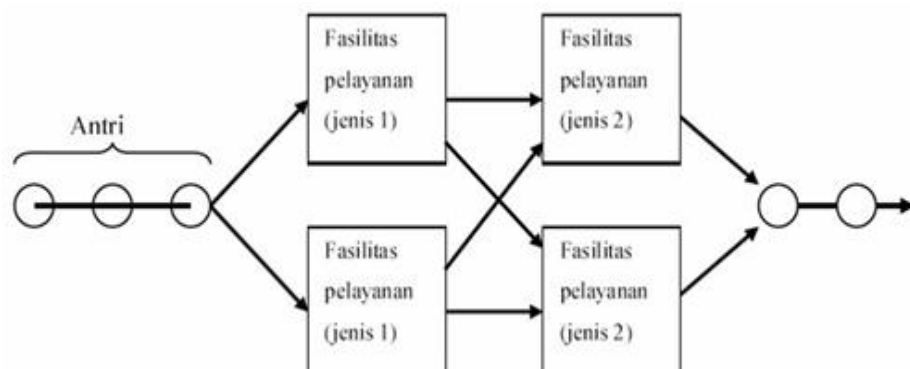
Multiple Channel Single Phase adalah suatu sistem antrean yang memiliki dua atau lebih fasilitas pelayanan (*server*) yang terdiri dari antrean tunggal. Contohnya seperti saat nasabah mengantri di bank dengan beberapa loket *teller*.



Gambar 2.4 Sistem Antrean Multiple Channel Single Phase

d. *Multiple Channel Multiple Phase*

Multiple Channel Multiple Phase adalah suatu sistem antrean yang memiliki beberapa *phase*, dimana setiap *phase* dilayani beberapa *server*. Hal ini berarti ada lebih dari satu pelanggan yang dilayani pada waktu yang bersamaan di setiap *phase*. Contohnya seperti pendaftaran pasien di rumah sakit. Pasien mendaftar di rumah sakit menuju loket pendaftaran yang terdiri dari beberapa loket. Kemudian, pasien melanjutkannya dengan menuju klinik yang diinginkan.



Gambar 2.5 Sistem Antrean Multiple Channel Multiple Phase

7. Sumber Pemanggilan

Sumber pemanggilan pada fasilitas pelayanan dapat berupa mesin maupun manusia. Bila ada sejumlah mesin yang rusak maka sumber pemanggilan akan berkurang dan tidak dapat melayani pelanggan. Sumber pemanggilan pelanggan bisa bersifat terbatas atau tak terbatas. Sumber pemanggilan yang terbatas (*finite calling source*) berarti bahwa pelanggan yang datang untuk mendapatkan pelayanan terbatas, seperti pada kerusakan mesin-mesin yang menunggu servis dari montir mesin tersebut. Sumber yang tak terbatas (*infinite calling source*) adalah pelanggan yang terus datang tanpa henti, seperti panggilan pada sentral telepon (Taha, 2007:552).

8. Fasilitas Pelayanan

Fasilitas pelayanan berkaitan erat dengan baris antrean yang akan dibentuk. Desain fasilitas pelayanan ini dapat dibagi dalam tiga bentuk, yaitu:

a. Bentuk series

Fasilitas pelayanan dengan bentuk series merupakan fasilitas pelayanan yang berurutan dalam satu garis lurus.

b. Bentuk paralel atau sejajar

Fasilitas pelayanan dengan bentuk paralel merupakan fasilitas pelayanan yang dilakukan secara bercabang dengan fungsi yang sama.

c. Bentuk *network station* atau antrean jaringan

Fasilitas pelayanan dengan bentuk *network station* merupakan fasilitas pelayanan series dan paralel yang terjadi secara bersama sama.

C. Notasi Kendall

Karakteristik dan asumsi dari model antrean dirangkum dalam bentuk notasi. Menurut Kakiay (2004:17-18), bentuk kombinasi proses kedatangan dengan pelayanan pada umumnya dikenal sebagai standar universal. Standar universal disebut notasi Kendall yaitu:

$$(a/b/c) : (d/e/f)$$

dimana simbol $a, b, c, d, e, \text{ dan } f$ merupakan unsur-unsur dasar dari model baris antrean. Penjelasan simbol-simbol yang dimaksud adalah sebagai berikut:

a = Distribusi kedatangan (*Arrival Distribution*)

b = Distribusi waktu pelayanan atau keberangkatan

c = Banyaknya pelayan dalam paralel (dimana $c = 1, 2, 3, \dots, \infty$)

d = Disiplin antrean, seperti *FCFS*, *LCFS*, *SIRO*, atau *PR*.

e = Jumlah maksimum yang diizinkan dalam sistem (*Queue* dan *System*)

f = Banyaknya pelanggan yang ingin memasuki sistem sebagai sumber.

Notasi standar ini dapat diganti dengan kode-kode yang sebenarnya dari distribusi-distribusi yang terjadi dan bentuk lainnya, seperti:

M = Distribusi Markovian (Poisson) pada kedatangan atau keberangkatan
(setara dengan distribusi antar kedatangan atau waktu pelayanan yang eksponensial)

D = *Deterministic* menyatakan waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan konstan.

k = Banyaknya *server* dalam bentuk paralel atau seri

N = Jumlah maksimum pelanggan dalam sistem

E_d = *Erlang Distribution* menyatakan waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan berdistribusi Erlang

G = *General Distribution* menyatakan distribusi umum dari keberangkatan atau waktu pelayanan

GI = *General Independent Distribution* menyatakan distribusi independen umum dari kedatangan atau waktu antar kedatangan

GD = *General Discipline* (disiplin umum) dalam antrean (*FCFS*, *LCFS*, *dll*)

NPD = *Non-Preemptive Discipline*

PRD = *Preemptive Discipline*

Berikut ini adalah contoh notasi Kendall yang digunakan untuk menentukan model antrean:

$$(M/M/k): (GD/\infty/\infty)$$

Hal ini berarti: M = *Distribution of Poisson Arrival* atau kedatangan yang berdistribusi Poisson

M = Waktu pelayanan yang berdistribusi Eksponensial

k = Banyaknya server k

GD = General Discipline (FCFS)

∞ = Kapasitas *pelanggan* dan sumber pemanggilan tidak terbatas

D. Distribusi Eksponensial dan Distribusi Poisson

1. Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial digunakan untuk menggambarkan distribusi waktu. Misalnya pada fasilitas jasa, dengan asumsi bahwa waktu pelayanan bersifat acak. Artinya waktu untuk melayani customer tidak tergantung pada lama waktu yang telah dihabiskan untuk melayani customer sebelumnya dan tidak bergantung pada jumlah customer yang menunggu untuk dilayani. Berikut ini merupakan definisi yang menjelaskan tentang distribusi Eksponensial:

Definisi 2.1 (Djauhari, 1990: 175-176)

Variabel acak X dikatakan berdistribusi Eksponensial dengan parameter λ jika memiliki fungsi kepadatan probabilitas sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{untuk } x \geq 0 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases} \quad (2.1)$$

dimana x menyatakan waktu yang dibutuhkan sampai terjadi satu kali sukses dengan λ adalah rata-rata banyaknya sukses dalam selang waktu satuan.

Fungsi distribusi kumulatif Eksponensial merupakan integral dari persamaan (2.1), sehingga diperoleh

$$F(x; \lambda) = \begin{cases} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, & \text{untuk } x \geq 0 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases} \quad (2.2)$$

2. Distribusi Poisson

Suatu eksperimen yang menghasilkan jumlah sukses yang terjadi pada interval waktu ataupun pada daerah yang spesifik dikenal sebagai eksperimen Poisson. Interval waktu tersebut dapat berupa menit, hari, minggu, bulan, maupun tahun, sedangkan daerah yang spesifik dapat berarti garis, luas, sisi, maupun material. Distribusi Poisson adalah distribusi kemungkinan dari variabel random Poisson x , yang mempresentasikan jumlah sukses yang terjadi pada interval waktu tertentu ataupun daerah yang spesifik (Dimiyati, 1999:309).

Menurut Dimiyati (1999:309), ciri-ciri eksperimen Poisson adalah:

- a. Banyaknya hasil percobaan yang terjadi dalam suatu selang waktu atau suatu daerah tertentu bersifat independen terhadap banyaknya hasil percobaan yang terjadi pada selang waktu atau daerah lain yang terpisah.

- b. Peluang terjadinya suatu hasil percobaan selama suatu waktu yang singkat sekali atau dalam suatu daerah yang kecil, sebanding dengan panjang selang waktu tersebut atau besarnya daerah tersebut.
- c. Peluang bahwa lebih dari satu hasil percobaan akan terjadi dalam selang waktu yang singkat tersebut atau dalam daerah yang kecil tersebut dapat diabaikan.

Definisi 2.2 (Dimiyati, 1999:309) Variabel acak diskrit X dikatakan terdistribusi Poisson dengan parameter $\mu > 0$ jika memiliki fungsi densitas peluang yang berbentuk:

$$f(x; \mu) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (2.3)$$

Dimana : x = hasil yang mungkin dari variabel acak diskrit X

e = konstanta dasar (basis) logaritma natural = 2,71828 ...

μ = nilai harapan dari X , dimana X adalah variabel acak diskrit

E. Probability Generating Function (PGF)

Probabilitas menghasilkan fungsi yang banyak digunakan dalam studi, proses stokastik dan sistem antrean adalah contoh khusus dari proses tersebut.

Definisi 2.3 (Bain & Engelhardt, 1992:61) Jika X adalah suatu variabel acak diskrit dengan fungsi peluang $f(x)$ maka nilai harapan dari X didefinisikan sebagai

$$E(X) = \sum_x x f(x) \quad (2.4)$$

Definisi 2.4 (Purcell & Varberg, 2001:49) Andaikan $S(x)$ adalah jumlah sebuah deret pangkat pada sebuah selang $I = \{x \mid -1 < x < 1\}$ sehingga

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots \quad (2.5)$$

maka turunan pertama dari $S(x)$ adalah

$$\frac{dS(x)}{dx} = \frac{d \sum_{n=0}^{\infty} x^n}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} \quad (2.6)$$

Definisi 2.5 (Purcell & Varberg, 2001 : 12) Deret geometri berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n, \quad \text{dengan } a \neq 0$$

akan konvergen dan mempunyai jumlah

$$S = \frac{a}{a-x}, \quad \text{apabila } |x| < 1$$

Definisi 2.6 (Bunday, 1996:10) Jika X adalah suatu variabel acak diskrit dengan fungsi probabilitas $p_n = P(X = n)$ untuk $n = 0, 1, 2, \dots$ dengan probabilitas p_n maka *probability generating function* (PGF) dari X didefinisikan sebagai

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \quad \text{dengan } |z| \leq 1 \quad (2.7)$$

probabilitas p_n dapat dihitung dengan

$$p_0 = P(0),$$

$$p_n = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^n P(z)}{dz^n} \Big|_{z=0}, \quad z = 1, 2, 3, \dots$$

Untuk $z = 1$, diperoleh

$$P(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n 1^n$$

$$P(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \quad (2.8)$$

turunan pertama dari $P(z)$ adalah

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$$

$$P'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n z^{n-1} \quad (2.9)$$

sehingga untuk $z = 1$, diperoleh

$$P'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n 1^{n-1}$$

$$P'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n$$

berdasarkan Definisi (2.3) maka diperoleh

$$P'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = E(N) \quad (2.10)$$

Demikian pula untuk turunan kedua dari $P(z)$ adalah

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$$

$$P'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n z^{n-1}$$

$$P''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) p_n z^{n-2}$$

sehingga untuk $z = 1$, diperoleh

$$P''(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) p_n$$

berdasarkan Definisi (2.3) maka diperoleh

$$P''(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) p_n = E(N(N-1))$$

Dari turunan pertama $P(z)$ diperoleh nilai harapan $E(X)$ dan dari turunan kedua $P(z)$ diperoleh $E(X(X-1))$. Kedua hasil tersebut mengarah pada variansi dari $V(X)$.

Yang disebut variansi dari variabel random X ialah $E[\{X - E(X)\}^2]$ atau $E = [(X - \mu)^2]$. Akar kuadrat dari variansi disebut simpangan baku atau simpang baku.

$$\begin{aligned} P''(1) + P'(1) - (P'(1))^2 &= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - E(X) + E(X) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

$$= E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= V(X)$$

F. Proses Kelahiran dan Kematian (*Birth-Death Processes*)

Proses kedatangan dan kepergian dalam suatu sistem antrean merupakan proses kelahiran dan kematian (*birth - death processe*). Kelahiran terjadi jika seorang pelanggan memasuki sistem antrean dan kematian terjadi jika seorang pelanggan meninggalkan sistem antrean tersebut.

Menurut Winston (1994:115), proses kelahiran dan kematian merupakan proses penjumlahan dalam suatu sistem dimana keadaan sistem selalu menghasilkan bilangan bulat positif. Keadaan sistem pada saat t didefinisikan sebagai selisih antara banyaknya kelahiran dan kematian pada saat t . Dengan demikian, keadaan sistem pada saat t dalam suatu sistem antrean yang dinotasikan dengan $N(t)$, adalah selisih antara banyaknya kedatangan dan kepergian pada saat t .

Misal, banyaknya kedatangan pelanggan pada saat t dinotasikan dengan $X(t)$ dan banyaknya kepergian pada saat t dinotasikan dengan $Y(t)$, maka banyaknya pelanggan yang berada dalam sistem pada saat t adalah $N(t) = X(t) - Y(t)$. Sedangkan peluang terdapat n pelanggan dalam sistem antrean pada saat t dinotasikan dengan $P(N(t) = n)$ atau $P_n(t)$.

Akan dicari peluang terdapat n pelanggan dalam suatu sistem antrean pada saat t . Namun sebelumnya, diberikan definisi - definisi yang digunakan pada pembahasan selanjutnya.

Definisi 2.7 (Hogg dan Tanis, 2001:66) Kejadian $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ dikatakan kejadian – kejadian yang saling asing jika $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$.

Definisi 2.8 (Bain dan Engelhardt, 1992:9) Jika sebuah percobaan $A_1, A_2, A_3, \dots$ adalah kejadian yang mungkin terjadi pada ruang sampel S . fungsi peluang merupakan fungsi yang mengawankan setiap kejadian A dengan bilangan real $P(A)$ dan $P(A)$ disebut peluang kejadian A jika memenuhi ketentuan berikut.

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. Jika $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ adalah kejadian yang saling asing, maka $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + \dots$

Definisi 2.9 (Hogg dan Tanis, 2001:96) Kejadian A dan B dikatakan saling bebas jika dan hanya jika

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Jika kejadian A dan B tidak memenuhi kondisi tersebut maka disebut kejadian bergantung.

Definisi 2.10 (Dimyati & Dimyati, 2002:356) Probabilitas bahwa jumlah kombinasi kelahiran dan kematian lebih dari satu selama interval waktu t sampai $(t + \Delta t)$ adalah $o(\Delta t)$ (keterangan: $o(\Delta t)$ adalah fungsi dari Δt yang mendekati nol). Dengan demikian, fungsi tersebut memenuhi persamaan:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

Definisi 2.11 (Purcell & Varberg, 1998:141) Definisi turunan sebagai berikut:

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{df(t)}{dt}$$

Asal limit fungsinya ada.

Teorema 2.1 (Bartle dan Sherbert, 2000:176-177) Misal f dan g didefinisikan pada $[a, b]$, misal $f(a) = g(a) = 0$, sehingga $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0}$ dikatakan *indeterminate* dan $g(x) \neq 0$ maka limit dari $\frac{f}{g}$ di a ada dan sama dengan $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ sehingga

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Teorema tersebut disebut dengan aturan L'Hopital

Bukti:

Jika $f(a) = g(a) = 0$ untuk $a < x < b$ berlaku

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

Maka $f'(x)/g'(x)$ berdasarkan Definisi (2.11) adalah

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Terbukti bahwa $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Menurut Wospakrik (1996:297), asumsi-asumsi proses kelahiran dan kematian dalam antrean sebagai berikut:

- i) Semua kejadian pada saat interval waktu yang sangat pendek (Δt) mempunyai probabilitas yang sama apabila sebanyak n pelanggan berada dalam sistem antrean, maka probabilitas sebuah kedatangan terjadi antar t dan $t + \Delta t$, dinyatakan dengan

$$P\left((X(t + \Delta t) - X(t)) = 1\right) = \lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$$

λ merupakan laju kedatangan.

- ii) Probabilitas tidak ada kedatangan antara t dan $t + \Delta t$, dinyatakan dengan

$$P\left((X(t + \Delta t) - X(t)) = 0\right) = 1 - \lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$$

- iii) Probabilitas ada satu kepergian antara t dan $t + \Delta t$, dinyatakan dengan

$$P\left((X(t + \Delta t) - X(t)) = -1\right) = \mu_n \Delta t + o(\Delta t)$$

μ merupakan laju pelayanan.

iv) Probabilitas tidak ada kepergian antara t dan $t + \Delta t$, dinyatakan dengan

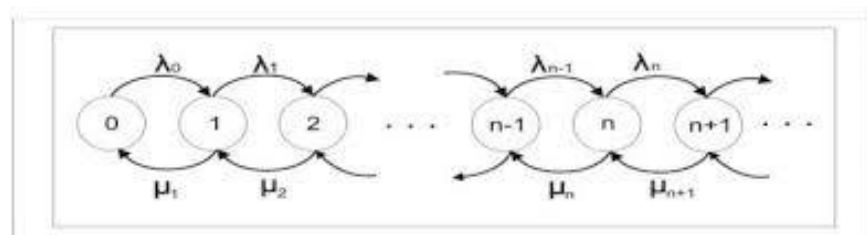
$$P\left((X(t + \Delta t) - X(t)) = 0\right) = 1 - \mu_n \Delta t + o(\Delta t)$$

v) Probabilitas terjadi lebih dari satu kejadian pada selang waktu yang sangat pendek adalah sangat kecil sehingga dapat diabaikan, dapat dinyatakan dengan

$$P\left((X(t + \Delta t) - X(t)) > 1\right) = o(\Delta t)$$

vi) Proses kedatangan dan pelayanan merupakan kejadian yang saling bebas.

Bedasarkan asumsi (vi), kedatangan dan kepergian merupakan kejadian-kejadian yang saling bebas, sehingga kejadian-kejadian pada interval waktu tertentu tidak mempengaruhi kejadian pada interval waktu sesudahnya. Proses kedatangan dan kepergian dalam suatu sistem antrean sesuai asumsi-asumsi proses kelahiran dan kematian dalam antrean ditunjukkan pada Gambar 2.6 berikut.



Gambar 2.6 Proses Kedatangan dan Kepergian dalam Sistem Antrean

Berdasarkan Gambar 2.6 kemungkinan-kemungkinan kejadian saling asing yang dapat terjadi jika terdapat $n(n > 0)$ pelanggan dalam sistem pada waktu $t + \Delta t$ adalah sebagai berikut.

Tabel 2.1 Kemungkinan Kejadian Terdapat n Pelanggan dalam Sistem Pada Saat $t + \Delta t$

Kasus	Jumlah Pelanggan pada Waktu (t)	Jumlah Kedatangan pada Waktu (Δt)	Jumlah Kepergian pada Waktu (Δt)	Jumlah Pelanggan pada Waktu (t + Δt)
1	n	0	0	n
2	n+1	0	1	n
3	n-1	1	0	n
4	n	1	1	n

Menurut asumsi (vi), kedatangan dan kepergian merupakan kejadian - kejadian yang saling bebas, sehingga peluang dari masing - masing kejadian tersebut adalah sebagai berikut:

$$1. \text{ Probabilitas kasus 1} = P_n(t)(1 - \lambda_n \Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu_n \Delta t + o(\Delta t))$$

$$2. \text{ Probabilitas kasus 2} = P_{n+1}(t)(1 - \lambda_{n+1} \Delta t + o(\Delta t))(\mu_{n+1} \Delta t + o(\Delta t))$$

$$3. \text{ Probabilitas kasus 3} = P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1} \Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu_{n-1} \Delta t + o(\Delta t))$$

$$= P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1} \Delta t + o(\Delta t))$$

4. Probabilitas kasus 4 adalah $o(\Delta t)$, sesuai dengan asumsi v.

Karena kasus – kasus tersebut saling asing, maka probabilitas terdapat n pelanggan dalam system ($n \geq 1$) pada saat $(t + \Delta t)$ dinyatakan dengan:

$$P_n(t + \Delta t) = P(\text{kasus 1 atau kasus 2 atau kasus 3 atau kasus 4})$$

$P_n(t + \Delta t) = \text{probabilitas kasus 1} + \text{probabilitas kasus 2} + \text{probabilitas kasus 3} + \text{probabilitas kasus 4}$

$$\begin{aligned} P_n(t + \Delta t) &= P_n(t)(1 - \lambda_n \Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu_n \Delta t + o(\Delta t)) \\ &\quad + P_{n+1}(t)(1 - \lambda_{n+1} \Delta t + o(\Delta t))(\mu_{n+1} \Delta t + o(\Delta t)) \\ &\quad + P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1} \Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} P_n(t + \Delta t) &= P_n(t) - P_n(t)(\lambda_n \Delta t) - P_n(t)(\mu_n \Delta t) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1} \Delta t) + \\ &\quad P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1} \Delta t) + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Pada Persaman (2.12) dikurangkan $P_n(t)$ pada ruas kanan dan kiri kemudian dibagi dengan Δt maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} &= P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}) - P_n(t)(\lambda_n) - \\ &\quad P_n(t)(\mu_n) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Karena Δt sangat kecil dan mendekati nol, maka berdasarkan Definisi 2.11 didapatkan:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}) - P_n(t)(\lambda_n) \right. \\
&\quad \left. - P_n(t)(\mu_n) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dP_n(t)}{dt} &= P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}) - P_n(t)(\lambda_n) - P_n(t)(\mu_n) \\
&= -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + (\mu_{n+1})P_{n+1}(t) + (\lambda_{n-1})P_{n-1}(t) \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Persamaan (2.14) merupakan dasar perhitungan probabilitas terdapat pelanggan pada proses kedatangan murni dan kepergian murni. Persamaan (2.14) disebut sebagai Persamaan Kolmogorov untuk $n \geq 1$.

Selanjutnya akan dibahas secara khusus probabilitas terdapat n pelanggan untuk nilai $n = 0$. Pada saat jumlah pelanggan dalam sistem adalah nol, maka probabilitas terjadinya nol kepergian pelanggan pada kasus 1 adalah satu.

Probabilitas terdapat n pelanggan, dengan $n = 0$ dalam waktu $(t + \Delta t)$ adalah

$$P_n(t + \Delta t) = P \text{ (kasus 1 atau kasus 2 atau kasus 4)}$$

$$P_n(t + \Delta t) = P \text{ Probabilitas Kasus 1} + P \text{ Probabilitas Kasus 2} + P \text{ Probabilitas Kasus 4}$$

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)(1 - \lambda_n \Delta t + o(\Delta t)) + P_{n+1}(t)$$

$$(1 - \lambda_{n+1}\Delta t + o(\Delta t))(\mu_{n+1}\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t)$$

nilai $n = 0$ maka diperoleh

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda_0\Delta t + o(\Delta t))(1) + P_1(t)$$

$$(1 - \lambda_1\Delta t + o(\Delta t))(\mu_1\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t)$$

$$= P_0(t)(1 - \lambda_0\Delta t + o(\Delta t)) + P_1(t)(\mu_1\Delta t) + o(\Delta t)$$

$$= P_0(t) - P_0(t)(\lambda_0\Delta t) + P_1(t)(\mu_1\Delta t) + o(\Delta t)$$

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) - P_0(t)(\lambda_0\Delta t) + P_1(t)(\mu_1\Delta t) + o(\Delta t) \quad (2.15)$$

Pada persamaan (2.15) dikurangkan $P_0(t)$ pada ruas kanan dan ruas kiri, kemudian dibagi dengan Δt , maka diperoleh

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = P_1(t)(\mu_1) - P_0(t)(\lambda_0) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

Karena Δt sangat kecil dan mendekati nol, maka berdasarkan Definisi 2.11 didapatkan:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[P_1(t)(\mu_1) - P_0(t)(\lambda_0) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right]$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = P_1(t)(\mu_1) - P_0(t)(\lambda_0) \quad , n = 0 \quad (2.16)$$

Persamaan (2.14) dan (2.16) merupakan Persamaan Kolmogorov yang digunakan sebagai dasar untuk menentukan peluang bahwa ada n

pelanggan dengan $n \geq 1$ dan $n = 0$ pada selang waktu $(t, t + \Delta t)$, yang dapat diringkas sebagai berikut

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + (\mu_{n+1})P_{n+1}(t) + (\lambda_{n-1})P_{n-1}(t), n \geq 1$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = P_1(t)(\mu_1) - P_0(t)(\lambda_0) \quad , n = 0$$

G. Distribusi Kedatangan

Distribusi kedatangan berhubungan dengan peluang terdapat n kedatangan pelanggan dalam suatu sistem antrean pada interval waktu tertentu. Kedatangan yang dimaksud dalam pembahasan ini adalah kedatangan murni, yaitu kedatangan tanpa disertai kepergian, maka laju kepergian $\mu_n = 0, \forall n \geq 0$ (Dimiyati, 1999:358-359).

Peluang terdapat $n(n \geq 0)$ kedatangan pada waktu t dapat diperoleh dengan mensubstitusikan $\mu_n = 0$ dan $\lambda_n = \lambda$ ke persamaan (2.14) dan persamaan (2.16) sehingga diperoleh sebagai berikut:

Substitusikan $\mu_n = 0$ dan $\lambda_n = \lambda$ ke persamaan (2.16) diperoleh

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = P_1(t)(\mu_1) - P_0(t)(\lambda_0)$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \tag{2.17}$$

Substitusikan $\mu_n = 0$ dan $\lambda_n = \lambda$ ke persamaan (2.14) diperoleh

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + (\mu_{n+1})P_{n+1}(t) + (\lambda_{n-1})P_{n-1}(t)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t), \quad n > 0 \quad (2.18)$$

Definisi 2.12 (Kreeyszig, 2003:33) Persamaan differensial orde satu dapat dinyatakan sebagai

$$y = ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$$

Persamaan (2.17) dapat dinyatakan sebagai persamaan differensial linear orde satu dengan $P(x) = \lambda$ dan $Q(x) = 0$. Maka penyelesaiannya adalah

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)$$

$$P_0(t) = ce^{-\int \lambda dt}$$

$$= ce^{-\lambda t}$$

$$= ce^{-\lambda t}$$

Diasumsikan bahwa proses kedatangan murni dimulai pada saat sistem memiliki nol pelanggan, sehingga peluang terdapat nol pelanggan ($n = 0$) dalam sistem pada saat $t = 0$ adalah 1 dinotasikan dengan $P_0(0) = 1$.

Peluang ada pelanggan ($n > 0$) pada $t = 0$ adalah 0, hal ini dapat dituliskan sebagai berikut.

$$P_n(0) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n > 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

dengan demikian

$$P_0(0) = ce^{-\lambda \cdot 0} = 1$$

dan diperoleh $c = 1$

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \quad (2.20)$$

Jadi persamaan (2.20) merupakan solusi untuk persamaan (2.17).

Selanjutnya akan dicari solusi untuk persamaan (2.18) sebagai berikut:

Berdasarkan Definisi (2.12), persamaan (2.18) dapat dinyatakan sebagai persamaan differensial linear orde satu dengan $P(x) = \lambda$ dan $Q(x) = \lambda P_{n-1}(t)$. Maka penyelesaiannya adalah

$$\begin{aligned} \frac{dP_n(t)}{dt} &= \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t) \\ P_n(t) &= ce^{-\int \lambda dt} + e^{-\int \lambda dt} \int \lambda e^{\int \lambda dt} P_{n-1}(t) dt \\ &= ce^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} P_{n-1}(t) dt \end{aligned} \quad (2.21)$$

untuk nilai $n = 1$ diperoleh

$$P_1(t) = ce^{-\int \lambda dt} + e^{-\int \lambda dt} \int \lambda e^{\int \lambda dt} P_0(t) dt \quad (2.22)$$

Persamaan (2.20) disubstitusikan ke Persamaan (2.22) diperoleh

$$\begin{aligned} P_1(t) &= ce^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} e^{-\lambda t} dt \\ &= ce^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} \end{aligned} \quad (2.23)$$

berdasarkan Persamaan (2.19) maka dari Persamaan (2.23) didapatkan

$$P_n(0) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n > 0 \end{cases}$$

$$P_1(0) = ce^{-\lambda \cdot 0} + \lambda \cdot 0 \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = 0$$

Sehingga diperoleh nilai $c = 0$, maka persamaan (2.23) menjadi

$$P_1(t) = \lambda te^{-\lambda t} \quad (2.24)$$

Jadi Persamaan (2.24) adalah solusi dari Persamaan (2.18) untuk $n = 1$.

Selanjutnya dicari solusi persamaan (2.18) untuk $n = 2$ sebagai berikut

untuk $n = 2$ persamaan (2.21) menjadi

$$P_n(t) = ce^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} P_{n-1}(t) dt$$

$$P_2(t) = ce^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} P_1(t) dt \quad (2.25)$$

Persamaan (2.24) disubstitusikan ke persamaan (2.25) didapatkan

$$P_2(t) = ce^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} \lambda te^{-\lambda t} dt$$

$$= ce^{-\lambda t} + \lambda^2 e^{-\lambda t} \int t dt$$

$$= ce^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t} \quad (2.26)$$

Berdasarkan persamaan (2.19) maka dari persamaan (2.26) didapatkan

$$P_n(0) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n > 0 \end{cases}$$

$$P_2(0) = ce^{-\lambda \cdot 0} + \frac{(\lambda \cdot 0)^2}{2} e^{-0 \cdot t} = 0$$

Sehingga diperoleh nilai $c = 0$, maka persamaan (2.26) menjadi

$$P_2(t) = 0 \cdot e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t}$$

$$P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t} \quad (2.27)$$

Jadi persamaan (2.27) adalah solusi dari persamaan (2.26) untuk $n = 2$

Dari persamaan (2.20), (2.24), dan (2.27) dapat disimpulkan bahwa solusi umum dari persamaan (2.17) dan persamaan (2.18) adalah

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad (2.28)$$

Bukti bahwa persamaan (2.28) adalah solusi umum dari persamaan (2.17) dan persamaan (2.18) adalah sebagai berikut

Langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematika

1. Persamaan (2.24) yaitu $P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$ membuktikan bahwa persamaan (2.28) merupakan penyelesaian persamaan (2.18) untuk $n = 1$

2. Diasumsikan persamaan (2.28) merupakan penyelesaian persamaan (2.18)

untuk $n = k$, maka $P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

3. Akan dibuktikan bahwa persamaan (2.28) merupakan penyelesaian dari persamaan (2.18) untuk $n = k + 1$

Untuk $n = k + 1$, persamaan (2.18) menjadi

$$\frac{dP_{k+1}(t)}{dt} = \lambda P_k(t) - \lambda P_{k+1}(t) \quad (2.29)$$

asumsi 2 didistribusikan ke persamaan (2.29) sehingga menjadi

$$\frac{dP_{k+1}(t)}{dt} = \lambda^{k+1} \frac{t^k}{k!} e^{-\lambda t} - \lambda P_{k+1}(t) \quad (2.30)$$

persamaan (2.30) merupakan persamaan differensial orde satu dengan

$P(x) = \lambda$ dan $Q(x) = \lambda^{k+1} \frac{t^k}{k!} e^{-\lambda t}$, sehingga penyelesaiannya adalah

$$\begin{aligned} P_{k+1}(t) &= c e^{-\int \lambda dt} + e^{-\int \lambda dt} \int \lambda^{k+1} \frac{t^k}{k!} e^{-\lambda t} e^{\int \lambda dt} dt \\ &= c e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \int \lambda^{k+1} \frac{t^k}{k!} e^{-\lambda t} e^{\lambda t} dt \\ &= c e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \lambda^{k+1} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= c e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda t} \end{aligned} \quad (2.31)$$

berdasarkan persamaan (2.19) maka persamaan (2.31) didapatkan

$$\begin{aligned} P_n(0) &= \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n > 0 \end{cases} \\ P_{k+1}(0) &= c e^{-\lambda \cdot 0} + \frac{(\lambda \cdot 0)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda \cdot 0} = 0 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh nilai $c = 0$, maka persamaan (2.31) menjadi

$$P_{k+1}(t) = \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda t} \quad (2.32)$$

persamaan (2.32) merupakan penyelesaian dari persamaan (2.18) untuk $n = k + 1$ dan memenuhi persamaan (2.28).

Jadi, $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ merupakan solusi umum dari persamaan (2.17) dan persamaan (2.18). Dengan demikian, berdasarkan Definisi (2.3) dapat disimpulkan bahwa kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson.

Teorema 2.2 (Gross dan Harris, 1998:16) Jika rata-rata kedatangan pelanggan dan rata-rata pelayanan mengikuti distribusi Poisson maka waktu antar kedatangan pelanggan dan waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial.

Berdasarkan Teorema (2.2) akan dibuktikan jika kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson maka waktu antar kedatangan pelanggan berdistribusi Eksponensial.

Bukti:

Berdasarkan uraian sebelumnya, diketahui bahwa kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson. $T_n (n > 0)$ adalah waktu antara $(n - 1)$ kedatangan sampai n kedatangan. Barisan $(T_n, n = 1, 2, 3, \dots)$ merupakan barisan waktu antar kedatangan yang saling asing dan saling bebas.

Ambil T_1 yang merupakan waktu antara tidak ada pelanggan dalam sistem dan ketika ada kedatangan pertama. Akan ditunjukkan bahwa T_1 berdistribusi Eksponensial.

Ambil $t < T_1$, maka banyaknya kedatangan pada waktu t adalah nol, artinya

$$\begin{aligned} P_n(T_1 > t) &= P(\text{tidak ada kedatangan selama waktu } t) \\ &= P_0(t) \end{aligned}$$

berdasarkan persamaan (2.20), $P_0(t) = e^{-\lambda t}$ dengan menyatakan λ laju kedatangan rata-rata, maka fungsi distribusi dari T_1 dengan $t \geq 0$ adalah

$$\begin{aligned} F(t) &= P(P_1 \leq t) \\ &= 1 - P(T_1 > t) \\ &= 1 - P_0(t) \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \end{aligned} \tag{2.33}$$

berdasarkan Definisi (2.2), persamaan (2.33) merupakan distribusi kumulatif dari distribusi Eksponensial yang secara umum ditulis

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Sehingga fungsi densitas peluang dari T_1 untuk $t \geq 0$ adalah

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} \tag{2.34}$$

Berdasarkan Definisi (2.1), T_1 merupakan variabel acak yang berdistribusi Eksponensial dengan parameter λ . Sesuai dengan asumsi bahwa barisan waktu antar kedatangan pada sistem antrean adalah saling

bebas, maka pembuktian di atas juga berlaku untuk (T_n) , $n > 0$. Jadi terbukti bahwa waktu antar kedatangan berdistribusi Eksponensial.

H. Distribusi Kepergian

Distribusi kepergian berhubungan dengan peluang terdapat n kepergian pelanggan dalam suatu sistem antrian pada interval waktu tertentu. Kepergian yang dimaksud dalam pembahasan ini adalah kepergian murni, yaitu kepergian yang tanpa disertai kedatangan, sehingga laju kedatangan $\lambda_n = 0, \forall n \geq 0$.

Diasumsikan bahwa laju kepergian tidak tergantung pada banyaknya pelanggan yang berada dalam sistem, sehingga $\mu_n = \mu, \forall n \geq 0$. Peluang terdapat $n(n \geq 0)$ kepergian selama waktu t dapat diperoleh dengan mensubstitusikan $\lambda_n = 0$ dan $\mu_n = \mu$ ke Persamaan (2.14) dan Persamaan (2.16) sehingga diperoleh

Substitusikan $\lambda_n = 0$ dan $\mu_n = \mu$ ke persamaan (2.16) diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dP_0(t)}{dt} &= P_1(t)(\mu_1) - P_0(t)(\lambda_0) \\ \frac{dP_0(t)}{dt} &= \mu P_{n+1}(t)\end{aligned}\tag{2.35}$$

Substitusikan $\lambda_n = 0$ dan $\mu_n = \mu$ ke persamaan (2.14) diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dP_n(t)}{dt} &= -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + (\mu_{n+1})P_{n+1}(t) + (\lambda_{n-1})P_{n-1}(t) \\ \frac{dP_n(t)}{dt} &= -\mu P_n(t) + \mu P_{n+1}(t), \quad n > 0\end{aligned}\tag{2.36}$$

Akan ditunjukkan bahwa kepergian pelanggan berdistribusi Poisson.

Jika jumlah pelanggan dalam sistem antrean selama t adalah $n = N$, maka

$P_{n+1} = 0, n \geq N$ sehingga untuk $n \geq N$ berlaku

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\mu P_n(t) \quad (2.37)$$

Sedangkan untuk $0 < n < N$ berlaku

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\mu P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) \quad (2.38)$$

berdasarkan Definisi (2.12), persamaan (2.17) dan persamaan (2.38) dapat dinyatakan sebagai persamaan differensial orde satu. Sehingga penyelesaian persamaan (2.37) adalah

$$P_n(t) = ce^{-\mu t}, \quad n \geq N$$

Diasumsikan bahwa proses kepergian murni dimulai ($t = 0$) pada saat sistem memiliki $n = N$ pelanggan dalam sistem. Sehingga peluang terdapat N pelanggan dalam sistem pada kondisi awal ($t = 0$) dinotasikan $P_N(0)$ adalah 1. Jika $0 \leq n < N$ maka $P_N(0) = 0$. Hal ini dapat dituliskan sebagai berikut

$$P_N(0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq n < N \\ 1, & n = N \end{cases} \quad (2.39)$$

dengan demikian, $P_N(0) = ce^{-\mu \cdot 0} = 1$

maka diperoleh nilai $c = 1$, oleh karena itu diperoleh

$$P_n(t) = e^{-\mu t} \quad (2.40)$$

Selanjutnya akan dicari solusi untuk persamaan (2.38) sebagai berikut, penyelesaian dari persamaan (2.38) adalah

$$P_n(t) = ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int e^{\mu t} P_{n+1}(t) dt, \quad 0 < n < N \quad (2.41)$$

untuk $n = N - 1$ maka

$$P_{N-1}(t) = ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int e^{\mu t} P_N(t) dt \quad (2.42)$$

substitusi persamaan (2.40) ke persamaan (2.42) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} P_{N-1}(t) &= ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int e^{\mu t} e^{-\mu t} dt \\ &= ce^{-\mu t} + \mu t e^{-\mu t} \end{aligned} \quad (2.43)$$

berdasarkan persamaan (2.39), maka

$$P_N(0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq n < N \\ 1, & n = N \end{cases}$$

$$P_{N-1}(0) = ce^{-\mu \cdot 0} + \mu \cdot 0 \cdot e^{-\mu \cdot 0} = 0$$

sehingga $c = 0$, maka persamaan (2.43) menjadi

$$P_{N-1}(t) = \mu t e^{-\mu t} \quad (2.44)$$

untuk $n = N - 2$, persamaan (2.41) menjadi

$$P_{N-2}(t) = ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int e^{\mu t} P_{N-1}(t) dt \quad (2.45)$$

persamaan (2.44) disubstitudikan ke persamaan (2.45) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} P_{N-2}(t) &= ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int e^{\mu t} \mu t e^{-\mu t} dt \\ &= ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int \mu t dt \\ &= ce^{-\mu t} + \frac{(\mu t)^2}{2} e^{-\mu t} \end{aligned} \quad (2.46)$$

berdasarkan persamaan (2.39) maka

$$P_N(0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq n < N \\ 1, & n = N \end{cases}$$

$$P_{N-2}(0) = ce^{-\mu \cdot 0} + \frac{(\mu \cdot 0)^2}{2} e^{-\mu \cdot 0} = 0$$

sehingga diperoleh $c = 0$, maka persamaan (2.46) menjadi

$$P_{N-2}(t) = \frac{(\mu t)^2}{2} e^{-\mu t} \quad (2.47)$$

Berdasarkan persamaan (2.40), persamaan (2.44), dan persamaan (2.47) dapat disimpulkan bahwa penyelesaian umum dari persamaan (2.37) dan persamaan (2.38) adalah

$$P_n(t) = \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t}$$

Pembuktiannya analog dengan pembuktian distribusi kedatangan yang telah dibahas pada sub bab sebelumnya. Jadi kepergian pelanggan juga berdistribusi Poisson, dengan parameter μ .

Berdasarkan Teorema (2.2) akan dibuktikan jika kepergian pelanggan berdistribusi Poisson maka waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial.

Bukti :

Misal keadaan awal suatu sistem antrean sebanyak $n = N$ pelanggan. Ambil T_1 sebagai waktu pelayanan pertama, $T_n, n > 1$ menunjukkan waktu pelayanan kepada pelanggan ke n sehingga barisan (T_n) dengan $n = 1, 2, 3, \dots$ merupakan barisan waktu pelayanan yang saling asing dan saling bebas.

Akan ditunjukkan bahwa T_1 berdistribusi Eksponensial. Ambil $t < T_1$, maka jumlah kepergian pada waktu t adalah nol, artinya $P_N(T_1 > t) = P$ (terdapat N pelanggan pada waktu t)

$$= P_N(t)$$

berdasarkan persamaan (2.40), $P_N(t) = e^{-\mu t}$ dengan μ menyatakan laju pelayanan rata - rata, maka fungsi distribusi kumulatif dari T_1 dengan $t \geq 0$ adalah

$$\begin{aligned} F(t) &= P(T_1 \leq t) \\ &= 1 - P(T_1 > t) \\ &= 1 - P_N(t) \\ &= 1 - e^{-\mu t} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Berdasarkan Definisi (2.2), persamaan (2.48) merupakan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Eksponensial yang secara umum ditulis

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

sehingga fungsi densitas peluang dari T_1 untuk $t \geq 0$ adalah

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \mu e^{-\mu t} \quad (2.49)$$

Berdasarkan Definisi (2.1), T_1 merupakan variabel acak yang berdistribusi Eksponensial dengan parameter μ . Sesuai dengan asumsi bahwa barisan waktu pelayanan pada sistem antrean adalah saling bebas, maka pembuktian diatas juga berlaku untuk (T_n) , $n > 0$. Jadi terbukti bahwa waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial.

I. Proses Kedatangan dan Kepergian *Steady State*

Kondisi *steady state* yaitu keadaan sistem yang tidak tergantung pada keadaan awal maupun waktu yang telah dilalui. Menurut Dimiyati &

Dimyati (2002:361), jika sistem antrean mencapai kondisi *steady state* maka probabilitas $P_n(t)$ menjadi konstan dan independen terhadap waktu.

Kondisi *steady state* terjadi ketika $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$ dan $\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P_n$ sehingga $P_n(t) = P_n$ untuk semua n , artinya P_n tidak tergantung pada waktu.

Proses kedatangan dan kepergian pada pembahasan sebelumnya menghasilkan persamaan (2.14) dan persamaan (2.16). Untuk memperoleh kondisi *steady state*, substitusikan $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$ dan $P_n(t) = P_n$ pada persamaan (2.14) dan Persamaan (2.16), sehingga diperoleh persamaan kesetimbangan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dP_n(t)}{dt} &= -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + (\mu_{n+1})P_{n+1}(t) + (\lambda_{n-1})P_{n-1}(t) \\ 0 &= -(\lambda_n + \mu_n)P_n + (\mu_{n+1})P_{n+1} + (\lambda_{n-1})P_{n-1} \quad , n \geq 1 \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= P_1(t)(\mu_1) - P_0(t)(\lambda_0) \\ 0 &= P_1(\mu_1) - P_0(\lambda_0) \quad , \quad n = 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

Atau

$$P_{n+1} = \frac{(\lambda_n + \mu_n)P_n}{\mu_{n+1}} - \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n+1}} P_{n-1} \quad , \quad n > 0 \quad (2.52)$$

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 \quad , \quad n = 0 \quad (2.53)$$

akan dicari penyelesaian umum dari persamaan (2.50) dan persamaan (2.51) untuk $n = 1$, maka persamaan (2.52) menjadi

$$P_2 = \frac{(\lambda_1 + \mu_1)P_1}{\mu_2} - \frac{\lambda_0}{\mu_2} P_0 \quad (2.54)$$

selanjutnya persamaan (2.53) disubstitusikan ke persamaan (2.54), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 P_2 &= \frac{(\lambda_1 + \mu_1)}{\mu_2} \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} P_0 \\
 &= \frac{\lambda_1 \lambda_0 + \mu_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} P_0 \\
 &= \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0
 \end{aligned}$$

untuk $n = 2$, maka persamaan (2.52) menjadi

$$P_3 = \frac{(\lambda_2 + \mu_2)P_2}{\mu_3} - \frac{\lambda_1}{\mu_3} P_1$$

Berdasarkan persamaan dari P_1, P_2 dan P_3 , maka diperoleh rumus umum dari persamaan (2.50) dan (2.51) adalah

$$\begin{aligned}
 P_n &= \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1} P_0 \\
 &= P_0 \prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right)
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Berlaku untuk $n = 1, 2, 3, \dots$

Nilai P_0 ditentukan dengan menggunakan persamaan berikut ini:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

Bukti dengan induksi matematika:

1. Untuk $n = 1$ maka

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

Untuk $n = 2$ maka

$$P_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0$$

2. Diasumsikan bahwa persamaan (2.55) berlaku untuk $n = k$ maka

$$P_k = \frac{\lambda_{k-1} \lambda_{k-2} \dots \lambda_0}{\mu_k \mu_{k-1} \dots \mu_1} P_0$$

3. Akan dibuktikan persamaan (2.55) berlaku untuk $n = k + 1$

$$P_{k+1} = \frac{\lambda_k \lambda_{k-1} \dots \lambda_0}{\mu_{k+1} \mu_k \dots \mu_1} P_0$$

substitusikan persamaan (2.55) ke persamaan (2.52), dengan $n = k + 1$

diperoleh

$$\begin{aligned} P_{k+2} &= \frac{(\lambda_{k+1} + \mu_{k+1})}{\mu_{k+2}} \frac{\lambda_k \lambda_{k-1} \dots \lambda_0}{\mu_{k+1} \mu_k \dots \mu_1} P_0 - \frac{\lambda_k}{\mu_{k+2}} \frac{\lambda_{k-1} \lambda_{k-2} \dots \lambda_0}{\mu_k \mu_{k-1} \dots \mu_1} P_0 \\ &= \frac{\lambda_{k+1} \lambda_k \lambda_{k-1} \dots \lambda_0}{\mu_{k+2} \mu_{k+1} \mu_k \dots \mu_1} P_0 + \frac{\mu_{k+1} \lambda_k \lambda_{k-1} \dots \lambda_0}{\mu_{k+2} \mu_{k+1} \mu_k \dots \mu_1} P_0 - \frac{\lambda_k}{\mu_{k+2}} \frac{\lambda_{k-1} \lambda_{k-2} \dots \lambda_0}{\mu_k \mu_{k-1} \dots \mu_1} P_0 \\ &= \frac{\lambda_{k+1} \lambda_k \lambda_{k-1} \dots \lambda_0}{\mu_{k+2} \mu_{k+1} \mu_k \dots \mu_1} P_0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Jadi terbukti bahwa persamaan (2.55) berlaku untuk $n = k + 1$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa persamaan (2.55) menyatakan peluang terdapat n pelanggan dalam keadaan *steady state* (P_n), $n > 0$.

J. Ukuran Keefektifan Sistem Antrean

Menurut Taha (1997,189:190), ukuran keefektifan suatu sistem antrean dapat ditentukan setelah probabilitas *steady state* diketahui. Ukuran - ukuran keefektifan suatu sistem tersebut antara lain:

1. Nilai harapan banyaknya pelanggan dalam sistem antrean (L_s)
2. Nilai harapan banyaknya pelanggan dalam antrean (L_q)
3. Nilai harapan waktu tunggu dalam sistem antrean (W_s)
4. Nilai harapan waktu tunggu dalam antrean (W_q)

Sebelum membahas lebih lanjut, akan diuraikan tiga Definisi yang mendukung pembahasan ukuran keefektifan suatu sistem.

Definisi 2.13 (Taha, 1993:596) Jumlah pelanggan dalam sistem adalah jumlah pelanggan dalam antrean ditambah jumlah pelanggan yang sedang mendapat layanan.

Definisi 2.14 (Taha, 1993:596) Laju kedatangan efektif merupakan laju kedatangan rata - rata dalam waktu yang panjang. Laju kedatangan efektif dinotasikan λ_{eff} dan dinyatakan dengan

$$\lambda_{eff} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n \quad (2.57)$$

λ_{eff} ditentukan dari λ_n yang bergantung pada keadaan dan probabilitas P_n . Jika kapasitas dalam sistem tak terbatas yang mengakibatkan laju kedatangan dalam sistem stabil untuk semua n, maka $\lambda_{eff} = \lambda$

Terdapat hubungan yang kuat antara L_s, L_q, W_s dan W_q , sehingga salah satu ukuran secara otomatis dapat ditentukan dari ukuran lainnya, maka

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{eff}} \quad (2.58)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{eff}} \quad (2.59)$$

Hubungan langsung dari ukuran keefektifan juga terdapat antara W_s dan W_q , berdasarkan definisi

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Waktu} \\ \text{menunggu} \\ \text{yang} \\ \text{diperkirakan} \\ \text{dalam sistem} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Waktu} \\ \text{menunggu} \\ \text{yang d} \\ \text{iperkirakan} \\ \text{dalam antrean} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{Waktu} \\ \text{pelayanan} \\ \text{yang} \\ \text{diperkirakan} \end{array} \right\}$$

Diketahui bahwa μ adalah rata-rata laju pelayanan, maka waktu pelayanan yang diperkirakan adalah $1/\mu$. Dengan demikian diperoleh,

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \quad (2.60)$$

Selanjutnya mengalikan kedua sisi persamaan (2.60) dengan λ_{eff} , diperoleh

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_{eff}}{\mu} \quad (2.61)$$

Pemanfaatan yang diperkirakan dari sebuah sarana pelayanan didefinisikan sebagai fungsi dari banyaknya rata-rata pelayan (*server*) yang sibuk. Karena selisih antara L_s dan L_q harus sama dengan banyaknya pelayan yang sibuk, maka diperoleh

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Jumlah pelayanan sibuk} \\ \text{yang diperkirakan} \end{array} \right\} = \bar{c} = L_s - L_q = \frac{\lambda_{eff}}{\mu} \quad (2.62)$$

Persentase pemanfaatan sebuah sarana pelayanan dengan c pelayan yang paralel dapat dihitung sebagai

$$\text{Persentase pemanfaatan} = \frac{\bar{c}}{c} \times 100\%$$

Solusi steady state dari kinerja sistem antrean di atas diturunkan dengan asumsi bahwa parameter-parameter λ_n dan μ_n adalah sedemikian sehingga kondisi steady state tercapai. Asumsi ini berlaku jika,

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1 \quad (2.63)$$

Definisi 2.15 (Dimyati, 2003:373) Laju pelayanan rata - rata untuk seluruh pelayan dalam sistem antrean adalah laju pelayanan rata - rata dimana pelanggan yang sudah mendapat pelayanan meninggalkan sistem antrean. Laju pelayanan rata - rata untuk seluruh pelayan dinyatakan dengan μ .

Nilai harapan banyaknya pelanggan dalam sistem antrean (L_s) merupakan jumlah dari perkalian keseluruhan pelanggan dalam sistem dengan peluang terdapat n pelanggan (Ecker, 1988:390), dinyatakan dengan

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n \quad (2.64)$$

Nilai harapan banyaknya pelanggan dalam antrean (L_q) merupakan jumlah dari perkalian pelanggan dalam antrean dengan peluang terdapat n pelanggan (Hiller & Lieberman, 2011:852), dinyatakan dengan

$$L_q = \sum_{n=0}^{\infty} (n - c)P_n \quad (2.65)$$

Apabila W_s merupakan waktu menunggu pelanggan dalam sistem antrian dan W_q merupakan waktu menunggu pelanggan dalam antrian, maka hubungan W_s, W_q, L_s, L_q , dinyatakan dengan

$$L_s = \lambda W_s \quad (2.66)$$

$$L_q = \lambda W_q \quad (2.67)$$

Persamaan (2.66) dan (2.67) dikenal dengan formula *Little Law*, diperkenalkan pertama kali oleh John D.C Little pada tahun 1961 (Gross dan Harris, 1998:11).

K. Model Antrean (M/M/1):(GD/∞/∞)

Proses kelahiran-kematian yang telah dijelaskan pada bagian sebelumnya digunakan untuk menganalisis ukuran keefektifan sistem antrian (M/M/1):(GD/∞/∞). Mengingat kembali bahwa sistem antrian (M/M/1):(GD/∞/∞) memiliki waktu antar kedatangan Eksponensial (asumsikan rata-rata kedatangan per satuan waktu λ) dan satu server dengan waktu antar pelayanan Eksponensial (asumsikan setiap customer waktu pelayanannya Eksponensial dengan rata-rata μ) (Winston, 2004: 1072).

Sistem antrian (M/M/1):(GD/∞/∞) dimodelkan sebagai proses kelahiran-kematian dengan parameter berikut:

$$\lambda_n = \lambda \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu_0 = 0$$

$$\mu_n = \mu \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

dengan menganggap $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Selanjutnya, mengekspresikan P_n ke dalam persamaan (2.55) yang telah digeneralisasi menjadi:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \rho^n P_0 \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (2.68)$$

Selanjutnya, nilai P_0 dicari dengan menggunakan persamaan $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ yaitu jumlah semua P_n untuk $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ sama dengan 1, maka diperoleh

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \dots = 1$$

$$P_0 + \rho^1 P_0 + \rho^2 P_0 + \rho^3 P_0 + \dots = 1$$

$$P_0 [1 + \rho^1 + \rho^2 + \rho^3 + \dots] = 1$$

Persamaan tersebut merupakan deret geometri, maka dapat disubstitusikan ke dalam rumus deret geometri tak hingga yang didefinisikan dengan:

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r} \quad r < 1$$

maka diperoleh,

$$P_0 \left[\frac{1}{1-\rho} \right] = 1$$

$$P_0 = 1 - \rho \quad (2.69)$$

Selanjutnya mensubstitusikan persamaan (2.69) ke dalam persamaan (2.68), sehingga diperoleh rumus umum P_n yaitu:

$$P_n = (1 - \rho)\rho^n \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.70)$$

yang merupakan sebuah distribusi geometris.

Persyaratan matematis $\rho < 1$ diperlukan untuk memastikan konvergensi dari serial geometris $[1 + \rho^1 + \rho^2 + \rho^3 + \dots]$. Pada intinya, $\rho < 1$ berarti bahwa $\lambda < \mu$ yang menyatakan bahwa laju kedatangan harus lebih kecil dari laju pelayanan agar sistem mencapai kondisi steady state. Dengan demikian, dapat diturunkan ukuran-ukuran keefektifan model antrean (M/M/1):(GD/ ∞/∞) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L_s &= \sum_{n=0}^{\infty} nP_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(1 - \rho)\rho^n \\ &= (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n \\ &= (1 - \rho)[\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \dots] \\ &= (1 - \rho)\rho[1 + 2\rho^1 + 3\rho^2 + \dots] \\ L_s &= (1 - \rho)\rho \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} \quad (2.71) \end{aligned}$$

Terlihat bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1}$ merupakan turunan sederhana dari $\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n$ terhadap ρ . Selanjutnya dengan menggunakan definisi deret geometri $\rho < 1$, maka diperoleh:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \frac{1}{1-\rho}$$

akibatnya,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} = \frac{d \left[\frac{1}{(1-\rho)} \right]}{d\rho} = \frac{1}{(1-\rho)^2} \quad (2.72)$$

Persamaan (2.72) kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (2.71), sehingga persamaannya menjadi:

$$\begin{aligned} L_s &= (1-\rho)\rho \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} \\ &= (1-\rho)\rho \frac{1}{(1-\rho)^2} \\ L_s &= \frac{\rho}{(1-\rho)} \end{aligned} \quad (2.73)$$

Ukuran keefektifan rata-rata waktu customer menunggu dalam sistem dapat dicari dengan mensubstitusikan persamaan (2.73) ke persamaan (2.58)

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{eff}}$$

karena model antrean (M/M/1):(GD/ ∞ / ∞) kapasitas sistem tak terbatas maka $\lambda_{eff} = \lambda$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{\frac{\rho}{(1-\rho)}}{\lambda}$$

$$W_s = \frac{\rho}{(1-\rho)\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} \quad (2.74)$$

Rata-rata waktu customer menunggu dalam antrean dapat dicari dengan cara mensubstitusikan persamaan (2.74) ke dalam persamaan (2.60), maka diperoleh

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$\frac{1}{\mu(1-\rho)} = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$W_q = \frac{1}{\mu(1-\rho)} - \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{1 - (1-\rho)}{\mu(1-\rho)}$$

$$= \frac{1 - 1 + \rho}{\mu(1-\rho)}$$

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \quad (2.75)$$

Selanjutnya, menentukan rata-rata banyaknya customer dalam antrean yaitu dengan cara mensubstitusikan persamaan (2.75) ke persamaan (2.59), sehingga diperoleh

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{eff}}$$

karena model antrean (M/M/1):(GD/ ∞/∞) kapasitas sistem tak terbatas maka $\lambda_{eff} = \lambda$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$\frac{\rho}{\mu(1 - \rho)} = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$L_q = \frac{\rho\lambda}{\mu(1 - \rho)} = \frac{\rho^2}{(1 - \rho)} \quad (2.76)$$

Dengan demikian, banyak pelayanan yang sibuk atau kepadatan customer ($\bar{c}$) dapat dicari dengan mensubstitusikan persamaan (2.73) dan (2.76) ke dalam persamaan (2.62), sehingga diperoleh

$$\bar{c} = \frac{\rho}{(1 - \rho)} - \frac{\rho^2}{(1 - \rho)} = \frac{\rho(1 - \rho)}{(1 - \rho)} = \rho \quad (2.77)$$