BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini dipaparkan dasar-dasar yang digunakan pada bagian pembahasan. Tinjauan yang dilakukan dengan memaparkan definisi mengenai unsur-unsur kajian geometri, aksioma kekongruenan, geometri segitiga dan lingkaran serta analogi pada bidang dan ruang.

A. Titik, Garis, dan Bidang di Ruang

Geometri memiliki tiga unsur pangkal. Unsur-unsur tersebut adalah titik, garis, dan bidang. Tiga unsur tersebut biasanya juga disebut sebagai tiga unsur yang tidak didefinisikan. Menurut Smith (2000: 55) garis dan bidang dianggap sebagai himpunan titik, subset dari himpunan semua titik yang disebut ruang. Oleh karena itu titik merupakan hal pertama yang harus diulas. Merujuk tulisan Rich dan Thomas (2009: 1) sebuah titik hanyalah suatu posisi. Titik tidak memiliki panjang, lebar, maupun ketebalan.

Sebuah garis difikirkan sebagai suatu himpunan titik yang berderet yang rapat dengan panjang yang tidak terbatas tetapi tidak memiliki ketebalan. Titik sendiri difikirkan sebagai suatu posisi dalam ruang. Oleh karena itu titik tidak memiliki panjang maupun ketebalan. Titik dilambangkan dengan huruf kapital A sampai Z, sementara a sampai z digunakan untuk melambangkan garis. Untuk lebih jelas memahaminya, diberikan contoh dengan ilustrasi sebagai berikut:

Gambar 4. Garis.

Pada gambar di atas garis g juga bisa dituliskan $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BA}, \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{CA}, \overleftrightarrow{BC},$ atau $\overleftrightarrow{BC}$.

Unsur pangkal yang ketiga adalah bidang. Sebuah bidang difikirkan sebagai suatu himpunan titik yang berderet dan berjajar secara rapat dan tidak terbatas. Seperti garis, bidang juga tidak memiliki ketebalan. Bidang biasanya dilambangkan dengan huruf Yunani.

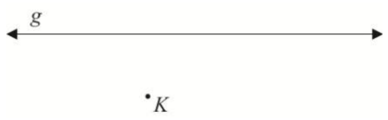
Gambar 5. Bidang α.

Geometri juga mempelajari kedudukan antara titik, garis, dan bidang. Pada geometri terdapat istilah berimpit. Istilah tersebut untuk menggambarkan titik atau garis yang sama.

Definisi 2.1. (Murdanu, 2003: 2) *Dua titik berimpit adalah dua titik yang sama dan dua garis berimpit adalah dua garis yang sama.*

Jika terdapat sebuah titik K dan sebuah garis g maka terdapat dua kemungkinan. Kemungkinan yang pertama adalah titik K terletak pada garis g. Kondisi ini juga dapat diungkapkan sebagai garis g melalui titik K. Kemungkinan yang lainnya titik K tidak terletak pada garis g.

Gambar 6. Garis g melalui titik *K.*

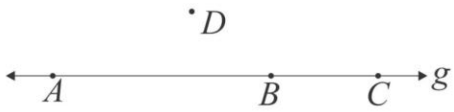


Gambar 7. Garis g tidak melalui titik *K*.

Definisi 2.2. (H. Karso, dkk., 2010: 73) *Titik-titik segaris (kolinear) adalah titik-titik yang terletak pada satu garis, titik-titik yang tidak terletak pada satu garis disebut titik-titik tak segaris (nonkolinear).*

Untuk lebih memahami definisi di atas, diberikan contoh ilustrasi sebagai berikut.

Contoh 2.1. *Misalkan terdapat sebuah garis g. Terdapat pula titik A, B, C pada garis g sedangkan titik D tidak terletak pada garis g. Titik A, B, Cmerupakan titik-titik kolinier. Titik A, B, C, D disebut titik-titik nonkolinier atau dapat dikatakan titik D nonkolinier terhadap titik A, B, C.*



Gambar 8. Titik-titik kolinier dan nonkolinier. □

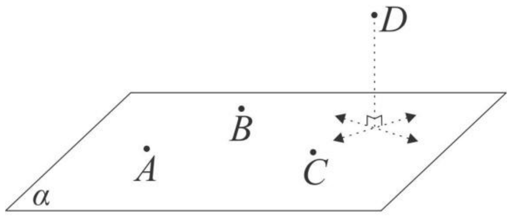
Begitu pula kedudukan antara titik dengan bidang. Titik *K* bisa terletak pada bidang α maupun tidak. Menurut H. Karso, dkk (2010: 74) sebuah titik dapat terletak pada suatu bidang atau tidak terletak pada sebuah bidang. Jika sebuah titik *K* terletak pada suatu bidang α, maka dapat dikatakan pula bidang α melalui titik *K*, atau titik *K* pada bidang α.

Koplanar adalah istilah untuk menunjukkan bahwa himpunan titik terletak pada sebuah bidang yang sama. Keadaan yang menyatakan tidak koplanar disebut nonkoplanar.

Definisi 2.3. (Murdanu, 2003: 34) *Titik-titik dikatakan koplanar atau sebidang jika dan hanya jika ada suatu bidang yang memuat semua titik tersebut.*

Untuk lebih memahami definisi di atas, diberikan contoh ilustrasi sebagai berikut.

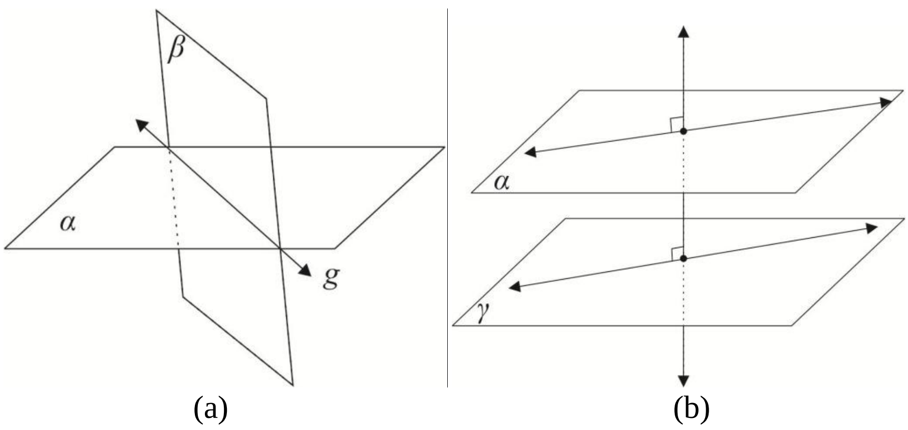
Contoh 2.2. *Misalkan terdapat sebuah bidang α. Terdapat pula titik A, B, C pada bidang α sedangkan titik D tidak terletak pada bidang α. Titik A, B, Cmerupakan titik-titik koplanar. Titik A, B, C, D disebut titik-titik nonkoplanar kareana tidak ada sebuah bidang yang memuat semua titik tersebut. Dapat dikatakan pula titik D nonkoplanar terhadap titik A, B, C.*



Gambar 9. Titik-titik koplanar dan nonkoplanar. □

Terdapat dua kemungkinan kedudukan dari dua buah bidang. Dua buah bidang dapat berpotongan atau sejajar. Hal tersebut telah diungkapkan A. Sardjana (2008: 2.3) seperti pada definisi berikut.

Definisi 2.4. (A. Sardjana, 2008: 2.3) *Dua buah bidang dikatakan berpotongan jika kedua bidang itu mempunyai sebuah garis persekutuan. Keadaan di mana dua buah bidang tidak memiliki garis persekutuan disebut dua bidang yang sejajar.*



Gambar 10. (a) Dua bidang berpotongan, (b) dua bidang saling sejajar.

Kedudukan antara garis dan bidang dapat terjadi tiga kemungkinan. Menurut H. Karso, dkk. (2010: 77) Jika ada suatu garis dan suatu bidang, maka kejadian yang dapat terjadi, yaitu garis tersebut memotong atau dapat pula dikatakan menembus bidang tersebut, garis tersebut sejajar dengan bidang tersebut, atau garis tersebut terletak pada bidang tersebut.

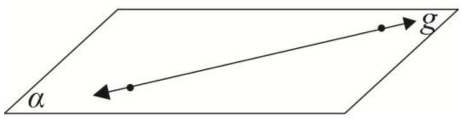
Definisi 2.5. (H. Karso, dkk., 2010: 77) Sebuah *garis g dikatakan terletak pada bidang α, Jika setiap titik yang terletak pada garis g, maka titik tersebut terletak pada bidang.*

Kemungkinan berikutnya jika garis g dan bidang α memiliki sebuah titik persekutuan maka garis g dan bidang α saling berpotongan.

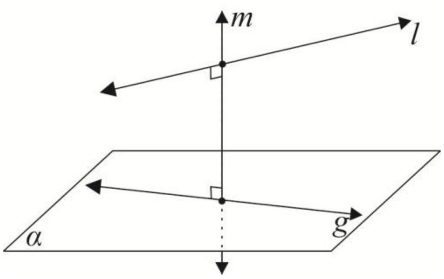
Definisi 2.6. (H. Karso, dkk., 2010: 77) *Garis g dan bidang α dikatakan berpotongan, jika keduanya mempunyai tepat satu titik persekutuan.*

Misalkan garis g memotong bidang α di titk A. Titik A disebut titik potong dari garis g dan bidang α. Kemungkinan yang ketiga adalah sejajar. Sejajar adalah keadaan di mana g dan bidang α tidak memiliki titik persekutuan.

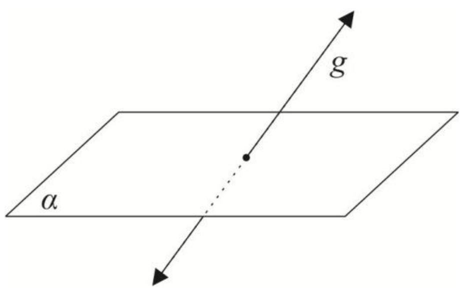
Definisi 2.7. (H. Karso, dkk., 2010: 77) *Sebuah garis g dan sebuah bidang α dikatakan sejajar, jika keduanya tidak bersekutu pada sebuah titik pun.*



Gambar 11. Garis g terletak pada bidang α.



Gambar 12. Garis l dan bidang α sejajar.



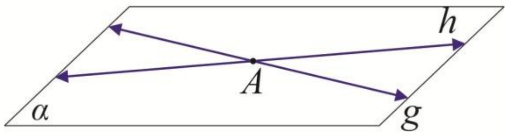
Gambar 13.Garis g dan bidang α berpotongan.

Menurut H. Karso, dkk. (2010: 75) dua buah garis dapat merupakan dua garis yang sebidang atau tidak sebidang. Jika dua garis sebidang, maka dapat terjadi keduanya berpotongan atau sejajar. Jika dua buah garis tak-sebidang, maka keduanya dikatakan bersilangan.

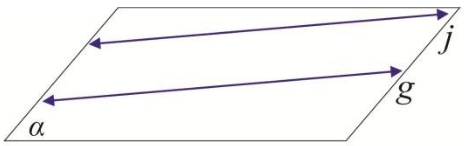
Definisi 2.8. (Murdanu, 2003: 2) *Dua garis yang berbeda disebut berpotongan jika dan hanya jika dua garis tersebut bersekutu pada satu titik.*

Misalkan garis g dan h berpotongan dan bersekutu di titik A. Titik A disebut sebagai titik sekutu atau titik potong dari garis dan h .

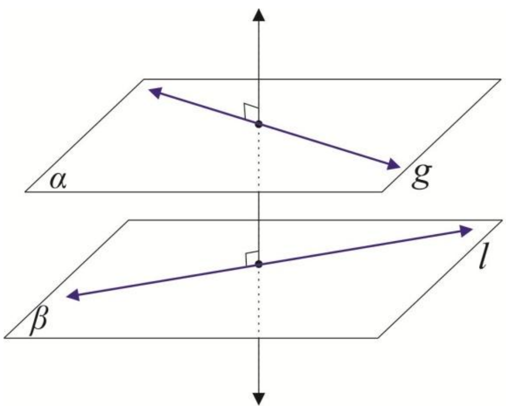
Definisi 2.9. (H. Karso, dkk., 2010: 75) *Dua buah garis berbeda dikatakan saling sejajar jika dan hanya jika keduanya koplanar dan tidak berpotongan. Dua buah garis berbeda dikatakan saling bersilangan jika dan hanya jika keduanya nonkoplanar.*



Gambar 14. Garis berpotongan.



Gambar 15. Garis sejajar.



Gambar 16. Garis bersilangan.

Sejajar disimbolkan dengan $\parallel$ sedangkan tidak sejajar disimbolkan dengan $\nparallel$. Misalkan bidang α dan γ saling sejajar maka dapat disimbolkan dengan $\alpha \parallel \gamma$. Jika bidang α dan β tidak saling sejajar maka disimbolkan dengan $\alpha \nparallel \beta$. Simbol $\parallel$ juga dapat digunakan untuk melambangkan garis sejajar dengan bidang maupun kesejajaran dua buah garis. Misalkan garis l dan bidang α saling sejajar. Garis l sejajar dengan bidang α dilambangkan dengan $l \parallel \alpha$. Jika garis g dan j sejajar maka disimbolkan dengan $g \parallel j$.

B. Ruas Garis, Sinar Garis, Sudut, Sudut Dihedral

Titik, garis, dan bidang jika dikaji lebih lanjut dapat menghasilkan objek geometri lain. Objek-objek geometri tersebut beberapa diantaranya adalah, sinar garis, ruas garis, sudut, serta sudut dihedral. Menurut Greenberg (1993: 14) ruas garis merupakan himpunan titik yang terbatas oleh dua buah titik.

Definisi 2.10. (Greenberg, 1993: 14) *Diberikan dua titik A dan B. Ruas garis* $\overline{AB}$ *adalah himpunan di mana anggota-anggotanya adalah A dan B dan semua titik yang teretak pada* $\overleftrightarrow{AB}$ *dan di antara A dan B.*

Gambar 17. Ruas garis $\overline{AB}$.

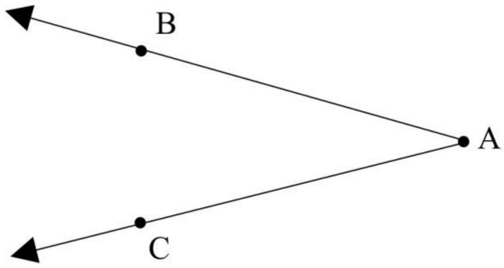
Sebuah ruas garis dengan ujung titik A dan B dilambangkan dengan $\overline{AB}$ atau $\overline{BA}$. Definisi 2.10 menunjukkan bahwa suatu ruas garis merupakan subset dari sebuah garis. Meskipun demikian, ruas garis bukan merupakan satu-satunya subset dari sebuah garis. Sinar garis juga merupakan subset dari garis.

Definisi 2.11. (Murdanu, 1993: 16) *Misalkan O adalah suatu titik pada garis g. Suatu sinar garis pada garis g adalah himpunan titik-titik yang terdiri dari ttik O sebagai pangkal dan semua titik sepihak terhadap O pada g.*

Gambar 18. Sinar garis $\overrightarrow{OA}$.

Menurut Murdanu (2003: 3) misalkan *O* suatu titik pada garis *g*. Dua titik berlainan selain titik *O* pada garis g dikatakan sepihak terhadap *O* jika dan hanya jika titik *O* tidak terletak diantara kedua titik tersebut. Sinar garis dengan pangkal *O* dan memuat titik *A* dilambangkan dengan $\overrightarrow{OA}$. Dua buah buah sinar garis yang memiliki pangkal yang sama disebut sebagai sudut.

Definisi 2.12. (Murdanu, 2003: 4) *Sudut adalah gabungan dua sinar garis yang bersekutu titik pangkalnya.*



Gambar 19. Sudut *BAC*.

Gambar 19 di atas merupakan sebuah sudut dengan titik sudut *A* yang dibentuk oleh sinar garis $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AC}$. Sudut tersebut dapat dilambangkan dengan $\angle BAC$ atau $\angle CAB$ atau $\angle A$. Sinar garis $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AC}$ disebut kaki sudut $\angle BAC$, sedangkan titik *A* disebut titik sudut $\angle BAC$. Pada sudut juga dikenal istilah daerah dalam atau juga disebut sebagai interior sudut.

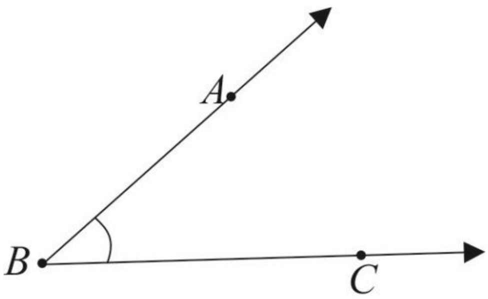
Definisi 2.13. (Murdanu, 2003: 5) *Daerah dalam $\angle AOB$ adalah irisan antara himpunan titik-titik yang sepihak dengan A terhadap $\overleftrightarrow{OB}$ dan himpunan titik yang sepihak dengan B terhadap $\overleftrightarrow{OA}$.*

Pada Definisi 2.13 yang dimaksud himpunan titik-titik yang sepihak dengan A terhadap $\overleftrightarrow{OB}$ adalah titik D pada bidang AOB sehingga $\overline{AD}$ tidak memotong $\overleftrightarrow{OB}$.

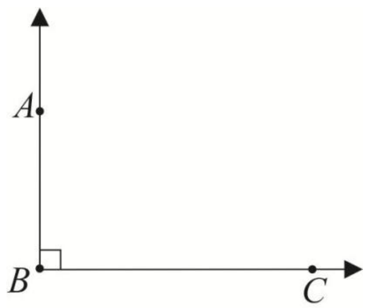
Definisi 2.14. (Murdanu, 2003: 4) *Misalkan terdapat sebuah garis g. Dua titik di luar garis g dikatakan terletak dalam kelas yang sama (sepihak terhadap garis g) bila dan hanya bila ruas garis yang ditentukan kediua titik tersebut tidak memuat satu titik pun yang terletak pada garis g. Kedua titik tersebut dikatakan terletak dalam kelas yang berlainan (tidak sepihak terhadap g) bila dan hanya bila ruas garis yang ditentukan oleh kedua titik tersebut memuat tepat satu titik yang terletak pada g.*

Sebuah sudut memiliki ukuran. Besar ukuran sebuah sudut berada antara 0^o sampai dengan 360^o. Menutut Fogiel berdasarkan ukurannya sudut dikelompokkan menjadi lima.

Definisi 2.15. (Fogiel, 1987: 13) *Sudut lancip adalah sudut yang ukurannya lebih besar dari 0^otetapi lebih kecil dari 90^o.*



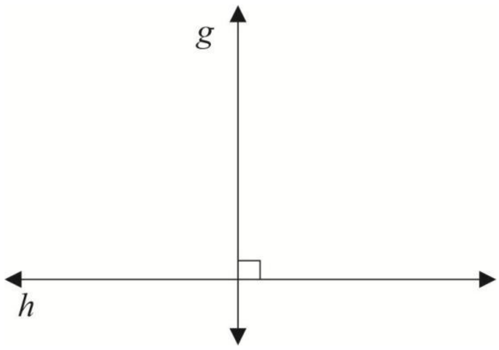
Gambar 20. Sudut Lancip.



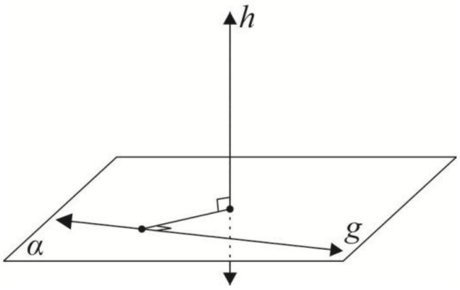
Gambar 21. Sudut siku-siku.

Definisi 2.16. (Fogiel, 1987: 13) *Sudut yang memiliki ukuran 90^odisebut sebagai sudut siku-siku.*

Misalkan terdapat garis *g* dan *h* di mana keduanya berpotongan dan membentuk sudut siku-siku. Hubungan antara kedua garis tersebut dapat dikatakan sebagai saling berpotongan tegak lurus atau garis *g* tegak lurus dengan *h*. Simbol ⊥ digunakan untuk menggambarkan suatu ketegaklurusan. Selain berpotongan tegak lurus dua buah garis juga dapat bersilangan tegak lurus.



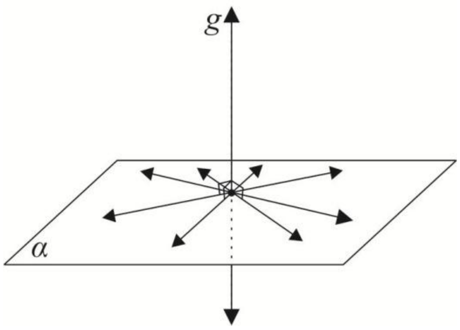
Gambar 22. Dua garis saling berpotongan tegak lurus.



Gambar 23. Garis *g* dan *h* bersilangan tegak lurus.

Lebih luas lagi hubungan tegak lurus bukan hanya pada dua buah garis. Terdapat pula ketegaklurusan antara garis dan bidang serta ketegaklurusan antara dua buah bidang.

Definisi 2.17. (Murdanu, 2003: 37) *Sebuah garis g dan sebuah bidang γ dikatakan saling tegak lurus pada titik P; dengan* $P = g \cap \gamma$, *jika dan hanya jika setiap garis pada γ yang melalui P tegak lurus terhadap g.*



Gambar 24. Garis dan bidang saling tegak lurus.

Definisi 2.18. (Murdanu, 2003: 44) *Dua buah bidang berpotongan tegak lurus jika dan hanya jika keduanya memuat sudut dihedral siku-siku.*

Misalkan garis g tegak lurus dengan bidang γ, maka dapat disimbolkan dengan $g \perp \gamma$. Begitu pula dengan ketegaklurusan antara dua bidang. Bidang α tegak lurus dengan bidang β disimbolkan dengan $\alpha \perp \beta$. Selain sudut lancip dan sudut siku-siku terdapat pula sudut tumpul, sudut lurus, dan sudut refleks.

Definisi 2.19. (Fogiel, 1987: 13) *Sebuah sudut tumpul adalah sudut yang ukurannya lebih besar dari 90^o tapi kurang dari 180^o.*

Definisi 2.20. (Fogiel, 1987: 13) *Sebuah sudut yang ukurannya 180^o disebut sebagai sudut lurus.*

Sudut yang berukuran 180^o disebut sudut lurus karena memang hanya berupa sebuah garis lurus. Contoh sebuah sudut lurus misalkan terdapat garis $\overleftrightarrow{AB}$ dan terdapat titik *C* di antara titik *A* dan *B*. Ukuran $\angle ACB$ adalah 180^o, sehingga $\angle ACB$ merupakan sudut lurus.

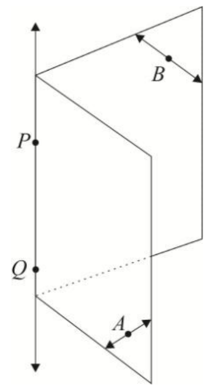
Definisi 2.21. (Fogiel, 1987: 13) *Sudut yang ukurannya 180^o tetapi kurang dari 360^odisebut sebagai sudut refleks.*

Dalam geometri dimensi tiga ukuran sudut bukan hanya pada dua buah garis tetapi juga dua buah bidang. Dua buah bidang yang berpotongan akan membentuk sebuah sudut antara keduanya. Sudut antara dua buah bidang selanjunya disebut sebagai sudut dihedral. Untuk memahami definisi sudut dihedral terlebih dahulu perlu mengetahui definisi dari setengah bidang.

Definisi 2.22. (Murdanu, 2003: 4) *Himpunan semua titik pada suatu kelas disebut sebagai setengah bidang.*

Kelas yang dimaksud pada Definisi 2.22 adalah kelas seperti yang telah didefinisikan pada Definisi 2.14.

Definisi 2.23. (Murdanu, 2003: 42) *Suatu sudut dihedral adalah gabungan dari sebuah garis dan dua buah setengah bidang non koplanar yang sekutunya garis tersebut. Garis tersebut dinamakan rusuk dari sudut dihedral. Gabungan rusuk dan sebuah setengah-bidang tersebut dinamakan sebuah bidang-sisi dari sudut dihedral.*



Gambar 25. Sudut dihedral $\angle A - \overleftrightarrow{PQ} - B$.

Penamaan sudut dihedral sedikit berbeda dengan sudut antara dua buah garis. Misalkan terdapat garis $\overleftrightarrow{PQ}$ merupakan rusuk suatu sudut dihedral. Titik *A* dan *B* terletak pada setengah bidang yang berbeda. Sudut dihedral tersebut selanjutnya disebut sebagai sudut $\angle A - \overleftrightarrow{PQ} - B$ atau $\angle B - \overleftrightarrow{PQ} - A$. Suatu sudut dihedral juga memiliki ukuran.

Definisi 2.24. (Murdanu, 2003: 42) *Melalui sebarang titik pada rusuk dari suatu sudut dihedral terdapat sebuah bidang yang melaluinya dan tegak lurus terhadap rusuk tersebut berupa sebuah sinar garis yang berpangkal sama pada sebarang titik tersebut. Sudut yang dibentuk oleh kedua sinar garis tersebut dinamakan sudut-bidang dari sudut dihedral tersebut.*

C. Jarak

Menurut Murdanu (2003: 5) untuk setiap ukuran yang diberikan, terdapat suatu korespondensi yang menetapkan suatu bilangan positif bagi setiap pasangan dua titik berlainan. Misalkan terdapat dua titik *A* dan *B*. Bilangan positif yang bersesuaian dengan titik *A* dan *B* selanjutnya disebut dengan jarak antara *A* dan *B*. Merujuk Definisi 2.10 maka ruas garis $\overline{AB}$ adalah kumpulan titik pada sebuah garis yang dibatasai oleh titik A dan *B*. Ukuran $\overline{AB}$ atau juga dapat disebut panjang ruas garis $\overline{AB}$ dinyatakan oleh jarak antara titik *A* dan *B*.

Definisi 2.25. (Murdanu, 2003: 4) *Ukuran* $\overline{AB}$ *adalah jarak antara A dan B.*

Ukuran $\overline{AB}$ disimbolkan dengan *AB*. Sebuah ruas garis selalu memiliki sebuah titik tengah. Menurut Fogiel (1987: 11) titik tengah dari ruas garis adalah titik yang membagi ruas garis menjadi dua ruas garis yang sama panjang. Misalkan terdapat $\overline{AB}$ dan sebuah titik *C* pada $\overline{AB}$. Titik C merupakan titik tengah $\overline{AB}$ jika dan hanya jika $AC = AB$.

Selain jarak antara dua titik geometri juga mengkaji jarak antara obyek geometri lain. Jarak yang dikaji diantaranya jarak titik dengan garis, titik dengan bidang, garis dengan garis, garis dengan bidang, serta jarak antara dua bidang.

Definisi 2.26. (A. Sardjana, 2008: 2.25) *Jarak antara sebuah titik dengan sebuah garis adalah ruas garis yang menghubungkan titik itu dengan titik kaki tegak lurus yang dibuat dari titik itu ke garis tersebut.*

Definisi ini dapat dinyatakan dengan kalimat lain. Jarak titik dan garis merupakan jarak antara titik itu dengan titik proyeksi tegak lurusnya pada garis tersebut. Begitu pula jarak antara titik dengan bidang. Jarak antara keduanya merupakan jarak antara titik tersebut dengan titik proyeksinya dengan bidang yang dimaksud.

Definisi 2.27. (A. Sardjana, 2008: 2.26) *Jarak sebuah titik dan sebuah bidang adalah ruas garis yang menghubungkan titik itu dengan proyeksinya pada bidang tersebut.*

Jarak dua buah garis sejatinya juga merupakan jarak antara dua titik. Baik kedua garis itu sejajar maupun bersilangan. Jarak dua buah garis yaitu jarak dari sebuah titik pada garis yang satu dengan titik proyeksinya di garis yang lain.

Hanya saja dalam mencari jarak antara garis yang bersilangan sedikit lebih sulit. Hal ini dikarenakan pemilihan titik tidak dapat dilakukan secara sebarang.

Definisi 2.28. (A. Sardjana, 2008: 2.26) *Jarak antara dua buah garis sejajar adalah ruas garis yang menghubungkan salah satu titik pada garis yang satu dengan proyeksi titik pada garis yang lain.*

Definisi 2.29. (A. Sardjana, 2008: 2.29) *Jarak antara dua garis bersilangan adalah ruas garis yang memotong tegak lurus dua garis tersebut.*

Konsep yang sama juga digunakan untuk mengukur jarak antara garis dengan bidang dan jarak dua buah bidang sejajar. Menentukan sebuah titik sebarang pada garis lalu mencari proyeksinya pada bidang.

Definisi 2.30. (A. Sardjana, 2008: 2.28) *Jarak antara dua buah bidang yang sejajar adalah ruas garis yang menghubungkan salah sebuah titik pada salah satu bidang itu dengan proyeksinya pada bidang kedua.*

D. Segitiga

Geometri mengenal berbagai macam bangun datar, salah satunya adalah segitiga. Setiap tiga titik nonkolinier dapat dibentuk sebuah segitiga. Menurut Moise (1990: 65) segitiga merupakan bangun datar yang dibentuk oleh tiga buah ruas garis.

Definisi 2.31. (Moise, 1990: 65) *Jika A, B, dan C adalah tiga titik yang nonkolinier maka himpunan* $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$ *disebut segitiga ABC.*

Segitiga *ABC* dilambangkan dengan ΔABC. Titik *A*, *B*, *C* dinamakan titik sudut, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ dinamakan sisi ΔABC, dan $\angle ABC, \angle BCA, \angle CAB$ dinamakan sudut ΔABC. Pada segitiga juga terdapat daerah dalam segitiga atau interior segitiga dan daerah luar segitiga atau eksterior segitiga.

Definisi 2.32. (Murdanu, 2003: 11) *Sebuah titik dikatakan pada interior suatu segitiga bila dan hanya bila titik tersebut terletak pada daerah dalam setiap sudut segitiga tersebut. Sebuah titik dikatakan terletak pada eksterior suatu segitiga* *bila dan hanya bila titik tersebut sebidang dengan segitiga tersebut tetapi bukan merupakan bagian dari segitiga tersebut maupun interiornya.*

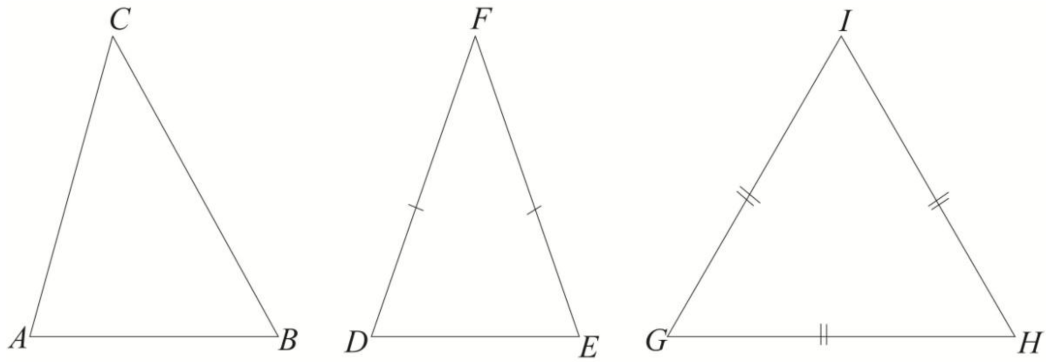
1. Jenis Segitiga Berdasarkan Panjang Sisi

Setiap segitiga memiliki tiga buah sisi. Sisi-sisi segitiga merupakan sebuah ruas garis, sehingga sisi segitiga memiliki ukuran panjang. Ketiga sisi pada segitiga tersebut dimungkinkan terdapat pasangan sisi yang sama panjang. Berdasarkan banyak panjang sisi yang sama segitiga dibagi menjadi beberapa jenis.

Definisi 2.33. (Fogiel, 1987: 26) *Segitiga yang tidak memiliki sisi yang sama panjang disebut segitiga sebarang.*

Definisi 2.34. (Fogiel, 1987: 27) *Segitiga yang setidaknya memiliki dua sisi yang sama panjang disebut segitiga sama kaki.*

Definisi 2.35. (Fogiel, 1987: 27) *Sebuah segitiga sama sisi adalah segitiga yang memiliki tiga sisi yang sama panjang.*



Gambar 26. Segitiga sebarang, segitiga sama kaki, segitiga sama sisi.

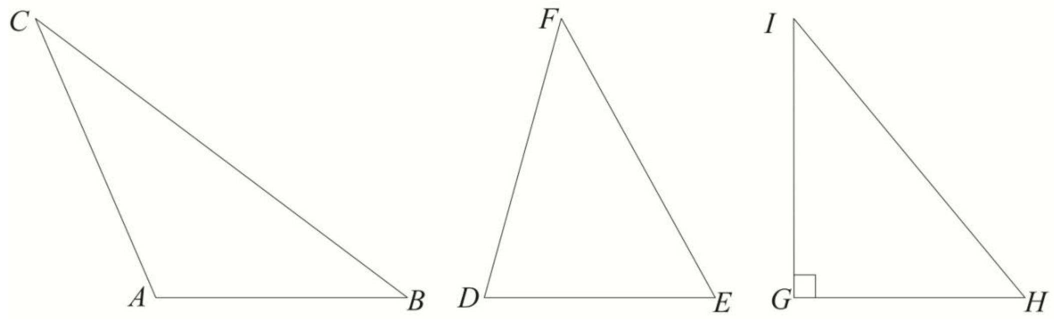
2. Jenis Segitiga Berdasarkan ukuran Sudut

Menurut Definisi 2.31 sebuah segitiga memiliki tiga buah sudut. Berdasarkan besar sudutnya segitiga dibagi menjadi tiga kelompok. Tiga kelompok tersebut adalah segitiga tumpul, segitiga lancip dan segitiga siku-siku.

Definisi 2.36. (Fogiel, 1987: 27) *Segitiga dengan sebuah sudut tumpul disebut segitiga tumpul.*

Definisi 2.37. (Fogiel, 1987: 27) *Segitiga lancip adalah segitiga dengan tiga buah sudut lancip.*

Definisi 2.38. (Fogiel, 1987: 28) *Segitiga dengan sebuah sudut siku-siku disebut segitiga siku-siku. Sisi didepan sudut siku-siku disebut sebagai hipotenusa segitiga siku-siku. Dua sisi lainnya disebut kaki dari segitiga siku-siku.*



Gambar 27. Segitiga tumpul, segitiga lancip, segitiga siku-siku.

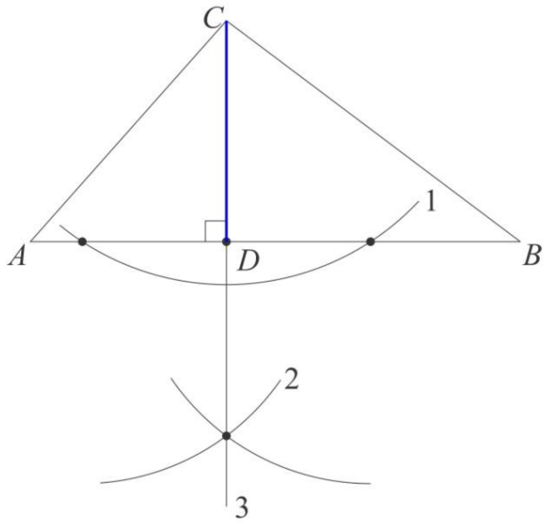
3. Garis-Garis Istimewa Segitiga

Segitiga memiliki garis-garis istimewa. Segitiga memiliki empat macam garis istimewa. Keempat macam garis tersebut adalah garis tinggi, garis berat, garis sumbu, dan garis bagi sudut.

Definisi 2.39. (Fogiel, 1987: 28) *Garis tinggi dari segitiga adalah ruas garis dari sebuah titik sudut segitiga dan tegak lurus dengan sisi didepannya.*

Misalkan terdapat ΔABC. Cara melukis garis tinggi dari titik *C* adalah sebagai berikut:

1. dilukiskan sebuah busur yang berpusat di titik *C* sehingga memotong sisi *AB* di dua titik,
2. dari dua titik potong tersebut dilukiskan busur lingkaran dengan jari-jari sama sedemikian hingga bertemu di sebuah titik,
3. dilukiskan garis yang melalui *C* dan titik potong kedua busur tadi.



Gambar 28. Garis tinggi segitiga.

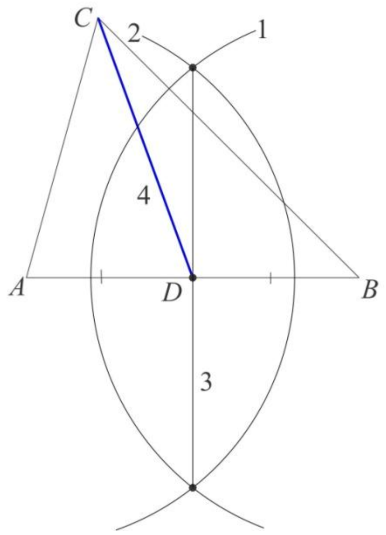
Ruas garis $\overline{CD}$ pada Gambar 28 merupakan salah satu garis tinggi ΔABC. Sebuah segitiga memiliki tiga buah garis tinggi. Pada segitiga sama sisi panjang dari ketiga garis tingginya sama. Pada segitiga siku-siku kedua sisi sikunya juga merupakan garis tinggi dari sisi tersebut. Misalkan terdapat ΔABC yang mana $\overline{BC}$ merupakan hipotenusa dari segitiga itu. Sisi $\overline{AB}$ dan $\overline{AC}$ merupakan garis tinggi dari ΔABC.

Definisi 2.40. (Fogiel, 1987: 28) *Ruas garis yang menghubungkan sebuah titik sudut segitiga dan titik tengah dari sisi di hadapannya disebut garis berat dari segitiga*.

Misalkan terdapat ΔABC. Cara melukis garis berat dari titik *C* adalah sebagai berikut:

1. dilukiskan sebuah busur yang berpusat di titik *A* dengan panjang jari-jari lebih dari setengah *AB*,
2. dengan jari-jari yang sama dilukiskan busur lingkaran dengan pusat *Z* sehingga kedua busur tadi berpotongan di dua titik,

3. dilukiskan ruas garis yang menghubungkan dua titik potong busur sehingga memotong sisi *AC* disebuah titik *D*,
4. dilukiskan ruas garis yang menghubungkan titik *C* dan *D*.



Gambar 29. Garis berat segitiga.

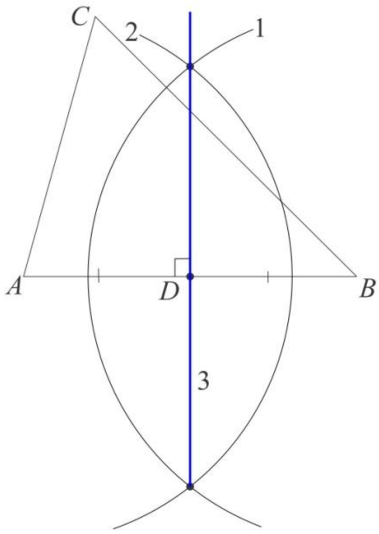
Garis istimewa pada segitiga yang ketiga adalah garis sumbu. Seperti pada garis berat, garis sumbu pada segitiga juga melibatkan titik tengah dari sisi segitiga. Perbedaannya adalah garis sumbu tegak lurus dengan sisi tersebut dan tidak harus melalui sebuah titik sudut.

Definisi 2.41. (Fogiel, 1987: 28) *Garis yang membagi dua sama panjang dan tegak lurus dengan sisi dari segitiga disebut garis sumbu dari sisi tersebut.*

Misalkan terdapat ΔABC. Cara melukis garis berat dari titik *C* adalah sebagai berikut:

1. dilukiskan sebuah busur yang berpusat di titik *A* dengan panjang jari-jari lebih dari setengah *AB*,
2. dengan jari-jari yang sama dilukiskan busur lingkaran dengan pusat *Z* sehingga kedua busur tadi berpotongan di dua titik,

3. dilukiskan garis yang melalui dua titik potong busur tersebut.



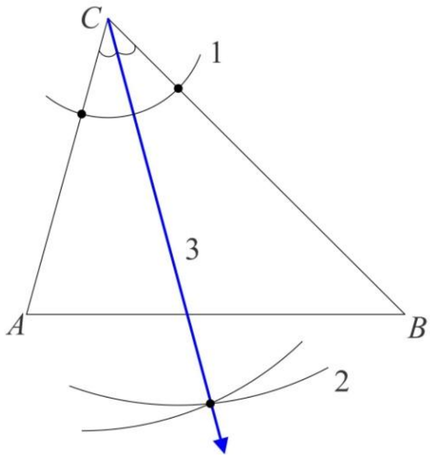
Gambar 30. Garis sumbu segitiga.

Garis istimewa pada segitiga yang terakhir adalah garis yang membagi sudut menjadi dua sama besar. Garis itu disebut garis bagi sudut dari segitiga atau lebih sering disebut sebagai garis bagi segitiga.

Definisi 2.42. (Smith, 2000: 159) *Sebuah garis bagi sudut dari $\angle POQ$ adalah garis g yang melalui titik O sedemikian hingga jika R titik pada g di dalam $\angle POQ$ maka $\angle POR$ dan $\angle ROQ$ memiliki ukuran yang sama.*

Misalkan terdapat ΔABC. Cara melukis garis berat dari titik *C* adalah sebagai berikut:

1. dilukiskan sebuah busur yang berpusat di titik *C* sehingga memotong $\overline{AC}$ dan $\overline{BC}$,
2. dari kedua titik potong dilukiskan busur dengan jari-jari sama sehingga berpotongan disebuah titik,
3. dilukiskan garis yang melalui *C* dan titik perpotongan dua busur tersebut.



Gambar 31. Garis bagi segitiga.

Setiap segitiga memiliki tiga buah garis bagi segitiga. Misalkan pada segitiga *ABC* maka akan ada tiga garis bagi yang secara berturut-turut membagi $\angle ABC, \angle BCA,$ dan $\angle CAB$. Garis bagi sudut *CAB* adalah sebuah sinar garis yang berpangkal di C dan memotong $\overline{AB}$ di titik D sedemikian hingga $\angle ACD$ dan $\angle BCD$ sama besar.

E. Kekongruenan

Kongruen adalah sebutan untuk menggambarkan keadaan di mana dua benda memiliki kesamaan bentuk dan ukuran. Simbol $\cong$ digunakan untuk melambangkan suatu hubungan kekongruenan. Menurut Smith (2000: 67) dua ruas garis dikatakan kongruen jika memiliki panjang yang sama. Dua buah sudut dikatakan kongruen jika memiliki ukuran yang sama. Pada kekongruenan berlaku sifat transitif.

Aksioma 2.1. (Greenberg, 1993: 83) *Jika* $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ *dan* $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ *maka* $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.

Aksioma 2.2. (Greenberg, 1993: 83) *Jika* $\angle A \cong \angle B$ *dan* $\angle B \cong \angle C$ *maka* $\angle A \cong \angle C$.

Dua buah segitiga dikatakan kongruen jika ada korespondensi satu-satu antar sudut pada segitiga sehingga sudut yang bersesuaian memiliki ukuran yang sama. Selain sudut-sudutnya, ruas garis pembentuk segitiganya juga harus memiliki ada korespondensi satu-satu sehingga ruas garis yang bersesuaian memiliki panjang yang sama.

Definisi 2.43. (Smith, 2000: 67) *Dua segitiga* ΔABC *dan* ΔDEF *dikatakan kongruen jika sisi dan sudut yang bersesuaian saling kongruen:* $\angle ABC \cong \angle DEF$, $\angle BCA \cong \angle EFD$, $\angle CAB \cong \angle FDE$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{BC} \cong \overline{EF}, \overline{AC} \cong \overline{DF}$.

Misalkan terdapat ΔABC dan ΔDEF. Dua segitiga tersebut saling kongruen. Segitiga ΔABC kongruen dengan ΔDEF disimbolkan dengan $\Delta ABC \cong \Delta\mathrm{DEF}$.

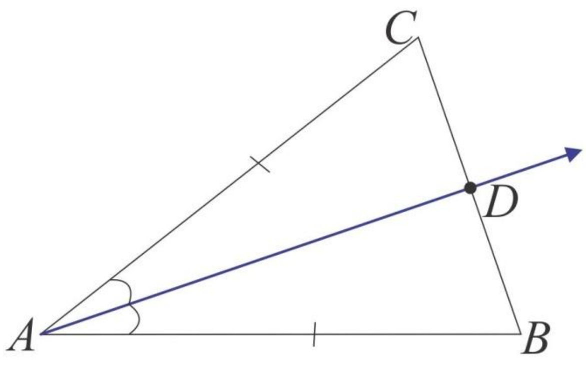
Aksioma 2.3. (Greenberg, 1993: 85) *Jika dua buah sisi dan sebuah sudut di antara sisi tersebut dari sebuah segitiga masing-masing kongruen dengan dua sisi dan sebuah sudut di antara sisi tersebut dari segitiga yang lain, maka kedua segitiga tersebut kongeruen.*

Aksioma ini selanjutnya disebut sebagai aksioma kekongruenan sisi-sudut-sisi atau juga sering disingkat menjadi S-Sd-S. Terdapat beberapa akibat dari aksioma S-Sd-S yang telah dibuktikan oleh Greenberg (1993: 86).

Teorema 2.1. (Greenberg, 1993: 86) *Jika pada* ΔABC *terdapat* $AB \cong AC$ *maka* $\angle B \cong \angle C$.

Bukti:

Misalkan terdapat segitiga ΔABC yang mana $AB \cong AC$. Akan dibuktikan bahwa $\angle ABC \cong \angle ACB$.



Gambar 32. Bukti Teorema 2.1.

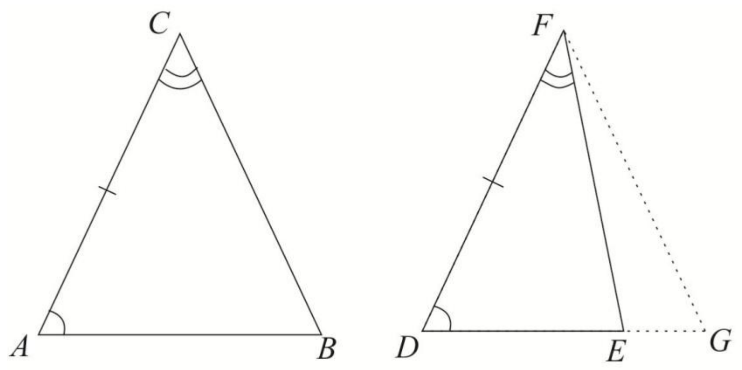
Dilukiskan sebuah garis bagi sudut *BAC*. Garis tersebut memotong $\overline{BC}$ di titik *D*, sehingga terbentuk segitiga *ADB* dan segitiga *ADC*. Seperti yang telah diketahui kedua segitiga tersebut terdapat *AB*≅*AC*. Sudut *BAD* dan *CAD* juga kongruen hal tersebut dijamin oleh definisi garis bagi sudut segitiga. Ruas garis $\overline{AD}$ merupakan sisi pada ΔADB dan ΔADC sehingga terbukti bahwa $\Delta ADB \cong \Delta ADC$. Kedua segitiga tersebut kongruen karena memenuhi kriteria kekongruenan S-Sd-S.

Segitiga ΔADB dan ΔADC saling kongruen, sehingga sudut-sudut yang bersesuaian juga kongruen. Terbukti bahwa $\angle ABC \cong \angle ACB$. ■

Teorema 2.2. Kriteria Kekongruenan Sd-S-Sd (Greenberg, 1993: 90) *Diberikan* ΔABC *dan* ΔDEF *dengan* $\angle A \cong \angle D$, $\angle C \cong \angle F$ *dan* $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ *maka* $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Bukti:

Terdapat ΔABC dan ΔDEF yang mana $\angle CAB \cong \angle FDE$, $\angle ACB \cong \angle DFE$ dan $\overline{AC} \cong \overline{DF}$. Dipilih sebuah titik *G* pada $\overrightarrow{DE}$ sedemikian sehingga $\overline{AB} \cong \overline{DG}$. Selain $\overline{AB}$ dan $\overline{DG}$ terdapat pasangan $\angle CAB$ dan $\angle FDE$ serta $\overline{AC}$ dan $\overline{DF}$ yang juga saling kongruen. Segitiga *ABC* dan segitiga *DGF* saling kongruen karena memenuhi kiteria kekongruenan S-Sd-S.



Gambar 33. Bukti Teorema 2.2.

Kekongruenan antara ΔABC dan ΔDGF memberikan informasi bahwa setiap pasang sudut dan sisi yang bersesuaian juga saling kongruen., termasuk sudut *ACB* dan sudut *DFG*. Telah diketahui di awal bahwa $\angle ACB \cong \angle DFE$, sehingga $\overline{FE}$ dan $\overline{FG}$ merupakan ruas garis yang sama. Hal ini berarti titik E dan G berimpit, karena $\Delta ABC \cong \Delta DGF$ maka $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. Terbukti bahwa jika $\angle A \cong \angle D$, $\angle C \cong \angle F$ *dan* $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ *maka* $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. ■

Teorema 2.3. Kriteria Kekongruenan S-S-S (Greenberg, 1993: 92) *Diberikan* ΔABC *dan* ΔDEF *dengan* $AB \cong DE$, $BC \cong EF$ *dan* $AC \cong DF$. *Maka* $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Sebuah segitiga siku-siku memiliki keistimewaan. Salah satu keistimewaannya berhubungan dengan kekongruenannya. Sebuah segitiga siku-siku yang hepotenusa dan salah satu sisi penyikunya kongruen maka kedua segitiga tersebut kongruen. Hal ini telah dituliskan oleh M. Fogiel (1993: 36).

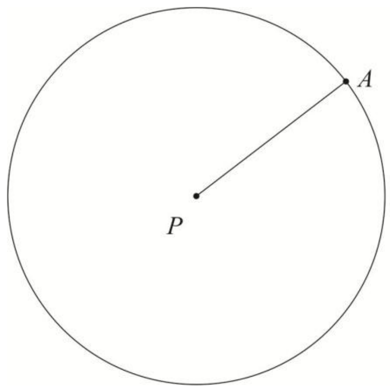
Teorema 2.4. (Fogiel, 1993: 36) *Jika hipotenusa dan sebuah sisi dari sebuah segitiga siku-siku secara berturut-turut sama dengan hepotenusa dan sisi segitiga siku-siku yang kedua, maka kedua segitiga siku-siku tersebut kongruen.*

F. Lingkaran-Luar dan Lingkaran-Dalam pada Segitiga

Geometri tidak hanya mengkaji suatu bangun datar namun juga mengkaji hubungan antar bangun datar. Salah satu yang dikaji adalah hubungan antara segitiga dengan lingkaran. Sebelum menuju hubungan antara segitiga dan lingkaran akan paparkan terlebih dahulu definisi dari lingkaran.

Definisi 2.44. (Fogiel, 1987: 72) *Sebuah lingkaran adalah himpunan titik pada bidang yang berjarak sama dari sebuah titik yang disebut pusatnya.*

Jarak titik pusat lingkaran terhadap titik-titik pada lingkaran disebut jari-jari.

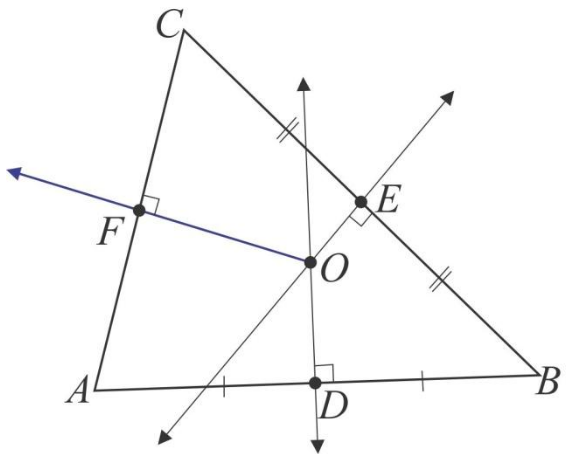


Gambar 34. Lingkaran dengan pusat *P* dan jari-jari $\overline{PA}$.

Menurut Definisi 2.41 sebuah segitiga tidak hanya memiliki sebuah garis sumbu, melainkan tiga. Hal itu dikarenakan segitiga memiliki tiga buah sisi dan setiap sisi memiliki sebuah garis sumbu. Terdapat hubungan antara ketiga garis sumbu pada segitiga tersebut.

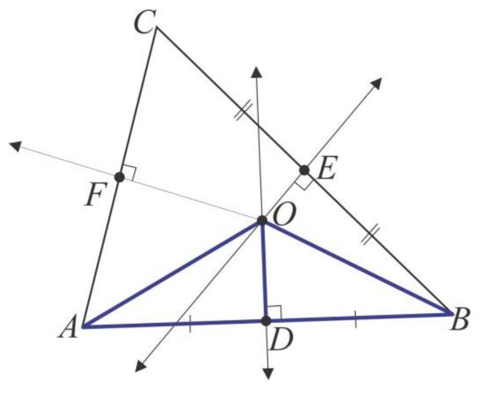
Teorema 2.5. (Smith, 2000: 159) *Garis-garis sumbu dari sisi-sisi segitiga bertemu pada sebuah titik O yang berjarak sama dari titik-titik sudutnya.*

Bukti:



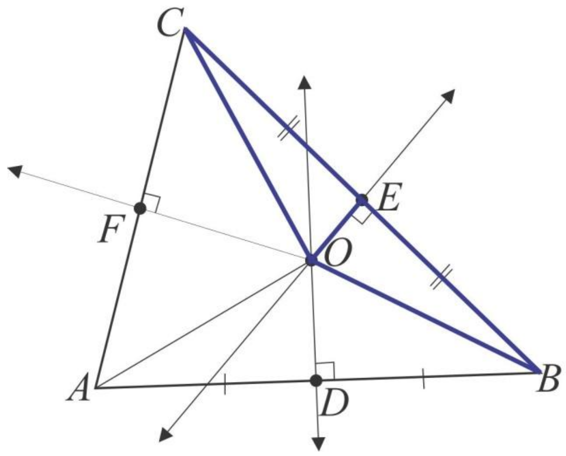
Gambar 35. Sinar garis yang memotong $\overline{AC}$ di titik *F*.

Terdapat ΔABC dan garis sumbu sisi $\overline{AB}$ yang memotong $\overline{AB}$ di titik *D* dan garis sumbu sisi $\overline{BC}$ yang memotong $\overline{BC}$ di titik *E*. Kedua garis tak sejajar tersebut bertemu di sebuah titik *O*. Dilukiskan sebuah sinar garis yang berpangkal di titik *O* dan tegak lurus sisi $\overline{AC}$. Sinar garis tersebut memotong $\overline{AC}$ di titik *F*.



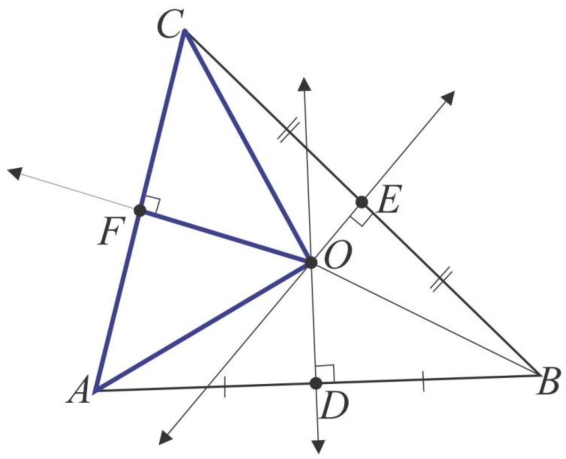
Gambar 36. Segitiga *AOD* dan segitiga *BOD*.

Terdapat ΔAOD dan ΔBOD yang kongruen karena memenuhi kriteria kekongruenan S-Sd-S. Hal itu dikarenakan $\overline{OD}$ merupakan sisi pada ΔAOD dan ΔBOD. Kedua segitiga tersebut juga memiliki sudut siku-siku, yaitu $\angle ADO$ pada ΔAOD dan $\angle BDO$ pada ΔBOD. Syarat terpenuhi kiteria kekongruenan S-Sd-S yang terakhir adalah $\overline{AD} \cong \overline{BD}$. Kekongruenan $\overline{AD}$ dan $\overline{BD}$ dikarenakan sifat garis sumbu pada segitiga.



Gambar 37. Segitiga *BOE* dan segitiga *COE*.

Seperti pada ΔAOD da*n* ΔBOD, pada ΔBOE dan ΔCOE juga terdapat $\overline{OE}$ yang merupakan sisi dari kedua segitiga. Segitiga *BOE* dan *COE* juga merupakan segitiga siku-siku. Segitiga *BOE* siku-siku di $\angle BEO$ sementara segitiga *COE* siku-siku di $\angle CEO$. Jika melihat ΔABC maka $\overline{BE}$ sama panjang dengan $\overline{CE}$ karena merupakan akibat dari sifat garis sumbu. Terbukti bahwa $\Delta BOE \cong \Delta DOE$ karena memenuhi kriteria kekongruenan S-Sd-S. Salah satu akibat dari kekongruenan ΔAOD dan ΔBOD adalah $\overline{OA} \cong \overline{OB}$. Begitu pula dengan $\overline{OB} \cong \overline{OC}$ yang merupakan salah satu implikasi dari kekongruenan antara ΔBOE dan ΔCOE. Karena $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ dan $\overline{OB} \cong \overline{OC}$ maka $\overline{OA} \cong \overline{OC}$.

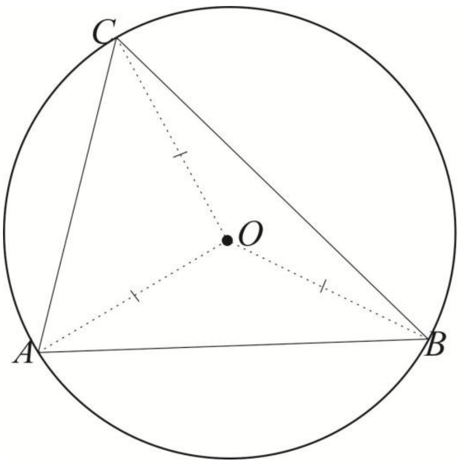


Gambar 38. Segitiga *AOF* dan segitiga *COF*.

Selain menjadi sisi dari ΔAOD, $\overline{OA}$ juga merupakan sisi pembentuk ΔAOF. Begitu juga $\overline{OC}$ yang selain menjadi sisi ΔCOE juga menjadi sisi ΔCOF. Terdapat sisi yang sama panjang pada ΔAOF dan ΔCOF yaitu $\overline{OA}$ dan $\overline{OC}$. Sisi $\overline{OF}$ merupakan sisi kedua segitiga itu, sehingga terdapat dua pasang sisi pada ΔAOF dan ΔCOF yang kongruen. Pada kedua segitiga tersebut terdapat sudut siku-siku yang masing-masing terdapat pada sudut $\angle AFO$ dan $\angle CFO$. Menurut Teorema 2.4 ΔAOF dan ΔCOF merupakan segitiga yang saling kongruen, oleh karena itu $\overline{AF}$ dan $\overline{CF}$ juga kongruen.

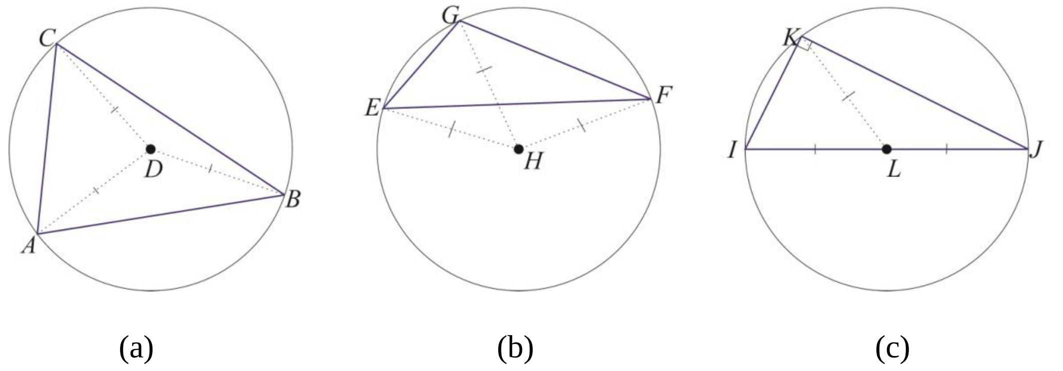
Ruas garis $\overline{AF}$ dan $\overline{CF}$ saling kongruen, sehingga dapat disimpulkan sinar garis yang berpangkal di *O* dan tegak lurus $\overline{AC}$ merupakan garis sumbu dari sisi *AC*. Berdasarkan Aksioma 2.1 karena $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ dan $\overline{OB} \cong \overline{OC}$ maka $\overline{OA} \cong \overline{OC}$. Jarak antara titik *O* dengan titik-titik sudut segitiga *ABC* sama. Terbuki bahwa garis-garis sumbu sisi-sisi segitiga melalui sebuah titik yang berjarak sama dari titik-titik sudut segitiga tersebut. ■

Berdasarkan Definisi 2.44 lingkaran merupakan himpunan titik-titik yang berjarak sama dari suatu titik tertentu. Jika *O* sebagai pusat dan panjang $\overline{AO}$ merupakan panjang jari-jarinya maka titik *A*, *B*, dan *C* terletak pada lingkaran. Lingkaran yang berpusat di *O* dan memuat *A*,*B*, dan *C* disebut lingkaran-luar *(circumcircle)* dari pada ΔABC. Ttitik *O* yang merupakan titik pertemuan tiga garis sumbu tersebut disebut pusat lingkaran-luar (*circumcenter)* dari ΔABC. Ruas garis $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, maupun $\overline{OC}$ disebut sebagai jari-jari lingkaran-luar (*circumradius).*



Gambar 39. Lingkaran-luar segitiga *ABC* dengan pusat *O*.

Setiap segitiga memiliki sebuah lingkaran-luar tetapi letak pusat lingkaran dalamnya bermacam-macam. Pada segitiga lancip pusat lingkaran-dalamnya terletak di interior segitiga. Pusat lingkaran-luar segitiga tumpul terletak pada eksterior segitiga tersebut. Hal yang menarik terjadi pada segitiga siku-siku, karena pusat lingkaran-luarnya berada pada salah satu sisi segitiga tersebut. Tepatnya terletak pada titik tengah hipotenusanya.



Gambar 40. (a) Pusat lingkaran-luar pada segitiga lancip, (b) Pusat lingkaran-luar pada segitiga tumpul, (c) Pusat lingkaran-luar pada segitiga siku-siku.

Setiap segitiga mempunya lingkaran-luar, artinya untuk setiap segitiga dapat dibuat sebuah lingkaran yang melalui titik-titik sudutnya. Sebuah segitiga memiliki tiga buah titik sudut. Hal ini berarti untuk setiap tiga titik nonkolinier dapat dibentuk sebuah lingkaran yang melalui ketiganya.

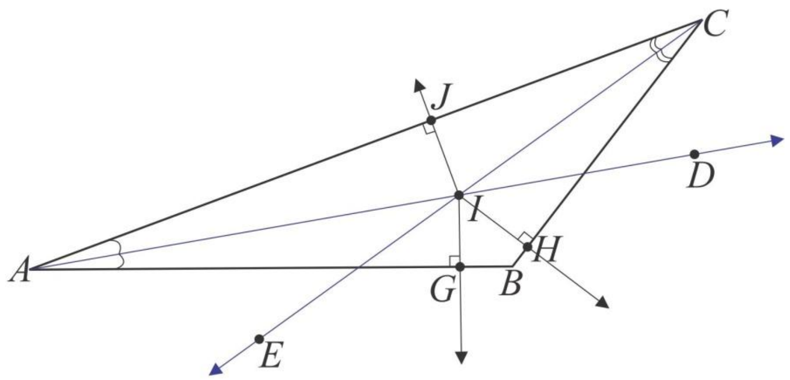
Teorema 2.6. (Smith, 2000: 159) *Untuk sebarang tiga titik nonkolinier terletak pada tepat satu lingkaran.*

Relasi antara segitiga dan lingkaran tidak hanya lingkaran-luar segitiga saja. Relasi lain antara keduanya salah satunya adalah lingkaran-dalam segitiga. Seperti garis sumbu pada segitiga, garis bagi sudut pada segitiga juga sebanyak tiga buah. Hal itu dikarenakan segitiga memiliki tiga titik sudut. Adapun hubungan antara ketiganya seperti yang disebutkan oleh Smith (2000: 159).

Teorema 2.7. (Smith, 2000: 159) *Garis-garis bagi sudut pada ΔABC bertemu pada sebuah titik interior I yang berjarak sama dari sisi-sisinya.*

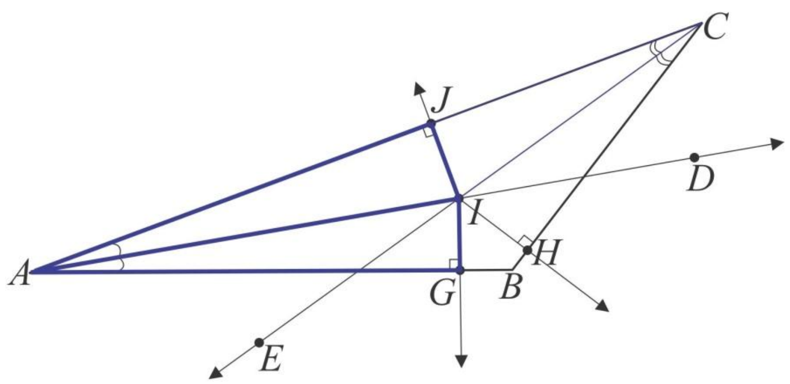
Bukti:

Terdapat ΔABC, $\overrightarrow{AD}$, dan $\overrightarrow{CF}$ dimana $\overrightarrow{AD}$ merupakan garis bagi $\angle CAB$ dan $\overrightarrow{CE}$ adalah garis bagi $\angle ACF$. Maka $\overrightarrow{AD}$ dan E akan berpotongan di sebuah titik interior *I*. Dilukiskan tiga sinar garis dari titik I dan tegak lurus sisi-sisi segitiga. Titik *G*, *H*, *J* merupakan titik perpotongan sinar garis-sinar garis tersebut berturut turut pada sisi $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, dan $\overline{AC}$.



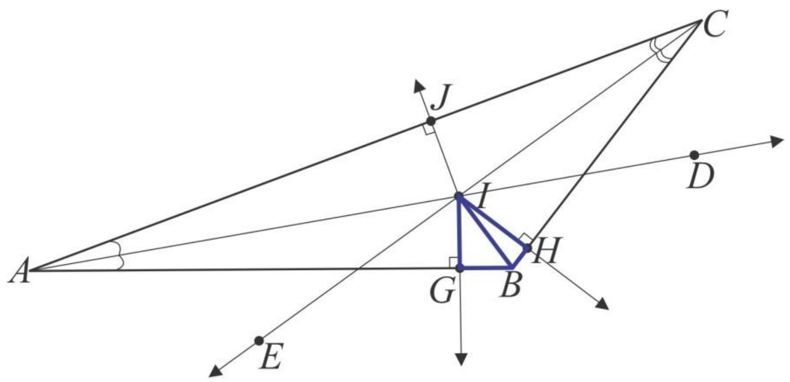
Gambar 41. Bukti teorema garis bagi segitiga.

Segitiga *CJI* dan segitiga *CHI* memerupakan pasangan segitiga yang kongruen. Kekongruenan keduanya dikarenakan kedua segitiga tersebut memenuhi kriteria kekongruenan Sd-S-Sd sesuai Teorema 2.2**.** Syarat Sd-S-Sd terpenuhi oleh $\angle JCI \cong \angle HCI$, $\overline{CI} \cong \overline{CI}$, dan $\angle CJI \cong \angle CHI$. Kekongruenan antara sudut $\angle JCI$ dan $\angle HCI$ tepenuhi akibat sifat garis bagi sudut $\angle ACB$. Akibat dari $\Delta CJI \cong \Delta CHI$ salah satunya adalah $\overline{JI} \cong \overline{HI}$.



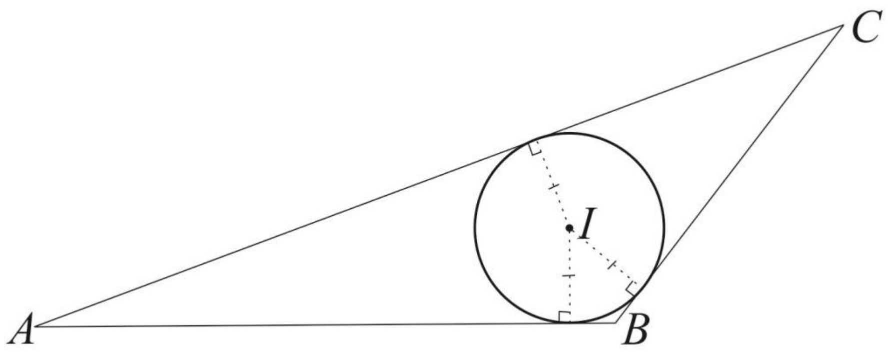
Gambar 42. Segitiga *AJI* dan segitiga *AGI*.

Cara yang sama juga dapat digunakan untuk membuktikan kekongruenan antara ΔAJI dan ΔAGI. Kriteria kekongruenan Sd-S-Sd terpenuhi oleh $\angle JAI \cong \angle GAI$, $\overline{AI} \cong \overline{AI}$, dan $\angle AJI \cong \angle AGI$. Satu implikasi dari kekongruenan dua segitiga tersebut salah satunya adalah $\overline{JI} \cong \overline{GI}$. Menurut Aksioma 2.1 jika $\overline{JI} \cong \overline{HI}$ dan $\overline{JI} \cong \overline{GI}$ maka $\overline{HI} \cong \overline{GI}$. Jarak titik I dengan $\overline{AB}, \overline{BC},$ dan $\overline{AC}$ sama, hal ini didasari oleh definisi jarak titik dan garis pada Definisi 2.26.



Gambar 43. Segitiga *BGI* dan segitiga *BHI*.

Segitiga *BGI* dan segitiga *BHI* merupakan segitiga siku-siku. Secara berturut-turut $\angle IGB$ dan $\angle IHB$ merupakan sudut siku-siku pada ΔBGI dan ΔBHI. Terdapat $\overline{BI}$ yang mana ruas garis tersebut merupakan sisi kedua segitiga itu. Telah dibuktikan pula bahwasannya $\overline{GI} \cong \overline{HI}$. Segitiga *BGI* dan segitiga *BHI* terbukti saling konguen, hal ini merujuk Teorema 2.4. Akibat dari kekongruenan dua segitiga tesebut adalah $\angle IBG \cong \angle IBH$, sehingga $\overrightarrow{IB}$ merupakan garis bagi $\angle GBH$ atau $\angle ABC$. Terbukti bahwa garis-garis bagi sudut pada ΔABC bertemu pada sebuah titik interior *I* yang berjarak sama dari sisi-sisi ΔABC. ■



Gambar 44. Lingkaran-dalam segitiga *ABC* dengan pusat titik *I*.

Lingkaran yang berpusat di I dan menyinggung ketiga sisi segitiga disebut lingkaran-dalam (*incircle)* dari ∆*ABC*. Titik *I* yang merupakan titik pertemuan tiga garis bagi sudut merupakan pusat lingkaran-dalam *incenter* dari ∆*ABC*. Jari-jari dari lingkaran tersebut disebut sebagai jari-jari lingkaran-dalam (*inradius).*

Segitiga samasisi memiliki sebuah keunikan. Segitiga ini ketiga sisinya kongruen. Hal ini mengakibatkan pusat lingkaran-luarnya juga merupakan pusat lingkaran-dalam dari segitiga tesebut.

Teorema 2.8. *Titik pusat lingkaran-luar sebuah segitiga sama sisi juga merupakan titik pusat dari lingkaran-dalam segitiga tersebut.*

Bukti:

Misalkan terdapat ΔABC dengan $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$. Titik *O* merupakan pusat lingkaran-luar dari ΔABC. Akan dibuktikan bahwa titik *O* juga merupakan titik pusat lingkaran-dalam dari ΔABC.

Titik *O* merupakan pusat lingkaran-luar, sehingga titik *O* juga merupakan titik perpotongan garis-garis sumbu ∆*ABC*. Misalkan terdapat titik *D* pada $\overline{AB}$ sedemikian hingga $\overline{AD} \cong \overline{DB}$ maka $\overleftrightarrow{OD} \perp \overline{AB}$. Sudut *ODA* dan sudut *ODB* merupakan sudut siku-siku. Titik *E* membagi $\overline{BC}$ menjadi dua ruas garis yang kongruen maka $\overleftrightarrow{OE} \perp \overline{BC}$. Sudut *OEB* dan sudut *OEC* juga merupakan sudut siku-siku. Titik D merupakan titik tengah $\overline{AB}$ serta E titik tengah $\overline{BC}$ sehingga $\overline{AD} \cong \overline{DB}$ dan $\overline{BE} \cong \overline{EC}$. Telah diketahui pula bahwa $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ maka $\overline{DB} \cong \overline{BE}$.

Segitiga *ODB* dan segitiga *OEB* merupakan segitiga siku-siku. Ruas garis *OB* merupakan sisi dari kedua segitiga tersebut. Terdapat $\overline{DB}$ dan $\overline{BE}$ yang saling kongruen. Menurut Teorema 2.4 $\Delta ODB \cong \Delta OEB$. Salah satu akibat dari kekonruenan ini adalah $\overline{OD} \cong \overline{OE}$.

Cara yang hampir sama dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa $\Delta ODA \cong \Delta OFA$. Dalam hal ini titik F merupakan titik tengah $\overline{AC}$ dan $\overleftrightarrow{OF} \perp \overline{AC}$. Akibat dari $\Delta ODA \cong \Delta OFA$ salah satunya adalah $\overline{OD} \cong \overline{OF}$.

Panjang $\overline{OD}$ merupakan jarak antara titik *O* dengan $\overline{AB}$. Begitu pula dengan panjang $\overline{OE}$ dan $\overline{OF}$ yang secara berturut-turut merupakan jarak *O* dengan $\overline{BC}$ dan $\overline{AC}$. Ruas garis *OD* kongruen dengan ruas garis *OE* serta ruas garis *OF*. Dengan kata lain jarak antara titik *O* dengan sisi-sisi ΔABC sama sehingga titik *O* merupakan pusat lingkaran-dalam ΔABC. Terbukti bahwa titik pusat lingkaran-luar sebuah segitiga sama sisi juga merupakan titik pusat dari lingkaran-dalam segitiga tersebut. ■

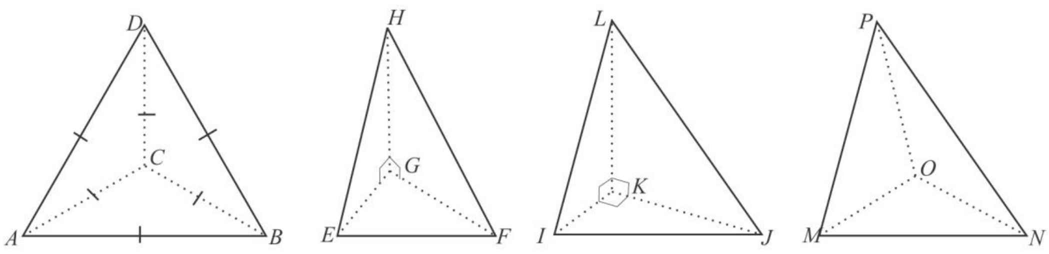
G. Bidang-Empat

Menurut A. Sardjana (2008: 5.3) limas merupakan salah satu bidang yang salah satu bidang sisinya berbentuk segibanyak dan bidang batas yang lainnya berupa segitiga-segitiga yang alasnya masing-masing merupakan sisi segibanyak dan puncak-puncak segitiga tersebut berimpit di suatu titik yang disebut titik puncak. Segi banyak pada limas disebut bidang alas. Bidang sisi yang berbentuk segitiga disebut sisi tegak. Ketika membicarakan limas maka ruas garis yang merupakan sisi segitiga selanjutnya akan disebut sebagai rusuk. Terdapat berbagai macam limas dan di antaranya ada yang disebut sebagai bidang-empat.

Definisi 2.45. (A.Sardjana, 2008: 5.5) *Bidang-empat adalah limas yang alasnya berupa segitiga.*

Disebut bidang-empat karena bangun ruang ini dibentuk oleh empat buah bidang sisi. Seluruh bidang sisinya berbentuk segitiga, sehingga setiap bidang sisi merupakan sisi alas sekaligus sisi tegak. Terdapat berbagai macam bentuk bidang-empat. A. Sardjana (2008: 5.6) mengklasifikasikan bidang-empat sebagai berikut:

1. Bidang-empat teratur adalah bidang-empat yang keempat bidang sisinya kongruen. Bidang sisinya berbentuk segitiga samasisi.
2. Bidang-empat tegak adalah bidang empat yang salah satu rusuknya tegak lurus bidang alas.
3. Bidang-empat siku-siku adalah bidang empat yang mempunyai tiga rusuk bertemu pada satu titik sudut saling tegak lurus.
4. Bidang-empat sebarang adalah bidang-empat yang tidak termasuk salah satu diatas.



(a) (b) (c) (d)

Gambar 45. (a) Bidang-empat teratur, (b) Bidang-empat tegak,(c) Bidang-empat siku-siku, (d) Bidang-empat sebarang.

Bidang-empat dengan alas ΔBCD dan titik puncak A disebut bidang-empat *A.BCD*. Pada bidang-empat seluruh bidang sisinya berbentuk segitiga sehingga setiap bidang sisi bisa sebagai bidang alas dan titik yang tidak terletak pada bidang alas merupakan puncaknya. Bidang-empat *A.BCD* dapat disebut sebagai bidang-empat *B.ACD*, bidang-empat *C.ABD*, maupun bidang-empat *D.ABC*.

H. Analogi

Merujuk tulisan Wono Setya Budhi dan Bana G. Kartasasmita (2015: 73) analogi dapat terjadi untuk benda pada bidang dan benda pada ruang. Salah satu contohnya bidang-empat pada ruang merupakan suatu analogi dari segitiga pada ruang.

Dua buah garis pada suatu bidang tidak dapat membentuk suatu daerah tertutup. Dibutuhkan tiga buah garis agar terapat menghasilkan suatu daerah tertutup pada suatu bidang. Menurut Definisi 2.31 gabungan tiga buah ruas garis tersebut disebut segitiga. Hal ini menunjukkan bahwa segitiga merupakan suatu bangun datar paling sederhana. Jika pada bidang setidaknya dibutuhkan tiga buah garis untuk membentuk sebuah daerah terbatas namun daerah terbatas pada ruang minimal membutuhkan empat buah bidang. Sebuah bangun ruang dibentuk oleh empat buah bidang adalah bidang-empat.

Hubungan antara segitiga pada bidang mirip dengan hubungan antara bidang-empat pada ruang. Segitiga merupakan bangun datar paling sederhana sedangkan bidang-empat merupakan bangun ruang yang paling sederhana. Alasan tersebut yang mendasari pernyataan Polya (1954: 14) bahwa segitiga pada bidang analogi dengan bidang-empat pada ruang.

Lingkaran pada bidang juga analogi dengan bola pada ruang. Lingkaran merupakan kumpulan titik pada bidang yang berjarak sama dari sebuah titik tertentu. Serupa dengan hal tersebut bola juga merupakan himpunan titik yang berjarak sama dari sebuah titik tertentu. Perbedaan antara keduanya yaitu sebuah bola sebuah bola titik-titik tersebut dalam lingkup sebuah ruang.

Setiap segitiga memiliki lingkaran-luar dan lingkaran-dalam. Bidang-empat merupakan analogi dari segitiga, sedangkan bola merupakan analogi dari lingkaran. Terdapat kemungkinan setiap bidang-empat juga memiliki bola-luar dan bola-dalam. Eksistensi bola-luar dan bola-dalam pada bidang-empat akan di bahas pada bab berikutnya.