BAB II
KAJIAN PUSTAKA

Pada Bab II ini akan diuraikan berbagai konsep dasar yang digunakan pada bagian pembahasan. Pada bab II ini akan dibahas pengenalan Geometri Non-Euclid, Geometri Insidensi, Geometri Euclid, Geometri Netral dan Geometri Hiperbolik.

A. Pengenalan Geometri Non-Euclid

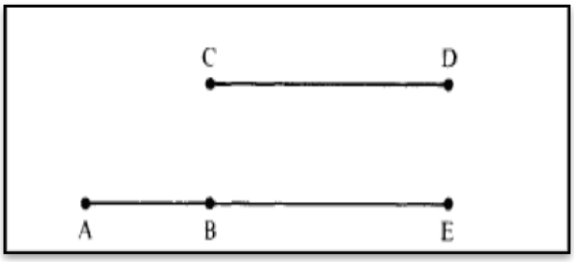
Sebelum membahas lebih jauh mengenai Geometri Non-Euclid, akan dibahas lebih dahulu mengenai karya besar Euclid yaitu "*The Elements*" atau bisa juga disebut "*Euclid's Elements*" yang terdiri atas 13 volume.

Euclid's Elements mungkin bukan sebuah karya yang sempurna, namun ia telah sukses dalam menjelaskan dasar-dasar geometri yang terdiri atas beberapa aksioma (*common notions*) dan lima kebenaran "nyata" yang dinamakan postulat (Euclid membedakan antara aksioma dan postulat). *Euclid's Elements* menjadi geometri pertama yang dipandang sebagai sistem deduksi dan bertahan selama hampir 2000 tahun (Moeharti Hadiwidjojo,1986: 1.15).

Geometri yang dikembangkan oleh Euclid disebut Geometri Euclid, dikenal juga sebagai Geometri Parabolik. Geometri Euclid didasarkan pada lima asumsi dasar yang dinamakan aksioma atau postulat (Greenberg,1994:14). Postulat dan aksioma menurut Euclid adalah dua hal yang berbeda, postulat berlaku khusus untuk sains tertentu dan aksioma berlaku umum (Moeharti Hadiwidjojo, 1986: 1.9). Berikut adalah lima asumsi dasar yang biasa disebut aksioma-aksioma atau postulat-postulat Euclid.

Aksioma 2.1 Postulat Pertama Euclid (Greenberg, 1994: 14).
Untuk setiap titik P dan setiap titik Q yang berlainan dengan P ada sebuah garis tunggal ℓ yang melalui P dan Q.

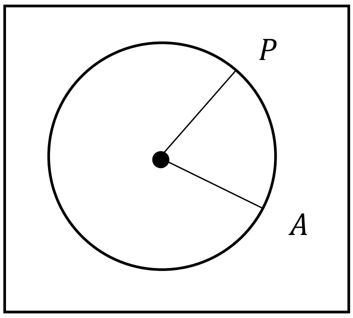
Aksioma 2.2 Postulat Kedua Euclid (Greenberg, 1994: 15).
Untuk setiap ruas garis $\overline{AB}$ dan setiap ruas $\overline{CD}$ ada sebuah titik E sehingga B berada di antara A dan E dan ruas $\overline{CD}$ kongruen dengan ruas $\overline{BE}$.



Gambar 1. Ruas Garis $\overline{CD} \cong \overline{BE}$

Postulat pertama berarti dua buah titik menentukan sebuah garis. Postulat Kedua Euclid berarti memperpanjang suatu ruas garis secara kontinu menjadi garis lurus. Gambar 1, memperlihatkan arti Aksioma 2.2 bahwa sebarang ruas garis $\overline{AB}$ dapat diperpanjang oleh ruas garis $\overline{BE}$ dengan ruas garis $\overline{BE}$ kongruen dengan ruas garis $\overline{CD}$.

Aksioma 2.3 Postulat Ketiga Euclid (Greenberg, 1994: 15).
Untuk setiap titik O dan setiap titik A tidak sama dengan O terdapat sebuah sebuah lingkaran dengan pusat O dan jari-jari OA.



Gambar 2. Lingkaran dengan Titik Pusat O dan Jari-jari $\overline{OA}$

Gambar 2 adalah gambar lingkaran dengan titik pusat O dan jari-jari $\overline{OA}$. Gambar 2 juga menunjukkan bahwa sebuah lingkaran adalah himpunan semua titik P dengan $\overline{OP} = \overline{OA}$. Lingkaran merupakan penggambaran dari Postulat Ketiga Euclid.

Aksioma 2.4 Postulat Keempat Euclid (Greenberg, 1994: 18).
Semua sudut siku-siku saling kongruen.

Kongruen pada Aksioma 2.4 berarti besar sudut suatu sudut siku-siku adalah sama besar. Besar sudut, kekongruenan, dan sudut siku dijelaskan pada subbab besar sudut dan Postulat Busur.

Definisi 2.1 Garis-garis Sejajar (Greenberg, 1994: 19).
Dua garis ℓ dan m dikatakan sejajar jika keduanya tidak berpotongan (tidak ada titik yang terletak pada keduanya). Sejajar dinotasikan dengan $\ell \parallel m$.

Aksioma 2.5 Postulat Kelima Euclid (Greenberg, 1994: 19).
Untuk setiap garis ℓ dan titik P tidak pada garis ℓ , maka terdapat dengan tepat satu garis m yang melalui titik P yang sejajar dengan garis ℓ.

Empat aksioma pertama Euclid dapat diterima oleh banyak matematikawan. Namun, Postulat Kelima Euclid (Aksioma 2.5) atau Postulat Kesejajaran Euclid merupakan postulat yang sangat kontroversional. Aksioma 2.5 adalah postulat kesejajaran versi mudah yang dikenal sebagai Postulat Playfair (Greenberg, 1994: 18-19). Secara implisit Postulat Playfair mengatakan bahwa garis-garis sejajar tersebut ada dan selalau tunggal. Para ilmuwan berselisih pendapat mengenai kemungkinan ingkaran dari Aksioma 2.5 merupakan suatu kebenaran.

Beberapa matematikawan menganggap bahwa Postulat Kesejajaran Euclid tidaklah sederhana dan berusaha membuktikan kebenaran dari ingkaran Aksioma 2.5 atau Postulat Kesejajaran Euclid. Beberapa ilmuwan lain yang mencoba membuktikan Postulat Kesejajaran Euclid adalah Proclus (410-485), Nasiruddin at Tusi (1201-1274), John Wallis (1616-1703), dan Girolamo Saccheri (1667-1733). Meski usaha pembuktian ini tidak berhasil, kegagalan dalam usaha pembuktian Postulat Kesejajaran Euclid akhirnya menuntun pada kesadaran bahwa postulat tersebut tidaklah pasti dan memungkinkan adanya teori yang lain dari geometri yang dibangun dari Postulat Kesejajaran Euclid (Greenberg, 1994: 149-155).

Pada abad ke-19, tiga ilmuwan yaitu Nikolai Ivanovich Lobachevsky, Farkas Bolyai dan Carl Friedrich Gauss mengatakan bahwa garis-garis sejajar itu ada, tetapi membantah bahwa garis-garis tersebut tunggal (Moise, 1990: 139). Lobachevsky mengatakan bahwa "untuk setiap garis ℓ dan untuk setiap titik *P* yang tidak terletak pada ℓ, ada paling sedikit dua garis *m* dan *n* sehingga *P* terletak pada m dan n dengan m dan n sejajar garis ℓ (Venema, 2012: 21).

Geometri yang didasarkan pada Postulat Kesejajaran Euclid dinamakan Geometri Euclid. Geometri yang didasarkan pada postulat kesejajaran menurut Lobachevsky kemudian dinamakan Geometri Hiperbolik. Postulat kesejajaran menurut Lobachevsky dikenal sebagai Postulat Kesejajaran Hiperbolik. Geometri Hiperbolik dahulunya dikenal sebagai Geometri Non-Euclid, kemudian Felix Klein memperkenalkannya sebagai Geometri Hiperbolik untuk membedakan penemuan geometri lainnya yang ditemukan oleh Riemann yaitu Geometri Eliptik. Sedangkan penamaan Geometri Non-Euclid berarti semua geometri yang tidak didasarkan atas Postulat Kesejajaran Euclid (Venema, 2012: 132).

B. Geometri Insidensi

Geometri Insidensi menyatakan hubungan antara sistem aksioma dan bagian-bagiannya. Setiap geometri memuat sistem aksioma yang terdiri dari istilah tak terdefinisi, definisi-definisi, aksioma, teorema, dan bukti-bukti.

Berikut penggunaan Geometri Insidensi untuk memberikan gambaran hubungan ketiga istilah tak terdefinisi yaitu titik, garis, dan terletak. Kata insiden digunakan pada istilah terletak, sehingga pernyataan "P terletak pada ℓ" dan "P insiden dengan ℓ" menyatakan hal yang sama. Aksioma untuk hubungan tersebut dinamakan aksioma insidensi. Kata insidensi dapat digunakan secara simetris semisal pada pernyataan "P insiden dengan ℓ (P terletak pada garis ℓ)" dan "ℓ insiden dengan P (garis ℓ melalui P)", sehingga keduanya menyatakan hal yang sama (Venema, 2012: 16).

Terdapat tiga aksioma insidensi yang dijelaskan pada Aksioma 2.6 berikut. Penyebutan titik P dan Q menyatakan bahwa kedua titik tersebut berbeda atau dengan kata lain P dan Q bukanlah titik yang sama.

Aksioma 2. 6 (Venema, 2012: 16).

1. *Aksioma Insidensi 1*
   Untuk setiap pasangan dari titik-titik berlainan P dan Q terdapat tepat satu garis ℓ sehingga keduanya terletak pada garis ℓ.
2. *Aksioma Insidensi 2*
   Untuk setiap garis ℓ ada paling sedikit dua titik berlainan P dan Q sehingga P dan Q terletak pada ℓ.
3. *Aksioma Insidensi 3*
   Ada tiga titik dimana ketiganya tidak berada pada satu garis yang sama.

Sistem aksiomatik dengan tiga istilah tak terdefinisi (titik, garis, dan terletak pada) dan tiga aksioma di atas dinamakan *Geometri Insidensi*. Model dari sistem aksiomatik dinamakan Geometri Insidensi dan gambaran dari istilah tak terdefinisi dinamakan *geometri* (Venema, 2012: 16).

C. Geometri Euclid

Geometri Euclid merupakan geometri yang didasarkan pada Aksioma 2.5 Postulat Kelima Euclid) atau postulat yang sepadan dan teorema yang diturunkan dari postulat tersebut. Sistem aksioma dalam karya ilmiah ini sebagian besar menggunakan pendekatan sistem aksioma yang disusun oleh Gerard A.Venema. Geometri Euclid berisikan materi mengenai istilah-istilah tak terdefinisi dan dua aksioma dasar, jarak dan Postulat Penggaris (*Ruler Postulate*), keantaraan, jarak dan Postulat Pemisahan Bidang (*Plane Separation Postulate*), Postulat Busur (*Protractor Postulate*) dan besar sudut, Teorema *Crossbar,* Teorema Pasangan Linier, Postulat Sisi-Sudut-Sisi, dan Postulat Kesejajaran Euclid.

1. Istilah Tak Terdefinisi dan Dua Aksioma Dasar

Ada beberapa istilah tak terdefinisi yaitu titik, garis, jarak, setengah bidang dan besar sudut, dan area. Pada karya tulis ini hanya dibahas mengenai lima istilah tak terdefinisi yang pertama. Area tidak dibahas dalam karya tulis ini.

Aksioma 2.7 Postulat Eksistensi (Venema, 2012: 36).
Kumpulan semua titik membentuk himpunan tak kosong. Ada lebih dari satu titik di dalam himpunan tersebut.

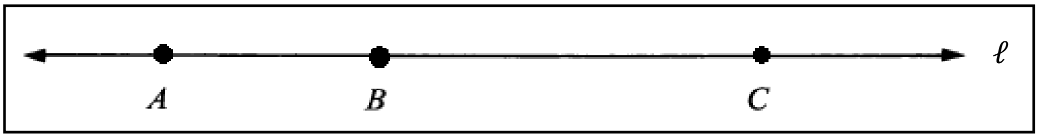
Aksioma 2.7 menyatakan hal dasar mengenai istilah tidak terdefinisi titik, yaitu titik-titik itu ada. Cukup dengan membuktikan eksistensi dari dua titik, eksistensi pada lebih banyak titik akan mengikuti.

Aksioma 2.8 Postulat Insidensi (Venema, 2012: 36).
Setiap garis terdiri atas sebuah himpunan titik, untuk sebarang pasangan dua titik berlainan A dan B ada tepat satu garis ℓ *sedemikian hingga* $A \in \ell$ *dan* $B \in \ell$.

Aksioma 2.8 menyatakan asumsi dasar mengenai istilah tak terdefinisi garis. Aksioma 2.8 sama dengan Aksioma 2.6 bagian satu pada Geometri Insidensi dan juga sama pentingnya dengan postulat pertama Euclid.

2. Keantaraan

Titik B berada di antara A dan C pada garis ℓ jika titik-titik tersebut berada pada kondisi seperti ini:



Gambar 3. Titik B berada di Antara A dan C

Gambar 3 memperlihatkan bahwa titik A dan B berada pada garis ℓ, kondisi demikian dinamakan kolinier atau segaris.

Definisi 2.2 Kolinier (Venema, 2012: 37).
Tiga garis A, B, C dikatakan kolinier jika ada satu garis ℓ sehingga A, B, C terletak pada ℓ. Titik-titik yang non kolinier adalah kebalikannya.

Titik-titik yang kolinier bisa juga disebut segaris. Selanjutnya akan dibahas mengenai keantaraan.

Definisi 2.3 Terletak (Venema, 2012: 37).
Misal A, B, dan C adalah tiga titik yang berbeda. Titik C terletak di antara A dan B, ditulis $A * C * B$, jika $C \in \overleftrightarrow{AB}$ dan $AC + CB = AB$.

Kondisi $AC + CB = AB$ pada Definisi 2.3 berimplikasi bahwa A, B, C adalah titik-titik yang kolinier. Relasi $A * B * C$ menyatakan relasi keantaraan yang berarti B berada di antara A dan C dalam suatu garis.

Sebagai gambaran umum yang berhubungan dengan keantaraan akan dibahas pula mengenai beberapa definisi yang penting.

Definisi 2.4 Ruas Garis (Venema, 2012: 37).
Ruas garis $\overline{AB}$ adalah

$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{P | A * P * B\}.$$

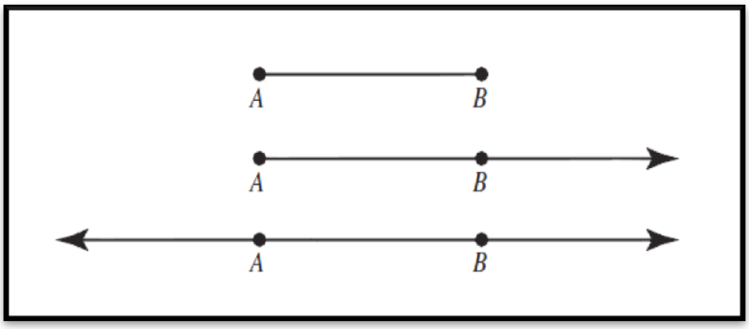
Ruas garis $\overline{AB}$ adalah himpunan gabungan dari himpunan yang memuat titik A dan titik B dan himpunan semua titik yang berada di antara titik A dan B.

Himpunan $\{A, B\}$ adalah himpunan yang beranggotakan titik A dan B. Himpunan $\{P|A * P * B\}$ adalah himpunan semua titik-titik P yang berada di antara titik A dan B.

Definisi 2.5 Sinar Garis (Venema, 2012: 37).
Sinar garis $\overrightarrow{AB}$ atau sinar garis dari A ke B adalah

$$\overrightarrow{AB} = \{A, B\} \cup \{P|A * B * P\}.$$

Sinar garis $\overrightarrow{AB}$ merupakan himpunan semua titik P pada garis $\overleftrightarrow{AB}$ sehingga A tidak berada di antara titik B dan P. Sinar garis $\overrightarrow{AB}$ memuat ruas garis $\overline{AB}$ bersama dengan semua titik yang "melebihi" B dalam artian bahwa B berada di antara A dan titik tersebut. Sedangkan garis dinotasikan sebagai $\overleftrightarrow{AB}$ menunjukkan garis yang ditentukan oleh dua titik yaitu A dan B.



Gambar 4. (a) Ruas Garis; (b) Sinar Garis; (c) Garis

Gambar 4(a) merupakan sebuah ruas garis $\overline{AB}$. Gambar 4(b) melukiskan sebuah sinar $\overrightarrow{AB}$. Gambar 4(c) menggambarkan sebuah garis $\overleftrightarrow{AB}$. Gambar 4 (c) juga menjelaskan tentang Aksioma 2.1 bahwa sebarang dua garis membentuk tepat satu garis.

Selanjutnya akan dibahas definisi panjang suatu garis, ujung suatu garis, kekongruenan garis dan titik tengah ruas garis.

Definisi 2.6 Panjang Ruas Garis (Venema, 2012: 38).
Panjang ruas garis $\overline{AB}$, dinotasikan AB, adalah jarak dari titik A ke B.

Definisi 2.7 Ujung-ujung Ruas Garis (Venema, 2012: 38).
Ujung-ujung suatu ruas garis $\overline{AB}$ adalah titik A dan titik B.

Definisi 2.8 Kekongruenan Ruas Garis (Venema, 2012: 38).
Ruas $\overline{AB}$ dan $\overline{BC}$ dikatakan kongruen jika keduanya memiliki panjang yang sama, dapat ditulis $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, dengan kata lain

$$AB = BC \Leftrightarrow \overline{AB} \cong \overline{BC}.$$

Definisi 2.9 Titik Tengah (Venema, 2012: 42).
Misal A dan B adalah dua titik berlainan. Titik M dikatakan titik tengah dari $\overline{AB}$ jika M berada di antara A dan B dan $AM = MB$.

3. Jarak dan Postulat Penggaris

Aksioma 2.9 berikut menyatakan istilah tak terdefinisi ketiga yaitu jarak. Menurut Moise (1990: 56), setiap pasang titik berkorespondensi dengan bilangan riil yang dinamakan jarak antara dua titik.

Aksioma 2.9 Postulat Penggaris (Venema, 2012: 37).
Untuk setiap pasangan titik P dan Q ada sebuah bilangan bulat PQ, dinamakan jarak P ke Q. Untuk setiap garis ℓ ada korespondensi satu-satu dari ℓ ke $\mathbb{R}$ sedemikian hingga jika P dan Q adalah titik pada garis yang sesuai dengan bilangan real x dan y, masing-masing, maka $PQ = |x - y|$.

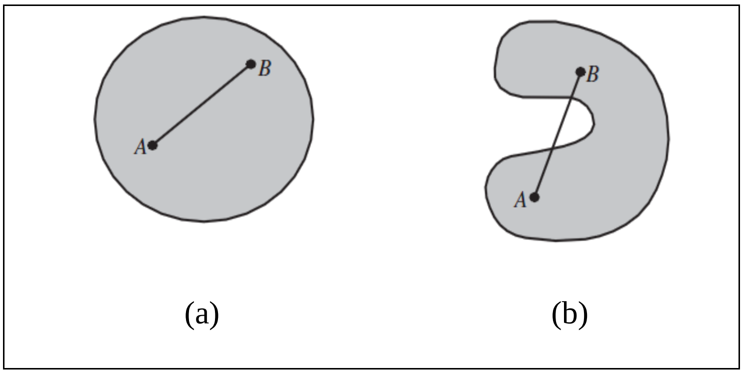
Postulat Penggaris tidak hanya menyatakan tentang ukuran jarak, tetapi juga memungkinkan untuk memperkenalkan sistem koordinat pada sebuah garis dan garis tersebut bersifat kontinu (tidak memiliki celah).

4. Postulat Pemisahan Bidang

Pada subbab ini pembahasan diawali dengan pengertian himpunan konveks, dilanjutkan dengan Aksioma Pemisahan bidang, Teorema Pasch, dan beberapa definisi terkait.

Definisi 2.10 Konveks (Venema, 2012: 46).
Himpunan titik S dikatakan konveks jika untuk setiap $P, Q \in S$, semua ruas $\overline{PQ} \in S$.

Penggambaran mengenai kekonveksan suatu bidang dapat diamati pada Gambar 2.5.



Gambar 5. (a)Bidang Konveks dan (b)Nonkonveks

Gambar 5 menggambarkan bidang konveks dan nonkonveks. Ruas $\overline{AB}$ pada Gambar 5(a) berada pada bidang S (daerah arsiran), maka S adalah bidang konveks. Ruas $\overline{AB}$ pada Gambar 5(b) tidak seluruhnya berada pada bidang S, maka bidang S bukan merupakan bidang konveks.

Selanjutnya adalah Aksioma 2.10, disebut juga sebagai Postulat Pemisahan Bidang. Postulat ini menjelaskan bagaimana sebuah garis membagi sebuah bidang menjadi setengah bidang. Aksioma ini memungkinkan untuk mendefinisikan sudut sebagai salah satu objek dasar dalam geometri.

Aksioma 2.10 Postulat Pemisahan Bidang (Venema, 2012: 46).
Untuk setiap garis ℓ, titik-titik yang tidak terletak pada ℓ membentuk dua daerah, himpunan tak kosong konveks H_1 dan H_2, dinamakan setengah bidang yang dibatasi oleh ℓ, sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut terpenuhi:

1. *Setiap H_1 dan H_2 adalah konveks*
2. *Jika $P \in H_1$ dan $Q \in H_2$, maka $\overline{PQ}$ berpotongan dengan ℓ.*

Jika P terletak pada H_1 dan dan Q terletak pada H_2, maka $\overline{PQ}$ berpotongan dengan ℓ. Bisa dikatakan bahwa P dan Q berada pada sisi yang berlawanan (opposite side).

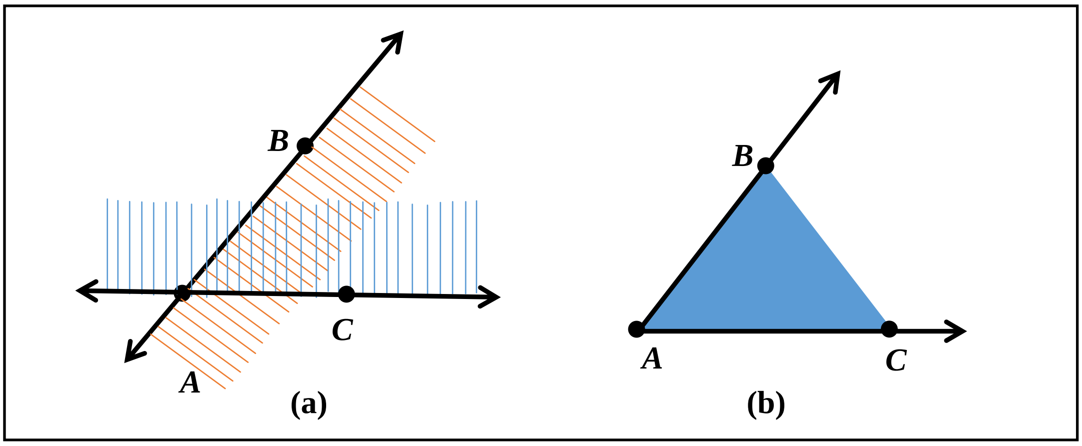
Moritz Pasch (1843-1930), memperkenalkan Teorema Pasch sebagai aksioma. Aksioma Pasch merupakan konsekuensi dari Postulat Pemisahan Bidang sehingga disajikan sebagai teorema (Venema, 2012: 51).

Teorema Pasch membutuhkan dasar teori mengenai sudut, interior sudut, keantaraan sinar garis dan segitiga.

Definisi 2.11 Sudut (Venema, 2012: 48).
Sebuah sudut adalah gabungan dari dua sinar garis tidak berlawanan $\overrightarrow{AB}$ *dan* $\overrightarrow{AC}$ *yang berbagi titik pangkal. Sudut dinotasikan dengan* $\angle BAC$ *atau* $\angle CAB$*. Titik A dinamakan titik pangkal dan sinar garis* $\overrightarrow{AB}$ *dan* $\overrightarrow{AC}$ *dinamakan sisi dari sudut.*

Sudut $\angle BAC$ ditunjukan pada Gambar 6(a), sebuah sudut memiliki interior sudut. Berikut adalah Definisi 2.12 mengenai interior sudut.

Definisi 2.12 Interior Sudut (Venema, 2012: 48).
Misal A, B, dan C adalag tiga titik sedemikian hingga sinar garis $\overrightarrow{AB}$ *dan* $\overrightarrow{AC}$ *tidak berlawanan. Interior dari sudut* $\angle BAC$ *didefinisikan sebagai berikut. Jika* $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AC}$*, maka interior* $\angle BAC$ *adalah perpotongan dari setengah bidang* H_B *yang ditentukan oleh B dan* $\overleftrightarrow{AC}$ *dan setengah-bidang* H_c *yang ditentukan oleh C dan* $\overleftrightarrow{AB}$ *(interior dari* $\angle BAC$ *adalah himpunan dari titik-titik yaitu* $H_B \cap H_c$*). Jika* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$*, maka interior dari* $\angle BAC$ *adalah sebuah himpunan kosong* $(H_B \cap H_c = \emptyset)$.



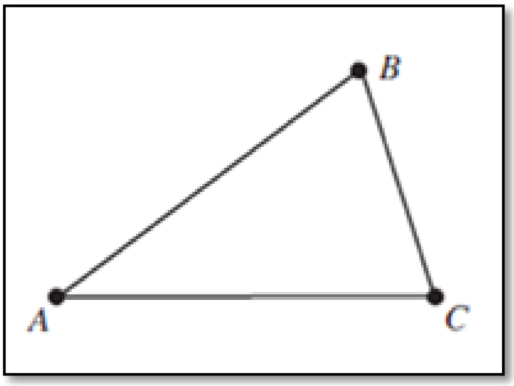
Gambar 6. (a) Irisan dua setengah bidang $H_{\overleftrightarrow{AC},B} \cap H_{\overleftrightarrow{AB},C}$,
(b) Interior Sudut $\angle BAC$

Gambar 6(a) menunjukkan irisan dua setengah bidang membentuk interior sudut, setengah bidang yang dimaksud adalah $H_{\overleftrightarrow{AB},C}$ dan $H_{\overleftrightarrow{AC},B}$. Gambar 6(b) menunjukkan interor sudut $\angle BAC$, apabila sinar garis $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ maka tidak ada interior $\angle BAC$.

Definisi 2.13 Keantaraan Sinar Garis (Venema, 2012: 49).
Sinar garis $\overrightarrow{AD}$ berada di antara $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AC}$ jika D berada pada interior $\angle BAC$.

Sebuah bangun segitiga dalam Geometri Netral digambarkan pada Definisi 2.14 berikut.

Definisi 2.14 Segitiga (Venema, 2012: 50).
Misal A, B, dan C adalah tiga titik nonkolinier. Segitiga ΔABC terdiri atas gabungan tiga Ruas garis $\overline{AB}, \overline{BC}$, dan $\overline{AC}$; sehingga $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$.



Gambar 7. Segitiga ΔABC

Gambar 7 menunjukkan sebuah segitiga dengan titik A, B dan C dinamakan titik sudut segitiga dan ruas garis $\overline{AB}, \overline{BC}$, dan $\overline{AC}$ dinamakan sisi segitiga dan sudut-sudut $\angle BAC$, $\angle ABC$, dan $\angle ACB$ sebagai sudut dalam ΔABC.

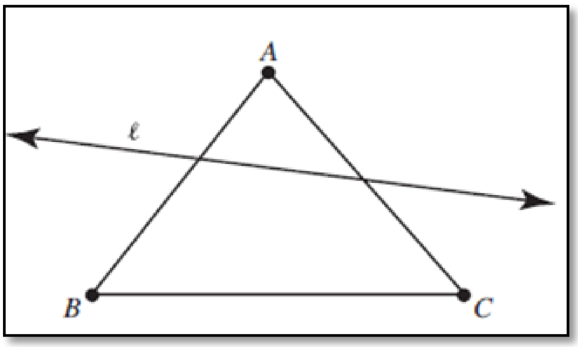
Jika sebuah garis memotong suatu sisi pada segitiga maka garis tersebut akan berpotongan dengan salah satu dari dua sisi lainnya. Hal itulah yang dijelaskan Moritz Pasch dalam teorema yang ia sebut sebagai Aksioma Pasch, meskipun dalam karya tulis ini Aksioma Pasch (1843-1940) dianggap sebagai teorema yang merupakan konsekuensi dari Postulat Pemisahan Bidang. Pada faktanya Teorema Pasch merupakan uraian dari Postulat Pemisahan Bidang dengan istilah yang berbeda (Venema, 2012: 51).

Teorema 2.1 Pasch (Venema, 2012: 51).
Misal ΔABC adalah sebuah segitiga dan misal ℓ adalah garis sedemikian hingga tak satupun dari A, B, dan C terletak pada ℓ. Jika ℓ memotong $\overline{AB}$, maka ℓ berpotongan dengan salah satu dari $\overline{AC}$ atau $\overline{BC}$.

Bukti:

Misalkan ΔABC adalah sebuah segitiga dan misal ℓ adalah garis sedemikian hingga C berpotongan dengan $\overline{AB}$ dan tak satupun dari titik A, B, dan C terletak pada ℓ.

Misal H_1 dan H_2 adalah setengah bidang yang di tentukan oleh ℓ (Postulat Pemisahan Bidang). Titik A dan B berada pada setengah bidang berlawanan sehingga $A \in H_1$ dan $B \in H_2$. Jika $C \in H_2$, maka $\overline{AC} \cap \ell \neq \emptyset$ (Aksioma 2.10 bagian 2). Jika $C \in H_1$, maka $\overline{BC} \cap \ell \neq \emptyset$ (Aksioma 2.10 bagian 2). ∎



Gambar 8. Jika ℓ memotong $\overline{AB}$, maka ℓ berpotongan dengan salah satu dari $\overline{AC}$ (atau $\overline{BC}$)

Gambar 8 melukiskan Teorema Pasch. Apabila garis ℓ berpotongan dengan $\overline{AB}$ maka ia harus berpotongan dengan $\overline{AC}$ atau $\overline{BC}$. Teorema Pasch digunakan dalam pembuktian Teorema *Crossbar*.

5. Postulat Busur (*Protractor*) dan Besar Sudut

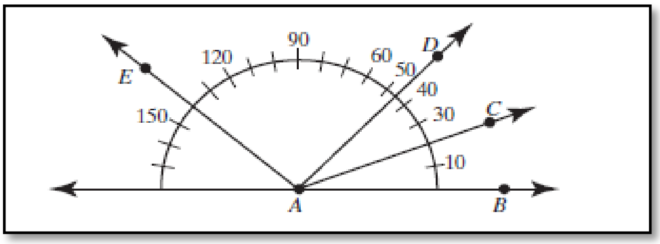
Berikut ini akan dijelaskan mengenai Postulat *Protractor* (Postulat Busur) dan pengertian pangkal besar sudut. Geometri yang memenuhi Teorema Pasch dan besar sudut memenuhi Aksioma 2.11 mengenai Postulat Busur berikut.

Aksioma 2.11 Postulat Busur (Venema, 2012: 51-52).
Untuk setiap sudut $\angle BAC$ ada bilangan real $\mu(\angle BAC)$ dinamakan besar sudut $\angle BAC$ sedemikian hingga:

1. $0 < \mu(\angle BAC) < 180°$,
2. *Besar sudut* $\mu(\angle BAC) = 0$ *jika dan hanya jika* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$,
3. *untuk setiap bilangan real* r, $0 < r < 180°$ *dan untuk setengah bidang H yang dibatasi* $\overleftrightarrow{AB}$ *ada sebuah sinar garis tunggal* $\overrightarrow{AE}$ *sedemikian hingga E berada pada H dan* $\mu(\angle BAE) = r°$,
4. *jika sinar garis* $\overrightarrow{AD}$ *berada di antara* $\overrightarrow{AB}$ *dan* $\overrightarrow{AC}$, *maka*
$$\mu(\angle BAD) + \mu(\angle DAC) = \mu(\angle BAC).$$

Bagian pertama Postulat Busur menjelaskan bahwa setiap sudut memiliki besar sudut yang merupakan bilangan real yang kurang dari 180°. Bagian tiga Postulat Busur menerangkan bahwa sinar garis $\overrightarrow{AE}$ merupakan sinar garis yang tunggal, sedangkan titik E bukan merupakan titik tunggal. Beberapa titik dapat menjelaskan satu sinar garis yang sama.

Postulat busur memungkinkan adanya pengukuran sudut. Meski besar sudut tidak didefinisikan, besar sudut dapat digambarkan dengan ilustrasi yang sesuai. Satuan besar sudut yang digunakan adalah derajat. Derajat tidak berdimensi dan besar sudut merupakan bilangan real. Derajat dilambangkan dengan simbol °.



Gambar 9. Mengukur Sudut Menggunakan Busur Sudut

Pada Gambar 9 didapat $\mu(\angle BAC) = 20°$, $\mu(\angle BAD) = 45°$, $(\angle BAE) = 140°$ dan menggunakan Aksioma 2.11 bagian empat didapat $\mu(\angle CAD) = 25°$.

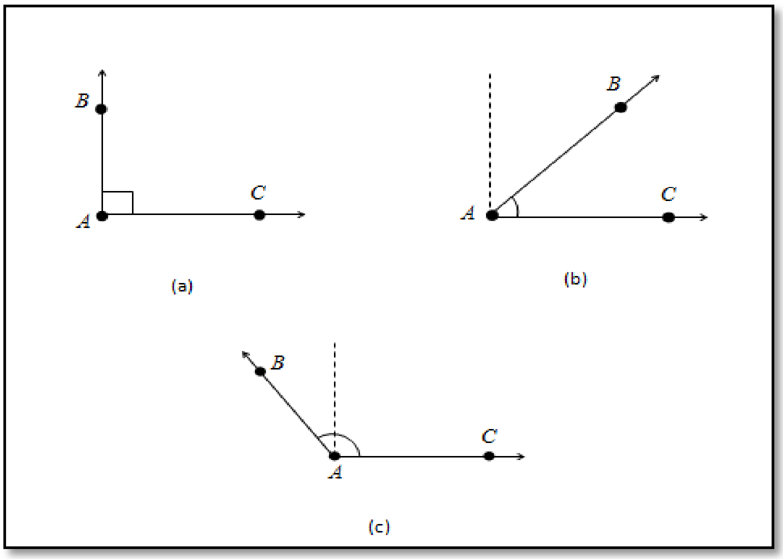
Selanjutnya akan dibahas kekongruenan sudut. Kekongruenan sudut didefinisikan menggunakan bersar sudut sebagai mana kekongruenan ruas garis didefinisikan menggunakan jarak.

Definisi 2.15 Kekongruenan Sudut (Venema, 2012: 52).
Dua sudut $\angle BAC$ dan $\angle EDF$ dikatakan kongruen, ditulis $\angle BAC \cong \angle EDF$, jika $\mu(\angle BAC) \cong \mu(\angle EDF)$.

Pemberian nama terhadap jenis-jenis sudut bergantung pada hubungan sudut tersebut terhadap sudut $90°$. Berikut adalah Definisi 2.16 mengenai pemberian nama pada jenis-jenis sudut.

Definisi 2.16 Sudut Siku-siku, Sudut Lancip, dan Tumpul (Venema, 2012: 53)
Sebuah sudut $\angle BAC$ adalah sudut siku-siku jika $\mu(\angle BAC) = 90°$, sudut $\angle BAC$ dikatakan lancip jika $\mu(\angle BAC) < 90°$ dan sudut $\angle BAC$ dikatakan tumpul jika $\mu(\angle BAC) > 90°$.

Sudut berdasarkan besar sudutnya dibagi menjadi tiga jenis yaitu: siku-siku, lancip, dan tumpul. Nama sudut menggambarkan besar sudut berdasar hubungannya dengan sudut $90°$. Penjelasan mengenai jenis sudut disajikan pada Gambar 10.



Gambar 10. (a) Sudut Siku-siku; (b) Sudut Lancip; dan
(c) Sudut Tumpul

Gambar 10 menggambarkan sudut berdasar hubungannya dengan sudut $90°$. Gambar 10 (a) sudut $\angle BAC$ memiliki sudut sebesar 90° menunjukkan sudut tersebut merupakan sudut siku-siku. Gambar 10(b) sudut $\angle BAC$ memiliki besar sudut kurang dari 90° yang menunjukkan sudut tersebut merupakan sudut lancip, Gambar 10(c), sudut $\angle BAC$ memiliki besar sudut lebih dari 90° menunjukkan sudut tersebut merupakan sudut tumpul.

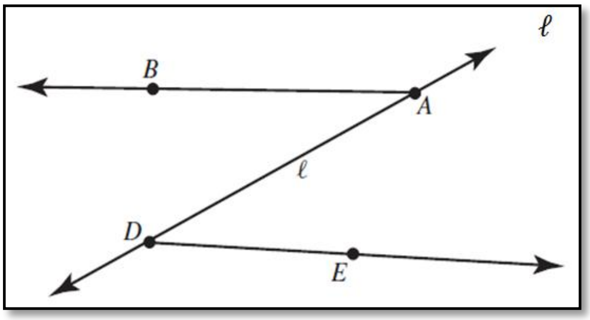
6. Teorema *Crossbar*

Pada subbab ini akan dibahas mengenai Teorama *Crossbar,* teorema ini memenuhi Teorema Pasch. Akan dibahas terlebih dahulu Teorema Z yang juga memenuhi teorema Pasch. Berikut adalah Teorema Z, pemberian nama teorema diambil karena bentuk Z pada ilustrasi. Terema Z berguna dalam pembuktian teorema *Crossbar*.

Teorema 2.2 Teorema Z (Venema, 2012: 55).
Misal ℓ adalah sebuah garis dan misal A dan D adalah titik berlainan pada ℓ. Jika B dan E adalah titik-titik pada sisi berlawanan dari ℓ, maka $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{DE} = \emptyset$.

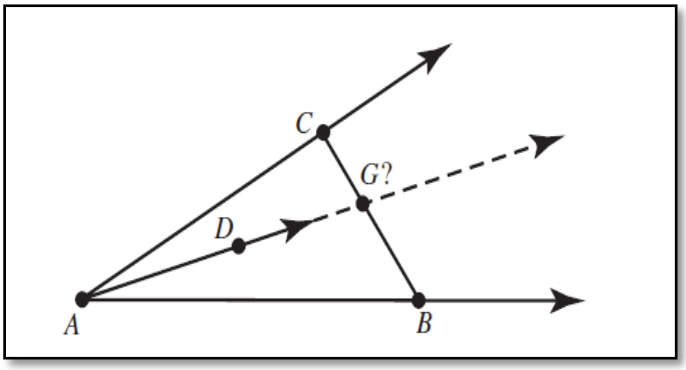
Bukti:

Kecuali titik A, semua titik pada $\overrightarrow{AB}$ terletak pada setengah bidang $H_{\ell,B}$. Kecuali titik B, semua titik pada $\overrightarrow{DE}$ terletak pada setengah bidang $H_{E,\ell}$. Menggunakan Postulat Pemisahan Bidang $H_{\ell,B} \cap H_{\ell,E} \neq \emptyset$. Satu-satunya tempat dimana sinar-sinar itu dapat berpotongan adalah pada titik ujung (A dan B), tetapi keduanya berbeda menurut pengandaian. ■



Gambar 11. Ilustrasi Teorema Z

Selanjutnya akan dibahas mengenai Teorema *Crossbar*. Teorema ini menjamin bahwa jika sebuah sinar garis terletak pada interior sebuah sudut dari sebuah segitiga, maka sinar garis tersebut akan memotong sisi yang berlawanan pada segitiga (lihat Gambar 2.12). Sisi yang berlawanan membentuk sebuah "*crossbar*" atau "palang." Berikut adalah Teorema 2.3 yang dikenal sebagai Teorema *Crossbar*.

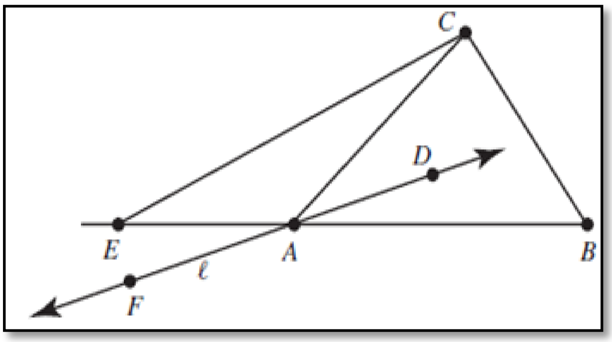


Gambar 12. Titik G Terletak pada $\overrightarrow{AD}$ dan $\overline{BC}$

Teorema 2.3 *Crossbar* (Venema, 2012: 56).
Jika ΔABC adalah sebuah segitiga dan titik D adalah titik yang terletak di interior $\angle BAC$, maka ada titik G sedemikian hingga G terletak pada $\overrightarrow{AD}$ dan $\overline{BC}$.

Bukti:

Andaikan ΔABC adalah sebuah segitiga dan misal D adalah titik yang berada pada interior $\angle BAC$. Ambil titik E dan F sehingga $E * A * B$ dan $D * A * F$ (Postulat Penggaris) dan misal $\ell = \overleftrightarrow{AD}$. Pembuktian Teorema 2.3 menggunakan Gambar 2.13 berikut.



Gambar 13. Pembuktian Teorema *Crossbar*

Karena D terletak pada interior sudut $\angle BAC$, titik B dan C tidak terletak pada ℓ. Menurut Teorema Pasch, garis ℓ memotong salah satu dari ruas garis $\overline{EC}$ stsu $\overline{BC}$ pada ΔEBC. Akan dibuktikan bahwa $\overrightarrow{AF} \cap \overline{EC} = \emptyset$, $\overrightarrow{AF} \cap \overline{BC} = \emptyset$ dan $\overrightarrow{AD} \cap \overline{EC} = \emptyset$. Ilustrasi pembuktian dapat dilihat pada Gambar 13.

Karena A berada di antara F dan D, maka F dan D terletak pada pada setengah bidang berlawanan yang dibentuk $\overleftrightarrow{AB}$ (Postulat Pemisahan Bidang). Titik C dan D berada setengah bidang yang dibentuk $\overleftrightarrow{AB}$ (D terletak pada interior sudut $\angle BAC$), jadi C dan F berada pada setengah bidang berlawanan yang dibentuk $\overleftrightarrow{AB}$ (Postulat Pemisahan Bidang).

Dengan demikian, $\overrightarrow{AF} \cap \overrightarrow{\mathrm{EC}} = \emptyset$ (Teorema Z). Karena $\overline{EC}$ adalah himpunan bagian dari $\overrightarrow{EC}$, didapat $\overrightarrow{AF} \cap \overline{EC} = \emptyset$.

Titik C dan F berada pada setengah bidang berlawanan yang dibentuk $\overleftrightarrow{AB}$. Dengan demikian, $\overrightarrow{BC} \cap \overrightarrow{AF} = \emptyset$ (Teorema Z). Karena $\overline{BC}$ adalah himpunan bagian dari $\overrightarrow{BC}$, didapat $\overrightarrow{AF} \cap \overline{BC} = \emptyset$.

Titik A berada di antara E dan B, Jadi E dan B terletak pada setengah bidang berlawanan yang dibentuk $\overleftrightarrow{AC}$ (Postulat Pemisahan Bidang). Titik B dan D berada pada setengah bidang yang sama yang dibentuk $\overleftrightarrow{AC}$ (D terletak pada interior sudut $\angle BAC$), jadi titik E dan D berada pada setengah bidang yang berlawanan yang dibentuk $\overleftrightarrow{AC}$ (Postulat Pemisahan Bidang). Dengan demikian, $\overrightarrow{CE} \cap \overrightarrow{AD} = \emptyset$ (Teorema Z). Karena $\overline{CE}$ adalah himpunan bagian, didapat $\overrightarrow{AD} \cap \overline{EC} = \emptyset$. ■

Selanjutnya akan dibahas mengenai Teorema 2.4. Teorema ini merupakan teorema yang dikemukakan oleh MacLane sebagai "Aksioma Kekontinuan." Pada Teorema Maclane berlaku Teorema *Crossbar*.

Teorema 2.4 (Venema, 2012: 57).
Sebuah titik D berada pada interior $\angle BAC$ jika dan hanya jika sinar garis $\overrightarrow{AD}$ memotong interior $\overline{BC}$.

Bukti:

($\Rightarrow$)Misalkan D adalah interior $\angle BAC$. Maka menurut Teorema *Crossbar*, $\overrightarrow{AD}$ berpotongan dengan $\overline{BC}$.

Karena titik potong terletak pada sinar garis yang berada pada interior $\angle BAC$. Titik perpotongan tersebut tidak terletak pada ujung-ujung dari ruas garis $\overline{BC}$. Jadi titik perpotongan terletak pada interior $\overline{BC}$.

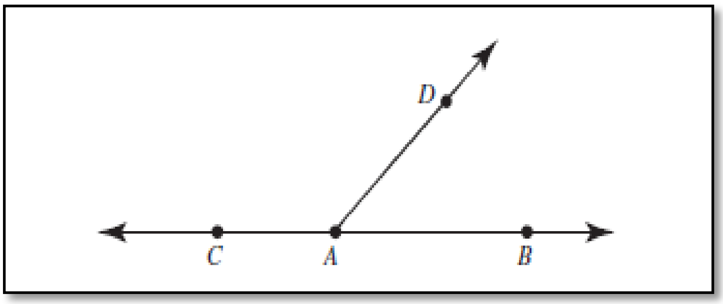
(⇐)Misalkan $\overrightarrow{AD}$ berpotongan dengan interior $\overline{BC}$. Ambil titik E sebagai titik potong.

Karena titik E berada diantara titik B dan C atau dinotasikan sebagai $B * E * C$, berlaku $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AE} * \overrightarrow{AC}$. Karena itu $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}$ terletak pada interior sudut $\angle BAC$. Karenanya D terletak pada interior $\angle BAC$. ■

7. Teorema Pasangan Linier

Teorema utama yang kedua setelah teorema *Crossbar* adalah teorema pasangan linier yang merupakan generalisasi dari bagian keempat postulat Busur (Aksioma 2.11). Teorema Pasangan Linier dikenal sebagai Postulat Suplemen.

Definisi 2.17 Pasangan Linier (Venema, 2012: 58).
Dua buah sudut $\angle BAD$ dan $\angle DAC$ membentuk sebuah pasangan linier jika $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AC}$ merupakan sinar-sinar yang saling berlawanan.



Gambar 14. Sudut $\angle BAD$ dan $\angle DAC$ Membentuk Sebuah Pasangan Linier

Sesuai dengan Definisi 2.17, Gambar 14 menggambarkan dua buah sudut membuat pasangan linier dimana sinar garis $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AC}$ merupakan sinar garis berlawanan (Teorema 2.2).

Teorema 2.5 Pasangan Linier (Venema, 2012: 58).
Jika sudut $\angle BAD$ *dan* $\angle DAC$ *membentuk sebuah pasangan linier, maka* $\mu(\angle BAD) + \mu(\angle DAC) = 180$.

Definisi 2.18 Suplemen (Venema, 2012: 58).
Sudut $\angle BAC$ *dan* $\angle EDF$ *saling bersuplemen jika* $\mu(\angle BAC) + \mu(\angle EDF) = 180$.

Teorema pasangan linier dapat artikan sebagai "jika dua sudut membentuk sebuah pasangan linier, maka keduanya saling bersuplemen." Sudut yang saling bersuplemen belum tentu berpasangan linier. Berpasangan linier juga berarti kedua sudut harus berbagi sebuah sisi.

Definisi 2.19 Tegak Lurus (Venema, 2012: 60).
Dua garis ℓ *dan* m *saling tegaklurus jika ada sebuah titik A yang terletak pada* ℓ *dan* m *dan ada sebuah titik* $B \in \ell$ *dan* $C \in m$ *sehingga* $\angle BAC$ *adalah sudut siku-siku. Garis* ℓ *dan* m *saling tegaklurus dinotasikan dengan* $\ell \perp m$.

Selanjutnya akan dibahas mengenai dua sudut siku-siku yang berpasangan linier. Kedua sudut itu membentuk garis-garis yang saling tegaklurus. Garis tegaklurus yang terbentuk merupakan garis yang tunggal.

Teorema 2.6 (Venema, 2012: 60).
Jika ℓ *adalah sebuah garis dan P adalah sebuah titik terletak pada* ℓ, *maka ada paling banyak satu garis* m *sehingga P terletak pada* m *dan* $\ell \perp m$.

8. Postulat Sisi-Sudut-Sisi (Postulat S-Sd-S)

Pada bagian akan dijelaskan lebih jauh mengenai keterkaitan antara jarak (panjang dari ruas), besar sudut, segitiga, dan Postulat Sisi-Sudut-Sisi.

Segitiga (Definisi 2.14) adalah bentuk geometri yang merupakan kombinasi paling sederhana dari ruas garis dan sudut. Berikut definisi penting mengenai segitiga.

Definisi 2.20 Kekongruenan Segitiga (Venema, 2012: 63).
Dua segitiga dikatakan kongruen apabila sudut-sudut pada segitiga yang bersesuaian kongruen dan sisi-sisi yang bersesuaian kongruen.

Salah satu teorema paling mendasar pada geometri adalah kongruensi segitiga dengan kondisi Sisi-Sudut-Sisi (S-Sd-S). Teorema Pasch yang dilengkapi dengan besar sudut memenuhi Postulat Busur dan Postulat Busur yang memenuhi Postulat S-Sd-S memenuhi Geometri Netral.

Aksioma 2.12 Postulat Sisi-Sudut-Sisi (Venema, 2012: 64).
Jika ΔABC dan ΔDEF adalah dua segitiga sedemikian sehingga $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle ABC \cong \angle DEF$, dan $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, maka $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

9. Postulat Kesejajaran Euclid

Postulat Kelima Euclid (Aksioma 2.5) merupakan postulat yang mendasari Geometri Euclid. Postulat Kelima Euclid disebut juga Postulat Kesejajaran Euclid. Pengertian garis sejajar dapat dilihat pada Definisi 2.1.

Beberapa matematikawan menemukan padanan dari Postulat Kesejajaran Euclid, salah satunya adalah John Playfair dan John Wallis. John Playfair menemukan Postulat Playfair dan Wallis menemukan sebuah Postulat. Postulat Wallis menurut Greenberg (1994: 152) Jika ΔABC adalah segitiga dan $\overline{DE}$ adalah sebuah ruas garis, maka ada sebuah titik F dimana $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. Geometri Euclid memenuhi Geometri netral ditambah dengan Postulat Kesejajaran Euclid.

D. Geometri Netral

Geometri Netral (terkadang disebut sebagai geometri absolut) merupakan dasar-dasar geometri, Geometri Netral didasarkan kepada empat postulat pertama Euclid. Geometri Netral berlaku bagi Geometri Euclid maupun Hiperbolik.

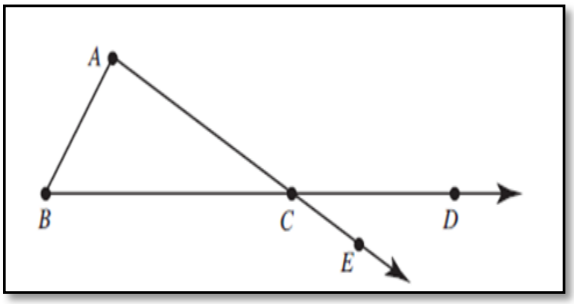
Geometri Netral merupakan geometri yang memenuhi enam postulat yang telah disebutkan yaitu postulat eksistensi, Postulat Insidensi, Postulat Penggaris, Postulat Pemisahan Bidang, Postulat Busur dan Postulat Sisi-Sudut-Sisi.

Dalam subbab ini disajikan sifat pada Geometri Netral yang berkaitan dengan Geometri Hiperbolik yaitu sifat-sifat segiempat Saccheri dan Lambert.

1. Teorema Sudut Luar

Teorema Sudut Luar adalah teori dasar yang penting bagi Geometri Netral. Definisi 2.21 berikut mengenai sudut interior jauh yang menjadi dasar teori dari Teorema Sudut Luar.

Definisi 2.21 Sudut Interior Jauh (Venema, 2012: 70).
Misal ΔABC adalah segitiga. Sudut $\angle CAB, \angle ABC,$ $\angle BCA$ dinamakan sudut interior dari segitiga. Sudut yang membentuk pasangan linier dengan satu dari sudut interior dinamakan sudut luar dari segitiga, jika sudut luar membentuk pasangan linier dengan sudut interior dalam satu titik sudut, maka kedua sudut interior lainya merupakan sudut interior jauh (remote interior angles).



Gambar 15. Sudut Luar dan Sudut Interior Jauh pada Segitiga ΔABC

Gambar 15, memperlihatkan sudut $\angle ACD$ dan $\angle BCE$ sebagai sudut luar dengan $\angle BAC$ dan $\angle ABC$ merupakan sudut interior jauh untuk ΔABC pada titik sudut C.

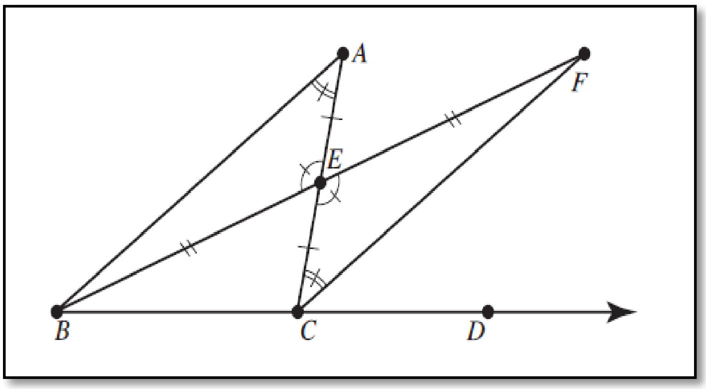
Teorema 2.7 Teorema Sudut Luar (Venema, 2012: 71).
Besar sudut luar dari sebuah segitiga lebih besar daripada besar sudut interior jauh.

Teorema 2.7 dapat diartikan, jika ΔABC adalah segitiga dengan D adalah sebuah titik sedemikian hingga $\overrightarrow{CD}$ berlawanan dengan $\overrightarrow{CB}$, maka $\mu(\angle DCA) > \mu(\angle BAC)$ dan $\mu(\angle DCA) > \mu(\angle ABC)$.

Bukti:

Andaikan ΔABC adalah segitiga dengan D adalah sebuah titik sedemikian hingga $\overrightarrow{CD}$ berlawanan dengan $\overrightarrow{CB}$. Akan dibuktikan bahwa $\mu(\angle DCA) > \mu(\angle BAC)$ dan $\mu(\angle DCA) > \mu(\angle ABC)$.

Misal E adalah titik tengah dari $\overline{AC}$ dan pilih F sebuah titik pada $\overrightarrow{BE}$ sehingga $\overline{BE} \cong \overline{EF}$. Sudut $\angle BEA \cong \angle FEC$ (sudut bertolak belakang sama besar). Karenanya $\Delta BEA \cong \Delta FEC$ (Postulat S-Sd-S), jadi $\angle FCA \cong \angle BAC$ (Definisi 2.20 mengenai segitiga yang saling kongruen). Gambar 16 berikut merupakan alat bantu pembuktian Teorema Sudut Luar.



Gambar 16. Pembuktian Teorema Sudut Luar

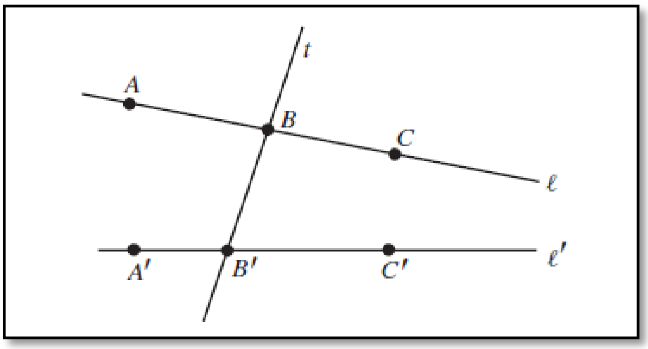
Titik F dan B terletak pada setengah bidang berlawanan yang dibentuk $\overleftrightarrow{AC}$, titik B dan D berada pada setengah bidang berlawanan yang dibentuk $\overleftrightarrow{AC}$, sehingga F dan D berada pada setengah bidang yang sama (Postulat pemisahan Bidang). Titik A dan E berada pada setengah bidang yang sama yang dibentuk oleh $\overleftrightarrow{\mathrm{CD}}$, titik A dan F berada pada setengah bidang yang sama yang dibentuk $\overleftrightarrow{\mathrm{CD}}$ (Postulat Pemisahan Bidang). Titik F berada pada interior $\angle$ACD (definisi interior sudut). Karenanya $\mu(\angle DCA) > \mu(\angle FCA)$. Sehingga $\mu(\angle DCA) > \mu(\angle BAC)$.

Selanjutnya pembuktian $\mu(\angle DCA) > \mu(\angle ABC)$ merupakan analog. Sinar garis $\overrightarrow{CG}$ adalah sinar garis yang berlawanan dengan sinar $\overrightarrow{CA}$. Sudut $\angle GCB$ sebagai sudut yang bertolak belakang dengan $\angle ACD$. ■

2. Teorema Sudut Dalam Berseberangan

Teorema mengenai sudut dalam berseberangan adalah teorema yang penting dalam Geometri Netral. Sebagai dasar diberikan definisi tranversal.

Definisi 2.22 Tranversal (Venema, 2012: 82).
Misalkan ℓ dan ℓ' adalah dua garis berbeda. Garis lainya yaitu t dikatakan tranversal untuk ℓ dan ℓ' jika ada titik B (titik potong ℓ dengan t) dan titik B' (titik potong ℓ' dengan t).



Gambar 17. Garis Tranversal t Memotong Garis ℓ dan ℓ' di Titik B dan B'

Jika diperhatikan pada Gambar 2.17, garis tranversal membentuk delapan sudut. Empat sudut yaitu $\angle ABB'$, $\angle A'B'B$, $\angle BB'C$, dan $\angle B'BC'$ disebut sudut dalam, empat sudut lainya disebut sudut luar. Dua sudut yang berpasangan yaitu $\{\angle ABB', \angle BB'C'\}$ dan $\{\angle A'B'B, \angle BB'C\}$ disebut sudut dalam berseberangan.

Berikut adalah Teorema 2.8 mengenai sudut dalam berseberangan. Teorema 2.8 berlaku pada Geometri Netral, artinya teorema berlaku untuk Geometri Euclid dan Geometri Hiperbolik.

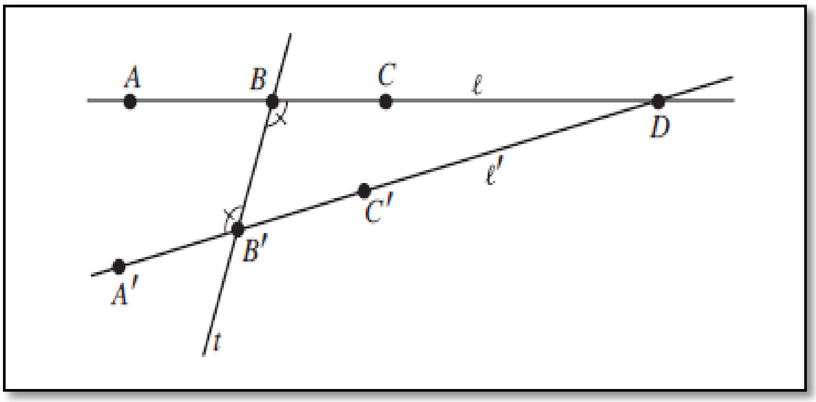
Teorema 2.8 Sudut Dalam Berseberangan (Venema, 2012: 82).
Jika ℓ dan ℓ' adalah dua garis yang dipotong oleh sebuah tranversal t sedemikian hingga sepasang sudut dalam berseberangan yang bersesuaian kongruen, maka ℓ sejajar dengan ℓ'.

Bukti:

Andaikan ℓ dan ℓ' adalah dua garis yang dipotong oleh sebuah tranversal t sedemikian hingga sudut dalam berseberangannya kongruen. Ambil titik A, B, C dan A', B', C' sebagaimana dalam konstruksi pada Definisi 2.22. Ada $\angle A'B'B$ dan $\angle B, BC$. Akan dibuktikan $\ell \parallel \ell'$.

Andaikan ada titik D sehingga D terletak pada ℓ dan ℓ'. Jika diperhatikan pada Gambar 2.18, jika titik D terletak pada setengah bidang $H_{t,C}$, maka $\angle A'B'B$ adalah sudut luar untuk $\Delta BB'D$ dengan $\angle B'BC$ adalah sudut dalam jauh. Hal ini berlawanan dengan Teorema Sudut Luar.

Jika D terletak pada setengah bidang $H_{t,A}$, maka $\angle B'BC$ adalah sudut luar dan $\angle A'B'B$ adalah sudut dalam jauh untuk segitiga $\Delta BB'D$ dan didapat kontradiksi. Karena D haruslah terletak pada salah satu setengah bidang yang dibentuk t (Postulat Pemisahan Bidang), dengan bukti yang ada maka pengandaian ditolak.■



Gambar 18. Ilustrasi Pengandaian pada Pembuktian Teorema 2.8
(Terdapat titik D yang Memotong ℓ dan ℓ')

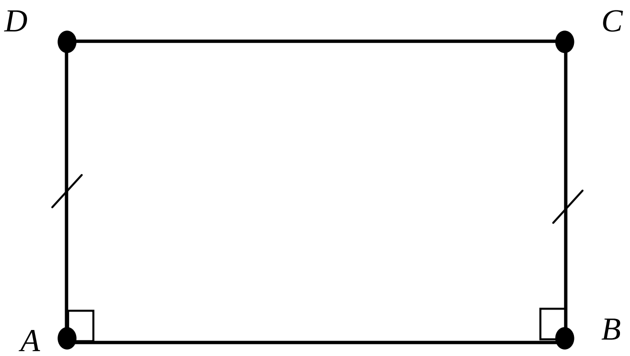
Pada Geometri Euclid berlaku Teorema 2.8 tanpa syarat tertentu. Pada bagian pembahasan akan dibuktikan bahwa Teorema 2.8 berlaku dengan syarat tertentu pada Geometri Hiperbolik. Hal ini terjadi karena perbedaan postulat kesejajaran yang berlaku pada masing-masing geometri.

3. Segiempat Saccheri

Dalam Geometri Netral tidak terdapat persegi. Adanya persegi ekuivalen dengan mengasumsikan bahwa Postulat Kesejajaran Euclid benar dalam Geometri Netral. Pada faktanya, Geometri Netral adalah geometri tanpa postulat kesejajaran. Dalam Geometri Netral terdapat segiempat yang memiliki dua sudut siku-siku dan segiempat dengan tiga sudut siku-siku.

Segiempat Saccheri ditemukan kembali oleh Giovanni Saccheri berdasarkan penemuan terdahulu yang ditemukan oleh Umar Kayyam (1048-1131) dan Nasiruddin At-Tusi (1201-1274). Umar Khayyam memperkenalkan aksioma yang lebih mudah difahami daripada Postulat Kelima Euclid (Venema, 2012:132). Segiempat Saccheri merupakan segiempat yang memiliki dua sudut siku-siku dengan sepasang sisi tegaknya sama panjang dan tegaklurus terhadap alasnya. Definisi 2.23 berikut menjelaskan segiempat Saccheri.

Definisi 2.23 Segiempat Saccheri (Venema, 2012: 102).
Sebuah segiempat Saccheri adalah $\boxed{S}\ ABCD$ *sehingga* $\angle ABC$ *dan* $\angle DAB$ *adalah sudut siku-siku dan* $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. *Ruas* $\overline{AB}$ *dinamakan sebagai sisi alas dari segiempat Saccheri dan ruas* $\overline{CD}$ *dinamakan sebagai sisi puncak. Dua sudut yaitu* $\angle ABC$ *dan* $\angle DAB$ *dinamakan sebagai sudut alas dari segempat Saccheri dan sudut* $\angle CDA$ *dan* $\angle BCD$ *dinamakan sebagai sudut puncak dari segiempat Saccheri. Segiempat Saccheri dinotasikan dengan* $\boxed{S}$.



Gambar 19. Segiempat Saccheri pada Geometri Netral

Pada Gambar 19 terlihat bahwa $\angle ABC$ dan $\angle DAB$ merupakan sudut siku atau $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ dan $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Pada segiempat Saccheri juga berlaku $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. Sedangkan besarnya sudut $\angle ADC$ *dan* $\angle BCD$ dan sifat lain dari segiempat Saccheri pada Geometri Netral dibahas pada Teorema 2.9 berikut.

Teorema 2.9 Sifat Segiempat Saccheri (Venema, 2012: 103).
Jika $\boxed{S}\,ABCD$*adalah segiempat Saccheri dengan sisi alas* $\overline{AB}$*, maka*

1. *diagonal* $\overline{AC}$ *dan* $\overline{BD}$ *kongruen,*
2. *sudut puncak* $\angle CDA$ *dan* $\angle BCD$ *kongruen,*
3. *ruas garis yang menghubungkan titik tengah dari* $\overline{AB}$ *dan* $\overline{CD}$ *tegaklurus terhadap keduanya,*
4. $\boxed{S}\,ABCD$ *adalah sebuah parallelogram,*
5. $\boxed{S}\,ABCD$*dalah segiempat konveks, dan*
6. *Sudut puncak* $\angle CDA$ *dan* $\angle BCD$ *keduanya siku-siku atau lancip.*

Segiempat Saccheri berperan dalam pembuktian adanya suatu garis tegaklurus persekutuan yang akan dibahas pada pembahasan.

4. Segiempat Lambert

Segiempat Lambert ditemukan kembali oleh Johann Lambert (1728-1777), merupakan segiempat yang dikembangkan dari segiempat Saccheri. Segiempat Lambert memiliki tiga sudut siku-siku dengan sepasang sisi tegaknya tidak sama panjang dan tegaklurus terhadap alasnya. Definisi 2.24 berikut menjelaskan segiempat Lambert.

Definisi 2.24 Segiempat Lambert (Venema, 2012: 102).
Sebuah segiempat Lambert adalah segiempat dimana tiga sudutnya merupakan sudut siku-siku. Segiempat Lambert dinotasikan dengan $\boxed{L}$.

Gambar 20. Segiempat Lambert pada Geometri Netral

Gambar 20 $\boxed{L}\,ABCD$ adalah segiempat Lambert. Segiempat Lambert memiliki tiga sudut siku-siku dan sudut keempatnya merupakan siku atau lancip. Pada segiempat Lambert berlaku teorema berikut.

Teorema 2.10 Sifat Segiempat Lambert (Venema, 2012: 103).
Jika $\boxed{L}\,ABCD$adalah segiempat Lambert dengan sudut siku-siku berada di $\angle ABC, \angle CDA$ dan $\angle BCD$, maka

1. $\boxed{L}\,ABCD$adalah sebuah *jajaran genjang,*
2. $\boxed{L}\,ABCD$dalah segiempat konveks,
3. $\angle ADC$ adalah sudut siku-siku atau lancip, dan
4. $BC \leq AD$.

Segiempat Lambert dan Saccheri sangat berperan dalam penemuan Geometri Hiperbolik, terutama pada penemuan klasifikasi garis-garis sejajar. Pada pembahasan, segiempat Lambert menjadi alat bantu pembuktian suatu garis ultraparalel.

E. Geometri Hiperbolik

Geometri Hiperbolik adalah geometri yang didasarkan pada enam postulat pada Geometri Netral dan postulat Kesejajaran Hiperbolik. Geometri Hiperbolik memiliki nama lain yaitu geometri Lobachevsky diambil nama profesor matematika Rusia, Nicolai Ivanovich Lobachevsky dari Universitas Kazan.

Model pada Geometri Hiperbolik tidak disampaikan pada karya tulis ini, Geometri Hiperbolik yang dimaksud adalah Geometri Hiperbolik yang didasarkan pada sistem aksioma.

Aksioma 2.13 Postulat Kesejajaran Hiperbolik (Venema, 2012: 21).
Untuk setiap garis ℓ adan untuk setiap titik P yang tidak terletak pada ℓ, ada paling sedikit dua garis m dan n sehingga P terletak pada m dan n dan m dan n sejajar dengan ℓ.

Postulat kesejajaran Hiperbolik pada dasarnya merupakan ingkaran dari Postulat Kesejajaran Euclid. Hal tersebut ditegaskan dengan Teorema 2.11 berikut.

Teorema 2.11 (Venema, 2012: 105)
Postulat Kesejajaran Hiperbolik setara dengan ingkaran dari Postulat Kesejajaran Euclid.

Bukti:

Teorema 2.11 dapat diartikan sebagai "apabila Postulat Kesejajaran Euclid maka Postulat Kesejajaran Hiperbolik benar."

Asumsikan bahwa Postulat Kesejajaran Euclid salah. Maka persegi panjang (*rectangle*) tidak ada. Hal tersebut bertolak belakang dengan Aksioma Clairaut pada Geometri Euclid yang mengatakan bahwa "ada persegi panjang." Dalam Geometri Hiperbolik tidak terdapat persegi panjang sehingga Postulat Kesejajaran Euclid salah dan Postulat Kesejajaran Hiperbolik benar. ■

Postulat Kesejajaran Hiperbolik setara dengan ingkaran dari Postulat Kesejajaran Euclid. Model dari Geometri Netral berlaku untuk Postulat

Kesejajaran Hiperbolik maupun Euclid. Perbedaan pada kedua sistem geometri ini muncul akibat dua postulat yang mendasari kedua geometri ini. Konsep garis-garis tegaklurus, garis-garis sejajar dan segitiga pada Geometri Hiperbolik memiliki kesamaan dan perbedaan dengan Geometri Euclid yang telah lebih dahulu dipelajari dan mudah diterima. Konsep-konsep tersebut akan dibahas pada bab pembahasan.

Berikut akan dibahas beberapa sifat Segiempat pada Geometri Hiperbolik yang menjadi dasar sifat mengenai ketegak lurusan dan kesejajaran pada Geometri Hiperbolik.

Teorema 2.12 (Venema, 2012: 133).
Tidak ada persegi pada Geometri Hiperbolik.

Bukti:

Adanya persegi sebanding dengan Postulat Kesejajaran Euclid. Karena Postulat Kesejajaran Hiperbolik menurut Teorema 2.11 adalah ingkaran dari Postulat Kesejajaran Hiperbolik, maka tidak ada persegi pada Geometri Hiperbolik. ■

Segiempat Saccheri dan Lambert (Teorema 2.9 dan 2.10 berlaku pada Geometri Netral). Kedua segiempat tersebut juga terdapat pada Geometri Hiperbolik. Adanya Postulat Kesejajaran Hiperbolik memunculkan sifat-sifat tertentu pada segiempat Saccheri dan Lambert.

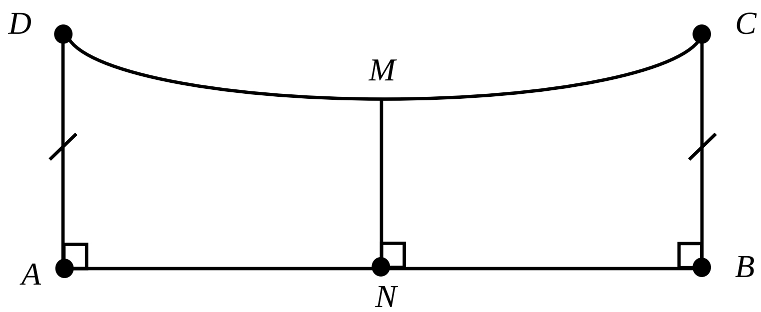
Teorema 2.13 (Venema, 2012: 135).
Dalam segiempat Lambert, panjang sisi antara dua sudut siku-siku adalah kurang dari panjang sisi yang berlawanan.

Bukti:

Misalkan $\boxed{L}\,ABCD$ adalah segiempat Lambert (segiempat Lambert dapat diamati pada Gambar 20). Asumsikan bahwa sudut $\angle BAD$, $\angle ABC$, dan

$\angle BCA$ adalah sudut siku-siku. Akan di tunjukkan bahwa BC < AD. Garis $BC \leq AD$ (Teorema 2.10, bagian keempat), jadi harus ditunjukkan bahwa $BC = AD$ adalah tidak mungkin.

Jika $BC = AD$, maka $\boxed{S}\,ABCD$ adalah segiempat Saccheri. Dengan Teorema 2.10, $\angle BAD \cong \angle CDA$. Ini berarti bahwa keempat sudut yang tegak lurus dan $\boxed{}\,ABCD$ adalah persegi panjang. Tetapi hal tersebut bertentangan dengan Teorema 2.12. Oleh karena itu, $BC \neq AD$. ■



Gambar 21. Segiempat Saccheri $\boxed{S}\,ABCD$ pada Geometri Hiperbolik

Sebuah segiempat Saccheri adalah dua buah segiempat Lambert, hal tersebut dapat diamati pada Gambar 21 di atas. Segiempat Lambert $\boxed{L}\,MNBC$ dan $\boxed{L}\,MNAD$ terdapat pada segiempat Saccheri $\boxed{S}\,ABCD$.