BAB II

KAJIAN PUSTAKA

A. Tabungan dan Asuransi Pensiun

Tabungan dan asuransi pensiun merupakan tabungan jangka panjang yang bertujuan untuk mendapatkan dana pensiun. Menurut Undang-undang Nomor 11 Tahun 1992 tentang Dana Pensiun Bab I Pasal 1, terdapat 2 jenis dana pensiun berdasarkan pada penyelenggaraannya atau pihak yang mendirikan, yaitu:

1. Dana Pensiun Pemberi Kerja (DPPK)

   Dana Pensiun Pemberi Kerja (DPPK) adalah dana pensiun yang dibentuk oleh orang atau badan yang mempekerjakan karyawan, selaku pendiri untuk menyelenggarakan Program Pensiun Manfaat Pasti (PPMP) dan Program Pensiun Iuran Pasti (PPIP) bagi kepentingan sebagian atau seluruh karyawannya sebagai peserta dan yang menimbulkan kewajiban terhadap Pemberi Kerja.

2. Dana Pensiun Lembaga Keuangan (DPLK)

   Dana Pensiun Lembaga Keuangan (DPLK) adalah dana pensiun yang dibentuk oleh bank atau perusahaan asuransi jiwa untuk menyelenggarakan Program Pensiun Iuran Pasti (PPIP) bagi perorangan baik karyawan maupun pekerja mandiri yang terpisah dari dana pensiun pemberi kerja bagi karyawan bank atau perusahaan asuransi jiwa yang bersangkutan.

Penyelenggaraan dana pensiun dilakukan dalam bentuk program, yaitu program pensiun. Program pensiun menurut Undang-undang Republik Indonesia Nomor 11 Tahun 1992 tentang Dana Pensiun Bab I Pasal 1 adalah program pensiun yang mengupayakan manfaat pensiun bagi peserta. Secara garis besar, program dana pensiun dibagi menjadi dua, yaitu Program Pensiun Iuran Pasti (PPIP) dan Program Pensiun Manfaat Pasti (PPMP).

1) PPIP adalah program pensiun yang iurannya ditetapkan dalam peraturan dana pensiun dan seluruh iuran serta hasil pengembangannya dibukukan pada rekening masing-masing peserta sebagai manfaat pensiun.
2) PPMP adalah program pensiun yang manfaatnya ditetapkan dalam peraturan dana pensiun atau program pensiun lain yang bukan merupakan Program Pensiun Iuran Pasti. Perbedaan antara PPIP dan PPMP disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Perbedaan antara PPIP dan PPMP

Perbedaan	**PPIP**	**PPMP**
Segi manfaat	Tidak terdapat kepastian besarnya manfaat pensiun yang akan diperoleh, besarnya tergantung dari jumlah akumulasi iuran dan hasil pengembangannya.	Ada kepastian besarnya manfaat pensiun yang akan diperoleh, ditetapkan dalam Peraturan Dana Pensiun.
Segi kontribusi	Jumlah iuran ditetapkan dalam Peraturan Dana Pensiun yang biasanya merupakan proporsi dari gaji karyawan atau presentase keuntungan.	Jumlah iuran yang diperlukan dihitung oleh aktuaris sehingga besarnya dapat berbeda dari periode ke periode tergantung asumsi yang digunakan.
Segi kewajiban masa lalu	Tidak terdapat pengakuan terhadap masa kerja lalu dari peserta pensiun.	Mengakui kewajiban atas masa kerja yang telah dilalui oleh karyawan sebelum berdirinya dana pensiun.

Perbedaan	PPIP	PPMP
Segi administrasi	Lebih sederhana karena jumlah manfaat yang diterima oleh peserta semata-mata tergantung pada kontribusi ditambah dengan hasil pengembangan dari kontribusi tersebut yang akan diberikan secara *lump sum* (sekaligus).	Administrasinya relatif lebih rumit karena harus menyelenggarakan program pensiun sepanjang usia pensiunan, bahkan dilanjutkan kepada janda/duda pensiunan/anaknya sampai dengan usia 21 tahun jika pensiunan meninggal dunia.
Segi beban resiko investasi	Jika kinerja investasi buruk, maka beban tersebut terletak pada peserta program, begitu pula jika kinerja investasi baik, maka karyawan atau peserta yang akan menikmati *reward*nya.	Beban dari kegagalan investasi terletak pada perusahaan, yang harus menanggung peningkatan biaya kontribusi pensiun sehingga mengakibatkan biaya tenaga kerja meningkat, sedangkan keberhasilan investasi dinikmati oleh perusahaan dalam bentuk penurunan kontribusi iuran pensiun yang mengakibatkan biaya tenaga kerja menurun.
Segi formula	Tidak terdapat formula tertentu, besarnya manfaat pensiun yang akan diterima tergantung dari hasil investasi.	Terdapat formula tertentu untuk menghitung manfaat yang akan diterima pada saat pensiun.

Menurut Undang-Undang Nomor 40 tahun 2004 tentang Sistem Jaminan Sosial Nasional (SJSN) mengamanatkan empat BUMN (Badan Usaha Milik Negara) antara lain PT Taspen (Persero), PT Jamsostek (Persero), PT Askes (Persero) dan PT Asabri untuk menerapkan prinsip-prinsip SJSN. Tindak lanjut dari Undang-Undang Nomor 40 Tahun 2004, pemerintah telah mengeluarkan UU Nomor 24 Tahun 2011 tentang BPJS (Badan Penyelenggara Jaminan Sosial) yang mengubah PT Askes (Persero) menjadi BPJS Kesehatan.

B. Mortalita

Mortalita merupakan peluang hidup seseorang untuk bertahan hidup (Sembiring, 1986: 2.20). Penghitungan peluang hidup seseorang didasarkan pada Tabel Mortalita Indonesia II (1999) yang terdapat pada Lampiran 3. Menurut Promislow (2015: 39), mortalita adalah suatu pemikiran dasar yang digunakan untuk memprediksi pola kematian yang akan ditunjukkan oleh sekelompok individu. Sedangkan menurut Sembiring (1986: 2.2), tabel mortalita dapat dibuat dengan mengamati jumlah orang yang lahir pada saat yang bersamaan, kemudian mencatat berapa banyak yang meninggal setiap tahun sampai semua anggota meninggal.

Peubah acak diskrit X menyatakan banyaknya tahun sebelum meninggal yang dijalani oleh peserta berusia x. Fungsi distribusi dari peubah acak diskrit X adalah (Bowers, 1997: 52):

$$F_X(x) = Pr(X \leq x), \qquad x \geq 0 \tag{2.2.1}$$

Fungsi distribusi di atas, menyatakan peluang seseorang yang berusia 0 (bayi) akan meninggal x tahun kemudian. Fungsi bertahan hidup dari peubah acak diskrit X adalah peluang seseorang yang berusia 0 (bayi) masih hidup x tahun kemudian disimbolkan dengan $s(x)$ dan dirumuskan sebagai berikut (Bowers, 1997: 52):

$$s(x) = 1 - F_X(x) = Pr(X > x), \qquad x \geq 0 \tag{2.2.2}$$

Diasumsikan bahwa $F_X(0) = 0$, sehingga $s(0) = 1$. Kemudian, peluang seseorang meninggal antara usia x dan z $(x < z)$ adalah (Bowers, 1997: 52):

$$Pr(x < X \leq z) = F_X(z) - F_X(x)$$
$$= 1 - s(z) - [1 - s(x)]$$
$$= s(x) - s(z). \qquad (2.2.3)$$

Peluang seseorang akan bertahan hidup antara usia x dan z dirumuskan sebagai berikut (Bowers, 1997: 52):

$$Pr(x < X \leq z | X > x) = \frac{F_X(z) - F_X(x)}{1 - F_X(x)}$$
$$= \frac{s(x) - s(z)}{s(x)}. \qquad (2.2.4)$$

Persamaan di atas dinotasikan dengan $T(x)$. Kemudian, fungsi bertahan hidup dari $T(x)$ biasanya dinotasikan dengan ${}_tp_x$ dan dirumuskan sebagai berikut:

$${}_tp_x = \Pr(T(x) > t), \qquad t \geq 0, x \geq 0$$
$$= Pr(X - x > t | X > x)$$
$$= Pr(X > x + t | X > x)$$
$$= \frac{Pr(X > x + t)}{Pr(X > x)}$$
$$= \frac{s(x + t)}{s(x)}. \qquad (2.2.5)$$

Sedangkan, untuk fungsi distribusi dari $T(x)$ dinotasikan dengan ${}_tq_x$ yang menyatakan peluang seseorang berusia x akan meninggal t tahun kemudian adalah sebagai berikut (Bowers, 1997: 54):

$${}_tq_x = 1 - {}_tp_x$$
$$= 1 - \frac{s(x + t)}{s(x)}$$
$$= \frac{s(x) - s(x + t)}{s(x)}. \qquad (2.2.6)$$

Peluang hidup dapat dinyatakan dalam bentuk $T(x)$ yaitu sebagai berikut (Bowers, 1997: 53):

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = Pr[T(x) > t] \qquad t \geq 0, \tag{2.2.7}$$

$${}_tq_x = Pr[T(x) \leq t] \qquad t \geq 0. \tag{2.2.8}$$

dimana,

$$p_x = {}_1p_x$$

$$q_x = {}_1q_x.$$

Peubah acak diskrit *W* didefinisikan sebagai banyaknya tahun sebelum meninggal yang akan dijalani oleh seseorang berusia *x*. Seseorang akan bertahan selama *w* tahun dan akan meninggal $w + 1$ tahun kemudian. Fungsi peluang dari peubah acak diskrit *W* adalah sebagai berikut (Bowers, 1997: 53):

$$\begin{aligned}
Pr(W = w) &= Pr(w < T(x) \leq w + 1) \\
&= {}_{w+1}q_x - {}_wq_x \\
&= \left(1 - {}_{w+1}p_x\right) - \left(1 - {}_wp_x\right) \\
&= {}_wp_x - {}_{w+1}p_x \\
&= {}_wp_x - \left[\frac{s(x+w+1)}{s(x)}\right] \\
&= {}_wp_x - \left[\frac{s(x+w)}{s(x)} \frac{s(x+w+1)}{s(x+w)}\right] \\
&= {}_wp_x - \left({}_wp_x \; {}_1p_{x+w}\right) \\
&= {}_wp_x(1 - p_{x+w}) \\
&= {}_wp_xq_{x+w}.
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Seseorang dinyatakan berhenti bekerja karena empat hal yaitu mengundurkan diri, tidak bisa bekerja (cacat), kematian, dan pensiun. Peluang seseorang akan tetap bekerja selama satu tahun dikarenakan penyebab tunggal nilainya sama dengan komplemen dari penyebabnya. Adapun peluang seseorang akan tetap bekerja selama satu tahun dikarenakan banyak penyebab (*multiple decrement*) dalam hal ini empat penyebab sama dengan perkalian komplemen-komplemen untuk setiap penyebabnya. Peluang seorang peserta program pensiun aktif yang berusia x akan tetap bekerja selama satu tahun adalah (Winklevoss, 1993: 31):

$$p_x^{(T)} = \left(1 - q_x'^{(m)}\right)\left(1 - q_x'^{(t)}\right)\left(1 - q_x'^{(d)}\right)\left(1 - q_x'^{(r)}\right) \tag{2.2.10}$$

atau dari Persamaan (2.2.9) secara ekuivalen menjadi:

$$p_x^{(T)} = p_x'^{(m)} p_x'^{(t)} p_x'^{(d)} p_x'^{(r)} \tag{2.2.11}$$

Sesuai dengan Persamaan (2.2.10) dan Persamaan (2.2.11) maka peluang seorang peserta program pensiun yang berusia x akan tetap bekerja selama n tahun adalah (Winklevoss, 1993: 32):

$$_np_x^{(T)} = \prod_{t=0}^{n-1} p_{x+t}^{(T)} \tag{2.2.12}$$

Total banyaknya pekerja berusia x yang meninggalkan masa kerja aktif sepanjang tahun yang dinotasikan oleh $d_x^{(T)}$dan didefinisikan sebagai perkalian antara banyaknya orang yang tetap bekerja pada usia x dengan peluang orang yang tidak bekerja selama satu tahun (Winklevoss, 1993: 32):

$$d_x^{(T)} = l_x^{(T)} q_x^{(T)} \tag{2.2.13}$$

Persamaan (2.2.13) juga dipandang sebagai total penyebab dari populasi aktif, yang nilainya sama dengan jumlahan dari masing-masing penyebab yaitu (Winklevoss, 1993: 34):

$$\begin{aligned} d_x^{(T)} &= d_x^{(m)} + d_x^{(t)} + d_x^{(d)} + d_x^{(r)} \\ &= l_x^{(T)}\left(q_x^{(m)} + q_x^{(t)} + q_x^{(d)} + q_x^{(r)}\right) \\ &= l_x^{(T)} q_x^{(T)} \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Seiring dengan bertambahnya usia, jumlah pekerja yang masih aktif akan mengalami penyusutan, selama proses penghitungan dana pensiun diasumsikan jumlah pekerja tidak mengalami penambahan sampai semua berhenti bekerja (Sembiring, 1986: 2.2):

$$\begin{aligned} l_{x+1}^{(T)} &= l_x^{(T)} - \left(d_x^{(m)} + d_x^{(t)} + d_x^{(d)} + d_x^{(r)}\right) \\ &= l_x^{(T)} - d_x^{(T)} \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Apabila Persamaan (2.2.14) disubstitusikan pada Persamaan (2.2.15) maka diperoleh:

$$\begin{aligned} l_{x+1}^{(T)} &= l_x^{(T)} - l_x^{(T)} q_x^{(T)} \\ &= l_x^{(T)}\left(1 - q_x^{(T)}\right) \\ &= l_x^{(T)} p_x^{(T)} \end{aligned}$$

$$p_x^{(T)} = \frac{l_{x+1}^{(T)}}{l_x^{(T)}} \tag{2.2.16}$$

$${}_2p_x^{(T)} = \frac{l_{x+2}^{(T)}}{l_x^{(T)}}$$

$${}_3p_x^{(T)} = \frac{l_{x+3}^{(T)}}{l_x^{(T)}}$$

Kemudian, dapat dianalogikan untuk yaitu (Promislow, 2015: 40):

$$ {}_{n}p_x^{(T)} = \frac{l_{x+n}^{(T)}}{l_x^{(T)}} \tag{2.2.17} $$

Sedangkan peluang seseorang berusia x akan berhenti bekerja dalam n tahun atau sebelum mencapai usia n + x dinotasikan dengan ${}_{n}q_x^{(T)}$, maka (Promislow, 2015: 40):

$$ \begin{aligned} {}_{n}q_x^{(T)} &= 1 - {}_{n}p_x^{(T)} \\ &= 1 - \frac{l_{x+n}^{(T)}}{l_x^{(T)}} \\ &= \frac{l_x^{(T)} - l_{x+n}^{(T)}}{l_x^{(T)}} \\ &= \frac{{}_{n}d_x^{(T)}}{l_x^{(T)}} \end{aligned} \tag{2.2.18} $$

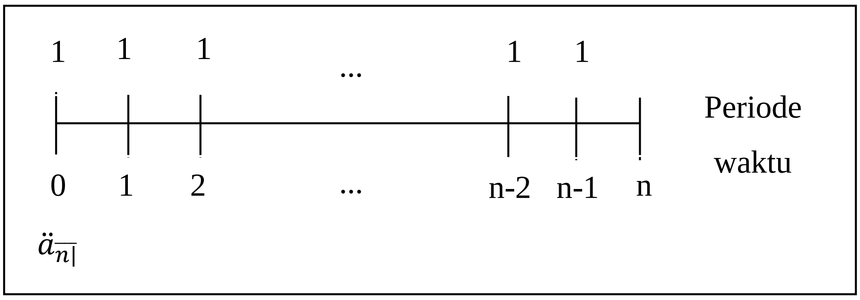
C. Anuitas

Anuitas adalah serangkaian pembayaran yang dilakukan secara terus menerus atau dalam jangka waktu tertentu (bulanan, 3 bulanan, tahunan) selama orang tersebut masih hidup (Bowers, 1997: 133). Anuitas dapat direpresentasikan dengan sebuah fungsi yang menggambarkan suatu kombinasi dari fungsi bertahan hidup dan fungsi bunga (Winklevoss, 1993: 46).

Menurut Kellison (1991: 59), berdasarkan waktu pembayarannya anuitas dibagi menjadi dua yaitu anuitas awal (*annuity-due*) dan anuitas akhir (*annuity-immediate*). Anuitas awal merupakan anuitas yang dibayarkan di awal periode, kemudian anuitas akhir adalah anuitas yang dibayarkan pada akhir periode. Penjelasan dari anuitas awal dan anuitas akhir adalah sebagai berikut:

1. Anuitas awal

Anuitas awal diilustrasikan dengan Gambar 1 (Kellison, 1991: 62):



Gambar 1 Diagram Waktu untuk Anuitas Awal

Nilai sekarang dari anuitas awal selama *n* periode dinotasikan dengan $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ dan dirumuskan sebagai berikut (Kellison, 1991: 63):

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n|}}v = v + v^2 + \cdots + v^{n-1} + v^n$$

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} - \ddot{a}_{\overline{n|}}v = (1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1}) - (v + v^2 + \cdots + v^{n-1} + v^n)$$

$$\ddot{a}_{\overline{n|}}(1 - v) = 1 - v^n$$

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{1-v}$$

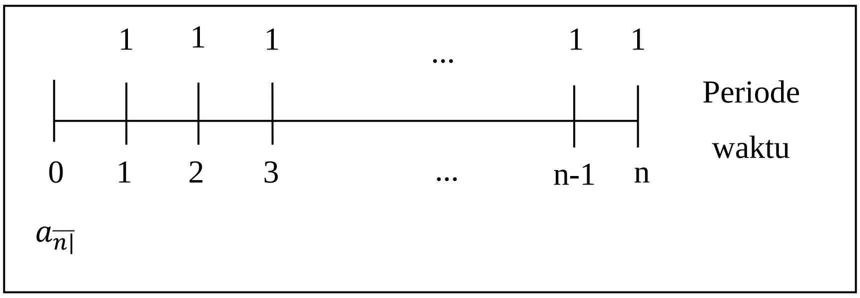
$$= \frac{1-v^n}{1-\frac{1}{1+i}}$$

$$= \frac{1-v^n}{\frac{i}{1+i}}$$

$$= \frac{1-v^n}{d}. \tag{2.3.1}$$

2. Anuitas akhir

Anuitas akhir diilustrasikan dengan Gambar 2 (Kellison, 1991: 59):



Gambar 2 Diagram Waktu untuk Anuitas Akhir

Nilai sekarang dari anuitas akhir selama *n* periode dinotasikan dengan $a_{\overline{n|}}$ dan dirumuskan sebagai berikut (Kellison, 1991: 63):

$$a_{\overline{n|}} = v + v^2 + \cdots + v^{n-1} + v^n$$

$$\frac{a_{\overline{n|}}}{v} = \frac{v + v^2 + \cdots + v^{n-1} + v^n}{v}$$

$$= 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1}$$

$$\frac{a_{\overline{n|}}}{v} - a_{\overline{n|}} = (1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1}) - (\, v + v^2 + \cdots + v^{n-1} + v^n)$$

$$\frac{a_{\overline{n|}} - a_{\overline{n|}}v}{v} = 1 - v^n$$

$$\frac{a_{\overline{n|}}(1 - v)}{v} = 1 - v^n$$

$$a_{\overline{n|}} = v\,\frac{1-v^n}{1-v}$$

$$= v\,\frac{1-v^n}{iv}$$

$$= \frac{1-v^n}{i}. \tag{2.3.2}$$

Berdasarkan lamanya pembayaran berlangsung, anuitas dibedakan menjadi dua yaitu anuitas seumur hidup dan anuitas sementara (Sembiring, 1986: 3.12). Anuitas seumur hidup adalah anuitas yang berlaku sepanjang hidup. Sedangkan, anuitas sementara hanya berlaku sampai jangka waktu tertentu. Untuk menyederhanakan penghitungan anuitas dan penghitungan lain yang berhubungan dengan dana pensiun, maka para ahli aktuaria membuat simbol komutasi atau simbol perantara, simbol-simbol tersebut antara lain sebagai berikut (Sembiring, 1986: 3.15):

$$D_x^{(T)} = v^x l_x \tag{2.3.3}$$

$$N_x^{(T)} = \sum_{i=0}^{\infty} D_{x+i}^{(T)} = D_x^{(T)} + D_{x+1}^{(T)} + \cdots \tag{2.3.4}$$

$$C_x = v^{x+1} d_x \tag{2.3.5}$$

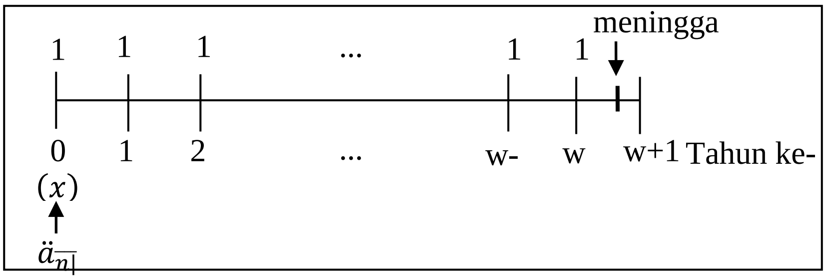
$$M_x = \sum_{i=0}^{\infty} C_{x+i} = C_x + C_{x+1} + \cdots \tag{2.3.6}$$

1. Anuitas seumur hidup

   Berdasarkan waktu pembayarannya anuitas seumur hidup dibedakan menjadi dua yaitu anuitas awal seumur hidup dan anuitas akhir seumur hidup. Penjelasan dari masing-masing anuitas seumur hidup adalah sebagai berikut:

   a. Anuitas awal seumur hidup

      Anuitas awal seumur hidup merupakan serangkaian pembayaran yang dibayarkan setiap awal periode kepada peserta program pensiun sampai meninggal dunia (Sembiring, 1986: 3.12). Pembayaran pertama dilakukan ketika peserta program pensiun pertama kali masuk kerja yaitu tepat pada usia x sehingga jelas bahwa peserta program pensiun masih hidup sehingga peluangnya 1. Pembayaran kedua ketika seorang peserta program pensiun masih aktif bekerja sampai usia x + 1. Nilai anuitas awal seumur hidup dinotasikan dengan $\ddot{a}_x$. Penjelasannya diilustrasikan dengan Gambar 3 (Irhamni, 2011: 11).



Gambar 3 Diagram Waktu untuk Anuitas Awal Seumur Hidup

Misalkan W adalah peubah acak diskrit yang menyatakan nilai sekarang dari anuitas awal seumur hidup dan w adalah banyaknya tahun sebelum meninggal yang akan dijalani oleh peserta berusia x, secara matematis W dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$W = \ddot{a}_{\overline{w+1|}}, \qquad w = 0, 1, 2, \ldots$$

Nilai harapan dari peubah acak diskrit W dinotasikan dengan $\ddot{a}_x$ dan dapat dirumuskan dengan:

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_x &= E[W] \\
&= E[\ddot{a}_{\overline{w+1|}}] \\
&= \sum_{w=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{w+1|}} \Pr(W = w) \\
&= \sum_{w=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{w+1|}}\, {}_w p_x q_{x+w}
\end{aligned}$$

misalkan $g(w) = \ddot{a}_{\overline{w+1|}}$ dan $\Delta f(w) = {}_w p_x q_{x+w}$, maka

$$\begin{aligned}
\Delta g(w) &= \ddot{a}_{\overline{w+2|}} - \ddot{a}_{\overline{w+1|}} \\
&= \frac{1-v^{w+2}}{d} - \frac{1-v^{w+1}}{d} \\
&= \frac{v^{w+1}-v^{w+2}}{d}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\Delta f(w) &= {}_w p_x q_{x+w} \\
&= {}_w p_x - {}_{w+1} p_x \\
&= -({}_{w+1} p_x - {}_w p_x)
\end{aligned}$$

$\Delta g(w) = \frac{v^{w+1}(1-v)}{d}$ $\qquad\qquad$ $\Delta f(w) = -\Delta({}_{w}p_{x})$

$= v^{w+1}\,\frac{1-\frac{1}{1+i}}{\frac{i}{1+i}}$ $\qquad\qquad$ $f(w) = -{}_{w}p_{x}$

$= v^{w+1}\,\frac{\frac{1+i-1}{1+i}}{\frac{i}{1+i}}$

$= v^{w+1}$

dengan menggunakan penjumlahan parsial sebagai berikut:

$\Delta[f(x)] = f(x+1) - f(x)$

$\Delta[f(x)g(x)] = f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x)$

$= f(x+1)g(x+1) - f(x+1)g(x) + f(x+1)g(x) - f(x)$

$= f(x+1)[g(x+1) - g(x)] - g(x)[f(x+1) - f(x)]$

$= f(x+1)\Delta[g(x)] + g(x)\Delta[f(x)]$

selanjutnya, kedua ruas pada Persamaan di atas dijumlahkan dari 0

sampai $n-1$

$\sum_{x=0}^{n-1}\Delta[f(x)g(x)] = \sum_{x=0}^{n-1}(f(x+1)\Delta[g(x)] + g(x)\Delta[f(x)])$

$= \sum_{x=0}^{n-1} f(x+1)\Delta[g(x)] + \sum_{x=0}^{n-1} g(x)\Delta[f(x)]$ (2.3.7)

Ruas kiri pada Persamaan (2.3.7) dapat dijabarkan sebagai berikut:

$\sum_{x=0}^{n-1}\Delta[f(x)g(x)] = \Delta[f(0)g(0)] + \Delta[f(1)g(1)] + \cdots +$

$\Delta[f(n-1)g(n-1)]$

$= [f(1)g(1) - f(0)g(0)] + [f(2)g(2) - f(1)g(1)] +$

$\cdots + [f(n)g(n) - f(n-1)g(n-1)]$

$= f(n)g(n) - f(0)g(0)$

$$\sum_{x=0}^{n-1} \Delta[f(x)g(x)] = f(x)g(x)|_0^n \qquad (2.3.8)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (2.3.8) ke dalam Persamaan (2.3.7), akan diperoleh:

$$f(x)g(x)|_0^n = \sum_{x=0}^{n-1} f(x+1)\Delta[g(x)] + \sum_{x=0}^{n-1} g(x)\Delta[f(x)].$$

Jadi, bentuk umum dari penjumlahan parsial adalah:

$$\sum_{x=0}^{n-1} g(x)\Delta[f(x)] = f(x)g(x)|_0^n - \sum_{x=0}^{n-1} f(x+1)\Delta[g(x)]. \qquad (2.3.9)$$

Sehingga, nilai harapan dari peubah acak diskrit *W* adalah:

$$\ddot{a}_x = g(w)f(w)|_0^\infty - \sum_{w=0}^{\infty} f(w+1)\Delta[g(w)]$$

$$= \ddot{a}_{\overline{w+1|}}\left(-{}_w p_x\right)|_0^\infty + \sum_{w=0}^{\infty} {}_{w+1}p_x v^{w+1}$$

$$= \left[\ddot{a}_{\overline{\infty|}}\left(-{}_\infty p_x\right) - \ddot{a}_{\overline{1|}}\left(-\ {}_0 p_x\right)\right] + \sum_{w=0}^{\infty} v^{w+1}{}_{w+1}p_x$$

$$= [0 - 1(-1)] + \sum_{w=0}^{\infty} v^{w+1}{}_{w+1}p_x$$

$$= 1 + \sum_{w=0}^{\infty} v^{w+1}{}_{w+1}p_x$$

ambil $s = w + 1 \to w = s - 1$, sehingga

$$\ddot{a}_x = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} v^s\ {}_s p_x$$

$$= v^0\ {}_0 p_x + \sum_{s=1}^{\infty} v^s\ {}_s p_x$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} v^s\ {}_s p_x.$$

Jadi, nilai tunai anuitas awal seumur hidup adalah sebagai berikut:

$$\ddot{a}_x = 1 + 1.v p_x + 1.v^2\ {}_2p_x + 1.v^3\ {}_3p_x + \cdots + 1.v^r\ {}_r p_x$$

$$= 1\left(1 + v\frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + v^3\frac{l_{x+3}}{l_x} + \cdots + v^r\frac{l_{x+r}}{l_x}\right)\left(\frac{v^x}{v^x}\right)$$

$$= 1\left(\frac{v^x l_x + v^{x+1}l_{x+1} + v^{x+2}l_{x+2} + v^{x+3}l_{x+3} + \cdots + v^{x+r}l_{x+r}}{v^x l_x}\right)$$

$$= 1\,\frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \cdots + D_r}{D_x}$$

$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$ (2.3.10)

b. Anuitas akhir seumur hidup

Anuitas akhir seumur hidup merupakan serangkaian pembayaran yang dibayarkan setiap akhir periode kepada peserta program pensiun sampai meninggal dunia (Sembiring, 1986: 3.12). Pembayaran pertama dilakukan ketika peserta program pensiun mencapai usia x + 1. Nilai anuitas akhir seumur hidup dinotasikan dengan a_x. Penjelasannya diilustrasikan dengan Gambar 4:

Gambar 4 Diagram Waktu untuk Anuitas Akhir Seumur Hidup

Misalkan W adalah peubah acak diskrit yang menyatakan nilai sekarang dari anuitas akhir seumur hidup dan w adalah banyaknya tahun sebelum meninggal yang akan dijalani oleh peserta berusia x, secara matematis Y dapat dinyatakan sebagai berikut:

$W = a_{\overline{w|}}, \qquad w = 1, 2, 3, \ldots$

Nilai harapan dari peubah acak diskrit W dinotasikan dengan $a_x$dan dapat dirumuskan dengan:

$a_x = E[W]$

$\quad = E[a_{\overline{w|}}]$

$= \sum_{w=1}^{\infty} a_{\overline{w|}} \Pr(W = w)$

$= \sum_{w=1}^{\infty} a_{\overline{w|}}\, {}_w p_x q_{x+w}$

misalkan $g(w) = a_{\overline{w|}}$ dan $\Delta f(w) = {}_w p_x q_{x+w}$, maka

$$\begin{aligned} \Delta g(w) &= a_{\overline{w+1|}} - a_{\overline{w|}} \\ &= \frac{1-v^{w+1}}{i} - \frac{1-v^{w}}{i} \\ &= \frac{v^{w+1}-v^{w}}{i} \\ &= \frac{v^{w}(1-v)}{i} \\ &= v^{w}\frac{1-\frac{1}{1+i}}{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta f(w) &= {}_w p_x q_{x+w} \\ &= {}_w p_x - {}_{w+1} p_x \\ &= -({}_{w+1} p_x - {}_w p_x) \\ &= -\Delta({}_w p_x) \\ f(w) &= -{}_w p_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta g(w) &= v^{w}\frac{\frac{1+i-1}{1+i}}{i} \\ &= v^{w}\frac{1}{1+i} \\ &= v^{w+1} \end{aligned}$$

dengan menggunakan penjumlahan parsial yang ada pada Persamaan (2.3.9) diperoleh:

$$\begin{aligned} a_x &= g(w)f(w)\Big|_1^{\infty} - \sum_{w=1}^{\infty} f(w+1)\Delta[g(w)] \\ &= a_{\overline{w|}}\left(-{}_w p_x\right)\Big|_1^{\infty} + \sum_{w=1}^{\infty} {}_{w+1} p_x v^{w+1} \\ &= \left[a_{\overline{\infty|}}\left(-{}_{\infty} p_x\right) - a_{\overline{1|}}\left(-\,{}_1 p_x\right)\right] + \sum_{w=1}^{\infty} v^{w+1}\,{}_{w+1} p_x \\ &= \left[0 - \frac{1-v}{i}\left(-\,{}_1 p_x\right)\right] + \sum_{w=1}^{\infty} v^{w+1}\,{}_{w+1} p_x \\ &= \frac{1-\frac{1}{1+i}}{i}\,{}_1 p_x + \sum_{w=1}^{\infty} v^{w+1}\,{}_{w+1} p_x \\ &= \frac{\frac{1+i-1}{1+i}}{i}\,{}_1 p_x + \sum_{w=1}^{\infty} v^{w+1}\,{}_{w+1} p_x \\ &= \frac{\frac{i}{1+i}}{i}\,{}_1 p_x + \sum_{w=1}^{\infty} v^{w+1}\,{}_{w+1} p_x \end{aligned}$$

$$a_x = \frac{1}{1+i}\ {}_1p_x + \sum_{w=1}^{\infty} v^{w+1}\ {}_{w+1}p_x$$

$$= v\ {}_1p_x + \sum_{w=1}^{\infty} v^{w+1}\ {}_{w+1}p_x$$

ambil $s = w + 1 \rightarrow w = s - 1$, sehingga

$$a_x = vp_x + \sum_{s=2}^{\infty} v^s\ {}_sp_x$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} v^s\ {}_sp_x.$$

jadi, nilai tunai anuitas akhir seumur hidup adalah:

$$a_x = 1.vp_x + 1.v^2\ {}_2p_x + 1.v^3\ {}_3p_x + \cdots + 1.v^r\ {}_rp_x$$

$$= 1\left(v\frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + v^3\frac{l_{x+3}}{l_x} + \cdots + v^r\frac{l_{x+r}}{l_x}\right)\left(\frac{v^x}{v^x}\right)$$

$$= 1\left(\frac{v^{x+1}l_{x+1} + v^{x+3}l_{x+3} + \cdots + v^{x+r}l_{x+r}}{v^x l_x}\right)$$

$$= 1\,\frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \cdots + D_r}{D_x}$$

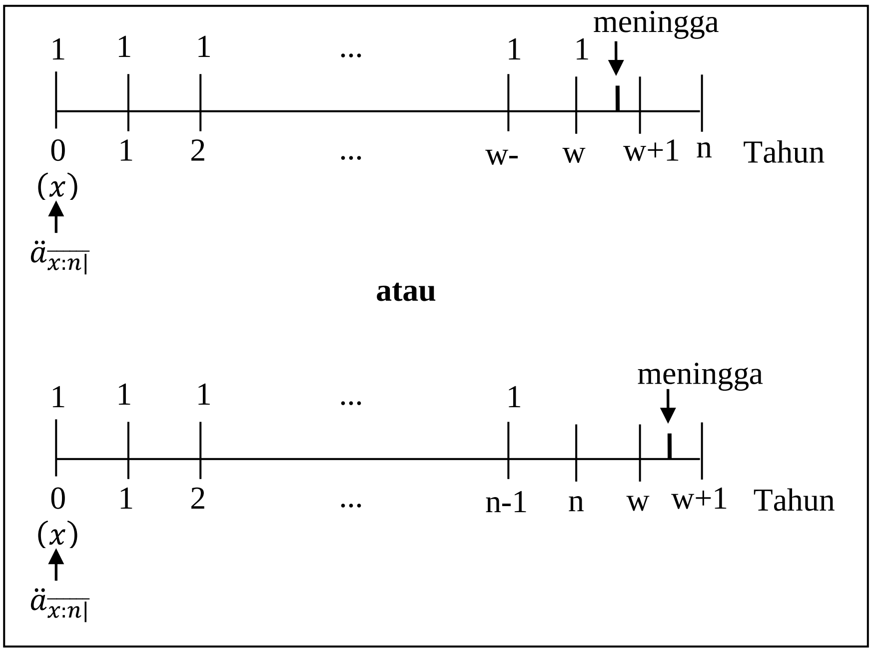
$$= \frac{N_{x+1}}{D_x} \qquad (2.3.11)$$

2. Anuitas sementara

Seperti halnya anuitas seumur hidup, anuitas sementara berdasarkan waktu juga dibedakan menjadi dua yaitu anuitas awal sementara dan anuitas akhir sementara (Sembiring, 1986: 3.13). Penjelasan dari masing-masing anuitas adalah sebagai berikut:

a. Anuitas awal sementara

Anuitas awal sementara merupakan sederatan pembayaran yang dilakukan di awal periode selama *n* tahun atau sampai peserta meninggal dunia, tergantung pada kondisi yang lebih dulu terjadi. Pembayaran pertama ketika peserta program pensiun masuk kerja yaitu saat berusia x. Peluang dan nilai harapannya adalah 1. Pembayaran kedua bila peserta program pensiun masih aktif bekerja pada usia $x + 1$. Penjelasannya diilustrasikan dengan Gambar 5 (Irhamni, 2011: 13).



Gambar 5 Diagram Waktu untuk Anuitas Awal Sementara

Misalkan W adalah peubah acak diskrit yang menyatakan nilai sekarang dari anuitas awal sementara dan w adalah banyaknya tahun sebelum meninggal yang akan dijalani oleh peserta berusia x, secara matematis W dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$W = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{w+1|}}, & w=0,1,2,\ldots,n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{n|}} & w=n,n+1,\ldots \end{cases}$$

Nilai harapan dari peubah acak diskrit W dinotasikan dengan $\ddot{a}_{\overline{x:n|}}$ dan dapat dirumuskan dengan:

$$\ddot{a}_{\overline{x:n|}} = E[W]$$

$$= \sum_{w=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{w+1|}} \Pr(W = w) + \sum_{w=n}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{n|}} \Pr(W = w)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{w=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{w+1|}}\, {}_{w}p_x q_{x+w} + \sum_{w=n}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{n|}}\, {}_{w}p_x q_{x+w}$$

$$= \sum_{w=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{w+1|}}\, {}_{w}p_x q_{x+w} + \ddot{a}_{\overline{n|}} \sum_{w=n}^{\infty}\left({}_{w}p_x - {}_{w+1}p_x\right)$$

$$= \sum_{w=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{w+1|}}\, {}_{w}p_x q_{x+w} + \ddot{a}_{\overline{n|}}\left[\left({}_{n}p_x - {}_{n+1}p_x\right) + \left({}_{n+1}p_x - {}_{n+2}p_x\right) + \cdots\right]$$

$$= \sum_{w=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{w+1|}}\, {}_{w}p_x q_{x+w} + \ddot{a}_{\overline{n|}}\, {}_{n}p_x$$

misalkan $g(w) = \ddot{a}_{\overline{w+1|}}$ dan $\Delta f(w) = {}_{w}p_x q_{x+w}$, maka

$$\Delta g(w) = \ddot{a}_{\overline{w+2|}} - \ddot{a}_{\overline{w+1|}}$$

$$= \frac{1-v^{w+2}}{d} - \frac{1-v^{w+1}}{d}$$

$$= \frac{v^{w+1}-v^{w+2}}{d}$$

$$= \frac{v^{w+1}(1-v)}{d}$$

$$= v^{w+1}\,\frac{1-\frac{1}{1+i}}{\frac{i}{1+i}}$$

$$= v^{w+1}\,\frac{\frac{1+i-1}{1+i}}{\frac{i}{1+i}}$$

$$= v^{w+1}$$

$$\Delta f(w) = {}_{w}p_x q_{x+w}$$

$$= {}_{w}p_x - {}_{w+1}p_x$$

$$= -\left({}_{w+1}p_x - {}_{w}p_x\right)$$

$$= -\Delta\left({}_{w}p_x\right)$$

$$f(w) = -{}_{w}p_x$$

dengan menggunakan penjumlahan parsial yang ada pada Persamaan (2.3.9) diperoleh:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = g(w)f(w)\big|_0^n - \sum_{w=0}^{n-1} f(w+1)\Delta[g(w)] + \ddot{a}_{\overline{n|}}\, {}_{n}p_x$$

$$= \ddot{a}_{\overline{w+1|}}\left(-{}_{w}p_x\right)\big|_0^n + \sum_{w=0}^{n-1} {}_{w+1}p_x v^{w+1} + \ddot{a}_{\overline{n|}}\, {}_{n}p_x$$

$$= \left[\ddot{a}_{\overline{n+1|}}\left(-\,{}_{n}p_x\right) - \ddot{a}_{\overline{1|}}\left(-\,{}_{0}p_x\right)\right] + \sum_{w=0}^{n-1} v^{w+1}\,{}_{w+1}p_x + \ddot{a}_{\overline{n|}}\, {}_{n}p_x$$

$$= -\ddot{a}_{\overline{n+1|}}\, {}_{n}p_x + 1 + \sum_{w=0}^{n-1} v^{w+1}\,{}_{w+1}p_x + \ddot{a}_{\overline{n|}}\, {}_{n}p_x$$

ambil $s = w + 1 \rightarrow w = s - 1$, sehingga

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = -\ddot{a}_{\overline{n+1|}}\ {}_{n}p_x + 1 + \sum_{s=1}^{n} v^s\ {}_{s}p_x + \ddot{a}_{\overline{n|}}\ {}_{n}p_x$$

$$= -\ddot{a}_{\overline{n+1|}}\ {}_{n}p_x + v^0\ {}_{0}p_x + \sum_{s=1}^{n} v^s\ {}_{s}p_x + \ddot{a}_{\overline{n|}}\ {}_{n}p_x$$

$$= -\ddot{a}_{\overline{n+1|}}\ {}_{n}p_x + \sum_{s=0}^{n} v^s\ {}_{s}p_x + \ddot{a}_{\overline{n|}}\ {}_{n}p_x$$

$$= -\ddot{a}_{\overline{n+1|}}\ {}_{n}p_x + \sum_{s=0}^{n-1} v^s\ {}_{s}p_x + v^n\ {}_{n}p_x + \ddot{a}_{\overline{n|}}\ {}_{n}p_x$$

$$= -\left(\sum_{t=0}^{n} v^t\right) {}_{n}p_x + \sum_{s=0}^{n-1} v^s\ {}_{s}p_x + v^n\ {}_{n}p_x + \ddot{a}_{\overline{n|}}\ {}_{n}p_x$$

$$= -\left(\sum_{t=0}^{n-1} v^t + v^n\right) {}_{n}p_x + \sum_{s=0}^{n-1} v^s\ {}_{s}p_x + v^n\ {}_{n}p_x + \ddot{a}_{\overline{n|}}\ {}_{n}p_x$$

$$= -\left(\ddot{a}_{\overline{n|}} + v^n\right) {}_{n}p_x + \sum_{s=0}^{n-1} v^s\ {}_{s}p_x + v^n\ {}_{n}p_x + \ddot{a}_{\overline{n|}}\ {}_{n}p_x$$

$$= -\left(\ddot{a}_{\overline{n|}} + v^n\right) {}_{n}p_x + \sum_{s=0}^{n-1} v^s\ {}_{s}p_x + \left(\ddot{a}_{\overline{n|}} + v^n\right) {}_{n}p_x$$

$$= \sum_{s=0}^{n-1} v^s\ {}_{s}p_x.$$

Jadi, nilai tunai anuitas awal sementara yaitu:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1 + 1.\,vp_x + 1.\,v^2\ {}_{2}p_x + \cdots + 1.\,v^{n-1}\ {}_{n-1}p_x$$

$$= 1\left(\frac{l_x}{l_x} + v\frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + \cdots + v^{n-1}\frac{l_{x+n-1}}{l_x}\right)\left(\frac{v^x}{v^x}\right)$$

$$= 1\left(\frac{v^x l_x + v^{x+1} l_{x+1} + v^{x+2} l_{x+2} + \cdots + v^{x+n-1} l_{x+n-1}}{v^x l_x}\right)$$

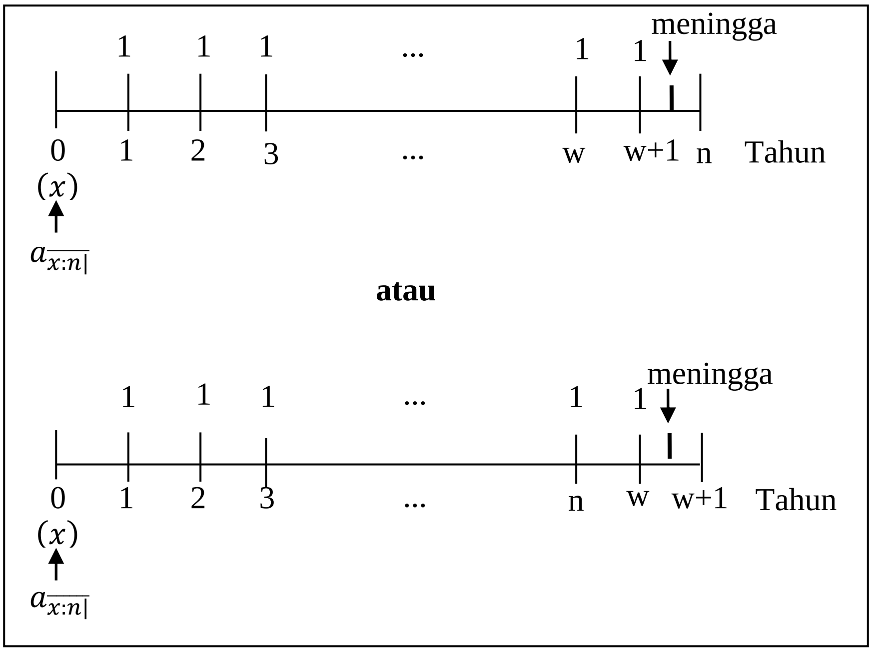
$$= 1\left(\frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{x+n-1}}{D_x}\right)$$

$$= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \qquad (2.3.12)$$

b. Anuitas akhir sementara

Anuitas akhir sementara merupakan sederatan pembayaran yang dilakukan di akhir periode selama *n* tahun atau sampai peserta meninggal dunia, tergantung pada kondisi yang lebih dulu terjadi.

Pembayaran pertama ketika peserta program pensiun berusia $x + 1$. Penjelasannya diilustrasikan dengan Gambar 6:



Gambar 6 Diagram Waktu untuk Anuitas Akhir Sementara

Misalkan W adalah peubah acak diskrit yang menyatakan nilai sekarang dari anuitas akhir sementara dan w adalah banyaknya tahun sebelum meninggal yang akan dijalani oleh peserta berusia x, secara matematis W dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$W = \begin{cases} a_{\overline{w|}}, & w=1,2,\ldots,n-1 \\ a_{\overline{n|}}, & w=n,n+1,\ldots \end{cases}$$

Nilai harapan dari peubah acak diskrit W dinotasikan dengan $\ddot{a}_{\overline{x:n|}}$ dan dapat dirumuskan dengan:

$$\begin{aligned} a_{\overline{x:n|}} &= E[W] \\ &= \sum_{w=1}^{n-1} a_{\overline{w|}} \Pr(W = w) + \sum_{w=n}^{\infty} a_{\overline{n|}} \Pr(W = w) \\ &= \sum_{w=1}^{n-1} a_{\overline{w|}}\, {}_w p_x q_{x+w} + \sum_{w=n}^{\infty} a_{\overline{n|}}\, {}_w p_x q_{x+w} \end{aligned}$$

$$a_{\overline{x:n|}} = \sum_{w=1}^{n-1} a_{\overline{w|}}\, {}_{w}p_x q_{x+w} + a_{\overline{n|}} \sum_{w=n}^{\infty} \left({}_{w}p_x - {}_{w+1}p_x \right)$$

$$= \sum_{w=1}^{n-1} a_{\overline{w|}}\, {}_{w}p_x q_{x+w} + a_{\overline{n|}} \left[\left({}_{n}p_x - {}_{n+1}p_x \right) + \left({}_{n+1}p_x - {}_{n+2}p_x \right) + \cdots \right]$$

$$= \sum_{w=1}^{n-1} a_{\overline{w|}}\, {}_{w}p_x q_{x+w} + a_{\overline{n|}}\, {}_{n}p_x$$

misalkan $g(w) = a_{\overline{w|}}$ dan $\Delta f(w) = {}_{w}p_x q_{x+w}$, maka

$$\begin{aligned}
\Delta g(w) &= a_{\overline{w+1|}} - a_{\overline{w|}} \\
&= \frac{1-v^{w+1}}{i} - \frac{1-v^{w}}{i} \\
&= \frac{v^{w}-v^{w+1}}{i} \\
&= \frac{v^{w}(1-v)}{i} \\
&= v^{w} \frac{1-\frac{1}{1+i}}{i} \\
&= v^{w} \frac{\frac{1+i-1}{1+i}}{i} \\
&= v^{w} \left(\frac{1}{1+i} \right) \\
&= v^{w+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta f(w) &= {}_{w}p_x q_{x+w} \\
&= {}_{w}p_x - {}_{w+1}p_x \\
&= -({}_{w+1}p_x - {}_{w}p_x) \\
&= -\Delta({}_{w}p_x) \\
f(w) &= -{}_{w}p_x
\end{aligned}$$

dengan menggunakan penjumlahan parsial yang sesuai dengan Persamaan (2.3.9) diperoleh:

$$a_{\overline{x:n|}} = g(w) f(w) \big|_1^n - \sum_{w=1}^{n-1} f(w+1) \Delta[g(w)] + a_{\overline{n|}}\, {}_{n}p_x$$

$$= a_{\overline{w|}} \left(-{}_{w}p_x \right) \big|_1^n + \sum_{w=1}^{n-1} {}_{w+1}p_x v^{w+1} + a_{\overline{n|}}\, {}_{n}p_x$$

$$= \left[a_{\overline{n|}} \left(-\, {}_{n}p_x \right) - a_{\overline{1|}} \left(-\, {}_{1}p_x \right) \right] + \sum_{w=1}^{n-1} v^{w+1}\, {}_{w+1}p_x + a_{\overline{n|}}\, {}_{n}p_x$$

$$= -a_{\overline{n|}}\, {}_{n}p_x + a_{\overline{1|}}\, {}_{1}p_x + \sum_{w=1}^{n-1} v^{w+1}\, {}_{w+1}p_x + a_{\overline{n|}}\, {}_{n}p_x$$

ambil $s = w + 1 \rightarrow w = s - 1$, sehingga

$$\ddot{a}_{\overline{x:n|}} = a_{\overline{1|}}\ {}_1p_x + \sum_{s=2}^{n} v^s\ {}_sp_x$$

$$= \frac{1-v}{i} p_x + \sum_{s=2}^{n} v^s\ {}_sp_x$$

$$= \frac{1-\frac{1}{1+i}}{i} p_x + \sum_{s=2}^{n} v^s\ {}_sp_x$$

$$= \frac{\frac{1+i-1}{1+i}}{i} p_x + \sum_{s=2}^{n} v^s\ {}_sp_x$$

$$= \frac{1}{1+i} p_x + \sum_{s=2}^{n} v^s\ {}_sp_x$$

$$= vp_x + \sum_{s=2}^{n} v^s\ {}_sp_x$$

$$= \sum_{s=1}^{n} v^s\ {}_sp_x$$

jadi, nilai tunai anuitas hidup akhir sementara adalah:

$$a_{\overline{x:n|}} = 1.vp_x + 1.v^2\ {}_2p_x + 1.v^3\ {}_3p_x + \cdots + 1.v^n\ {}_np_x$$

$$= 1\left(v\frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + v^3\frac{l_{x+3}}{l_x} + \cdots + v^n\frac{l_{x+n}}{l_x}\right)\left(\frac{v^x}{v^x}\right)$$

$$= 1\left(\frac{v^{x+1}l_{x+1} + v^{x+2}l_{x+2} + v^{x+3}l_{x+3} + \cdots + v^{x+n}l_{x+n}}{v^x l_x}\right)$$

$$= 1\,\frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \cdots + D_{x+n}}{D_x}$$

$$= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \qquad (2.3.13)$$

D. Tingkat Suku Bunga

Tingkat suku bunga digunakan untuk menentukan pengurangan dari pembayaran yang akan datang yang disebut juga sebagai nilai sekarang (*present value*). Jika i adalah tingkat bunga yang diasumsikan untuk tahun ke t, dengan t = 1, 2, …, n, nilai sekarang dari satu satuan uang dalam n tahun ditunjukkan dengan (Winklevoss, 1993: 35):

$$v^n = \frac{1}{(1+i_1)(1+i_2)\ldots(1+i_n)} \qquad (2.4.1)$$

dan, jika $i_1 = i_2 = \cdots = i_n$ maka didapatkan:

$$v^n = \frac{1}{(1+i)^n} \qquad (2.4.2)$$

sehingga, nilai sekarang dengan tingkat suku bunga *i* adalah (Winklevoss, 1993: 36):

$$v^n = \frac{1}{(1+i)^n} \qquad (2.4.3)$$

Asumsi bunga terdiri dari 3 komponen yaitu: 1% tingkat bunga bebas resiko, 3% premi untuk resiko investasi, dan 6% premi untuk inflasi. Sehingga secara umum total suku bunga dalam penghitungan program pensiun diasumsikan sebesar 10% setiap tahunnya (Rohaeni, 2008: 33).

1. Tingkat bunga bebas resiko

   Tingkat bunga bebas resiko adalah sesuatu yang berlaku pada suatu investasi, dimana pokok dan *yield* nya benar-benar aman, dalam hal ini tidak ada inflasi pada saat ini maupun antisipasi akan terjadinya inflasi di masa yang akan datang. Secara umum, bahwa keseimbangan tingkat bebas resiko jangka panjang teletak pada kisaran 1-2%.

2. Tingkat bunga resiko investasi

   Tingkat bunga resiko investasi terdapat pada portofolio aset-aset program pada saat ini dan yang akan datang. Suatu resiko investasi yang berbeda, dan mengakibatkan tingkat resiko, dapat diasosiasikan dengan masing-masing investasi, meskipun secara umum dapat dipraktekkan untuk menurunkan investasi hanya dalam beberapa kelas akibat dari penambahan premi resiko. Harapan premi resiko untuk portofolio tersebut adalah 3%.

3. Tingkat bunga untuk inflasi

   Tingkat bunga tingkat inflasi saat ini dan diantisipasikan berlaku untuk masa yang akan datang. Tingkat inflasi yang akan datang biasanya diasumsikan lebih tinggi daripada kebanyakan asumsi-asumsi aktuaria, hal ini dikarenakan tingkat jangka pendek kemungkinan tidak akan menjadi indikator yang baik untuk tingkat inflasi jangka panjang. Besar inflasi konstan adalah 6%.

E. Kenaikan Gaji

Kenaikan gaji merupakan besaran tambahan dari masa kerja. Manfaat dan iuran peserta program dana pensiun dipengaruhi oleh besar proporsi gaji yang disetorkan selama kerja. Ketika gaji pegawai mengalami kenaikan maka besar proporsi gaji pun akan naik. Sehingga, manfaat dan iuran peserta program dana pensiun juga mengalami kenaikan. Perlu adanya penghitungan manfaat dan iuran pensiun dengan mempertimbangkan fungsi kenaikan gaji. Kenaikan gaji diakibatkan oleh masa kerja (sesuai dengan golongan PNS) yang besarnya adalah 6% setiap 2 tahun masa kerja dan skala gaji akibat usia masuk peserta pensiun. Adapun skala gaji sesuai usia masuk ada pada Tabel 2 (Rohaeni, 2008: 31).

Tabel 2. Skala Gaji Sesuai Usia Masuk

Skala Usia x $[(SS)_x]$	**Skala Usia Masuk $[(SS)_y]$**						
	20	**25**	**30**	**35**	**40**	**45**	**50**
20	1						
21	1,045						
22	1,091						
23	1,138						
24	1,186						
25	1,234	1					
26	1,284	1,045					
27	1,334	1,091					
28	1,384	1,138					
29	1,436	1,186					
30	1,487	1,234	1				
31	1,539	1,284	1,045				
32	1,592	1,334	1,091				
33	1,644	1,384	1,138				
34	1,697	1,436	1,186				
35	1,749	1,487	1,234	1			
36	1,802	1,539	1,284	1,045			
37	1,854	1,592	1,334	1,091			
38	1,906	1,644	1,384	1,138			
39	1,958	1,697	1,436	1,186			
40	2,008	1,749	1,487	1,234	1		
41	2,059	1,802	1,539	1,284	1,045		
42	2,108	1,854	1,592	1,334	1,091		
43	2,157	1,906	1,644	1,384	1,138		
44	2,204	1,958	1,697	1,436	1,186		
45	2,25	2,008	1,749	1,487	1,234	1	
46	2,295	2,059	1,802	1,539	1,284	1,045	
47	2,339	2,108	1,854	1,592	1,334	1,091	
48	2,381	2,157	1,906	1,644	1,384	1,138	
49	2,422	2,204	1,958	1,697	1,436	1,186	
50	2,46	2,25	2,008	1,749	1,487	1,234	1
51	2,497	2,295	2,059	1,802	1,539	1,284	1,045
52	2,532	2,339	2,108	1,854	1,592	1,334	1,091
53	2,565	2,381	2,157	1,906	1,644	1,384	1,138
54	2,596	2,422	2,204	1,958	1,697	1,436	1,186
55	2,624	2,46	2,25	2,008	1,749	1,487	1,234
56	2,651	2,497	2,295	2,059	1,802	1,539	1,284
57	2,674	2,532	2,339	2,108	1,854	1,592	1,334
58	2,696	2,565	2,381	2,157	1,906	1,644	1,384
59	2,715	2,596	2,422	2,204	1,958	1,697	1,436

Gaji saat ini untuk peserta berusia x dinotasikan dengan s_x, dan S_x merupakan akumulasi gaji dari usia masuk y sampai usia x – 1, dimana x > y, atau dapat ditunjukkan dengan (Winklevoss, 1993: 38):

$$S_x = \sum_{t=y}^{x-1} s_t\,, \quad x > y \tag{2.5.1}$$

Besarnya gaji peserta program dana pensiun yang dihitung pada usia x dengan besar gaji saat usia masuk y dapat dirumuskan sebagai berikut (Winklevoss, 1993: 38):

$$s_x = s_y \frac{(SS)_x}{(SS)_y} [(1+i)]^{x-y} \tag{2.5.2}$$

F. Manfaat Pensiun

Pada program dana pensiun, terdapat beberapa manfaat yang diberikan sebagai manfaat tambahan yaitu manfaat pensiun pada saat usia pensiun, pengunduran diri (dipercepat), tidak bisa bekerja (cacat), dan kematian.

Adapun manfaat tambahannya adalah sebagai berikut (Rohaeni, 2008: 8):

1. Manfaat pensiun yang dibayarkan bagi peserta yang telah mencapai usia pensiun yang dapat dibedakan menjadi pensiun normal dan pensiun dipercepat (pensiun dini).
2. Manfaat pensiun mengunduran diri (dipercepat) yang dibayarkan bagi peserta yang berhenti bekerja atau keluar.
3. Manfaat pensiun cacat yang dibayarkan bagi peserta yang tidak bisa bekerja karena cacat.
4. Manfaat pensiun janda/duda yang dibayarkan karena meninggal.

Penjelasan dari masing-masing manfaat pensiun adalah sebagai berikut (Winklevoss, 1993: 4):

1. Manfaat Pensiunan (*Retirement Benefit*)

   Ada dua manfaat pensiunan yaitu manfaat normal dan manfaat dipercepat. Rata-rata usia pensiun normal untuk Peserta program pensiun Negeri Sipil di Indonesia adalah 56 tahun. Tetapi, dalam skripsi ini diasumsikan usia pensiun normal adalah 60 tahun sesuai data sekunder yang diperoleh dari PT Taspen (Persero) Cabang Yogyakarta. Ketentuan manfaat dipercepat telah diatur dalam Peraturan Dana Pensiun bahwa karyawan dimungkinkan untuk pensiun lebih awal dari usia pensiun normal dengan persyaratan khusus seperti: setelah mencapai usia tertentu misalnya 50 tahun; telah memenuhi masa kerja minimum misalnya 10, 15 atau 20 tahun; dan terutama telah memperoleh persetujuan dari pemberi kerja. Tetapi, beberapa peraturan dana pensiun menyatakan bahwa pensiun dipercepat hanya dapat dilakukan apabila karyawan telah mencapai usia misalnya 10 tahun sebelum usia pensiun normal atau karena karyawan mengalami cacat tetap.

   Rumus manfaat pensiun yang digunakan adalah *unit benefit*, yang menyediakan manfaat untuk setiap tahun masa kerja. Rumus yang digunakan dalam penghitungan manfaat pensiun pada Program Pensiun Manfaat Pasti adalah *flat dollar*, rata-rata gaji selama bekerja, dan rata-rata gaji terakhir. Penghitungan manfaat pensiun menggunakan *flat dollar* merupakan yang paling sederhana diantara ketiga rumus yang ada, yaitu memberikan manfaat pensiun dengan jumlah yang sama setiap bulan dalam setahun. Rumus rata-rata gaji selama bekerja memberikan persentase manfaat pensiun yang mendasarkan pada jasa lalu untuk menghitung manfaat sekarang. Sedangkan, rumus manfaat rata-rata gaji terakhir adalah memberikan persentase manfaat pensiun berdasarkan rata-rata gaji terakhir selama masa kerja. Skripsi ini menggunakan rumus rata-rata gaji selama bekerja untuk menghitung besarnya manfaat pensiun.

2. Manfaat Pensiun Mengunduraan Diri (*Vested Benefit*)

   Berdasarkan UU No. 11 tahun 1992, manfaat pensiun mengunduran diri diartikan sebagai hak atas manfaat pensiun bagi peserta yang berhenti bekerja sebelum mencapai usia pensiun normal, yang ditunda pembayarannya sampai pada saat memasuki usia pensiun. Peserta program dana pensiun yang berhenti bekerja setelah 5 tahun kepesertaan akan mendapatkan hak penuh atas manfaat pensiun pengunduran diri, yang besarnya sama dengan jumlah yang dihitung berdasarkan rumus pensiun bagi kepesertaannya sampai pada saat pemberhentian. Sedangkan peserta program dana pensiun yang berhenti bekerja setelah 3 tahun kepesertaan berhak atas jumlah iurannya sendiri dan iuran pemberi kerja beserta hasil pengembangannya yang harus digunakan untuk memperoleh pensiun pengunduran diri.

3. Manfaat Pensiun Cacat (*Disability Benefit*)

   Pensiun cacat sebenarnya tidak berkaitan dengan usia peserta akan tetapi karyawan yang mengalami cacat dan dianggap tidak lagi mampu atau cakap melaksanakan pekerjaannya berhak memperoleh manfaat pensiun. Pada pensiun cacat biasanya dihitung berdasarkan formula manfaat pensiun normal dimana masa kerja diakui seolah-olah sampai usia pensiun normal dan penghasilan dasar pensiun ditentukan pada saat peserta yang bersangkutan dinyatakan cacat.

4. Manfaat Pensiun Kematian (*Death Benefit*)

   Manfaat pensiun akibat kematian akan diperoleh ketika peserta program dana pensiun sudah memiliki masa kerja 5 tahun yang besarnya sama dengan manfaat pensiun normal. Manfaat kematian akan diberikan kepada janda/duda dari peserta program dana pensiun. Peserta program dana pensiun yang belum mencapai 5 tahun masa kerja maka akan diberikan manfaat kematian sebesar 50% dari manfaat pensiun normal sehingga dianggap sebagai manfaat mengundurkan diri (dipercepat).

Ringkasan manfaat yang diperoleh peserta program dana pensiun disajikan pada Tabel 3 berikut (Winklevoss, 1993: 11):

Tabel 3. Ringkasan Model Manfaat Program Pensiun

I. Manfaat Pensiunan (*Retirement Benefit*)	
A. Persyaratan	
1. Pensiun Normal	Usia 60 tahun.
2. Pensiun Dini	Usia 50 tahun dan sudah menjalani 10 tahun masa kerja.
B. Manfaat Pensiun	1.5% dari rata-rata gaji 5 tahun terakhir per tahun masa kerja. Untuk pensiun dini akan dikurangi secara aktuaria.
II. Manfaat Pensiun Mengunduran Diri (*Vested Benefit*)	
A. Persyaratan	Diberikan penuh setelah 5 tahun masa kerja.

	B. Manfaat Pensiun	*Accrued benefit*, didasarkan pada rumus manfaat pensiun yang digunakan pada rata-rata gaji saat bekerja dan masa kerja saat pengunduran diri.
III. Manfaat Pensiun Cacat (*Disability Benefit*)		
	A. Persyaratan	Usia 30 tahun dan sudah menjalani masa kerja 10 tahun.
	B. Manfaat Pensiun	*Accrued benefit* yang tidak dikurangi, pembayaran dilakukan secepatnya selama seumur hidup.
IV. Manfaat Pensiun Kematian		
	A. Persyaratan	Sudah menjalani masa kerja selama 5 tahun
	B. Manfaat Pensiun	50% dari yang seharusnya diterima peserta. pensiun, dibayarkan selama seumur hidup kepada janda/duda dari almarhum, dimulai pada saat almarhum telah diperbolehkan untuk pensiun dini.

Fungsi manfaat digunakan untuk menentukan besarnya manfaat yang dibayarkan pada saat pensiun dipercepat (keluar), cacat, pensiun pada saat usia pensiun dan kematian. Jika B_r adalah besar total manfaat selama peserta aktif bekerja dari umur y tahun sampai r tahun, sedangkan pertambahan besar manfaat yang diterima setiap tahunnya pada peserta yang berusia x tahun sebesar b_x, maka dapat dirumuskan sebagai berikut (Winklevoss, 1993: 40):

$$B_x = \sum_{t=y}^{x-1} b_t, \qquad x > y \tag{2.6.1}$$

Manfaat yang diperoleh peserta program pensiun merupakan proporsi gaji sebesar k persen yang diakumulasikan selama masa kerja $(x - y)$ tahun berdasarkan tiga skala gaji, yaitu (Winklevoss, 1993: 41):

1. *Flat dollar*

   Pada penghitungan manfaat pensiun, b_x adalah manfaat pensiun yang dibayarkan per tahun. Besar total manfaat pensiun hingga peserta mencapai usia pensiun normal dirumuskan sebagai berikut (Winklevoss, 1993: 41):

   $$B_x = (x - y)b_x \tag{2.6.2}$$

2. Gaji selama bekerja

   Manfaat pensiun yang penghitungannya menggunakan gaji selama bekerja adalah sebagai berikut (Winklevoss, 1993: 41):

   $$b_x = ks_x \tag{2.6.3}$$

   $$B_x = kS_x \tag{2.6.4}$$

   Untuk mengetahui manfaat pensiun yang dihitung menggunakan gaji selama bekerja, terlebih dahulu harus menentukan akumulasi gaji selama bekerja. Dalam hal ini, akumulasi gaji juga dipengaruhi oleh faktor kenaikan gaji.

3. Gaji *n* tahun terakhir

   Gaji *n* tahun terakhir merupakan penghitungan manfaat pensiun yang paling rumit. Dimana *n* merupakan banyaknya *n* tahun terakhir dan *k* adalah proporsi gaji yang diakumulasikan untuk manfaat pensiun selama masa kerja. Sedangkan *r* ialah usia pensiun normal, sehingga diperoleh rumus manfaat pensiun sebagai berikut (Winklevoss, 1993: 41):

   $$B_r = k(r - y)\frac{1}{n}\sum_{t=r-n}^{r-1} s_t \tag{2.6.5}$$

   atau dapat disederhanakan menjadi:

$$B_r = k(r-y)\frac{1}{n}(S_r - S_{r-n}) \tag{2.6.6}$$

B_x yang didefinisikan sebagai fungsi manfaat yang dihitung pada saat usia peserta program pensiun berusia *x* adalah (winklevoss, 1993: 42):

$$B_x = k(x-y)\frac{1}{n}(S_r - S_{r-n}) \tag{2.6.7}$$

Dimana n lebih kecil dari $x - y$. Manfaat yang didapatkan setiap tahun pada saat berusia *x* adalah (Winklevoss, 1993: 42):

$$b_x = B_{x+1} - B_x \tag{2.6.8}$$

Subtitusikan Persamaan (2.6.7) ke Persamaan (2.6.8) sehingga didapatkan (Winklevoss, 1993: 42):

$$b_x = k\frac{1}{n}(S_{x+1} - S_{x+1-n}) + k\frac{1}{n}(x-y)[(S_{x+1} - S_{x+1-n}) - (S_x - S_{x-n})]$$

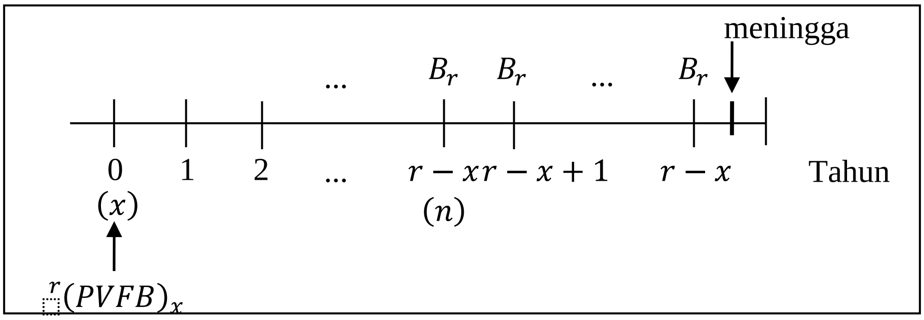
$$= k\frac{1}{n}(S_{x+1} - S_{x+1-n}) + k\frac{1}{n}(x-y)[s_x - s_{x-n}]. \tag{2.6.9}$$

G. *Present Value of Future Benefit* (PVFB)

Present value of future benefit (PVFB) adalah nilai sekarang dari manfaat pensiun berkala yang akan diterima peserta program dana pensiun saat peserta memasuki usia pensiun yaitu saat peserta berusia *r* tahun. Pembayaran manfaat pensiun dilakukan tiap tahun sampai peserta meninggal. Winklevoss (1993: 72) menyatakan ${}^{r}(PVFB)_x$ dirumuskan sebagai berikut:

$${}^{r}(PVFB)_x = B_r v^{r-x}\, {}_{r-x}p_x \ddot{a}_r \ , \ y \le x < r \tag{2.7.1}$$

Bukti diperolehnya rumus di atas diilustrasikan dengan Gambar 7 (Irhamni, 2011: 25):



Gambar 7 Diagram Waktu untuk ${}^{r}(PVFB)_x$ dengan $y \leq x < r$

Jika *W* peubah acak diskrit yang menyatakan nilai sekarang dari anuitas awal sebesar B_r yang dibayarkan setelah peserta memasuki masa pensiun dan masih hidup. Kemudian, *w* menyatakan banyaknya tahun sebelum meninggal yang akan dijalani oleh peserta berusia *x*. Secara matematis *W* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$W = \begin{cases} 0, & w = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r-x-1 \\ B_r v^{r-x} \ddot{a}_{\overline{w+1-(r-x)|}}, & w = r-x,\ r-x+1,\ \ldots \end{cases}$$

Selanjutnya, untuk menyederhanakan ambil $n = r - x$.

Nilai harapan dari peubah acak diskrit *Y* dinotasikan dengan $(PVFB)_x$, yaitu:

$$\begin{aligned}(PVFB)_x &= E(W)\\ &= \sum_{w=n}^{\infty} B_r v^{r-x} \ddot{a}_{\overline{w+1-n|}}\, P_r(W = w)\\ &= \sum_{w=n}^{\infty} B_r v^{r-x} \ddot{a}_{\overline{w+1-n|}}\ {}_{w}p_x q_{x+w}\\ &= B_r v^n \sum_{w=n}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{w+1-n|}}\ {}_{w}p_x q_{x+w}.\end{aligned}$$

Ambil $j = w - n$ maka $w = j + n$, sehingga

$$\begin{aligned}(PVFB)_x &= B_r v^n \sum_{j=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{j+1)|}}\ {}_{j+n}p_x q_{x+(j+n)}\\ &= B_r v^n \sum_{j=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{j+1)|}} \left[\frac{s(x+j+n)}{s(x)}\right] q_{x+(j+n)}\end{aligned}$$

$$(PVFB)_x = B_r v^n \sum_{j=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{j+1)|}} \left[\frac{s(x+n)}{s(x)} \cdot \frac{s(x+j+n)}{s(x+n)}\right] q_{x+(j+n)}$$

$$= B_r v^n \sum_{j=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{j+1)|}}\ {}_n p_x \ \ {}_j p_{n+x} q_{x+(j+n)}$$

$$= B_r v^n \ {}_n p_x \sum_{j=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{j+1)|}} \ \ {}_j p_{n+x} q_{x+(j+n)}$$

$$= B_r v^n \ {}_n p_x \ddot{a}_{x+n}$$

karena $n = r - x$, sehingga terbukti bahwa:

$${}^r(PVFB)_x = \ B_r v^{r-x}\ {}_{r-x} p_x \ddot{a}_r \,.$$

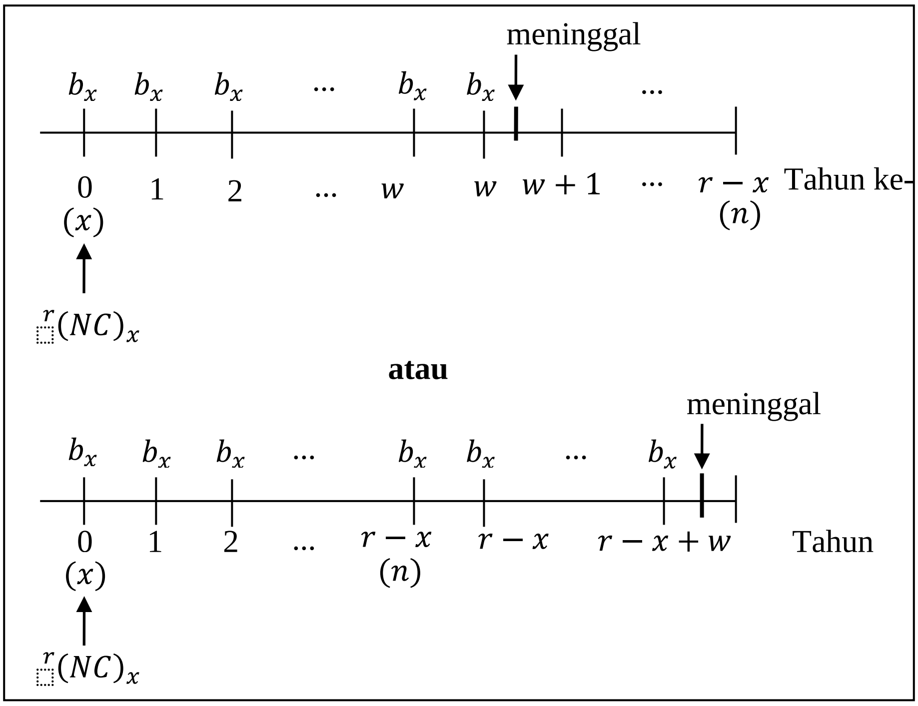
H. Iuran Pensiun

Secara umum iuran pensiun adalah pembayaran yang dilakukan oleh peserta program dana pensiun untuk memenuhi biaya manfaat pensiun (Bowers, 1997: 341). Sedangkan menurut Setiadi (1995: 48), iuran peserta merupakan bagian dari gaji peserta yang dipungut untuk membayar iuran dana pensiun. Iuran pensiun adalah iuran yang diperlukan dalam satu tahun untuk mendanai nilai sekarang manfaat pensiun.

Persamaan umum iuran pensiun manfaat pensiun untuk seorang peserta berusia *x* adalah (Winklevoss, 1993: 80):

$${}^r(NC)_x = \ b_x \ddot{a}_r v^{r-x}\ {}_{r-x} p_x, \qquad y \leq x < r \qquad (2.9.1)$$

Bukti diperolehnya rumus di atas diilustrasikan dengan Gambar 8.



Gambar 8 Diagram Waktu untuk ${}^{r}(NC)_x$ dengan $y \leq x < r$

Misalkan W adalah peubah acak diskrit yang menyatakan iuran pensiun dari anuitas awal sebesar b_x yang dibayarkan sejak seorang menjadi peserta program pensiun setiap bulan pada tahun ke x selama masih hidup, dan *w* menyatakan banyaknya tahun sebelum meninggal yang akan dijalani oleh peserta berusia x, sehingga secara matematis *W* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$W = \begin{cases} b_x v^{r-x} \ddot{a}_{\overline{w+1}|}, & w=0,1,\dots,r-x-1 \\ b_x v^{r-x} \ddot{a}_{\overline{w+1-(r-x)}|}, & w=r-x,r-x+1,\dots \end{cases}$$

Selanjutnya, untuk penyederhanaan ambil $n = r - x$. Nilai harapan dari peubah acak diskrit W dinotasikan dengan ${}^{r}(NC)_x$ yang dapat dirumuskan sebagai berikut:

$^{r}(NC)_x = E(W)$

$$= \sum_{w=0}^{n-1} b_x v^n \ddot{a}_{\overline{w+1|}} \Pr(W = w) + \sum_{w=n}^{\infty} b_x v^n \ddot{a}_{\overline{w+1-n|}} \Pr(W = w)$$

$$= b_x v^n \left[\sum_{w=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{w+1|}}\, {}_w p_x q_{x+w} + \sum_{w=n}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{w+1-n|}}\, {}_w p_x q_{x+w}\right]$$

bagian pertama ruas kanan dengan menggunakan penjumlahan parsial sesuai Persamaan (2.3.9) diperoleh:

$$\sum_{w=0}^{n-1} b_x v^n \ddot{a}_{\overline{w+1|}} \Pr(W = w) = b_x v^n \left[\sum_{w=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{w+1|}}\, {}_w p_x q_{x+w}\right]$$

Misalkan $g(w) = \ddot{a}_{\overline{w+1|}}$ dan $\Delta f(w) = {}_w p_x q_{x+w}$

$$\begin{aligned} \Delta g(w) &= \Delta \ddot{a}_{\overline{w+1|}} & \Delta f(w) &= {}_w p_x q_{x+w} \\ &= \ddot{a}_{\overline{w+2|}} - \ddot{a}_{\overline{w+1|}} & &= {}_w p_x - {}_{w+1} p_x \\ &= \frac{1-v^{w+2}}{d} - \frac{1-v^{w+1}}{d} & &= -\left({}_{w+1} p_x - {}_w p_x\right) \\ &= \frac{v^{w+1} - v^{w+2}}{d} & &= -\left(\Delta\, {}_w p_x\right) \\ &= v^{w+1} \frac{1-v}{d} & f(w) &= -{}_w p_x \\ &= v^{w+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_x v^n \left[\sum_{w=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{w+1|}}\, {}_w p_x q_{x+w}\right] &= b_x v^n \left[g(w) f(w)\big|_0^n - \sum_{w=0}^{n-1} f(w+1) \Delta g(w)\right] \\ &= b_x v^n \left[\ddot{a}_{\overline{w+1|}} \left(-{}_w p_x\right)\big|_0^n - \sum_{w=0}^{n-1} \left(-{}_{w+1} p_x\right) v^{w+1}\right] \\ &= b_x v^n \left[-\ddot{a}_{\overline{w+1|}}\, {}_w p_x \big|_0^n + \sum_{w=0}^{n-1} v^{w+1}\, {}_{w+1} p_x\right] \\ &= b_x v^n \left[-\ddot{a}_{\overline{n+1|}}\, {}_n p_x + 1 + \sum_{w=0}^{n-1} v^{w+1}\, {}_{w+1} p_x\right] \end{aligned}$$

ambil $s = w + 1 \rightarrow w = s - 1$

$$\begin{aligned} b_x v^n \left[\sum_{w=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{w+1|}}\, {}_w p_x q_{x+w}\right] &= b_x v^n \left[-\ddot{a}_{\overline{n+1|}}\, {}_n p_x + 1 + \sum_{s=1}^{n} v^s\, {}_s p_x\right] \\ &= b_x v^n \left[-\ddot{a}_{\overline{n+1|}}\, {}_n p_x + \sum_{s=0}^{n} v^s\, {}_s p_x\right]. \end{aligned} \qquad (2.9.2)$$

Bagian kedua ruas kanan dengan menggunakan penjumlahan parsial sesuai Persamaan (2.3.9) diperoleh:

$\sum_{w=n}^{\infty} b_x v^n \ddot{a}_{\overline{w+1-n|}} \Pr(W = w) = b_x v^n \left[\sum_{w=n}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{w+1-n|}} \, {}_w p_x q_{x+w}\right]$

ambil $j = w - n \rightarrow w = j + n$

$$b_x v^n \left[\sum_{w=n}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{w+1-n|}} \, {}_w p_x q_{x+w}\right] = b_x v^n \left[\sum_{j=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{j+1|}} \, {}_{j+n} p_x q_{x+(j+n)}\right]$$

$$= b_x v^n \left[\sum_{j=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{j+1|}} \left(\frac{s(x+j+n)}{s(x)}\right) q_{x+(j+n)}\right]$$

$$= b_x v^n \left[\sum_{j=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{j+1|}} \left(\frac{s(x+n)}{s(x)} \frac{s(x+j+n)}{s(x+n)}\right) q_{x+(j+n)}\right]$$

$$= b_x v^n \left[\sum_{j=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{j+1|}} \; {}_n p_x \; {}_j p_{x+n} q_{x+(j+n)}\right]$$

$$= b_x v^n \; {}_n p_x \left[\ddot{a}_{\overline{x+n|}}\right] \qquad (2.9.3)$$

dari Persamaan (2.9.2) dan (2.9.3) diperoleh:

$^{r}(NC)_x = b_x v^n \left[-\ddot{a}_{\overline{n+1|}} \, {}_n p_x + \sum_{s=0}^{n} v^s \;\; {}_s p_x + \; {}_n p_x \ddot{a}_{\overline{x+n|}}\right]$

karena $n = r - x$, sehingga terbukti bahwa:

$^{r}(NC)_x = b_x v^{r-x} \, {}_{n-x} p_x \ddot{a}_r.$

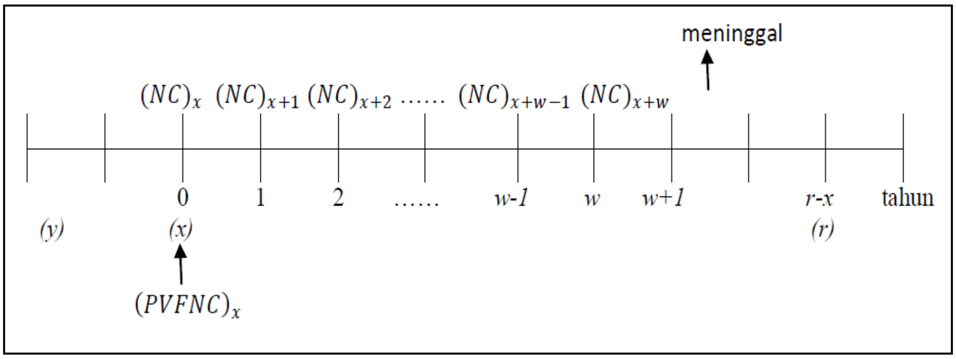
I. ***Present Value of Future Normal Cost* (PVFNC)**

Present value of future normal cost (PVFNC) adalah nilai sekarang dari iuran berkala yang dibayarkan peserta program dana pensiun. *Present value of future normal cost* seorang peserta program pensiun yang berusia *x* tahun dengan usia masuk *y* tahun dan usia pensiun normal *r* tahun dinotasikan dengan $(PVFNC)_x$. Menurut Winklevoss (1993: 80) dirumuskan sebagai berikut:

$$(PVFNC)_x = \sum_{t=x}^{r-1}\left[b_x \, {}_{r-t}p_t^{(T)} v^{r-x} \ddot{a}_r\right] {}_{t-x}p_x^{(T)} v^{r-x}$$

$$= \sum_{t=x}^{r-1} {}^{r}(NC)_t \, {}_{r-x}p_x v^{t-x} \qquad (2.9.1)$$

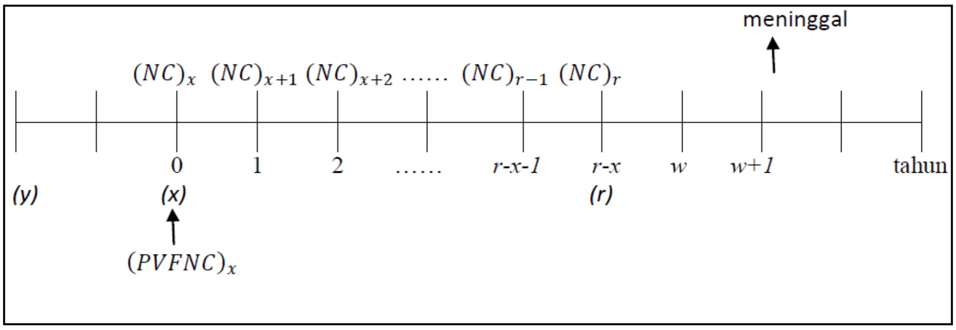
Pembuktian rumus di atas diilustrasikan dengan Gambar 9 (Irhamni, 2011: 29):



Gambar 9 Waktu untuk $(PVFNC)_x$ yang Meninggal Sebelum Usia Pensiun *r*

Misal *W* adalah peubah acak diskrit yang menyatakan nilai sekarang dari iuran berkala seorang peserta pensiun usia *r* sebesar $(NC)_t$ setiap awal periode sampai $(r - x)$ tahun. Kemudian, *w* menyatakan banyaknya tahun sebelum meninggal yang akan dijalani oleh peserta berusia x, sehingga secara matematis *W* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$W = \sum_{j=0}^{w} (NC)_{x+j} v^j \, , w = 0, 1, 2, \dots \, , r - x - 1 \qquad (2.9.2)$$



Gambar 10 Waktu untuk $(PVFNC)_x$ yang Meninggal Setelah Usia Pensiun *r*

Secara matematis dari Gambar 10, *W* dapat dituliskan sebagai berikut:

$W = \sum_{j=0}^{r-x-1}(NC)_{x+j}\nu^j \text{ }, w = r-x, r-x+1, \ldots$ (2.9.3)

Dari Persamaan (2.9.2) dan (2.9.3) dapat disimpulkan bahwa Y adalah:

$$W = \begin{cases} \sum_{j=0}^{w}(NC)_{x+j}\nu^j \text{ }, & w = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r-x-1 \\ \sum_{j=0}^{r-x-1}(NC)_{x+j}\nu^j \text{ }, & w = r-x,\ r-x+1,\ \ldots \end{cases}$$

Nilai harapan dari peubah acak diskrit W dinotasikan $(PVFNC)_x$ yang dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$(PVFNC)_x = E(W)$$

$$= \sum_{w=0}^{r-x-1}\left[\sum_{j=0}^{w}(NC)_{x+j}\nu^j\right]\Pr(W = w)$$

$$+ \sum_{w=r-x}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{w}(NC)_{x+j}\nu^j\right]\Pr(W = w) \qquad (2.9.4)$$

Bagian pertama ruas kanan pada Persamaan (2.9.4)

$$\sum_{w=0}^{r-x-1}\left[\sum_{j=0}^{w}(NC)_{x+j}\nu^j\right]\Pr(W = w) = \sum_{w=0}^{r-x-1}\left[\sum_{j=0}^{w}(NC)_{x+j}\nu^j\right]{}_{w}p_x q_{x+w}$$

(Penjumlahan parsial)

$$= \sum_{j=0}^{c}(NC)_{x+j}\nu^j\,(-\,{}_{c}p_x)\Big|_0^{r-x} + \sum_{w=0}^{r-x-1}(NC)_{x+(w+1)}\nu^{w+1}\,{}_{w+1}p_x$$

$$= \left[-\sum_{j=0}^{r-x}(NC)_{x+j}\nu^j\,{}_{r-x}p_x - \sum_{w=0}^{0}(NC)_{x+j}\nu^j(-\,{}_{0}p_x)\right]$$

$$+ \sum_{w=0}^{r-x-1}(NC)_{x+(w+1)}\nu^{w+1}\,{}_{w+1}p_x$$

$$= \left[-\sum_{j=0}^{r-x}(NC)_{x+j}\nu^j\,{}_{r-x}p_x - (NC)_{x+0}\nu^0(-1)\right]$$

$$+ \sum_{w=0}^{r-x-1}(NC)_{x+(w+1)}\nu^{w+1}\,{}_{w+1}p_x$$

$$= \left[-\sum_{j=0}^{r-x}(NC)_{x+j}\nu^j\,{}_{r-x}p_x + (NC)_x\right] + \sum_{w=0}^{r-x-1}(NC)_{x+(w+1)}\nu^{w+1}\,{}_{w+1}p_x$$

Ambil $n = w + 1$ maka $w = n - 1$, sehingga

$$= -\sum_{j=0}^{r-x}(NC)_{x+j}\nu^j\,{}_{r-x}p_x + (NC)_x + \sum_{n=1}^{r-x}(NC)_{x+n}\nu^n\,{}_{n}p_x$$

$$= -\sum_{j=0}^{r-x}(NC)_{x+j}\nu^j\,{}_{r-x}p_x + (NC)_x + \sum_{n=1}^{r-x-1}(NC)_{x+n}\nu^n\,{}_{n}p_x +$$

$$(NC)_r\nu^{r-x}\,{}_{r-x}p_x$$

$= -\sum_{j=0}^{r-x}(NC)_{x+j}v^j\,{}_{r-x}p_x + \sum_{n=0}^{r-x-1}(NC)_{x+n}v^n\,{}_np_x + (NC)_r v^{r-x}\,{}_{r-x}p_x$

$$= -\sum_{j=0}^{r-x-1}(NC)_{x+j}v^j\,{}_{r-x}p_x + \sum_{n=0}^{r-x-1}(NC)_{x+n}v^n\,{}_np_x \qquad (2.9.5)$$

Bagian kedua ruas kanan dari Persamaan (2.9.4)

$\sum_{w=r-x}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{r-x-1}(NC)_{x+j}v^j\right]\Pr(W = w) =$

$\sum_{w=r-x}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{r-x-1}(NC)_{x+j}v^j\right]({}_wp_x - {}_{w+1}p_x)$

$= \left[\sum_{j=0}^{r-x-1}(NC)_{x+j}v^j\right]\left[\sum_{w=r-x}^{\infty}({}_wp_x - {}_{w+1}p_x)\right]$

$= \left[\sum_{j=0}^{r-x-1}(NC)_{x+j}v^j\right]\left[({}_{r-x}p_x - {}_{r-x+1}p_x) + ({}_{r-x+1}p_x - {}_{r-x+2}p_x) + \cdots\right]$

$$= \left[\sum_{j=0}^{r-x-1}(NC)_{x+j}v^j\right]{}_{r-x}p_x \qquad (2.9.6)$$

jadi, dari Persamaan (2.9.5) dan (2.9.6) diperoleh:

$(PVFNC)_x = -\sum_{j=0}^{r-x-1}(NC)_{x+j}v^j\,{}_{r-x}p_x$

$+ \sum_{n=0}^{r-x-1}(NC)_{x+n}v^n\,{}_np_x + \sum_{j=0}^{r-x-1}(NC)_{x+j}v^j\,{}_{r-x}p_x$

$= \sum_{n=0}^{r-x-1}(NC)_{x+n}v^n\,{}_np_x$

Ambil $t = n + x$ maka $n = t - x$, sehingga terbukti bahwa:

$(PVFNC)_x = \sum_{n=0}^{r-1}(NC)_t v^{t-x}\,{}_{t-x}p_x.$

J. Kewajiban Aktuaria

Kewajiban aktuaria atau *actuarial liability* (AL) adalah besarnya dana program pensiun yang seharusnya telah terkumpul pada waktu tertentu untuk pembayaran manfaat pensiun yang akan datang. Kewajiban aktuaria merupakan hasil pengurangan dari nilai sekarang manfaat pensiun dengan nilai sekarang iuran pensiun. Kewajiban aktuaria juga dapat disebut cadangan manfaat (Oktiani, 2013: 5). Kewajiban aktuaria dirumuskan sebagai berikut (Winklevoss, 1993: 72):

$$^{r}(AL)_x = {}^{r}(PVFB)_x - {}^{r}(PVFNC)_x$$

$$= B_r v_L^{r-x} {}_{r-x}p_x^{(T)} \ddot{a}_r - \sum_{t=x}^{r-1} {}^{r}(NC)_t \, {}_{r-x}p_x v^{t-x} \quad (2.10.1)$$

K. Pengukuran Kesalahan Prediksi

Prediksi merupakan hal yang mengandung ketidakpastian, maka diperlukan suatu kriteria untuk menentukan prediksi yang akurat. Prediksi yang akurat adalah prediksi yang memiliki tingkat kesalahan (*error*) minimal. *Error* adalah nilai yang didapat dengan mengurangkan nilai aktual dengan nilai prediksi yang digambarkan pada persamaan berikut (Hanke, 2005: 79):

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t \quad (2.11.1)$$

Dalam skripsi ini, akan dihitung persentase kesalahan dari manfaat dan iuran pensiun masing-masing metode yang dibandingkan dengan penghitungan dari PT Taspen (Persero) Cabang Yogyakarta. Persentase kesalahan yang disebut juga MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*) merupakan rata-rata dari seluruh persentase kesalahan antara data aktual dengan data prediksi. MAPE mengindikasikan seberapa besar kesalahan dalam memprediksi ketepatan metode yang digunakan dibandingkan dengan nilai aktualnya. MAPE dapat dihitung dengan persamaan berikut:

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{|e_t|}{Y_t} \quad (2.11.2)$$

Metode yang dikatakan baik apabila memiliki nilai MAPE kecil. Semakin kecil nilai MAPE sehingga keakuratan metode semakin baik. Sebaliknya, jika nilai MAPE semakin besar, maka metode kurang akurat.