BAB II
KAJIAN TEORI

Berikut diberikan landasan teori mengenai program linear, konsep himpunan *fuzzy*, program linear *fuzzy* dan metode Mehar untuk membahas penyelesaian masalah *fuzzy linear programming* untuk optimasi hasil produksi pada bab selanjutnya.

A. Program Linear

Program linear memiliki beberapa pengertian yaitu: (1) pengertian program linear menurut Marwan Asri dan Wahyu Hidayat (1984) adalah suatu model umum yang sering dipakai untuk menyelesaikan masalah pengalokasian sumberdaya yang terbatas secara optimal. (2) Menurut Purba (2012) program linear merupakan model umum yang dapat digunakan dalam pemecahan masalah pengalokasian sumber daya yang terbatas secara optimal. Masalah pengalokasian tersebut timbul apabila seseorang diharuskan untuk memilih atau menentukan tingkat setiap kegiatan yang akan dilakukannya, dimana masing-masing kegiatan membutuhkan sumber daya yang sama sedangkan sumber daya terbatas. Sedangkan (3) menurut Parmadi (2010) masalah program linear adalah masalah menentukan nilai maksimum atau nilai minimum dari sebuah fungsi linear yang disebut fungsi tujuan dengan syarat-syarat atau kendala yang dinyatakan dalam bentuk persamaan atau pertidaksamaan linear. Mempertimbangkan beberapa pengertian di atas, maka dapat disimpulkan bahwa program linear adalah suatu model yang digunakan untuk menyelesaikan masalah pengalokasian sumberdaya yang terbatas secara optimal yang terdiri dari fungsi tujuan dan fungsi kendala yang berbentuk persamaan atau pertidaksamaan linear.

Model umum dari program linear menurut B. Susanta (1994) adalah sebagai berikut:

Mencari $x_1, x_2, \ldots, x_n$

yang memaksimumkan

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \tag{2.1}$$

dengan kendala:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_m
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_n \geq 0 \tag{2.3}$$

Dengan cara tulis matriks (tatanan bilangan yang tersusun dalam baris-baris dan kolom-kolom) dapat ditulis:

Mencari $\mathbb{X}$

yang memaksimumkan $f = \mathbb{C}\mathbb{X}$ (2.4)

dengan kendala,

$$\mathbb{A}\mathbb{X}\ (\leq,\ =,\ \geq)\mathbb{B} \tag{2.5}$$

$$\mathbb{X} \geq \mathbb{0} \tag{2.6}$$

dengan

c_j: koefisien ongkos

x_j: variabel keputusan

a_{ij}: koefisien teknis (koefisien dalam kendala utama)

b_i: suku tetap

c_j: koefisien biaya (koefisien dalam fungsi tujuan)

$x_j \geq 0$: kendala tak negatif

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C} = [\, c_1 \;\; c_2 \;\; \cdots \;\; c_n]$$

$$\mathbb{A}_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Menurut Z. Yamit (1991) untuk mendapatkan keputusan yang optimal dalam penyelesaian persoalan dengan menggunakan model program linear (PL), kegiatan utama yang perlu dilaksanakan adalah mengidentifikasikan masalah ke dalam bentuk matematis atau sering disebut pembuatan model program linear (PL).

Langkah-langkah yang dilakukan untuk merumuskan model program linear (PL) tersebut adalah:

a. Tentukan variabel keputusan yang akan dicari, dan beri notasi dalam bentuk matematis (pada beberapa kasus, variabel keputusan menyatakan aktivitas).

b. Tentukan batasan dari variabel keputusan tadi dengan menyatakan dalam bentuk persamaan linear atau ketidaksamaan linear (batasan yang dimaksud adalah batasan sumber daya yang digunakan).

c. Tentukan tujuan yang akan dicapai dari variabel keputusan tadi, dan nyatakan dalam satu set fungsi linear yang berbentuk maksimisasi keuntungan.

Contoh 2.1

Toko roti barokah memproduksi 3 jenis roti, yaitu roti A, roti B, dan roti C. Ketiga jenis roti tersebut membutuhkan bahan baku berupa tepung, telur dan gula yang secara rinci disajikan dalam Tabel 2.1.

Tabel 2. 1 Bahan Baku Toko Roti Barokah

Jenis roti	Tepung	Telur	Gula
A	3 kg	4 butir	1.5 kg
B	2 kg	5 butir	2 kg
C	4 kg	8 butir	3.5 kg

Setiap harinya toko roti barokah mampu menyediakan paling banyak 12 kg tepung, 20 butir telur dan 10 kg gula. Keuntungan dari masing-masing roti yaitu: Rp.1000,- untuk roti A, Rp.500,- untuk roti B dan Rp.700,- untuk roti C. Pemilik toko berusaha mencari kombinasi produksi dari ketiga roti yang dihasilkan, agar keuntungan yang diperoleh maksimum. Bagaimana merumuskan model program linear pada Contoh kasus di atas?

Langkah-langkah untuk merumuskan model program linear dari masalah di atas :

a. Menentukan variabel keputusan

Aktivitas yang akan diketahui adalah produksi harian dari ketiga jenis roti.

Misalkan x_1 adalah produksi harian roti A,

x_2 adalah produksi harian roti B, dan

x_3 adalah produksi harian roti C.

b. Menentukan batasan

Untuk memperoleh jumlah produksi harian dari ketiga jenis roti tersebut dibatasi oleh bahan baku yang tersedia. Jumlah penggunaan tepung pada pembuatan ketiga jenis roti tidak boleh melebihi 12 kg yaitu $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 12$, telur tidak boleh melebihi 20 butir yaitu $4x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leq 20$, dan gula tidak boleh melebihi 10 kg yaitu $1.5x_1 + 2x_2 + 3.5x_3 \leq 10$.

c. Menentukan tujuan yang akan dicapai

Tujuan yang ingin dicapai adalah memperoleh keuntungan semaksimal mungkin dari penjualan 3 jenis roti, sehingga koefisien fungsi tujuan dibentuk dari keuntungan penjualan setiap jenis roti dan fungsi tujuan adalah sebagai berikut:

Memaksimumkan $Z = 1000x_1 + 500x_2 + 700x_3$ (2.7)

Dari ketiga langkah di atas, diperoleh rumusan model program linear masalah optimasi toko roti Barokah adalah,

Memaksimumkan $Z = 1000x_1 + 500x_2 + 700x_3$

Dengan kendala $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 12$

$$4x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leq 20 \tag{2.8}$$

$$1.5x_1 + 2x_2 + 3.5x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Untuk dapat menyelesaikan masalah dengan program linear, maka perlu dipenuhi aumsi-asumsi dasar yang terkait dengan program linear. Menurut Marwan Asri dan Wahyu Widayat (1984) ada 6 asumsi-asumsi dasar yang terkait dengan program linear, yaitu sebagai berikut:

a. Proportionality

Asumsi ini mempunyai arti bahwa naik turunnya nilai fungsi tujuan dan penggunaan sumber daya atau fasilitas yang tersedia akan berubah secara sebanding (proportional) dengan perubahan tingkat aktivitas.

untuk fungsi tujuan

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{2.9}$$

Setiap penambahan 1 unit x_1 akan menaikkan nilai Z sebesar c_1. Setiap penambahan 1 unit x_2 akan menaikkan nilai Z sebesar c_2, dan seterusnya.

untuk fungsi kendala

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \tag{2.10}$$

Setiap penambahan 1 unit x_1 akan menaikkan penggunaan sumber atau fasilitas ke-1 sebesar a_{11}. Setiap penambahan 1 unit x_2 akan menaikkan penggunaan sumber atau fasilitas ke-2 sebesar a_{12}, dan seterusnya.

b. Nilai tujuan tiap aktivitas tidak saling mempengaruhi

Kenaikan dari nilai tujuan (Z) yang diakibatkan oleh kenaikan suatu aktivitas dapat ditambahkan tanpa mempengaruhi bagian nilai Z yang diperoleh dari aktivitas lain.

Untuk $Z = 3x_1 + 5x_2$ dengan $x_1 = 10$ dan $x_2 = 2$, diperoleh $Z = 30 + 10 = 40$.

Andaikata x_1 bertambah 1 unit, maka sesuai dengan asumsi pertama, nilai Z menjadi 40 + 3= 43. Jadi, tambahan nilai Z karena kenaikan x_1 dapat langsung ditambahkan pada nilai Z mula-mula tanpa mengurangi bagian-bagian Z yang diperoleh dari aktivitas ke-2 (x_2). Dengan kata lain, tidak ada korelasi antara x_1 dan x_2.

c. *Divisibility*

Asumsi ini mengatakan bahwa variabel keputusan (pada beberapa kasus menyatakan aktivitas) dan sumberdaya yang dihasilkan oleh setiap kegiatan dapat berupa bilangan pecahan. Demikian pula dengan nilai Z yang dihasilkan.

Untuk $Z = 2x_1 + 3x_2$ dengan $x_1 = \frac{2}{3}$ dan $x_2 = \frac{1}{4}$, diperoleh nilai $Z = \frac{25}{12}$.

d. *Determistic*

Asumsi ini mengatakan bahwa semua parameter yang terdapat dalam model program linear (a_{ij}, b_i, c_j) dapat diperkirakan dengan pasti, meskipun jarang dengan tepat.

Pada Contoh 2.1 roti jenis A membutuhkan bahan baku tepung sebanyak 3 kg. Meskipun pada kenyataannya, bisa kurang bisa lebih tidak tepat 3 kg. Namun dapat diasumsikan bahwa tepung yang digunakan adalah 3 kg.

e. *Accountability For Resources*

Sumberdaya-sumberdaya yang tersedia harus dapat dihitung, sehingga dapat dipastikan berapa bagian yang terpakai dan berapa bagian yang tidak terpakai.

Penjelasan dalam Contoh 2.1 kapasitas ketersediaan telur , yakni 20 butir. Dengan dapat dihitungnya kapasitas tersebut, maka dapat dihitung berapa bagian kapasitasnya yang dipergunakan oleh A, B dan C dan berapa bagian yang tidak terpakai.

f. *Linearity of Objectives*

Tujuan yang akan dicapai dan kendala atau batasan harus dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi linear.

Model program linear masalah optimasi pada Contoh 2.1, fungsi tujuan dan fungsi kendala dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi linear.

Masalah program linear (PL) dapat diselesaikan dengan beberapa metode, diantaranya yaitu metode grafik dan metode simpleks. Metode grafik hanya dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah program linear yang mengandung dua variabel keputusan. Tetapi pada kenyataannya permasalahan yang dihadapi kebanyakan lebih dari dua variabel keputusan dengan berbagai macam batasan, sehingga dapat digunakan metode simpleks.

B. Metode Simpleks

Menurut Z. Yamit (1991) metode simpleks merupakan pengembangan metode aljabar yang hanya menguji sebagian dari jumlah solusi yang layak dalam bentuk tabel. Langkah-langkah penyelesaian masalah program linear menggunakan metode simpleks (Z. Yamit, 1991) adalah sebagai berikut:

1) Merubah persoalan program linear ke dalam bentuk kanonik

Untuk dapat menyelesaikan persoalan program linear dengan metode simpleks, maka terlebih dahulu merubah masalah program linear (PL) ke bentuk kanonik dengan mengubah setiap kendala utama yang berbentuk pertidaksamaan menjadi bentuk persamaan dengan memasukkan variabel pengetat yaitu *slack variable* (positif atau negatif) dan memastikan setiap fungsi kendala utama memiliki satu variabel basis. Kendala-kendala yang berbentuk ketidaksamaan (dengan tanda $\leq$) menjadi persamaan (=) dengan menambahkan *slack variable* (positif) , dan merubah ketidaksamaan (dengan tanda $\geq$) dengan mengurangi *slack variable* (-). Sedangkan untuk fungsi kendala yang tetapi belum memiliki variabel basis perlu ditambahkan *artificial variable* (variabel semu) yang tidak negatif dan bernilai nol yang nantinya akan dijadikan variabel basis pada tabel awal simpleks. Koefisien biaya untuk *slack variable* adalah nol, sedangkan *artificial variable* adalah $-M$ untuk kasus maksimasi dengan M bilangan positif yang cukup besar. Karena koefisien biayanya negatif besar, diharapakan *artificial variable* tersebut segera keluar dari basis, sehingga dalam tabel optimum *artificial variable* bernilai nol.

Pada masalah prograam linear, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ yang memenuhi fungsi-fungsi kendala disebut penyelesaian layak (p.l.), dan (p.l) yang disusun oleh vektor basis disebut penyelesaian layak basis (p.l.b) dan bila (p.l) yang mengoptimumkan fungsi tujuan maka disebut penyelesaian optimum (p.o.) (B.Susanta, 1994).

Ada atau tidaknya penyelesaian pada suatu masalah PL dapat dilihat dari besar rank dari matriks $\mathbb{A}$ pada bentuk kanonik masalah PL. Rank suatu matriks $\mathbb{A}_{mxn}$ adalah ukuran yang terbesar dari matriks bujur sangkar bagian dari $\mathbb{A}$ yang determinannya tidak nol. Rank matriks $\mathbb{A}$ dilambangkan dengan $r(\mathbb{A})$ (B.Susanta, 1994), yaitu:

$$r(\mathbb{A}_{mxn}) \leq \min\ (m, n), \qquad (2.11)$$

m menunjukkan banyaknya persamaan dan n menunjukkan banyaknya variabel.

Dengan cara tulis matriks : $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$,

Disusun matriks $\mathbb{A}_{\mathbb{B}}$ =($\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$) $= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix}$ adalah matriks $\mathbb{A}$ yang dilengkapi dengan suku tetap di ruas kanan.

Jika $r(\mathbb{A}) \neq r(\mathbb{A}_{\mathbb{B}})$ maka masalah PL tidak ada penyelesaian

Jika $r(\mathbb{A}) = r(\mathbb{A}_{\mathbb{B}}) = p$ maka masalah PL ada penyelesaian

Untuk p<n maka banyak penyelesaian

Untuk p=n penyelesaian tunggal

Contoh 2.2

Berikut ini diberikan contoh masalah program linear yang akan dirubah ke bentuk kanonik.

Mencari x_1, x_2 dan x_3

yang memaksimumkan $f = 35x_1 + 20x_2 + 10x_3$

dan memenuhi kendala,

$$2x_1 + 5x_3 \leq 100$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 210$$

$$4x_1 + 6x_3 \geq 150$$

$$x_1 + x_3 = 180$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Merubah persolan program linear ke dalam bentuk kanonik dilakukan dengan cara berikut :

(1) Menambahkan *slack variable* s_1 pada kendala pertama

(2) Kendala kedua tidak ditambahkan apa-apa karena sudah berbentuk kanonik dan sudah memiliki variabel basis yaitu x_2 .

(3) Mengurangi kendala ketiga dengan *slack variable* s_2. Tetapi karena s_2 bernilai negatif, maka kendala ketiga belum memiliki

variabel basis, sehingga perlu ditambahkan *artificial variable* d_1.

(4) Meskipun kendala keempat sudah berbentuk kanonik, akan tetapi belum memiliki variabel basis, sehingga ditambahkan *artificial variable* d_2 yang nantinya akan menjadi variabel basis.

Bentuk kanonik dari Contoh 2.2 di atas dapat ditulis menjadi:

Mencari x_1, x_2 x_3, s_1,s_2,d_1,d_2

yang memaksimumkan

$$f = 35x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 0s_1 + 0s_2 - Md_1 - Md_2$$

dan memenuhi kendala,

$$2x_1 + 5x_3 + s_1 = 100$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 210$$

$$4x_1 + 6x_3 - s_2 + d_1 = 150$$

$$x_1 + x_3 + d_2 = 180$$

$$x_1, x_2\ x_3, s_1, s_2, d_1, d_2 \geq 0\ .$$

2) Masukkan semua nilai pada fungsi kendala ke dalam tabel simpleks

Setelah diperoleh bentuk kanonik, maka langkah selanjutnya yaitu memasukkan semua nilai pada fungsi kendala ke dalam tabel simpleks. Tabel simpleks menurut B. Susanta (1994) adalah sebagai berikut:

Tabel 2. 2 Tabel Simpleks

	c_j	c_1	c_2	$\cdots$	c_n		
$\bar{c}_i$	$\bar{x}_i$ / x_j	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	b_i	R_i
$\bar{c}_1$	$\bar{x}_1$	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1	R_1
$\bar{c}_2$	$\bar{x}_2$	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2	R_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\bar{c}_m$	$\bar{x}_m$	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m	R_m
	z_j	z_1	z_2	$\cdots$	z_n	Z	
	$z_j - c_j$	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$\cdots$	$z_n - c_n$	Z	

Keterangan

x_j : variabel-variabel keputusan lengkap

a_{ij} : koefisien teknis

b_i : suku tetap (tak negatif)

c_j : koefisien ongkos

$\bar{x}_i$: variabel yang menjadi basis dalam tabel yang ditinjau

$\bar{c}_i$: koefisien ongkos dari variabel basis $\bar{x}_i$

$z_j = \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i \, a_{ij}$: hasilkali dari $\bar{c}_i$ dengan kolom a_{ij}

$Z = \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i \, b_i$: hasilkali dari $\bar{c}_i$ dengan kolom b_i

$z_j - c_j$: selisih z_j dengan c_j

$$R_i = \frac{b_i}{a_{ij}} \text{ dengan syarat } a_{ij} > 0$$

3) Melakukan Uji Optimalisasi

Uji optimalisasi dilakukan untuk mengetahui apakah solusi yang dicari sudah optimum, maka dari itu perlu dicari penyelesaian optimum dari masalah program linear. Pada persoalan maksimasi, kondisi optimum terpenuhi apabila semua nilai pada tabel pada baris $z_j - c_j \geq 0$ untuk semua j. Mencari nilai pada baris $z_j - c_j$ dengan menggunakan rumus:

$$z_j - c_j = \bar{c}_i a_{ij} - c_j \qquad (2.12)$$

Jika tabel sudah optimum, solusi yang dicari terdapat pada kolom $\bar{c}_i$ dengan nilai yang diperoleh terdapat pada kolom b_i. Tetapi jika kondisi optimal belum terpenuhi, maka perlu dilakukan perbaikan tabel.

4) Memperbaiki Tabel

Memperbaiki tabel berarti menyusun tabel baru dengan mengganti satu variabel basis. Memperbaiki tabel dilakukan dengan tahapan sebagai berikut:

(1) Menentukan "kolom kunci" atau variabel basis yang akan masuk yaitu variabel non basis yang memiliki nilai $z_j - c_j$ terkecil.

(2) Menentukan "baris kunci" atau variabel basis yang akan keluar yaitu variabel basis yang memiliki nilai R_i terkecil

dengan $R_i = \frac{b_i}{a_{ij}}$; $a_{ij} > 0$ (2.13)

b_i tidak boleh negatif jadi R_i tidak mungkin negatif.

(3) Melakukan operasi baris elementer untuk memasukkan variabel basis yang baru dan mengeluarkan salah satu variabel basis yang ada.

5) Apabila kondisi optimum belum tercapai, maka ulangi kembali langkah ke empat di atas. Apabila kondisi optimum telah tercapai, maka proses pengerjaan dengan metode simpleks berhenti.

Meskipun kondisi optimum sudah terpenuhi, ada beberapa kondisi khusus yang mungkin terjadi diantaranya:

a. Memiliki lebih dari 1 solusi

   Kondisi ini terlihat pada tabel simpleks yang sudah memenuhi syarat optimum, terdapat variabel non basis yang memiliki nilai $z_j - c_j$ sama dengan nol.

b. Penyelesaian tunggal

   Apabila tabel simpleks sudah memenuhi syarat optimum, baris $z_j - c_j$ untuk variabel basis bernilai nol, sedangkan variabel non basis > 0.

c. Degenerate

   Jika tidak semua variabel utama menjadi variabel basis pada tabel simpleks optimum atau ada variabel utama yang menjadi variabel basis pada tabel simpleks optimum dan bernilai nol.

d. Penyelesaian tak terbatas

Jika koefisien-koefisien teknis pada kolom kunci tidak ada yang positif. Hal ini mengakibatkan nilai R_i tidak dapat dihitung,sehingga proses pengerjaan dengan metode simpleks terpaksa berhenti. Inilah tanda meskipun soalnya layak tetapi nilai fungsi tujuan menjadi tak terbatas , sehingga soal asli tidak mempunyai penyelesaian optimum.

e. Soal tak layak

Jika tabel sudah memenuhi syarat optimum, akan tetapi terdapat *artificial variable* (variabel semu) yang menjadi basis dan bernilai positif. Sementara dalam tabel optimum nilai *artificial variable* (variabel semu) harus nol.

Berikut ini diberikan contoh masalah program linear yang diselesaikan dengan metode simpleks.

Contoh 2.3

Diberikan masalah PL sebagai berikut:

Mencari x_1 dan x_2

Yang memaksimumkan $f = 40x_1 + 30x_2$

dan memenuhi kendala,

$$2x_1 + 3x_2 \leq 60$$

$$2x_2 \leq 30$$

$$2x_1 + x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Masalah PL di atas dapat diselesaikan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Masukkan semua nilai pada fungsi kendala ke dalam tabel simpleks

   Contoh 2.3 perlu dirubah ke dalam bentuk kanonik sebagai berikut,

   Mencari $x_1, x_2, s_1, s_2\ dan\ \ s_3$

   yang memaksimumkan $f = 40x_1 + 30x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

   dan kendala:

$$2x_1 + 3x_2 + \ s_1 = 60$$

$$2x_2 + s_2 \quad = 30$$

$$2x_1 + x_2 + s_3 = 40$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

2. Masukkan semua nilai pada fungsi kendala ke dalam tabel simpleks

   Bentuk kanonik dari Contoh 2.3 selanjutnya dimasukkan ke dalam Tabel 2.3 .

Tabel 2. 3 Tabel awal simpleks dari Contoh 2.3

	c_j	40	30	0	0	0		
$\bar{c}_i$	$\bar{x}_i \backslash x_j$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i	R_i
0	s_1	2	3	1	0	0	60	30
0	s_2	0	2	0	1	0	30	∞
0	s_3	$\boxed{2}$	1	0	0	1	40	20
	z_j	0	0	0	0	0	Z=0	
	$z_j - c_j$	-40	-30	0	0	0	Z=0	

3. Melakukan Uji Optimalisasi

Persoalan pada Contoh 2.3 di atas merupakan masalah maksimasi. Kondisi optimal tercapai bila nilai pada baris $z_j - c_j \geq 0$. Pada Tabel 2.3 di atas terlihat bahwa pada baris $z_j - c_j$ masih ada yang bernilai negatif, maka kondisi optimal belum terpenuhi. Sehingga perlu dilakukan perbaikan tabel.

4. Memperbaiki Tabel

Memperbaiki tabel dilakukan dengan tahapan sebagai berikut:

(1) Menentukan "kolom kunci" atau variabel basis yang akan masuk yaitu x_1 karena memiliki nilai $z_j - c_j$ terkecil yaitu -40.

(2) Menentukan "baris kunci" atau variabel basis yang akan keluar yaitu s_3 yang memiliki nilai R_i terkecil yaitu 20.

(3) Melakukan operasi baris elementer untuk memasukkan variabel basis baru,

$\bar{b}_3 = \frac{1}{2} b_3$ (baris-3 baru adalah baris-3 lama dibagi 2)

$\bar{b}_1 = b_1 - 2\bar{b}_3$ (baris-1 baru diperoleh dari baris-1 lama dikurangi 2 kali baris-3 baru)

$\bar{b}_2 = b_2 - 0\bar{b}_3$ (baris-2 baru diperoleh dari baris-2 lama dikurangi 0 kali baris-3 baru)

Sehingga diperoleh tabel simpleks yang baru yaitu Tabel 2.4.

Tabel 2. 4 Tabel simpleks iterasi ke-1 dari Contoh 2.3

	c_j	40	30	0	0	0		
$\bar{c}_i$	$\bar{x}_i \backslash x_j$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i	R_i
0	s_1	0	$\boxed{2}$	1	0	-1	20	10
0	s_2	0	2	0	1	0	30	15
40	x_1	1	0,5	0	0	0,5	20	40
	z_j	40	20	0	0	20	800	
	$z_j - c_j$	0	-10	0	0	20	800	

Tabel 2.4 di atas belum optimal karena pada baris $z_j - c_j$ masih ada yang bernilai negatif. Sehingga perlu dilakukan perbaikan tabel kembali. Dengan mengulangi langkah ke empat, maka dibuat tabel baru seperti berikut,

Tabel 2. 5 Tabel iterasi ke-2 dari Contoh 2.3

	c_j	40	30	0	0	0		
$\bar{c}_i$	$\bar{x}_i \backslash x_j$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i	R_i
30	x_2	0	1	0,5	0	-0,5	10	
0	s_2	0	0	-1	1	1	10	
40	x_1	1	0	-0,25	0	0,75	15	
	z_j	40	30	5	0	15	900	
	$z_j - c_j$	0	0	5	0	15	900	

Pada Tabel 2.5 tersebut kondisi optimum telah tercapai, karena nilai pada baris $z_j - c_j$ tidak ada lagi yang bernilai negatif. Nilai variabel keputusan dari penyelesaian optimal tersebut adalah $x_1 = 15$ dan $x_2 = 10$ dengan nilai fungsi tujuan $f = 900$.

Adakalanya solusi optimal yaitu nilai variabel keputusan yang diperoleh dari model PL berupa bilangan pecahan, sementara dalam beberapa kasus di kehidupan nyata nilai variabel keputusan harus dinyatakan dalam bilangan bulat. Sebagai contoh misal x_1 menyatakan jumlah kapal yang diproduksi dan solusi optimal yang diperoleh adalah $x_1 = 2{,}4$. Meskipun dalam model PL solusi tersebut merupakan solusi optimal, akan tetapi pada kehidupan nyata jumlah produksi kapal tidak dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan. Apabila dilakukan pembulatan secara langsung, misalkan $x_1 = 2$, hal ini tidak benar karena bisa merubah nilai keuntungan yang diperoleh secara drastis, mengingat keuntungan untuk satu kapal dapat mencapai jutaan rupiah. Untuk memperoleh solusi optimal yang bulat pada model PL digunakan Integer Programming.

C. *Integer Programming*

Pengertian *Integer Programming* menurut Hayati (2010) adalah program linear dengan variabel bertipe *Integer*. *Integer Programming* digunakan untuk memodelkan permasalahan yang variabel-variabelnya tidak mungkin berupa bilangan yang tidak bulat (bilangan real), seperti variabel yang merepresentasikan jumlah orang, karena jumlah orang pasti bulat dan tidak mungkin berupa pecahan.

Penyelesaian *Integer Programming* dapat dilakukan dengan menggunakan metode *Branch and Bound*, mengingat metode ini merupakan salah satu metode yang cukup efektif. Pada metode ini, langkah-langkah yang dilakukan yaitu: (1) permasalahan program linear dibagi menjadi beberapa sub permasalahan atau disebut *branching* atau pencabangan dengan menambah kendala baru. Misal x_1 merupakan solusi optimal yang berbentuk pecahan, maka di buat dua sub permasalahan baru dengan menambahkan kendala x_1 $x_1 \leq a$ atau $x_1 \geq b$, di mana a merupakan bilangan bulat positif terkecil yang paling dekat dengan x_1, sedangkan b merupakan bilangan bulat positif terbesar yang paling dekat dengan x_1, (2) *bounding* atau pembatasan, untuk menentukan batas atas dan batas bawah untuk solusi optimal pada submasalah. Batas atas merupakan nilai fungsi tujuan yang diperoleh dari solusi optimal asli (nilai sebagian variabel dapat berupa pecahan), sedangkan batas bawah adalah nilai fungsi tujuan untuk pembulatan solusi optimal asli, (3) *fathoming* atau pengukuran untuk melihat sub permasalahan mana yang merupakan penyelesaian atau belum memenuhi syarat integer sehingga dilakukan pencabangan selanjutnya.

D. Konsep Himpunan *Fuzzy*

Dalam kehidupan nyata manusia sering dihadapkan pada masalah yang erat kaitannya dengan ketidakpastian. Tidak terkecuali pada masalah optimasi yang dimodelkan dengan program linear. Data yang digunakan untuk memodelkan program linear dapat berupa data yang tidak pasti. Untuk menggambarkan ketidakpastian tersebut, konsep himpunan *fuzzy* (samar) dapat digunakan. Berikut beberapa penjelasan terkait dengan konsep himpunan *fuzzy*.

1. Pengertian Himpunan *Fuzzy*

Menurut Zimmermann (2001), himpunan klasik (tegas) secara umum didefinisikan sebagai sekumpulan elemen atau himpunan yang bisa dihitung atau tak terhitung. Suatu himpunan klasik dapat digambarkan dengan beberapa cara yang berbeda: (1) menyebutkan satu persatu (daftar) unsur-unsur yang merupakan anggota himpunan, sebagai contoh himpunan $A=\{a,b,c\}$, (2) menggambarkan himpunan secara analitik, sebagai contoh dengan mendefinisikan himpunan tersebut ($A = \{ x|x \leq 5 \}$) ; atau (3) menentukan elemen-elemen anggota dengan menggunakan fungsi keanggotaan $\mu_A(x)$. Elemen anggota suatu himpunan mempunyai derajat keanggotaan 1, sedangkan elemen yang bukan anggota suatu himpunan mempunyai derajat keanggotaan 0. Contohnya untuk x_1 dengan $\mu_A(x_1) = 1$ maka $x_1 \in A$ dan untuk x_2 dengan $\mu_A(x_2) = 0$ maka $x_2 \notin A$.

Lotfi A. Zadeh memperkenalkan teori baru mengenai ketidakpastian pada tahun 1965 yang kemudian dikenal dengan konsep himpunan *fuzzy* dimana himpunan *fuzzy* ini berbeda dengan himpunan klasik.

Berikut ini definisi dasar yang berkaitan dengan himpunan *fuzzy:*

Definisi 2.1 (Zimmermann, 2001)

Untuk X adalah kumpulan objek-objek yang secara umum dilambangkan oleh x, himpunan fuzzy $\tilde{A}$ *pada X adalah sebuah himpunan pasangan berurutan sebagai berikut:*

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | \, x \in X\} \tag{2.14}$$

dengan $\mu_{\tilde{A}}(x)$ *disebut derajat keanggotaan dari x pada* $\tilde{A}$ *terletak pada selang [0,1].*

Contoh 2.4

Seorang makelar ingin mengklasifikasikan rumah yang ditawarkan untuk kliennya. Salah satu indikator kenyamanan rumah-rumah ini adalah jumlah kamar tidur di dalamnya. Misal X ={I, 2, 3, 4,. . . .10} adalah himpunan jenis rumah dengan $x =$ jumlah kamar tidur di dalam rumah. Kemudian himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ yaitu “jenis rumah yang nyaman untuk empat orang keluarga " dapat digambarkan sebagai $\tilde{A}$ = {(l, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3)}. Sedangkan untuk rumah dengan jumlah kamar tidur 7,8,9 dan 10 memiliki derajat keanggotaan 0. Jika jumlah kamar tidur semakin mendekati 4, maka rumah tersebut semakin nyaman. Dan jika jumlah kamar tidur semakin melebihi 4, maka rumah tersebut semakin tidak nyaman.

Definisi 2.2 (Sharma, 2014)

Suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dikatakan normal jika sekurang-kurangnya terdapat satu $x \in X$ sedemikian sehingga $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$.

Contoh 2.5

Seperti pada contoh 2.4 di atas, himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ dikatakan normal karena ada satu anggota X yaitu rumah dengan jumlah kamar tidur 4 yang mempunyai derajat keanggotaan 1.

Definisi 2.3 (Ebrahimnejad, 2011)

Suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dikatakan konveks jika untuk setiap $x_1, x_2 \in X$ dan untuk setiap $\lambda \in [0,1]$ memeuhi:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}. \quad (2.15)$$

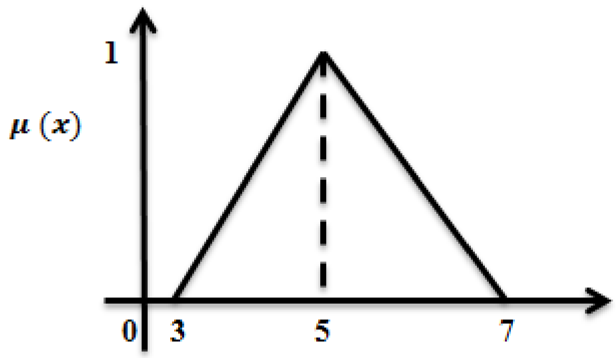
Pembuktian konveks atau tidaknya suatu himpunan fuzzy berdasarkan persamaan (2.15) seringkali sulit dilakukan, sehingga dilakukan dengan cara lain, yaitu dengan memeriksa gambar dari fungsi keanggotaan dari himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ yang diberikan. Suatu himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ dikatakan konveks jika gambar dari fungsi keanggotaan $\tilde{A}$ hanya memiliki satu puncak (Klir dkk., 1997).

Contoh 2.6

Misal $\tilde{B}$ menyatakan "sekitar 5" dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x-5|}{2}, & \text{untuk } 3 \leq x \leq 7 \\ 0 \quad , & \text{untuk x yang lain} \end{cases}$$

Fungsi keanggotaan $\tilde{B}$ ditunjukkan oleh Gambar 2.1 berikut.



Gambar 2. 1 Fungsi Keanggotaan $\tilde{B}$

dengan melihat Gambar 2.1 maka himpunan *fuzzy* $\tilde{B}$ adalah himpunan *fuzzy* konveks karna hanya memiliki satu puncak.

Definisi 2.4 (Klir dkk, 1997)

Support dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ adalah himpunan semua elemen dari X yang memiliki derajat keanggotaan tak nol di $\tilde{A}$. Secara umum dinotasikan sebagai berikut:

$$\text{Supp}(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\} \quad (2.16)$$

Pada contoh 2.6 di atas, $\text{Supp}(\tilde{B}) = (3,7)$

2. Fungsi Keanggotaan

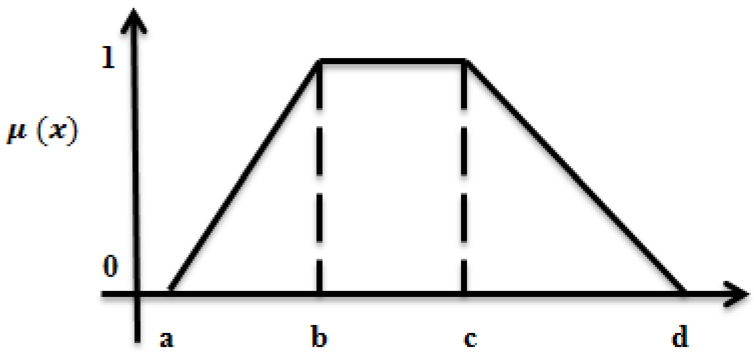
Fungsi keanggotaan *(membership function)* adalah suatu kurva yang menunjukkan pemetaan titik-titik input data ke dalam nilai keanggotaannya (sering juga disebut dengan derajat keanggotaan) yang terletak pada interval antara 0 sampai 1 (Sri Kusumadewi dan Hari Purnomo, 2010). Fungsi keanggotaan pada himpunan *fuzzy* yang sering digunakan adalah fungsi keanggotaan segitiga dan trapesium. Pada tulisan ini hanya akan dibahas mengenai fungsi keanggotaan trapesium.

Definisi 2.5 (Sharma, 2014)

Suatu bilangan fuzzy $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ disebut bilangan fuzzy trapesium jika fungsi keanggotaannya diberikan oleh:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & b \leq x \leq c \\ \frac{x-d}{c-d} & c < x \leq d \\ 0 & lainnya \end{cases} \tag{2.17}$$

Fungsi keanggotaan $\tilde{A}$ ditunjukkan oleh Gambar 2.2



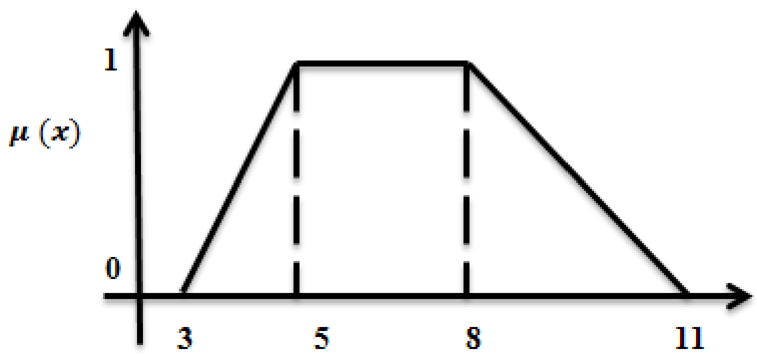
Gambar 2. 2 Fungsi Keanggotaan Trapesium

Contoh 2.7

Misal diberikan bilangan *fuzzy* $\tilde{A} = (3,5,8,11)$ dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{2} & 3 \leq x < 5 \\ 1 & 5 \leq x \leq 8 \\ \dfrac{x-11}{-3} & 8 < x \leq 11 \\ 0 & lainnya \end{cases}$$

Fungsi keanggotaan $\tilde{A}$ ditunjukkan oleh Gambar 2.3 berikut ini.



Gambar 2. 3 Fungsi Keanggotaan $\tilde{A}$

Definisi 2.6 (Sharma, 2014)

Suatu bilangan fuzzy trapesium (a,b,c,d) dikatakan bilangan fuzzy non negative jika $a \geq 0$.

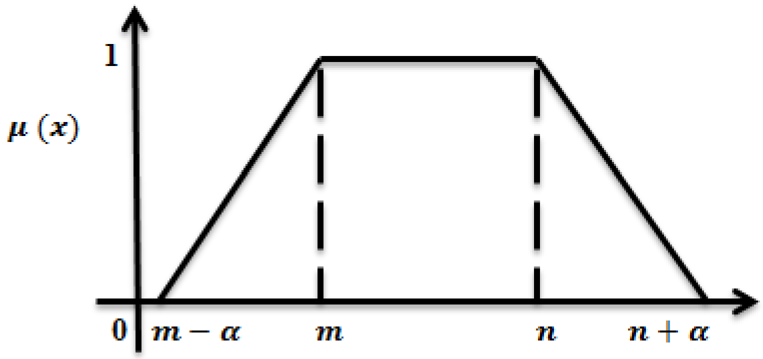
Definisi 2.7 (Kumar dan Kaur, 2011)

Suatu bilangan fuzzy $\tilde{A}$ *pada bilangan real* $\mathbb{R}$ *disebut bilangan fuzzy trapesium simetris jika terdapat bilangan real* $m,n \leq n$ *dan* $\alpha > 0$ *sedemikian sehingga*

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x+\alpha-m}{\alpha}, & x \in [m-\alpha, m] \\ 1, & x \in [m, n] \\ \frac{-x+n+\alpha}{\alpha} & x \in [n, n+\alpha] \\ 0, & lainnya \end{cases} \tag{2.18}$$

Ini dinotasikan sebagai $\tilde{A} = (m, n, \alpha, \alpha)$

Fungsi keanggotaan dari $\tilde{A} = (m, n, \alpha, \alpha)$ ditunjukkan oleh Gambar 2.4



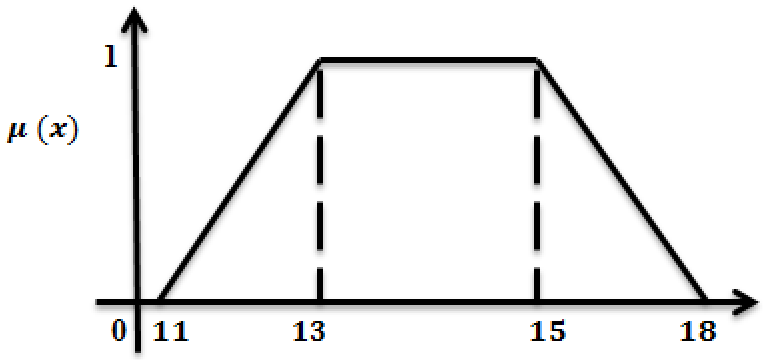
Gambar 2. 4 Fungsi Keanggotaan Trapesium Simetris

Contoh 2.8

Misal diberikan bilangan *fuzzy* $\tilde{C}$= (10,13,15,18) dan $\alpha = 3$, maka fungsi keanggotaan dari $\tilde{C}$ dinyatakan sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \frac{x+3-13}{3}, & x \in [11,13] \\ 1, & x \in [13,15] \\ \frac{-x+15+3}{3} & x \in [15,18] \\ 0, & lainnya \end{cases}$$

bilangan *fuzzy* $\tilde{C}$ tersebut merupakan bilangan *fuzzy* trapesium simetris karena jarak sisi kiri dan sisi kanan sama yaitu sebesar α sehingga dapat dinotasikan sebagai $\tilde{C}$=(13,15,3,3). Fungsi keanggotaan dari $\tilde{C}$ ditunjukkan oleh Gambar 2.5 berikut ini.



Gambar 2. 5 Fungsi keanggotaan $\tilde{C}$

Terdapat beberapa operasi pada himpunan *fuzzy* yang meliputi komplemen, gabungan dan irisan. Berikut ini definisi terkait operasi tersebut.

Definisi 2.8 (Klir dkk, 1997)

Diberikan sebuah himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang didefinisikan pada himpunan universal X, maka komplemen dari $\tilde{A}$ ditentukan oleh rumus:

$$\mu_{\overline{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)\ , x \in X \tag{2.19}$$

Dimana $\mu_{\tilde{A}}(x)$ menyatakan derajat keanggotaan x pada $\tilde{A}$, sedangkan $\mu_{\overline{\tilde{A}}}(x)$ menyatakan derajat keanggotan x yang bukan pada $\tilde{A}$, yaitu lawan dari $\tilde{A}$.

Contoh 2.9

Misal himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ menyatakan “orang kaya”, jika seseorang pada himpunan “orang kaya” memiliki derajat keanggotaan 0.7, maka seseorang tersebut juga termasuk dalam himpunan “orang miskin” dengan derajat keanggotaan 0.3 .

Definisi 2.9 (Klir dkk, 1997)

Diberikan sebuah himpunan universal X dan dua himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ yang didefinisikan pada X, maka gabungan dari $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$, didefinisikan oleh fungsi keanggotaan dengan rumus:

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, x \in X \quad (2.20)$$

Contoh 2.10

Misal diketahui $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0.7$ dan $\mu_{\tilde{B}}(x) = 0.5$, maka $\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} = \max\{0.7, 0.5\} = 0.7$

Definisi 2.10 (Klir dkk, 1997)

Diberikan sebuah himpunan universal X dan dua himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ yang didefinisikan pada X, maka irisan dari $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$, didefinisikan oleh fungsi keanggotaan dengan rumus:

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, x \in X \quad (2.21)$$

Contoh 2.11

Pada contoh 2.10 di atas, irisan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ yaitu $\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)$ = $\min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} = \min\{0.7\,, 0.5\} = 0.5$.

Selain merepresentasikan himpunan *fuzzy* dengan menggunakan derajat keanggotaan, ada juga cara merepresentasikan himpunan *fuzzy* berdasarkan penempatan khusus dari bilangan dalam selang [0,1] untuk himpunan klasik. Suatu himpunan *fuzzy* yang diberikan selalu berkaitan dengan subset-subset klasik dari himpunan universal X. Setiap subset ini memuat semua elemen dari himpunan universal X yang derajat keanggotaannya dalam himpunan *fuzzy* dibatasi untuk beberapa subset klasik dari selang [0,1]. Salah satu cara untuk membatasi derajat keanggotaan adalah dengan pembatasan derajat keanggotaan yang lebih besar atau sama dengan beberapa nilai α yang dipilih dalam selang [0,1]. Saat batasan ini diterapkan ke himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ didapatkan subset klasik ${}^{\alpha}A$ dari himpunan universal X, yang dinotasikan $\alpha - cut$ dari $\tilde{A}$ (George J. Klir dkk, 1997).

Definisi 2.11 (Klir dkk, 1997)

$\alpha - cut$ dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ adalah himpunan klasik ${}^{\alpha}A$ yang memuat semua elemen dari himpunan universal X yang derajat keanggotaannya lebih besar atau sama dengan nilai tertentu dari α yaitu

$${}^{\alpha}A = \{x \epsilon X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}\text{ , untuk setiap } \alpha \epsilon [0,1] \qquad (2.22)$$

Contoh 2.12

Sebagai contoh akan digunakan himpunan *fuzzy* pada contoh 2.4. Jika diambil untuk X diskret, $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ maka $\alpha - cutnya$ yaitu:

untuk $\alpha = 0$,

$${}^{0}A = \{x \in X \mid A(x) \geq 0\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

untuk $\alpha = 0.2$,

$${}^{0.2}A = \{x \in X \mid A(x) \geq 0.2\} = \{1,2,3,4,5,6\}$$

untuk $\alpha = 0.3$,

$${}^{0.3}A = \{x \in X \mid A(x) \geq 0.3\} = \{2,3,4,5,6\}$$

untuk $\alpha = 0.5$,

$${}^{0.5}A = \{x \in X \mid A(x) \geq 0.5\} = \{2,3,4,5\}$$

untuk $\alpha = 0.7$,

$${}^{0.7}A = \{x \in X \mid A(x) \geq 0.7\} = \{3,4,5\}$$

untuk $\alpha = 0.8$,

$${}^{0.8}A = \{x \in X \mid A(x) \geq 0.8\} = \{3,4,\}$$

untuk $\alpha = 1$,

$${}^{1}A = \{x \in X \mid A(x) \geq 1\} = \{4\}$$

3. Bilangan *Fuzzy*

Konsep bilangan *fuzzy* timbul dari kenyataan bahwa banyak kejadian kuantitatif yang tidak dapat dinyatakan dalam jumlah yang benar-benar tepat, seperti ungkapan “sekitar 6” tidak tegas atau pasti karena mengandung beberapa nilai bilangan pada sisi yang lain sedangkan nilai pusatnya adalah 6. ungkapan “sekitar 6” dapat dinyatakan dalam suatu himpunan *fuzzy* pada semesta bilangan real, dimana derajat keanggotaan 6 sebagai nilai pusat adalah sama dengan 1 dan derajat bilangan lainnya menunjukkan kedekatakan terhadap nilai pusat dengan mengikuti beberapa aturan (George J. Klir dkk, 1997). Misalkan $\tilde{B}$ menyatakan "sekitar 6", konsep dari "sekitar 6" tersebut dapat dinyatakan dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut :

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-6|}{2} & untuk\ 4 \leq x \leq 8 \\ 0 & untuk\ x\ yang\ lain \end{cases} \tag{2.23}$$

Definisi 2.12 (Klir dkk, 1997)

Untuk himpunan fuzzy $\tilde{A}$ *dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut*:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \{a, b] \\ 1, & x \in \{b, c\} \\ g(x), & x \in [c, d\} \\ 0, & x\ yang\ lain \end{cases} \tag{2.24}$$

Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ *disebut sebagai bilangan fuzzy apabila memenuhi syarat-syarat berikut:*

a. *Bilangan fuzzy* $\tilde{A}$ *merupakan himpunan fuzzy normal.*
b. $\alpha - cut$ *dari bilangan fuzzy* $\tilde{A}$ *berada pada interval tertutup dari bilangan real.*
c. *Support dari bilangan fuzzy* $\tilde{A}$ *berada pada interval terbuka (a,d) pada bilangan real.*
d. *Bilangan fuzzy* $\tilde{A}$ *adalah himpunan fuzzy konveks*

Contoh 2.13

Dengan menggunakan contoh 2.6, himpunan *fuzzy* $\tilde{B}$ merupakan bilangan *fuzzy* karena memenuhi syarat-syarat berikut:

(a) merupakan himpunan *fuzzy* normal karena ada satu anggota dari X yang memiliki derajat keanggotaan 1 yaitu 5.

(b) $\alpha - cuts$ dari himpunan *fuzzy* $\tilde{B}$ berada pada interval tertutup dari bilangan real.

untuk $\alpha = 0$,

$${}^{0}B = \{x \in X \mid B(x) \geq 0\} = [0,7]$$

untuk $\alpha = 0.5$,

$${}^{0.5}B = \{x \in X \mid B(x) \geq 0.5\} = [4,6]$$

(c) Support $(\tilde{B})$ berada pada selang terbuka (3,7)

(d) Himpunan *fuzzy* $\tilde{B}$ merupakan himpunan *fuzzy* konveks

Definisi 2.13 (Kumar dan Kaur, 2011)

Untuk $\tilde{A} = (m_1, n_1, \alpha, \alpha)$ *dan* $\tilde{B} = (m_2, n_2, \beta, \beta)$ *adalah dua bilangan fuzzy trapesium simetris, operasi aritmatika pada* $\tilde{A}$ *dan* $\tilde{B}$ *sebagai berikut:*

(i) Penambahan

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (m_1, n_1, \alpha, \alpha) \oplus (m_2, n_2, \beta, \beta) = (m_1 + m_2, n_1 + n_2, \alpha + \beta, \alpha + \beta)$$

(ii) *Pengurangan*

$\tilde{A} \ominus \tilde{B}$=$(m_1, n_1, \alpha, \alpha) \ominus (m_2, n_2, \beta, \beta)$= $(m_1 n_2 \,,\, n_1 - m_2,\ \alpha + \beta, \alpha - \beta)$

(iii) *Perkalian*

$\tilde{A} \otimes \tilde{B}$=$\left(\left(\frac{m_1+n_1}{2}\right)\left(\frac{m_2+n_2}{2}\right) - w, \left(\frac{m_1+n_1}{2}\right)\left(\frac{m_2+n_2}{2}\right) + w, |n_1\beta + n_2\alpha|, |n_1\beta + n_2\alpha|\right)$

Dimana $w = (\frac{k-h}{2})$ dan $h = \min\{m_1 m_2, m_1 n_2, m_2 n_1, n_1 n_2\}$,

$k = \max\{m_1 m_2, m_1 n_2, m_2 n_1, n_1 n_2\}$,

Contoh 2.14

Diberikan dua himpunan *fuzzy* $\tilde{C} = (2,4,1,1)$ dan $\tilde{D}$=(3,5,1,1), operasi pada $\tilde{C}$ dan $\tilde{D}$ adalah sebagai berikut:

(i) Penambahan

$$\tilde{C} \oplus \tilde{D} = (2,4,1,1) \oplus (3,5,1,1) = (5,9,2,2)$$

(ii) Pengurangan

$$\tilde{C} \ominus \tilde{D} = (2,4,1,1) \ominus (3,5,1,1) = (-3,1,2,2)$$

(iii) Perkalian

(2,4,1,1) ⊗(3,5,1,1))=$\left(\left(\frac{2+4}{2}\right)\left(\frac{3+5}{2}\right) - w, \left(\frac{2+4}{2}\right)\left(\frac{3+5}{2}\right) + w\,, |4.1 + 5.1|, |4.1 + 5.1|\right)$

W= $\frac{k-h}{2}$ =$\frac{20-6}{2} = 7$

$$h = \min\{2.3, 2.5, 3.4, 4.5\} = 6$$

$$k = \max\{2.3, 2.5, 3.4, 4.5\} = 20$$

(2,4,1,1)⊗(3,5,1,1)=$\left(\left(\frac{2+4}{2}\right)\left(\frac{3+5}{2}\right)-7,\left(\frac{2+4}{2}\right)\left(\frac{3+5}{2}\right)+7\ ,\ |4.1+5.1|,|4.1+5.1|\ )\right)=(5,19,9,9)$

Definisi 2.14 (Ebrahimnejad, 2011)

Untuk $\tilde{A}=(m_1,n_1,\alpha,\alpha)$ *dan* $\tilde{B}=(m_2,n_2,\beta,\beta)$ *adalah dua bilangan fuzzy trapesium simetris,* $\tilde{A}\preceq\tilde{B}$ *jika memenuhi :*

$$\frac{(m_1-\alpha)+(n_1+\alpha)}{2}\leq\frac{(m_2-\beta)+(n_2+\beta)}{2}\Leftrightarrow\frac{m_1+n_1}{2}\leq\frac{m_2+n_2}{2}$$ *(dapat disebut,* $\tilde{A}\prec\tilde{B}$*)* (2.25)

Contoh 2.15

Diberikan dua bilangan *fuzzy* trapesium simetris $\tilde{A}=(\ 10{,}15{,}3{,}3)$ dan $\tilde{B}=(12{,}16{,}2{,}2)$, $\tilde{A}\preceq\tilde{B}$ karena $\frac{10+15}{2}<\frac{12+16}{2}$

Definisi 2.15 (Ebrahimnejad, 2011)

Untuk $\tilde{A}=(m_1,n_1,\alpha,\alpha)$ *dan* $\tilde{B}=(m_2,n_2,\beta,\beta)$ *dua bilangan fuzzy trapesium simetris,* $\tilde{A}\approx\tilde{B}$ *jika memenuhi salah satu kondisi berikut:*

(i) $\frac{m_1+n_1}{2}=\frac{m_2+n_2}{2}$, $m_2<m_1$ dan $n_1<n_2$ (2.26)

(ii) $\frac{m_1+n_1}{2}=\frac{m_2+n_2}{2}$, $m_2=m_1$, $n_1=n_2$ dan $\alpha\leq\beta$ (2.27)

Contoh 2.16

Diberikan dua bilangan *fuzzy* trapesium simetris $\tilde{A}=(\ 10{,}14{,}3{,}3,)$ dan $\tilde{B}=(8{,}16{,}3{,}3)$, dengan $m_1=10, n_1=14, m_2=8$ dan $n_1=16$. Jelas bahwa $\tilde{A}\approx\tilde{B}$ karena memenuhi persamaan (2.26), yaitu $\frac{10+14}{2}=\frac{8+16}{2}$, dengan 8<10 dan 14<16.

4. ***Ranking Function***

Metode efisien yang digunakan untuk membandingkan bilangan *fuzzy* adalah dengan menggunakan *ranking function* (Amit Kumar dkk, 2010).

Definisi 2.16 (Kumar dan Kaur, 2011)

Ranking function adalah fungsi $\Re: F(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ *yang memetakan setiap bilangan fuzzy pada sebuah bilangan real, dengan* $F(\mathbb{R})$ *adalah himpunan bilangan-bilangan fuzzy trapesium simetris dengan,*

$$\Re(\tilde{A}) = \frac{m+n}{2}, \textit{ untuk } \tilde{A} = (m, n, \alpha, \alpha). \quad (2.28)$$

Contoh 2.17

berikut ini diberikan contoh pendefinisian bilangan *fuzzy* trapesium atas bilangan real. Misal diberikan bilangan *fuzzy* $\tilde{B} = (11,13,2,2)$, maka $\Re(\tilde{B}) = \frac{11+13}{2} = 12$.

Teorema 2.1 (Kumar dan Kaur, 2011)

Untuk $\tilde{A} = (m_1, n_1, \alpha, \alpha)$ *dan* $\tilde{B} = (m_2, n_2, \beta, \beta)$ *adalah dua bilangan fuzzy trapesium simetris, berlaku*

(i) $\tilde{A} \succeq \tilde{B} \Leftrightarrow (\Re)\tilde{A} \geq (\Re)\tilde{B}$ (2.29)

(ii) $\tilde{A} \preceq \tilde{B} \Leftrightarrow (\Re)\tilde{A} \leq (\Re)\tilde{B}$ (2.30)

(iii) $\tilde{A} \approx \tilde{B} \Leftrightarrow (\Re)\tilde{A} = (\Re)\tilde{B}$ (2.31)

Bukti

(i) Pembuktian biimplikasi dilakukan dengan dua arah,

1) Dari kiri ke kanan

Jika $\tilde{A} \succeq \tilde{B} \Rightarrow (\Re)\tilde{A} \geq (\Re)\tilde{B}$

Dengan menggunakan definisi 2.14 diperoleh

$\tilde{A} \succeq \tilde{B} = \frac{(m_1-\alpha)+(n_1+\alpha)}{2} \geq \frac{(m_2-\beta)+(n_2+\beta)}{2}$

$=\frac{m_1+n_1}{2} \geq \frac{m_2+n_2}{2} = (\Re)\tilde{A} \geq (\Re)\tilde{B}$ (terbukti)

2) Dari kanan ke kiri

Jika $(\Re)\tilde{A} \geq (\Re)\tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \succeq \tilde{B}$

Dengan menggunakan definisi 2.16, diperoleh

$(\Re)\tilde{A} \geq (\Re)\tilde{B} = \frac{m_1+n_1}{2} \geq \frac{m_2+n_2}{2}$, tambahkan $-\alpha$ dan α pada ruas kiri, serta $-\beta$ dan β pada ruas kanan dengan $\alpha, \beta > 0$ sehingga diperoleh:

$(\Re)\tilde{A} \geq (\Re)\tilde{B} = \frac{m_1+n_1-\alpha+\alpha}{2} \geq \frac{m_2+n_2-\beta+\beta}{2}$

$= \frac{(m_1-\alpha)+(n_1+\alpha)}{2} \geq \frac{(m_2-\beta)+(n_2+\beta)}{2} = \tilde{A} \succeq \tilde{B}$ (terbukti)

Dari 1) dan 2) maka persamaan (2.29) terbukti

(ii) dengan analogi yang sama, pembuktian pada persamaan (2.29) sekaligus membuktikan persamaan (2.30)

(iii) Pembuktian biimplikasi dilakukan dengan dua arah,

a) Dari kiri ke kanan

Dengan menggunakan definisi 2.15, diperoleh

$\tilde{A} \approx \tilde{B} = \frac{m_1+n_1}{2} = \frac{m_2+n_2}{2} = (\Re)\tilde{A} = (\Re)\tilde{B}.$

b) Dari kanan ke kiri

Dengan menggunakan definisi 2.16, diperoleh

$(\Re)\tilde{A} = (\Re)\tilde{B} = \frac{m_1+n_1}{2} = \frac{m_2+n_2}{2} = \tilde{A} \approx \tilde{B}$

Dari a) dan b) maka persamaan (2.31) terbukti

Contoh 2.18

(i) Dari contoh 2.12, dapat disimpulkan bahwa $\tilde{A} = (10,15,3,3,) \preceq \tilde{B} = (12,16,2,2) \Leftrightarrow \frac{10+15}{2} < \frac{12+16}{2} = (\Re)\tilde{A} < (\Re)\tilde{B}$

(ii) atau dapat dikatakan bahwa $\tilde{B} = (12,16,2,2,) \succeq \tilde{A} = (10,15,3,3,) \Leftrightarrow \frac{12+16}{2} > \frac{10+15}{2} = (\Re)\tilde{B} > (\Re)\tilde{A}$

(iii) dari contoh 2.13 dapat disimpulkan bahwa $\tilde{A} = (10,14,3,3) \approx \tilde{B} = (8,16,3,3) \Leftrightarrow \frac{10+14}{2} = \frac{8+16}{2} = (\Re)\tilde{A} = (\Re)\tilde{B}$

Teorema 2.2 (Abbas dan Hamed, 2014)

Misalkan $\tilde{A} = (m_1, n_1, \alpha, \alpha), \tilde{B} = (m_2, n_2, \beta, \beta) \in F(\mathbb{R})$, *maka*

(i) $\Re(\tilde{A} \otimes \tilde{B}) = \Re(\tilde{A}) \times \Re(\tilde{B})$ (2.31)

(ii) $\Re(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) = \Re(\tilde{A}) + \Re(\tilde{B})$ (2.32)

Bukti

Dengan menggunakan definisi 2.13 mengenai perkalian dan penjumlahan antara dua bilangan *fuzzy*, diperoleh

(i) $(\tilde{A} \otimes \tilde{B}) = \left(\frac{m_1+n_1}{2}\right)\left(\frac{m_2+n_2}{2}\right) - w, \left(\frac{m_1+n_1}{2}\right)\left(\frac{m_2+n_2}{2}\right) w, |n_1\beta + n_2\alpha|, |n_1\beta + n_2\alpha|)$, maka

$$\Re(\tilde{A} \otimes \tilde{B}) = \Re\left(\left(\frac{m_1+n_1}{2}\right)\left(\frac{m_2+n_2}{2}\right) - w, \left(\frac{m_1+n_1}{2}\right)\left(\frac{m_2+n_2}{2}\right) + w, |n_1\beta + n_2\alpha|, |n_1\beta + n_2\alpha|\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{m_1+n_1}{2}\right)\left(\frac{m_2+n_2}{2}\right) - w}{2} + \frac{\left(\frac{m_1+n_1}{2}\right)\left(\frac{m_2+n_2}{2}\right) + w}{2}$$

$$= 2\left(\frac{\left(\frac{m_1+n_1}{2}\right)\left(\frac{m_2+n_2}{2}\right)}{2}\right) = \left(\frac{m_1+n_1}{2}\right)\left(\frac{m_2+n_2}{2}\right) = \Re(\widetilde{A}) \times \Re(\widetilde{B})$$

(ii) $(\widetilde{A} \oplus \widetilde{B}) = (m_1+m_2,\ n_1+n_2, \alpha+\beta, \alpha+\beta)$, maka

$$\Re(\widetilde{A} \oplus \widetilde{B}) = \Re\big((m_1+m_2, n_1+n_2, \alpha+\beta, \alpha+\beta)\big) = \frac{m_1+m_2+\ n_1+n_2}{2}$$

$$= \left(\frac{m_1+n_1}{2}\right) + \left(\frac{m_2+n_2}{2}\right) = \Re(\widetilde{A}) + \Re(\widetilde{B})$$

Contoh 2.19

Dengan menggunakan himpunan *fuzzy* pada contoh 2.12 yaitu $\tilde{C} = (2,4,1,1)$ dan $\widetilde{D}$=(3,5,1,1), akan dibuktikan bahwa $\Re(\widetilde{C} \otimes \widetilde{D}) = \Re(\tilde{C})$ $\otimes \Re(\widetilde{D})$ dan $\Re(\widetilde{C} \oplus \widetilde{D}) = \Re(\tilde{C}) \oplus \Re(\widetilde{D})$

Penyelesaian:

(i) $\Re(\widetilde{C} \otimes \widetilde{D})$=$\Re$((2,4,1,1) $\otimes$(3,5,1,1))=$\Re$ ((3)(4)-7, (3)(4)+7, 9,9))= $(3) \times$ (4) = $\Re$(2,4,1,1) $\otimes$ $\Re(3,5,1,1)$ =12 (terbukti)

(ii) $\Re(\widetilde{C} \oplus \widetilde{D}) = \Re\big((2,4,1,1)\oplus(3,5,1,1)\big) = \Re\big((2+3,\ 4+5, 1+1, 1+$ 1)$\big) = \frac{2+3+4+5}{2} = \left(\frac{2+4}{2}\right) + \left(\frac{3+5}{2}\right) = \Re(\widetilde{C}) + \Re(\widetilde{D}) = 7$

E. *Fuzzy Linear Programming (FLP)*

Pengertian *Fuzzy Linear Programming (FLP)* menurut Purba (2012) adalah program linear yang dinyatakan dengan fungsi tujuan dan fungsi kendala yang memiliki parameter *fuzzy* dan ketidaksamaan *fuzzy*.

Bentuk umum model *FLP* menurut Klir dkk (1997) dinyatakan sebagai berikut:

Memaksimumkan $\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \otimes \tilde{x}_j$ (2.33)

Dengan kendala $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \tilde{x}_j \preceq \tilde{b}_i$ (2.34)

$$\tilde{x}_j \succeq 0 \tag{2.35}$$

$$i = 1,2,3,4, \dots, m$$

$$j = 1,2,3,4, \dots, n$$

dengan x_j adalah variabel-variabel keputusan, c_j adalah koefisien-koefisien fungsi tujuan, a_{ij} adalah koefisien-koefisien kendala dan b_i adalah koefisien nilai ruas kanan. Dimana x_j, c_j dan b_i berupa bilangan samar dan a_{ij} berupa bilangan real.

Pada tulisan ini akan dibahas mengenai permasalahan *FLP* dengan seluruh parameter-parameter keputusan dan variabel-variabel keputusan yang berupa bilangan *fuzzy*. Menurut Kumar, dkk (2010), bentuk umum masalah *FLP* dengan m kendala *fuzzy* dan n variabel *fuzzy* adalah sebagai berikut:

Memaksimumkan $\sum_{j=1}^{n} (\tilde{c}_j \otimes \tilde{x}_j)$ (2.36)

Terhadap kendala $\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \otimes \tilde{x}_j \preceq, \approx, \succeq \tilde{b}_i$ (2.37)

$$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n \succeq 0 \tag{2.38}$$

dengan x_j, c_j,b_i, dan a_{ij} berupa bilangan samar. Pada tulisan ini, hanya akan dibahas masalah *FLP* dengan bilangan *fuzzy* trapesium simetris.