BAB II
KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas tentang beberapa hal yang menjadi landasan dalam penulisan bab III. Materi yang diuraikan berisi tentang definisi, teorema, dan beberapa kajian matematika, antara lain pemodelan matematika, turunan, integral, dan jumlah Riemann. Selain itu, pada bab ini akan dikaji tentang definisi, karakter, serta parameter-parameter fluida.

A. PEMODELAN MATEMATIKA

Pemodelan Matematika merupakan suatu proses untuk merepresentasikan dan menjelaskan permasalahan pada dunia nyata ke dalam pernyataan matematis (Widowati & Sutimin, 2007). Matematika sering digunakan untuk menganalisa dan merumuskan fenomena yang terjadi dalam kehidupan. Perumusan tersebut dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah dari fenomena yang dianalisa secara matematis. Perumusan matematis dari suatu fenomena disebut dengan model matematika.

Secara umum, pemodelan Matematika merupakan usaha perancangan rumusan Matematika yang secara potensial menggambarkan bagaimana mendapatkan penyelesaian masalah Matematika yang digeneralisasikan untuk diterapkan pada perilaku atau kejadian alam. Menurut Ripno (2012), dalam penyusunan model Matematika terdapat beberapa tahap, yaitu

1. Pengamatan fenomena sistem fisik yang akan dimodelkan.

Untuk melakukan pemodelan Matematika pada suatu fenomena, perlu dilakukan pengamatan terlebih dahulu. Misalnya pada pemodelan persamaan kontinuitas aliran sungai, perlu diamati proses aliran sungai yang mengalir tersebut. Pada pengamatan ini, akan diamati elemen-elemen yang terlihat yang mempengaruhi aliran air sungai mengalir, seperti kecepatan aliran, dan perubahan volume air pada waktu tertentu.

2. Mengidentifikasi beberapa elemen yang menyusun sistem, termasuk variabel dependen dan variabel independen.

   Setelah melakukan pengamatan, dilakukan identifikasi beberapa elemen yang terlihat pada pengamatan sebelumnya. Jika sebelumnya diperoleh kecepatan dan perubahan volume air, maka identifikasi sementara dapat diperoleh kecepatan dan volume air sebagai variabel dependen, dan waktu sebagai variabel independen.

3. Identifikasi banyak elemen yang menyusun sistem dan pengidentifikasian hubungan sebab akibat.

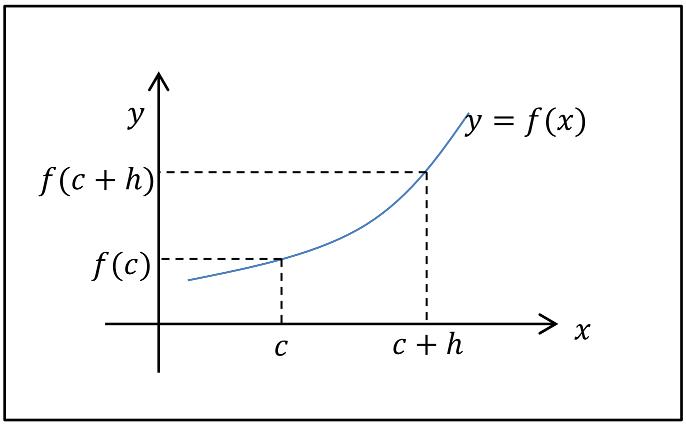
   Pada proses identifikasi ini, perlu dilakukan analisa lebih dalam setelah melakukan pengamatan. Pada proses mengalirnya aliran air di sungai, tentu tidak hanya kecepatan dan volume air yang menjadi elemen penyebab mengalirnya air. Aliran air di sungai tentu mempunyai massa aliran pada waktu tertentu. Adanya massa dan volume pada waktu tertentu menyebabkan adanya massa jenis fluida pada waktu tersebut.

4. Penurunan model Matematika menggunakan variabel dependen, yaitu dengan mengeksplor hubungan antara sebab akibat yang dimiliki.

Langah selanjutnya pada pemodelan Matematika yaitu memodelkan fenomena yang telah diamati. Setelah mendapatkan elemen-elemen yang mempengaruhi aliran air di sungai tersebut, maka langkah berikutnya yaitu memodelkan persamaan kontinuitas aliran sungai.

B. TURUNAN

Konsep dasar dari turunan adalah perubahan suatu fungsi dalam sesaat. Pada Gambar 2.1 berikut diilustrasikan tentang konsep dari turunan. Misalkan terdapat interval $I \subseteq \mathbb{R}$, dan $y = f(x)$ dimana $f: I \to \mathbb{R}$, serta $c, x \in I$.



Gambar 2.1 Ilutrasi Konsep Turunan

Berdasarkan Gambar 2.1 diperoleh bahwa

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c+h) - f(c)}{c+h-c} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Jika nilai h diperkecil mendekati nol, maka diperoleh nilai limit sebagai berikut

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Jika nilai limit ini ada, maka nilai limit tersebut disebut dengan turunan (perubahan nilai suatu fungsi sesaat) dari $y = f(x)$ di $x = c$.

Definisi 2.1 Turunan (Valberg, Purcell, & Rigdon, 2008)

Turunan fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca "f aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan x adalah

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

asalkan limit ini ada dan bukan ∞ *atau* $-\infty$.

Dengan notasi Leibniz, jika $y = f(x)$, maka turunan dari f dapat dinyatakan dengan tiga notasi yaitu

$$f'(x) \text{ atau } D_x f(x) \text{ atau } \frac{dy}{dx}.$$

Jika limit ini memang ada, dikatakan bahwa f terdiferensiasi di x. Pencarian turunan disebut diferensiasi.

Adapun aturan-aturan atau teorema pencarian turunan menurut Purcell (2008) adalah sebagai berikut.

Teorema 2.1 Aturan Fungsi Konstanta

Jika $f(x) = k$ dengan k suatu konstanta, maka untuk sebarang x, $f'(x) = 0$; yakni,

$$D_x(k) = 0.$$

Bukti.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 0$$

$= 0. \blacksquare$

Grafik fungsi konstanta $f(x) = k$ adalah sebuah garis mendatar, sehingga mempunyai kemiringan nol di titik manapun.

Teorema 2.2 Aturan Fungsi Satuan

Jika $f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$; yakni

$$D_x(x) = 1.$$

Bukti.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h}$$

$$=1. \blacksquare$$

Grafik $f(x) = x$ merupakan suatu garis yang melalui titik asal dengan kemiringan 1, sehingga dapat diperoleh bahwa turunan fungsi ini adalah 1 untuk semua *x*.

Teorema 2.3 Aturan Pangkat

Jika $f(x) = x^n$, dengan *n* bilangan bulat positif, maka $f'(x) = nx^{n-1}$ yakni,

$$D_x(x^n) = nx^{n-1}.$$

Bukti.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n-1}$$

$$= nx^{n-1}. \blacksquare$$

Teorema aturan pangkat sangat membantu dalam menyelesaikan permasalahan turunan pada persoalan matematika maupun fisika pada saat pembelajaran di tingkat sekolah menengah atas.

Teorema 2.4 Aturan Kelipatan Konstanta

Jika k suatu konstanta dan f suatu fungsi yang terdiferensiasikan, maka $(kf)'(x) = k.f'(x)$ yakni,

$$D_x[k \cdot f(x)] = k \cdot D_x f(x).$$

Dengan kata lain, pengali konstanta *k* dapat dikeluarkan dari operator D_x.

Bukti.

Misalkan $F(x) = k.f(x)$. Maka

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} k \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= k \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= k \cdot f'(x). \blacksquare$$

Aturan kelipatan konstanta dapat digunakan untuk membuat penulisan dan penurunan suatu fungsi menjadi lebih mudah. Mengingat bahwa konstanta bukan merupakan suatu fungsi atas suatu variabel, sehingga kontsnta dapat dikeluarkan dari operasi turunan tersebut.

Teorema 2.5 Aturan Jumlah

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ yakni,

$$D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x).$$

Bukti.

Misalkan $F(x) = f(x) + g(x)$. Maka

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)]}{h} - \frac{[f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$= f'(x) + g'(x). \blacksquare$

Turunan dari penjumlahan dua fungsi adalah sama dengan turunan fungsi pertama ditambah dengan turunan fungsi kedua. Aturan jumlah ini sering digunakan untuk menyelesaikan persoalan turunan.

Teorema 2.6 Aturan Selisih

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$ yakni,

$$D_x[f(x) - g(x)] = D_x f(x) - D_x g(x).$$

Bukti.

Misalkan $F(x) = f(x) - g(x)$. Maka

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - g(x+h)]}{h} - \frac{[f(x) - g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x) - g'(x). \blacksquare$$

Turunan dari selisih dua fungsi adalah sama dengan turunan fungsi pertama dikurangi dengan turunan fungsi kedua. Aturan selisih ini juga sering digunakan dan mempermudah untuk menyelesaikan persoalan turunan.

Teorema 2.7 Aturan Hasil Kali

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka $(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ yakni,

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x)D_x g(x) + g(x)D_x f(x).$$

Bukti.

Misalkan $F(x) = f(x)g(x)$. Maka

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \blacksquare$$

Aturan hasil kali sangat membantu untuk menyelesaikan permasalahan turunan dari perkalian dua fungsi, sehingga tidak perlu untuk mengalikan dua fungsi terlebih dahulu kemudian didiferensialkan. Aturan hasil kali sering digunakan dalam penyelesaian persoalan turunan pada tugas akhir ini.

Teorema 2.7 Aturan Hasil Bagi

Misalkan f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan dengan $g(x) \neq 0$.

Maka $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ yakni,

$$D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{g^2(x)}.$$

Bukti.

Misalkan $F(x) = f(x)/g(x)$. Maka

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{h}\cdot\frac{1}{g(x)g(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x)f(x+h) - g(x)f(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h}\cdot\frac{1}{g(x)g(x+h)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\left[g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\,\frac{1}{g(x)g(x+h)}\right]\right\}$$

$$= [g(x)f'(x) - f(x)g'(x)]\frac{1}{g(x)g(x)}$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \blacksquare$$

Sama halnya dengan aturan-aturan turunan sebelumnya, aturan hasil bagi juga mempermudah untuk menyelesaikan permasalahan turunan dari pembagian dua fungsi, sehingga tidak perlu untuk membagi dua fungsi terlebih dahulu kemudian didiferensialkan.

C. TURUNAN PARSIAL

Turunan parsial merupakan turunan dari sebuah fungsi dari beberapa variabel terhadap salah satu variabel bebasnya, dengan menganggap semua variabel bebas yang lainnya konstan (Spiegel, 1992).

Definisi 2.2 Turunan Parsial (Spiegel, 1992)

Misalkan suatu fungsi f merupakan fungsi dari dua variabel x dan y. turunan parsial dari f terhadap x dan y berturut-turut dinyatakan oleh $\frac{\partial f}{\partial x}$ *dan* $\frac{\partial f}{\partial y}$, *dengan definisi:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \; dan \; \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

jika limit-limit itu ada.

Andaikan bahwa *f* adalah suatu fungsi dua variabel *x* dan *y*. Jika *y* dijaga agar tetap konstan, dikatakan $= y_o$, maka $f(x, y_0)$ adalah fungsi satu variabel *x*. Turunannya di $x = x_o$ disebut turunan parsial *f* terhadap *x* di (x_0, y_0) dan dinyatakan oleh $f_x(x_0, y_0)$. Jadi

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Dengan cara yang sama, turunan parsial *f* terhadap *y* di (x_0, y_0) dan dinyatakan oleh $f_y(x_0, y_0)$ dan diberikan oleh

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Turunan-turunan parsial f yang dihitung di titik (x_0, y_0) dapat pula dinyatakan dengan

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0, y_0) \text{ dan } \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = f_y(x_0, y_0).$$

Contoh:

Misalkan $f(x, y) = 4x^2 + 2x^2y^3$, maka secara umum

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(4(x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x)^2.y^3) - 4x^2 - 2x^2y^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 + 2x^2y^3 + 4x\Delta x y^3 + 2(\Delta x)^2 y^3) - 4x^2 - 2x^2y^3}{\Delta x}$$

$$= 8x + 4xy^3.$$

Sedangkan,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(4x^2 + 2x^2.(y+\Delta y)^3) - 4x^2 - 2x^2y^3}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(4x^2 + 2x^2(y^3 + 3y^2\Delta y + 3y(\Delta y)^2 + (\Delta y)^3) - 4x^2 - 2x^2y^3}{\Delta y}$$

$$= 6x^2y^2.$$

D. ATURAN RANTAI

Aturan rantai dapat digunakan untuk mempermudah penurunan suatu fungsi komposit. Fungsi komposit merupakan suatu fungsi yang variabel bebasnya adalah suatu fungsi juga.

Teorema 2.8 Aturan Rantai Fungsi Satu Variabel (Valberg, Purcell, & Rigdon, 2008)

Misalkan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$. Jika g terdiferensiasikan di x dan f terdiferensisasikan di $u = g(x)$, maka fungsi komposit $f \circ g$, yang didefinisikan oleh $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, adalah terdiferensiasikan di x dan

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

yakni

$$D_x(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$$

atau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Bukti.

Misalkan bahwa $y = f(u)$ dan $u = g(x)$, bahwa g terdiferensiasikan di x dan bahwa f terdiferensiasikan di $u = g(x)$. Ketika x diberikan pertambahan Δx, terdapat pertambahan yang berkorespondensi dalam u dan y yang diberikan oleh

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

$$\Delta y = f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))$$

$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u).$

Jadi,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Karena g terdiferensiasikan di x, maka g kontinu di x, sehingga $\Delta x \to 0$ mengakibatkan $\Delta u \to 0$. Oleh karena itu,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \blacksquare$$

Aturan rantai ini dapat mempermudah dalam menyelesaikan permasalahan persamaan differensial maupun permasalahan turunan.

Teorema 2.9 Aturan Rantai Fungsi Dua Variabel (Varberg, Purcell, & Rigdon, 2011)

Misalkan $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ terdiferensiasikan di t dan misalkan $z = f(x, y)$ terdiferensiasikan di $(x(t), y(t))$. Maka $z = f(x(t), y(t))$ dapat didiferensiasikan di t dan

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt}.$$

Aturan rantai fungsi dua variabel digunakan dalam proses penurunan persamaan momentum fluida.

E. FLUIDA

1. Definisi Fluida

Fluida merupakan besaran yang dapat mengalir, atau sering disebut sebagai zar alir. Fluida tersebut dapat berupa zat cair dan zat gas. Selain itu, fluida disebut juga dengan lawan dari zat padat, karena fluida dapat berubah bentuk sesuai dengan ruang yang membatasi fluida tersebut sedangkan zat padat tidak dapat berubah bentuk.

Definisi fluida menurut Halliday, Resnick dan Walker dinyatakan dalam Definisi 2.3 sebagai berikut.

Definisi 2.3 Fluida (Halliday, Resnick, & Walker, 2010)

Fluida adalah zat yang dapat mengalir, fluida merupakan kebalikan dari zat padat.

Fluida menyesuaikan diri dengan bentuk wadah apapun di mana ditempatkannya. Fluida bersifat demikian karena tidak dapat menahan gaya yang bersinggungan dengan permukaannya.

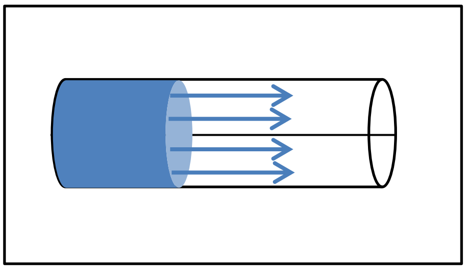
2. Klasifikasi Fluida

Aliran fluida dapat diklasifikasikan dalam banyak cara seperti turbulen, laminar; ideal, sejati; kompresibel, inkompresibel; ajek, tak ajek; seragam, tak seragam; rotasional dan tak rotasional. (Streeter & Wylie, 1985).

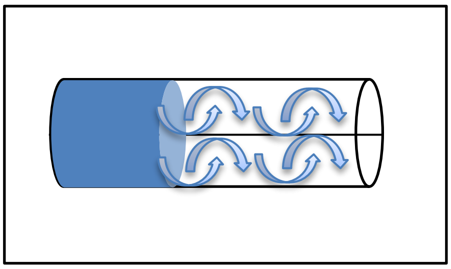
a. Berdasarkan gerak partikelnya, aliran fluida dibagi menjadi aliran fluida turbulen, dan aliran fluida laminar.

1) Aliran turbulen merupakan aliran yang di dalamnya terjadi pencampuran partikel-partikel fluida sehingga pergerakan suatu partikel tertentu terjadi secara acak dan sangat tidak teratur (Streeter & Wylie, 1985). Gerakan partikel fluida pada aliran turbulen tidak lagi sejajar, mulai saling bersilang satu sama lain sehingga terbentuk pusaran di dalam fluida. Aliran turbulen diilustrasikan pada Gambar 2.3.

2) Aliran laminar merupakan aliran yang di dalamnya tidak terjadi pencampuran partikel-partikel yang signifikan; pergerakannya halus dan tenang, seperti aliran air yang mengalir pelan dari sebuah kran (Potter & Wiggert, 2008). Aliran laminar dapat dilihat jika seluruh partikel fluida bergerak sepanjang garis yang sejajar dengah arah aliran (atau sejajar dengan garis tengah pipa, jika fluida mengalir di dalam pipa). Aliran laminar diilustrasikan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Aliran Laminar

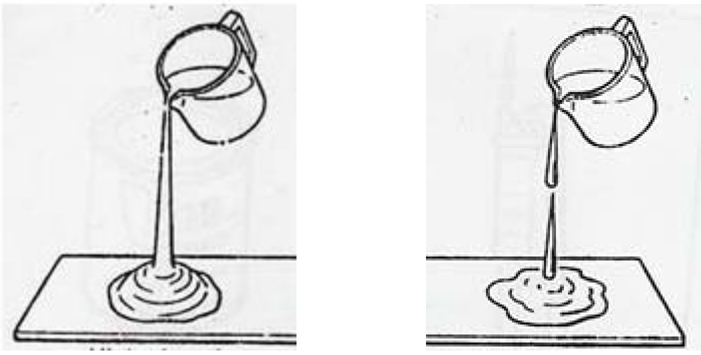


Gambar 2.3 Aliran Turbulen

b. Berdasarkan kekentalan (viskositas) pada aliran, aliran dibagi menjadi aliran fluida sejati dan aliran fluida ideal.

1) Fluida sejati merupakan aliran fluida yang mempunyai viskositas (kekentalan). Pada fluida sejati, terdapat gesekan-gesekan antara partikel-partikel fluida pada aliran fluida tersebut (Streeter & Wylie, 1985).

2) Fluida ideal merupakan fluida tak viskos atau tanpa gesekan. Asumsi fluida ideal biasanya sering digunakan untuk menganalisa aliran fluida, karena fluida ideal lebih mudah dianalisa daripada fluida sejati (Streeter & Wylie, 1985).



(a) (b)

Gambar 2.4 Ilustrasi Aliran Fluida Sejati (a) dan Ideal (b)

Pada Gambar 2.4 di atas, gambar (a) merupakan aliran fluida sejati, dimana terdapat kekentalan pada aliran tersebut, sedangkan gambar (b) merupakan aliran fluida ideal, dimana tidak ada kekentalan yang terdapat pada aliran tersebut.

c. Berdasarkan perubahan massa jenis (densitas) pada aliran, aliran fluida dibagi menjadi aliran fluida kompresibel dan aliran fluida inkompresibel.

1) Aliran fluida dikatakan kompresibel jika pada aliran tersebut terjadi perubahan densitas yang signifikan di antara dua titik pada suatu garis arus (streamline) (Potter & Wiggert, 2008). Contoh dari aliran fluida kompresibel adalah zat gas.

2) Aliran fluida inkompresibel terjadi jika densitas partikel fluida yang bergerak dapat dikatakan konstan. (Potter & Wiggert, 2008). Contoh dari aliran fluida inkompresibel adalah zat cair.

d. Berdasarkan kondisi suatu partikel pada fluida, aliran fluida dibagi menjadi aliran fluida ajek, dan tak ajek.

1) Pada aliran fluida, aliran ajek terjadi bila kondisi suatu partikel di dalam fluida tidak berubah setiap waktu (Streeter & Wylie, 1985). Aliran air yang diam di dalam suatu pipa bersifat ajek.

2) Aliran tak ajek terjadi bila kondisi partikel di dalam fluida berubah-ubah setiap waktu. Aliran tak ajek dapat pula terjadi jika aliran ajek yang terdapat pada suatu wadah, katup aliran pada wadah tersebut dibuka atau ditutup, sehingga menyebabkan partikel pada fluida bergerak atau berubah-ubah.

e. Berdasarkan vektor kecepatan partikel pada fluida, aliran fluida dibagi menjadi aliran fluida seragam dan tak seragam.

1) Aliran seragam terjadi bila partikel pada fluida mempunyai vektor kecepatan yang sama dan identic (Streeter & Wylie, 1985). Aliran cairan melalui pipa yang panjang dengan laju yang konstan adalah aliran seragam ajek, sedangkan aliran cairan melalui pipa yang panjang dengan laju yang menurun disebut aliran seragam tak ajek.

2) Aliran fluida dikatakan sebagai aliran tak seragam jika partikel pada fluida tidak mempunyai vektor kecepatan yang sama dan identic (Streeter & Wylie, 1985).

f. Berdasarkan vektor kecepatan partikel pada fluida, aliran fluida dibagi menjadi aliran fluida seragam dan tak seragam.

1) Rotasi suatu partikel fluida seputar suatu sumbu tertentu, misalnya sumbu z, berdefinisi kecepatan sudut rata-rata dua buah elemen garis yang tak hingga kecilnya pada partikel tersebut yang tegak lurus terhadap satu sama lain serta terhadap sumbu yang ditetapkan (Streeter & Wylie, 1985). Jika partikel-partikel fluida di dalam suatu daerah mempunyai rotasi seputar suatu sumbu alirannya disebut aliran rotasional.

2) Jika fluida di dalam suatu daerah tidak mempunyai rotasi, alirannya dinamakan aliran tak rotasional (Streeter & Wylie, 1985).

Aliran fluida sebenarnya merupakan suatu fenomena yang tidak sederhana yang berlangsung tiga dimensi dan tergantung pada waktu. Namun, dalam banyak situasi fluida dapat diasumsikan dengan penyederhanaan yang memungkinkan pemahaman yang jauh lebih mudah mengenai masalah aliran tersebut tanpa harus mengorbankan tingkat keakuratan yang dibutuhkan. Salah satu dari penyederhanaan tersebut menyangkut pendekatan aliran nyata (sebenarnya) sebagai aliran sederhana satu atau dua-dimensi (Munson & Young, 2002).

Aliran satu dimensi mengabaikan variasi atau perubahan kecepatan, tekanan, dan sebagainya, dalam arah tegak-lurus terhadap arah aliran utama. Kondisi-kondisi pada suatu penampang dinyatakan dalam nilai rata-rata kecepatan, kerapatan, dan sifat-sifat lainnya. Sebagai contoh, aliran melalui pipa biasanya dapat digolongkan sebagai aliran satu dimensi. Dalam aliran dua dimensi semua partikel diasumsikan mengalir dalam bidang-bidang datar yang sejajar, sepanjang lintasan yang identik dalam masing-masing bidang ini, maka dari itu tidak terdapat perubahan aliran dalam arah tegak lurus terhadap bidang-bidang ini. Aliran tiga dimensi adalah aliran yang paling umum, yang komponen-komponen kecepatannya u, v, dan w dalam arah yang saling tegak lurus merupakan fungsi koordinat-koordinat ruang serta waktu x, y, z, dan t (Streeter & Wylie, 1985).

3. Parameter-Parameter pada Fluida

Pada proses penurunan persamaan kontinuitas dan persamaan momentum fluida, digunakan beberapa parameter yang terdapat pada fluida, antara lain massa, kecepatan, percepatan, kepadatan, tekanan, viskositas, volume kendali, momentum, dan gaya. Berikut penjelasan tentang parameter-parameter pada fluida.

a. Massa (m)

Pada suatu benda pasti memiliki massa. Massa berfungsi untuk menahan suatu benda dari adanya tindakan atau gaya yang menyebabkan adanya pergerakan.

Definisi 2.4 Massa (Serway & Jewett, 2009)

Massa adalah sifat suatu benda yang menjelaskan kuatnya daya tahan benda tersebut untuk menolak terjadinya perubahan dalam kecepataannya dan satuan SI untuk massa adalah kilogram.

Massa adalah besaran fisika yang menunjukkan ukuran kemalasan benda yang bergerak jika didorong oleh sebuah gaya, kata bergerak diartikan bahwa benda mengalami perubahan kecepatan (Mohammad, 2007).

b. Kecepatan (*v*)

Kecepatan pada suatu benda (v) didefinisikan laju perubahan posisi benda (Δx) dari suatu tempat (x_1) ke tempat lain (x_1) dalam selang waktu tertentu (Δt) (Serway & Jewett, 2009). Ketika benda bergerak, benda tersebut akan mengikuti lintasan tertentu, panjang lintasan yang dilalui benda tersebut merupakan jarak. Suatu benda memiliki kecepatan rata-rata dan kecepatan sesaat. Kecepatan rata-rata didefinisikan sebagai perpindahan posisi dari x (Δx) dibagi selang waktu Δt selama perpindahan terjadi. Kecepatan rata-rata biasanya dilambangkan dengan v_{rt}, sehingga kecepatan rata-rata dapat dinyatakan sebagai berikut

$$v_{rt} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Jika gerak suatu benda akan diamati secara detail, maka diperlukan kecepatan benda pada suatu saat tertentu dan di suatu titik tertentu selama perpindahannya. Kecepatan ini disebut dengan kecepatan sesaat. Kecepatan sesaat adalah limit dari kecepatan rata-rata untuk selang waktu mendekati nol, kecepatan sesaat sama dengan besarnya perubahan sesaat dari posisi terhadap waktu (Young & Freedman, 2002). Kecepatan sesaat dilambangkan dengan *v*, dan dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (2.1)$$

Satuan dari kecepatan adalah m/s.

c. Percepatan (*a*)

Jika suatu benda memiliki perubahan kecepatan terhadap waktu, maka benda tersebut memiliki percepatan. Sama halnya seperti kecepatan yang menggambarkan laju perubahan posisi terhadap waktu, percepatan menggambarkan laju perubahan kecepatan terhadap waktu. Suatu benda juga memiliki percepatan rata-rata dan percepatan sesaat.

Misalkan pada saat t_1 partikel pada posisi x_1 mempunyai kecepatan (sesaat) v_1 dan pada waktu berikutnya t_2 partikel terletak pada posisi x_2 mempunyai kecepatan (sesaat) v_2. Percepatan rata-rata (a_{rt}) dari partikel tersebut didefinisikan sebagai besaran vektor dari perubahan kecepatan (Δv) dibagi dengan selang waktu Δt, dan dapat dinyatakankan sebagai berikut.

$$a_{rt} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Jika gerak suatu benda diamati secara detail, maka terdapat pula percepatan sesaat dari benda tersebut. Percepatan sesaat adalah limit dari percepatan rata-rata pada saat selang waktu mendekati nol. Percepatan sesaat sama dengan laju perubahan kecepatan terhadap waktu (Young & Freedman, 2002). Percepatan sesaat dilambangkan dengan *a*, dan dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Satuan dari kecepatan adalah m/s^2.

d. Kepadatan (Massa Jenis)

Suatu zat/benda memiliki kepadatan tertentu, sehingga benda dapat dibedakan berdasarkan kepadatannya. Contohnya seperti zat cair dan zat padat, kedua zat tersebut memiliki kepadatan yang berbeda. Hal ini dikarenakan perbandingan dari massa dan volume benda cair berbeda dengan perbandingan massa dan volume benda padat.

Dalam aliran fluida, kepadatan akan konstan jika fluida yang digunakan homogen, sedangkan jika fluida tidak homogen, maka kepadatan fluida bergantung dengan posisi dan waktu. Pada aliran fluida, yang dimaksud dengan homogen adalah fluida tidak berasal dari campuran beberapa zat, sehingga fluida yang digunakan tidak memiliki konsentrasi tetapi memiliki massa jenis.

Definisi 2.5 Massa Jenis (Sears, Zemansky, & Young, 1987)

Kepadatan suatu benda didefinisikan sebagai massa benda per satuan volume.

Suatu benda yang homogen mempunyai kepadatan yang sama sepanjang benda tersebut. Satuan Standar Internasional dari kepadatan adalah satu kilogram per meter kubik (1 kg.m^{-3}). Kepadatan dilambangkan dengan huruf Yunani ρ (rho). Jika massa benda m dan volumenya V, maka kepadatan dapat diformulasikan sebagai berikut.

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

e. Tekanan

Tekanan merupakan besaran gaya yang diberikan/diterapkan pada suatu area permukaan tertentu, sehingga tekanan terjadi jika ada gaya yang menimpa permukaan suatu benda.

Definisi 2.6 Tekanan (Potter & Wiggert, 2008)

Tekanan adalah besaran yang dihasilkan dari gaya-gaya kompresif yang bekerja pada satuan luas.

Tekanan dilambangkan dengan huruf p. Misalkan terdapat gaya yang infinitesimal (kecil tak hingga) ΔF bekerja pada luas infinitesimal ΔS menghasilkan tekanan, yang didefinisikan oleh

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} \qquad (2.2)$$

Namun, jika gaya pada suatu area seragam, maka tekanan dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$p = \frac{F}{S} \qquad (2.3)$$

Satuan pada tekanan dihasilkan oleh gaya dibagi dengan luas, yaitu N/m^2 atau Pa.

f. Viskositas

Viskositas merupakan kekentalan pada fluida atau dapat dianggap sebagai kelengketan internal dari suatu fluida. Viskositas terdapat pada fluida sejati, pada fluida ideal tidak ada viskositas yang terjadi di dalamnya. Pada aliran fluida sejati, viskositas menyebabkan adanya gesekan-gesekan pada aliran fluida. Parameter ini menghasilkan tegangan geser di dalam suatu aliran dan menyebabkan hambatan yang terjadi di dalam pipa (Potter & Wiggert, 2008). Dalam aliran satu dimensi, misalkan μ adalah viskositas, *du/dr* adalah gradien kecepatan, r diukur tegak lurus terhadap suatu permukaan dan u adalah tangensial terhadap permukaan. Maka tegangan geser τ_w dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\tau_w = \mu \frac{du}{dr}.$$

Viskositas memiliki satuan N.s/m^2.

g. Momentum

Suatu benda dengan massa tertentu akan mengalami perubahan posisi karena adanya momentum dari suatu gaya yang mengenai benda tersebut.

Definisi 2.7 Momentum Linier Partikel (Halliday, Resnick, & Walker, 2010)

Momentum linier partikel adalah besaran vektor yang didefinisikan sebagai perkalian massa dengan kecepatan.

Momentum linier sering hanya disebut dengan momentum, kata sifat linier berfungsi untuk membedakan dari momentum sudut. Momentum mengakibatkan suatu benda dengan massa (*m*) mengalami perubahan posisi yang disebut dengan kecepatan (*v*). Massa partikel (*m*) adalah besaran skalar yang selalu positif, sedangkan $\vec{\imath}$ dan $\vec{v}$ merupakan besaran vektor yang mempunyai arah yang sama. Secara matematis, momentum dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\vec{i} = m\vec{v} \qquad (2.4)$$

Satuan SI untuk momentum adalah kilogram-meter per detik (kg.m/s). Newton menyatakan hukum kedua tentang gerak dalam momentum yaitu "Laju perubahan momentum partikel adalah sama dengan gaya total yang bekerja pada partikel dan berada di arah gaya itu". Dalam bentuk persamaan, dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{i}}{dt} \qquad (2.5)$$

Persamaan (2.5) menjelaskan bahwa gaya total ($\sum \vec{F}$) yang bekerja pada partikel mengubah momentum linier partikel ($\vec{\imath}$). Sebaliknya, momentum linier dapat diubah oleh gaya total. Jika tidak ada gaya total, $\vec{\imath}$ tidak dapat berubah.

Jika Persamaan (2.4) disubstitusikan ke Persamaan (2.5), maka untuk massa (m) konstan, didapat

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \tag{2.6}$$

Jadi, hubungan $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{i}}{dt}$ dan $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ adalah pernyataan ekuivalen dari hukum Newton kedua tentang gerak sebuah partikel.

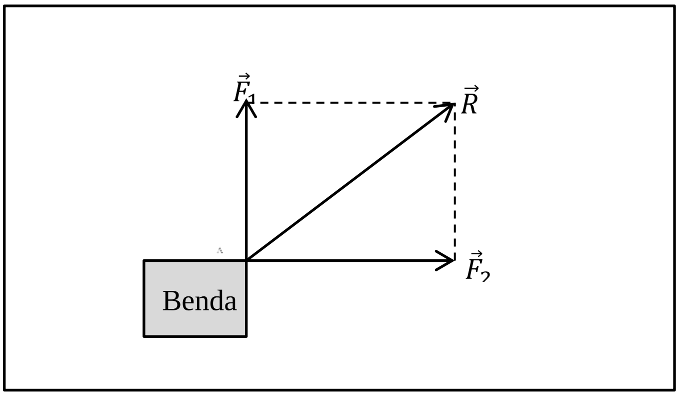
Definisi 2.8 Momentum Linier Sistem (Halliday, Resnick, & Walker, 2010)

Momentum linier suatu sistem partikel sama dengan hasil kali total massa M sistem dengan kecepatan pusat massa.

Sistem secara keseluruhan memiliki momentum linier total ($\vec{I}$), yang didefinisikan sebagai jumlah vektor momentum linier partikel individu. Untuk menganalisa momentum suatu sistem, sistem ditinjau terdiri dari n partikel, masing-masing dengan massa, kecepatan, dan momentum partikel sendiri.

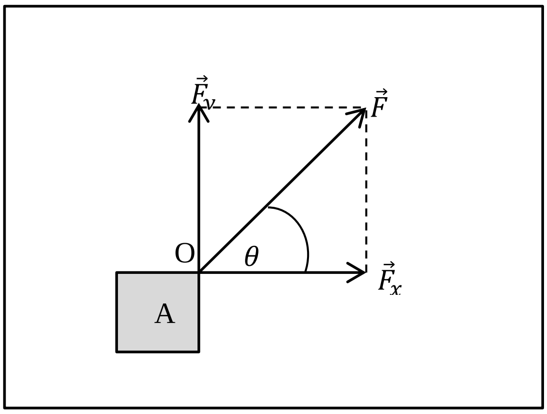
h. Gaya

Gaya (*force)* berarti tarikan atau dorongan. Konsep gaya memberikan gambaran kuantitatif tentang interaksi antara dua benda atau antara benda dengan lingkungannya. Gaya adalah besaran vektor, dimana gaya dapat mendorong atau menarik benda pada arah yang berbeda-beda. Satuan Internasional untuk besar dari gaya adalah newton (N).



Gambar 2.5 Resultan Gaya pada Benda

Gambar 2.5 mengilustrasikan ketika dua gaya $\vec{F}_1$dan $\vec{F}_2$beraksi pada saat yang sama dan di titik yang sama pada suatu benda, maka pengaruh gerak benda adalah sama dengan pengaruh dari gaya tunggal $\vec{R}$ sama dengan penjumlahan vektor dari gaya-gaya asal: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Lebih umumnya, apabila beberapa gaya diterapkan pada satu titik di permukaan sebuah benda, pengaruhnya akan sama dengan sebuah gaya yang merupakan penjumlahan dari vektor gaya-gayanya. (Sears, Zemansky, & Young, 1987).



Gambar 2.6 Gaya pada Benda A

Pada Gambar 2.6, gaya $\vec{F}$ beraksi pada benda A di titik O. Vektor-vektor komponen dari $\vec{F}$ pada arah *Ox* dan *Oy* adalah $\vec{F_x}$ dan $\vec{F_y}$. Jika $\vec{F_x}$ dan $\vec{F_y}$ ditarik secara bersamaan, pengaruhnya tepat sama dengan seperti pengaruh gaya $\vec{F}$. Semua gaya dapat digantikan oleh vektor-vektor komponennya yang bekerja pada titik yang sama. Gaya $\vec{F}$ lebih sering dinyatakan dalam bentuk komponen x dan y ($\vec{F_x}$ dan $\vec{F_y}$) daripada dalam vektor-vektor komponen (vektor-vektor komponen adalah vektor, tetapi komponen-komponen adalah bilangan). Untuk kasus pada Gambar 2.6, kedua gaya $\vec{F_x}$ dan $\vec{F_y}$ adalah positif. Untuk gaya $\vec{F}$ dengan arah yang lain, baik $\vec{F_x}$ maupun $\vec{F_y}$ dapat menjadi negatif atau nol. Jumlah vektor (resultan) dari semua gaya-gaya yang beraksi pada sebuah benda disebut dengan gaya total (*net force*) ($\sum \vec{F}$). Gaya toral telah dirumuskan pada Persamaan (2.5).

Suatu benda dapat bergerak karena adanya gaya yang bekerja pada benda tersebut, termasuk fluida. Fluida dapat bergerak atau mengalir karena ada gaya yang mengenai fluida. Gaya-gaya tersebut antara lain, gaya tekanan pada batas volume kendali, gaya gesek, gaya reaksi, dan gaya gravitasi. Berikut penjelasan tentang gaya-gaya yang bekerja pada fluida.

1) Gaya Tekanan

Gaya tekanan merupakan gaya yang menghasilkan tekanan pada suatu benda. Berdasarkan Definisi 2.3 tentang tekanan, dapat diperoleh bahwa gaya tekanan pada suatu benda merupakan hasil kali dari tekanan

(p) dengan luas daerah benda tersebut (S). Gaya tekanan dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$F = p \cdot S \tag{2.7}$$

2) Gaya Gesek

Jika suatu benda diluncurkan di atas suatu permukaan, gerakan akan tertahan oleh gesekan antara benda dan permukaan. Tahanan ini dianggap sebagai gaya tunggal, yang disebut dengan gaya gesek atau sering disebut dengan gesekan saja. Gaya ini diarahkan sepanjang permukaan, berlawanan arah dengan arah gerakan benda. Pada fluida sejati, terdapat gesekan internal fluida yang menghambat aliran fluida, sehingga gaya gesek pada fluida berlawanan arah dengan aliran fluida.

Gaya gesek (F_g) pada fluida bekerja di sepanjang permukaan dalam pipa, sehingga gaya gesek pada fluida dapat dinyatakan sebagai hasil kali tegangan geser (τ_w) dan keliling penampang pipa. Dalam hal ini, keliling penampang pipa sama dengan luas selimut tabung. Jika pipa mempunyai diameter d dan tinggi Δx, maka secara matematis, gaya gesek dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$F_g = \tau_w \cdot \pi \cdot d \cdot \Delta x \, .$$

3) Gaya Reaksi

Gaya reaksi (F_R)merupakan gaya yang terjadi akibat adanya suatu aksi. Dalam hal ini, gaya reaksi terjadi karena adanya gaya gesek pada aliran fluida. Gaya reaksi pada suatu partikel pada aliran fluida dapat dinyatakan dengan hasil kali dari tekanan dengan perubahan luas penampang pipa (Lurie, 2008). Jika tekanan p dan perubahan luas penampang pipa ΔS, maka gaya reaksi dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$F_R = p \cdot \Delta S.$$

4) Gaya Gravitasi

Gaya gravitasi ($\vec{F}_h$) pada sebuah benda adalah jenis gaya tarik tertentu yang diarahkan ke benda kedua. Benda kedua tersebut biasanya adalah Bumi. Jadi, gaya gravitasi pada benda menarik benda langsung menuju pusat Bumi atau ke permukaan Bumi. Misalkan sebuah benda dengan massa *m* mengalami gerak jatuh bebas dengan percepatan jatuh bebas sebesar *g*, jika efek dari udara diabaikan, maka satu-satunya gaya yang bekerja pada benda adalah gaya gravitasi ($\vec{F}_h$). Gaya gravitasi dirumuskan sebagai berikut.

$$\mathrm{F}_h = m \cdot g \tag{2.8}$$

Dengan kata lain, magnitudo gaya gravitasi sama dengan hasil kali *mg*. (Halliday, Resnick, & Walker, 2010).

i. Usaha

Dalam ilmu fisika, usaha (*A*) tidak terlepas dari gaya dan perpindahan. Bila gaya bekerja pada sebuah benda sehingga benda berpindah selama gaya bekerja, maka gaya tersebut melakukan usaha. Usaha yang dilakukan pada sebuah benda oleh suatu gaya didefinisikan sebagai hasil kali jarak perpindahan dan komponen gaya yang sejajar dengan arah perpindahan itu.

Jika jarak perpindahan adalah *s* dan gaya *F*, maka usaha (*A)* dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$A = F \cdot s\,.$$

Usaha yang dianalisa pada aliran fluida ini adalah usaha eksternal dan usaha internal. Usaha eksternal merupakan usaha yang membuat aliran fluida bergerak, sedangkan usaha internal merupakan usaha yang dihasilkan aliran fluida yang dapat digunakan untuk menggerakkan suatu benda. Satuan SI untuk usaha adalah Joule (J).

j. Daya

Suatu benda dapat dipindahkan atau digerakkan pada suatu tempat ke tempat lain dengan bantuan usaha. Benda tersebut dapat dipindahkan dengan laju tertentu. Laju saat usaha dilakukan oleh gaya disebut sebagai daya yang dihasilkan suatu gaya (Halliday, Resnick, & Walker, 2010). Jika gaya melakukan sejumlah usaha A dalam sejumlah waktu Δt, daya rata-rata akibat gaya selama interval waktu adalah

$$P_{avg} = \frac{A}{\Delta t}\,.$$

Sedangkan, daya sesaat P adalah kecepatan sesaat selama usaha dilakukan, dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$P = \frac{dA}{dt}$$

Untuk partikel yang bergerak sepanjang garis lurus (sumbu x) dan dikenai gaya konstan F dengan arah sudut ϕ terhadap garis, daya sesaat suatu partikel dapat dinyatakan dengan

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{F\cos\phi dx}{dt} = F\cos\phi\frac{dx}{dt} = F\cos\phi\cdot v$$

Jika gaya konstan F sejajar dengan garis lurus (sumbu x) sehingga $\phi=0$, maka daya dapat dinyatakan sebagai berikut

$$P = F\cdot v\,.$$

Satuan untuk daya adalah joule per detik (J/s).

Pada penurunan persamaan kesetimbangan energi mekanis fluida, terdapat daya mekanik (P_{mek}) dan daya jenis (n^{in}). Daya mekanik adalah daya yang berasal dari alat mekanik yang membantu mengalirnya suatu fluida, contohnya adalah daya yang berasal dari alat pompa. Sedangkan daya jenis adalah daya per satuan massa fluida.

k. Energi

Energi merupakan suatu besaran skalar yang dihubungkan dengan sistem dari satu atau banyak objek. Energi dapat berubah dari suatu bentuk ke bentuk lain, tetapi jumlah total energi selalu sama karena energi bersifat kekal (Halliday, Resnick, & Walker, 2010). Bunyi Hukum Kekekalan Energi yaitu "energi tidak dapat diciptakan dan tidak dapat dimusnahkan dan energi hanya bisa berubah dari bentuk satu ke bentuk yang lain. Satuan Internasional untuk energi adalah Joule (J). Pada penurunan sistem persamaan lengkap untuk pemodelan matematika aliran fluida satu dimensi pada pipa, energi yang digunakan antara lain energi mekanik, energi kinetik, dan energi internal. Berikut penjelasan tentang energi-energi tersebut.

1) Energi Kinetik

Energi kinetik adalah energi yang dimiliki suatu benda yang bergerak. Besarnya energi kinetik suatu benda bergantung pada massa dan kecepatan benda tersebut (I Nyoman& I Gusti, 2013). Jika suatu benda bermassa *m* bergerak horizontal dengan kecepatan *v* , maka energi kinetik benda (E_k):

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

Satuan untuk energi kinetik adalah Joule (J).

2) Energi Potensial

Energi potensial adalah energi yang memperngaruhi benda karena posisi (ketinggian) benda tersebut. Energi potensial dapat dinyatakan sebagai hasil kali massa, percepatan gravitasi, dan ketinggian dari benda tersebut. Satuan SI untuk mengukur energi adalah Joule (simbol J). Jika massa *m*, percepatan gravitasi *g*, dan benda berada pada ketinggian *h*, secara matematis energi potensial (E_p) dirumuskan sebagai berikut.

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

3) Energi Mekanik

Dalam mekanika, usaha dibutuhkan untuk memindahkan suatu objek dari satu titik ke titik lainnya. Energi mekanik terbentuk dari energi kinetik dan energi potensial. Pada proses aliran fluida pada pipa, energi mekanik yang ada pada fluida hanya terbentuk dari energi kinetiknya saja, karena tidak ada energi potensial yang bekerja pada fluida. Tidak adanya energi potensial disebabkan oleh pipa berada di permukaan tanah, dengan kata lain $h = 0$. Energi mekanis dirumuskan secara matematis sebagai berikut.

$$E_m = E_k + E_p$$

Satuan untuk energi mekanik adalah Joule (J).

4) Energi Internal

Energi internal (E_{in}) pada aliran fluida disebabkan oleh pergerakan aliran fluida yang dapat berpotensi memicu adanya energi pada aliran fluida tersebut. Setiap partikel atau partisi pada volume kendali mempunyai energi internal, sehingga terdapat energi internal per satuan massa (e_{in}). Energi internal per satuan massa dirumuskan dengan

$$e_{in} = \frac{E_{in}}{m}$$

Satuan untuk energi internal adalah Joule (J).

l. Kalor

Aliran fluida yang mengalir pada pipa memiliki suhu tertentu yang belum tentu sama dengan suhu pipa maupun suhu lingkungan sekitar pipa. Jika aliran fluida mempunyai suhu tertentu, pasti akan mengalami perubahan suhu pada waktu tertentu. Perubahan suhu ini disebabkan oleh perubahan energi panas dari sistem karena adanya transfer energi antara aliran fluida pada pipa dengan lingkungan di sekitarnya. Energi yang ditransfer ini disebut dengan kalor dan dilambangkan oleh Q . Dalam termodinamika, kalor adalah energi yang dipindahkan dari suatu benda ke benda yang lain yang disebabkan oleg perbedaan suhu antara kedua benda tersebut (Halliday, Resnick, & Walker, 2010).

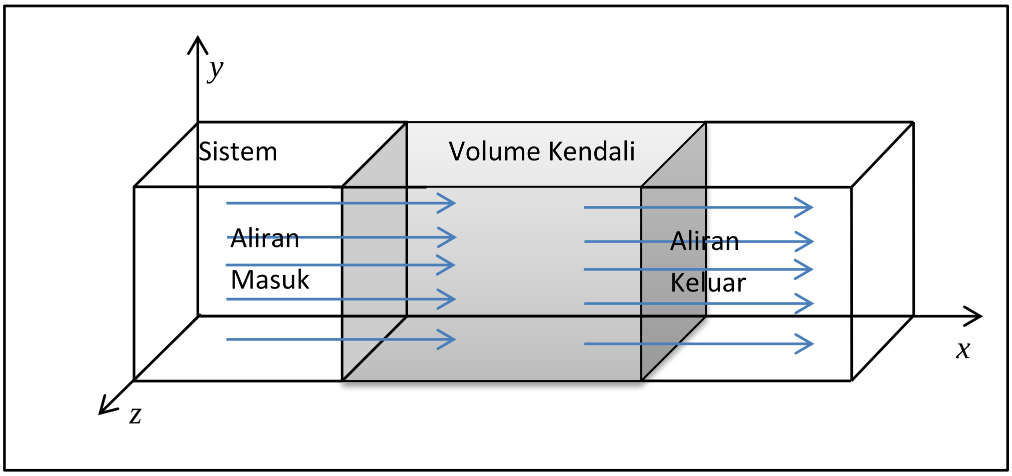
Pada penurunan persamaan kesetimbangan energi total fluida, diperlukan analisa tentang kalor eksternal pada aliran fluida. Kalor eksternal merupakan kalor yang berasal dari luar aliran fluida. Jika terdapat fluks panas (q_n) pada aliran fluida, maka kalor eksternal (Q^{ex}) fluida dapat dinyatakan dengan hasil kali dari fluks panas dengan keliling penampang pipa (Lurie, 2008). Dalam hal ini, keliling penampang pipa sama dengan luas selimut tabung. Jika pipa mempunyai diameter d dan tinggi Δx, maka secara matematis, kalor eksternal pada aliran fluida pada pipa dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$Q^{ex} = q_n \cdot \pi \cdot d \cdot \Delta x .$$

Satuan SI untuk kalor adalah Joule (J).

m. Volume Kendali

Untuk menganalisa hal-hal yang terjadi pada suatu sistem, tentu mengamati sistem secara keseluruhan merupakan hal yang sulit dilakukan, maka dari itu perlu volume kendali untuk mewakili pengamatan pada sistem tersebut. Suatu volume kendali menunjuk suatu daerah di dalam ruang dan bermanfaat dalam analisis terhadap situasi-situasi dengan terjadinya aliran ke dalam serta keluar dari ruang tersebut. Batas suatu volume kendali adalah permukaan kendali. Ukuran serta bentuk volume kendali adalah sepenuhnya sembarang, tetapi sering kali sebagian demi sebagian dibuat berimpit dengan batas-batas benda padat; di bagian-bagian lainnya digambarkan tegak lurus terhadap arah aliran (Streeter & Wylie, 1985).



Gambar 2.7 Ilustrasi Volume Kendali

Volume kendali pada pipa merupakan suatu sembarang daerah pada pipa yang dipilih untuk dianalisa kejadian yang terjadi pada aliran fluida. Pada penelitian Fitriana Yuli (2009) tentang metode volume hingga untuk mengetahui pengaruh sudut pertemuan saluran terhadap profil perubahan sedimen pasir pada pertemuan sungai, volume kontrol memenuhi hukum kekekalan massa dan hukum kekekalan momentum.

Selain parameter-parameter di atas, hal yang penting untuk diperhatikan pada penurunan sistem persamaan lengkap fluida pada tugas akhir ini adalah aliran fluida dianalisa pada pipa yang dapat mengalami deformasi. Yang dimaksud dengan deformasi pada pipa adalah perubahan luas penampang pipa. Luas penampang pipa dapat berubah menjadi lebih besar maupun lebih kecil. Hal ini disebabkan oleh potensi dari aliran fluida, suhu disekitar pipa dan tekanan dari laju aliran fluida (Lurie, 2008).

4. Hukum-hukum yang Digunakan dalam Penurunan Sistem Persamaan Lengkap.

Pada penurunan sistem persamaan lengkap aliran fluida pada pipa, digunakan beberapa hukum-hukum. Hukum-hukum tersebut antara lain Hukum Kekekalan Massa, Hukum Kedua Newton, Hukum Perubahan Energi Mekanis, dan Hukum Kekekalan Energi.

a. Hukum Kekekalan Massa

Hukum Kekekalan Massa menyatakan bahwa tidak ada massa yang diciptakan maupun dimusnahkan meskipun terkena reaksi (Potter & Wiggert, 2008). Jika dinyatakan secara matematis, Hukum Kekekalan Massa dapat dinyatakan sebagai perubahan massa terhadap waktu sama dengan nol.

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

Hukum Kekekalan Massa digunakan untuk memperoleh persamaan kontinuitas fluida. Massa aliran fluida yang mengalir pada pipa konstan, karena tidak ada massa yang timbul maupun hilang meskipun luas penampang pipa berubah-ubah. Hal ini berarti bahwa massa aliran fluida kekal, sehingga Hukum Kekekalan Massa digunakan untuk memperoleh persamaan kontinuitas fluida.

b. Hukum Kedua Newton

Hukum Kedua Newton digunakan untuk memperoleh persamaan momentum fluida. Hukum kedua Newton menyatakan bahwa “Sebuah benda dengan massa M mengalami gaya resultan sebesar F akan mengalami percepatan a yang arahnya sama dengan arah gaya, dan besarnya berbanding lurus terhadap F dan berbanding terbalik terhadap M ($F = M.a$)”. Hukum kedua Newton tersebut dapat juga diartikan laju perubahan terhadap waktu dari momentum linier sistem sama dengan jumlah dari gaya-gaya yang bekerja pada sistem (Munson & Young, 2002).

c. Hukum Perubahan Energi Mekanis

Hukum Perubahan Energi Mekanis digunakan pada penurunan persamaan kesetimbangan energi mekanis fluida. Hukum Perubahan Energi Mekanis menyatakan bahwa perubahan energi kinetik pada sistem terhadap waktu sama dengan jumlah perubahan usaha eksternal dan usaha internal yang bekerja pada setiap partikel dari sistem terhadap waktu.

d. Hukum Kekekalan Energi

Pada penurunan persamaan kesetimbangan energi total, digunakan Hukum Kekekalan Energi atau sering disebut juga dengan Hukum Pertama Termodinamika. Hukum Pertama Termodinamika menegaskan bahwa energi tidak dapat diciptakan maupun dimusnahkan, energi dapat mengalami perubahan dari suatu bentuk energi ke bentuk energi yang lain. Hukum

Pertama Termodinamika menyatakan bahwa energi total suatu sistem sama dengan jumlah kalor eksternal dan usaha eksternal suatu sistem.

F. INTEGRAL TAK TENTU

Integral tak tentu merupakan suatu bentuk operasi pengintegralan suatu fungsi yang menghasilkan suatu fungsi baru. Fungsi ini belum memiliki nilai pasti (berupa variabel) sehingga cara pengintegralan yang menghasilkan fungsi tak tentu ini disebut integral tak tentu.

Definisi 2.9 Integral Tak Tentu (Hoffman & Bradley, 2000)

Fungsi $F(x)$ *yang memenuhi*

$$F'(x) = f(x)$$

untuk setiap x dalam domain f disebut sebagai anti turunan $f(x)$ *dan dinyatakan dengan* $\int f(x)\, dx$.

Sebagai contoh anti turunan dari $f(x) = x^8$ adalah $F(x) = \frac{1}{9}x^9 + C$, karena $\frac{d(\frac{1}{9}x^9+C)}{dx} = x^8$. Selanjutnya ditulis $\int x^8\, dx = \frac{1}{9}x^9 + C$.

G. INTEGRAL TENTU

Integral tentu merupakan suatu bentuk operasi pengintegralan suatu fungsi yang menghasilkan suatu nilai. Integral tentu berbeda dengan integral tak tentu karena integral tentu mempunyai nilai yang pasti. Untuk memahami definisi tentang integral tentu, perlu diketahui apa yang dimaksud dengan norm ($\|\quad\|$) dan sigma ($\sum$).

1. Norm ($\| \quad \|$).

   Norm menyatakan panjang selang bagian yang terpanjang dari sebuah partisi. Contohnya jika pada interval [a,b] dipartisi menjadi n partisi, sehingga diperoleh bagian partisi yaitu $[x_i, x_{i+1}]$ dengan $i = 1,2,3, \dots, n$ dan $x_{i+1} - x_i = \Delta x$, maka $\|P\|$ disebut dengan norm P, menyatakan panjang selang bagian yang terpanjang dari partisi P ($\|P\|$ = maksimal $\{\Delta x_i\}$).

2. Sigma ($\sum$)

   Notasi sigma adalah sebuah notasi yang digunakan untuk menuliskan penjumlahan secara singkat. Contohnya jika terdapat jumlahan $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \cdots + U_n$, maka dapat dituliskan dengan notasi sigma $\sum_{i=1}^{n} U_i$.

Definisi 2.10 Integral Tentu (Valberg, Purcell, & Rigdon, 2008)

Misalkan f suatu fungsi yang didefinisikan pada interval tertutup [a,b] dan P adalah suatu partisi dari selang tertutup [a,b] menjadi n selang bagian (tidak perlu sama panjang) menggunakan titik-titik

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

dimana titik $\bar{x}_i$ *berada pada selang tertutup* $[x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ *dengan* $i = 1,2,3, \dots, n$ *dan* $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. *Jika*

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

ada, dikatakan f adalah terintegrasikan pada [a,b]. Lebih lanjut $\int_a^b f(x)dx$, *disebut integral tentu (atau integral Riemann) f dari a ke b, kemudian diberikan oleh*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i.$$

Untuk menyelesaikan masalah integral terdapat beberapa teorema yang dapat membantu dalam penyelesaian masalah tersebut. Teorema tersebut disebut dengan Teorema Dasar Kalkulus (Valberg, Purcell, & Rigdon, 2008).

Teorema 2.10 Teorema Dasar Kalkulus I

Misalkan f kontinu pada interval tertutup [a,b] dan misalkan x sebarang titik (variabel) dalam (a,b). Maka

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Bukti.

Untuk x dalam $[a,b]$, didefinisikan bahwa $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$ Maka untuk x dalam (a,b)

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = F'(x)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa

$$F(x+h)-F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Diasumsikan bahwa $h > 0$ dan misalkan m dam M masing-masing adalah nilai minimum dan maksimum f pada interval $[x, x+h]$. Menurut Teorema Sifat Keterbatasan diperoleh

$$mh \leq \int_{x}^{x+h} f(t)dt \leq Mh$$

atau

$$mh \leq F(x+h) - F(x) \leq Mh.$$

Dengan membagi oleh h, diperoleh

$$m \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq M.$$

Karena f kontinu, m dan M keduanya harus mendekati $f(x)$ ketika $h \to 0$. Jadi menurut Teorema Apit,

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

diperoleh bahwa,

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt = f(x). \blacksquare$$

Dengan menggunakan cara yang sama, berlaku untuk $h < 0$.

Akibat teoritis teorema ini adalah bahwa setiap fungsi kontinu f mempunyai anti turunan F yang diberikan oleh

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt.$$

Teorema 2.11 Teorema Dasar Kalkulus II

Misalkan f kontinu (karenanya terintegrasikan) pada $[a, b]$ *dan misalkan F sebarang anti turunan dari f pada* $[a, b]$. *Maka*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Bukti.

Untuk x dalam interval $[a, b]$, didefinisikan $G(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Maka menurut Teorema Dasar Kalkulus I, $G'(x) = f(x)$ untuk semua x dalam (a, b). Jadi G adalah anti turunan f; tetapi F juga anti turunan *f*. Karena $F'(x) = G'(x)$ maka fungsi *F* dan *G* hanya dibedakan oleh konstantanya. Jadi untuk semua x dalam (a, b)

$$F(x) = G(x) + C.$$

Karena fungsi *F* dan *G* kontinu pada interval tertutup $[a, b]$, maka $F(a) = G(a) + C$ dan $F(b) = G(b) + C$. Jadi $F(x) = G(x) + C$ pada interval tertutup $[a, b]$.

$G(a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0$, sehingga $F(a) = G(a) + C = 0 + C = C$. Oleh karena itu,

$$F(b) - F(a) = [G(b) + C] - C = G(b) = \int_a^b f(t)dt. \blacksquare$$

Teorema 2.12 Teorema Integral terhadap Suatu Parameter (Aturan Leibniz) (Kaplan, 2002)

Misalkan fungsi $f(x,t)$ kontinu dan memiliki turunan kontinu pada domain di bidang-xt yang mencakup persegi panjang $a \le x \le b, t_1 \le t \le t_2$, dan misalkan a(t) dan b(t) didefinisikan dan memiliki turunan kontinu untuk $t_1 \le t \le t_2$, maka untuk $t_1 \le t \le t_2$

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = f[b(t),t]b'(t) - f[a(t),t]a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$$

Bukti.

Misalkan $u = b(t), v = a(t), w = t$, maka $F(t)$ anti turunan dari f dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$F(t) = \int_v^u f(x,w)dx = G(u,v,w),$$

dengan u, v, w merupakan fungsi atas t. Menurut aturan rantai, diperoleh

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial G}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial G}{\partial w}\frac{dw}{dt}$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\int_v^u f(x,w)dx\frac{du}{dt} + \frac{\partial}{\partial v}\int_v^u f(x,w)dx\frac{dv}{dt} + \frac{\partial}{\partial w}\int_v^u f(x,w)dx\frac{dw}{dt}$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\int_v^u f(x,w)dx\frac{du}{dt} + \frac{\partial}{\partial v}\left(-\int_u^v f(x,w)dx\right)\frac{dv}{dt} + \frac{\partial}{\partial t}\int_v^u f(x,t)dx\frac{dt}{dt}$$

$$= f(u,w)b'(t) - f(v,w)a'(t) + \frac{\partial}{\partial t}\int_v^u f(x,t)dx$$

$$= f[b(t),t]b'(t) - f[a(t),t]a'(t) + \int_v^u \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx$$

Sehingga, diperoleh bahwa

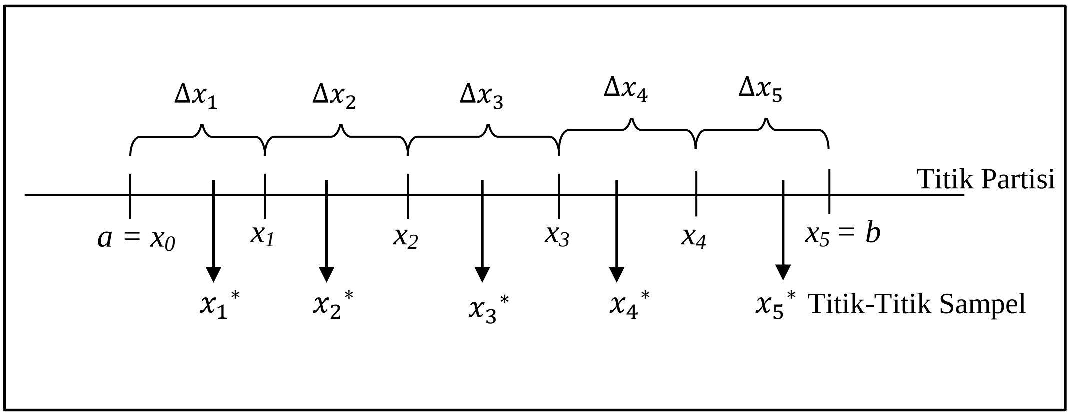
$$\frac{d}{dt}\int_{v}^{u} f(x,t)dx = f[b(t),t]b'(t) - f[a(t),t]a'(t) + \int_{v}^{u} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx$$

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = f[b(t),t]b'(t) - f[a(t),t]a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx \blacksquare$$

H. JUMLAH RIEMANN

Misalkan sebuah fungsi *f* didefinisikan pada interval tertutup $[a, b]$. Fungsi ini bisa bernilai positif ataupun negative pada interval tersebut dan bahkan tidak perlu kontinu.

Misalkan suatu partisi *P* membagi interval $[a, b]$ menjadi *n* interval bagian (tidak perlu sama panjang) dengan menggunakan titik-titik $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ dan misalkan $\Delta x = x_i - x_{i-1}$. Pada tiap interval bagian $[x_{i-1}, x_i]$, ambil sebuah titik sebarang $x_i{}^*$ (yang mungkin saja sebuah titik ujung); disebut sebagai titik sampel untuk interval bagian ke-*i*. Sebuah contoh dari konstruksi ini diperlihatkan dalam Gambar 2.7 untuk *n=5*.



Gambar 2.8 Sebuah Partisi dari $[a, b]$ dengan Titik Sampel $x_i{}^*$

Jumlah Riemann dinyatakan dengan

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i.$$

Pada Prinsipnya konsep Integral merupakan Jumlahan Riemann. Langkah-langkah penyelesaian sebagai berikut ini.

1. Fungsi $f(x)$ dipartisi menjadi beberapa bagian, misalkan banyak partisi n, setiap partisi tidak sama panjang.
2. Ditentukan jarak di setiap partisi yaitu $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, dengan $i = 1,2,3 \ldots n$, hal ini digunakan untuk menentukan hasil dari $f(x)$ pada interval [a,b].
3. Ditentukan nilai dari $f(x_i^*)$.
4. Digunakan konsep jumlahan luas persegi panjang yaitu $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$ (Valberg, Purcell, & Rigdon, 2008).