BAB II
KAJIAN TEORI

Pada bab II ini akan dibahas tentang materi dasar yang digunakan untuk mendukung pembahasan pada bab-bab berikutnya, yaitu peubah acak, distribusi normal, matriks, analisis multivariate, aturan bayes, turunan, *moving average*, investasi dan portofolio.

A. Peubah Acak

Definisi 2.1 (Bain & Engelhardt, 1992)**.** *Peubah acak (random variable) X adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada ruang sampel S yang menghubungkan setiap anggota pada ruang sampel S dengan suatu bilangan real. Peubah acak X dapat dinyatakan sebagai berikut :*

$$X(e) = x_e \tag{2.1}$$

dengan e adalah titik sampel $(e \in S)$ dan x adalah bilangan real yang menyatakan nilai fungsi dari kejadian-kejadian pada titik sampel e.

Peubah acak dinotasikan dengan huruf kapital misalnya X, Y dan $Z,$ sedangkan nilai yang mungkin dari setiap hasil observasi pada ruang sampel dinotasikan dengan huruf kecil misalnya x, y dan z.

Contoh:

Dua bola bola diambil tanpa pengembalian dari sebuah guci yang berisi 4 bola merah dan 3 bola hitam. Hasil yang mungkin dan nilai x dari peubah acak X dimana X adalah jumlah bola merah adalah sebagai berikut :

Ruang Sampel	$\boldsymbol{x}$
RR	2
RB	1
BR	1
BB	0

Pada eksperimen pelantunan sebuah dadu, ditentukan pada keenam hasil e_i bilangan $X(e_i) = 10i$. Maka,

$$X(e_1) = 10, X(e_2) = 20, \dots, X(e_6) = 60$$

(Papoulis, 1984)

Definisi 2.2 (Bain & Engelhardt, 1992). Jika X adalah peubah acak diskret dengan fungsi densitas probabilitas $f(x)$ maka nilai ekspektasi dari X didefinisikan sebagai berikut:

$$E(X) = \sum_{x} xf(x) \tag{2.2}$$

Jika X adalah peubah acak kontinu dengan fungsi densitas probabilitas $f(x)$, maka nilai ekspektasi dari X didefinisikan sebagai berikut:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \tag{2.3}$$

Definisi 2.3 (Bain & Engelhardt, 1992). *Varians dari peubah acak X didefinisikan sebagai berikut:*

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2] \tag{2.4}$$

Notasi varians yang lain adalah σ^2, σ_x^2 atau $V(X)$. Standar deviasi dari X didefinisikan sebagai akar positif dari varians yaitu $\sigma = \sigma_x = \sqrt{Var(X)}$.

Teorema 2.1 (Bain & Engelhardt, 1992)**.** *Jika X adalah peubah acak maka*

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 \tag{2.5}$$

Bukti:

$Var(X) = E[(X-\mu)^2]$

$= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2]$

$= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$, karena $\mu = E(X)$ maka

$= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$

$= E(X^2) - \mu^2$

Teorema 2.2 (Bain & Engelhardt, 1992). *Jika X adalah peubah acak dan a, b adalah konstanta maka*

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X) \tag{2.6}$$

Bukti:

$Var(aX+b) = E[(aX+b) - E(aX+b)]^2$

$= E[(aX + b - aE(X) - b)^2]$, karena $\mu_x = E(X)$

$= E[a^2(X-\mu_x)^2]$

$= a^2 E[(X-\mu_x)^2]$

$= a^2 Var(X)$

Definisi 2.5 (Bain & Engelhardt, 1992)**.** *Kovarians dari pasangan peubah acak X dan Y didefinisikan sebagai berikut:*

$$Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y) \quad (2.7)$$

Kovarians juga dapat dinotasikan dengan σ_{xy}.

Jika X dan Y peubah acak diskret maka

$$Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$$

$$= \sum_x \sum_y (X-\mu_X)(Y-\mu_Y)f(x,y) \quad (2.8)$$

Jika X dan Y peubah acak kontinu maka

$$Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (X-\mu_X)(Y-\mu_Y)f(x,y)dxdy \quad (2.9)$$

Jika X dan Y peubah acak, a, b konstanta maka berlaku sebagai berikut:

1. $Cov(aX,bY) = ab\ Cov(X,Y)$
2. $Cov(X+a,Y+b) = Cov(X,Y)$
3. $Cov(X,aX+b) = a\ Var(X)$
4. $Cov(X,Y) = 0$, jika X dan Y independen

Definisi 2.5 (Bain & Engelhardt, 1992). *Jika X dan Y peubah acak dengan varians σ_X^2 dan σ_Y^2 dan kovarians $\sigma_{XY} = Cov(X,Y)$, maka koefisien korelasi dari X dan Y adalah sebagai berikut:*

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (2.10)$$

Peubah acak X dan Y dinyatakan tidak berkorelasi jika $\rho = 0$.

B. Distribusi Normal

1. Definisi Distribusi Normal

Definisi 2. 6 (Bain & Engelhardt, 1992). *Peubah acak X dikatakan berdistribusi normal yang dinotasikan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dengan mean μ dan varians σ^2 mempunyai fungsi densitas probabilitas yaitu:*

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}} \tag{2.11}$$

untuk $-\infty < x < \infty$, *dengan* $-\infty < \mu < \infty$ *dan* $0 < \sigma < \infty$

2. Uji Normalitas

Uji normalitas sering digunakan untuk melihat apakah *return* saham berdistribusi normal atau tidak dalam hal investasi. Apabila *return* saham berdistribusi normal, maka saham tersebut akan diperhitungkan untuk dimasukkan ke dalam portofolio. Tujuan pengujian normalitas dalam *return* saham adalah untuk mengantisipasi terjadinya ketidakstabilan harga yang dikhawatirkan akan mengalami penurunan harga saham yang sangat signifikan sehingga merugikan investor. Uji normalitas dapat dilakukan dengan statistik uji *klomogorov-smirnov* pada *software* bantuan SPSS atau minitab.

a. Hipotesis

H_0 : data *return* saham diasumsikan berdistribusi normal.

H_1 : data *return* saham tidak dapat diasumsikan berdistribusi normal.

b. Tingkat signifikansi α.

c. Statistik uji

Kolmogorov-Smirnov $T = \sup_{X} |F^*(X) - S(X)|$.

F(X)* adalah distribusi kumulatif data sampel.

S(X) adalah distribusi kumulatif yang dihipotesiskan.

d. Kriteria uji

H_0 ditolak jika *p-value KS* < *α.*

e. Perhitungan.

f. Kesimpulan.

C. Matriks

Definisi 2.7 (Pudjiastuti, 2006)**.** *Matriks didefinisikan sebagai suatu himpunan angka, variabel atau parameter dalam bentuk suatu persegi panjang yang tersusun di dalam baris dan kolom. Pada umumnya matriks dinotasikan dalam huruf besar, sedangkan elemen-elemennya dalam huruf kecil sebagai berikut:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ atau } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a_{ij} adalah elemen dari matriks $\boldsymbol{A}$ dimana *i* menyatakan baris dan *j* menyatakan kolom. Misalnya a_{12} adalah elemen dari matriks $\boldsymbol{A}$ yang terletak pada baris ke-1 dan kolom ke-2.

1. Transpose Matriks

Definisi 2.8 (Pudjiastuti, 2006). *Transpose suatu matriks adalah mengubah ordo suatu matriks dari $m\ x\ n$ menjadi $n\ x\ m$. Jika $\boldsymbol{A}'$ atau $\boldsymbol{A}^T$ adalah transpose dari matriks $\boldsymbol{A}$, maka baris pada matriks $\boldsymbol{A}$ menjadi kolom pada matriks $\boldsymbol{A}'$ dan sebaliknya kolom pada matriks $\boldsymbol{A}$ menjadi baris pada matriks $\boldsymbol{A}'$.*

Contoh:

Jika $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ maka $\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Jika $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ maka $\boldsymbol{B}' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

2. Operasi Matriks

a. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Definisi 2.9 (Pudjiastuti, 2006). *Dua buah matriks dapat dijumlahkan atau dikurangkan "jika dan hanya jika" kedua matriks tersebut berordo sama.*

Pada proses penjumlahan atau pengurangan ini yang dijumlahkan atau dikurangkan adalah elemen-elemen dari matriks yang bersesuaian (seletak).

Contoh:

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(a) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 4\\1 & 3\end{bmatrix}$

(b) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 6\\2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 8\\2 & 5\end{bmatrix}$

(c) $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}4 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & 6\\2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -4\\-1 & -2\end{bmatrix}$

(d) $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}5 & 6\\2 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 4\\2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$

b. Perkalian Matriks

Definisi 2.10 (Pudjiastuti, 2006). *Dimisalkan λ adalah suatu bilangan riil. Perkalian matriks dengan suatu skalar berarti mengalikan setiap elemen dari matriks dengan skalar tersebut, sebagai berikut:*

$$\lambda\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12}\\\lambda a_{21} & \lambda a_{22}\end{bmatrix}$$

Contoh:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 2\\5 & 7\\1 & 3\end{bmatrix}, 5\boldsymbol{A}=5\begin{bmatrix}3 & 2\\5 & 7\\1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5(3) & 5(2)\\5(5) & 5(7)\\5(1) & 5(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 10\\25 & 35\\5 & 15\end{bmatrix}$$

Definisi 2.11 (Pudjiastuti, 2006). *Dua buah matriks dapat dikalikan "jika dan hanya jika" jumlah kolom pada matriks pertama sama dengan jumlah baris pada matriks kedua.*

Perhatikan matriks berikut ini:

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}\rightarrow\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\\a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{12}\\c_{21} & c_{22} & c_{23}\\c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{bmatrix}$$

Hasil perkalian matriks $\boldsymbol{A}$ dengan matriks $\boldsymbol{B}$ adalah matriks $\boldsymbol{C}$.

Contoh:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(2)+2(4) & 3(1)+2(3) \\ 1(2)+3(4) & 1(1)+3(3) \\ 6(2)+1(4) & 6(1)+1(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 9 \\ 14 & 10 \\ 16 & 9 \end{bmatrix}$$

3. Minor dan Kofaktor Matriks

Definisi 2.12 (Pudjiastuti, 2006). *Minor adalah determinan dari submatriks* $\boldsymbol{A}$ *yang diperoleh dengan menghapus baris ke-*i *dan kolom ke-*j*. Kofaktor adalah minor yang sudah diperhitungkan tanda positif/negatifnya.*

Perhatikan matriks berikut ini:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$|M_{23}|$ adalah minor yang diambil dari elemen a_{23} dengan menghapus baris ke-2 dan kolom ke-3.

$$|M_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Untuk mendapatkan kofaktor digunakan rumus sebagai berikut:

$$\left|C_{ij}\right| = (-1)^{i+j}|M_{ij}| \quad (2.12)$$

sehingga

$|C_{23}| = (-1)^{2+3}|M_{23}| = (-1)^5|M_{23}| = -|M_{23}|$, kofaktor $|C_{23}|$ bertanda negatif

Untuk memudahkan maka perlu diingat jika jumlah baris ke-i dan kolom ke-j dari kofaktor adalah genap maka kofaktor bertanda positif. Sedangkan jika jumlah baris ke-i dan kolom ke-j dari kofaktor adalah ganjil maka kofaktor bernilai negatif.

4. Determinan Matriks

Definisi 2.12 (Anton, 2010). *Determinan matriks* $\boldsymbol{A}$ *berukuran* $n \; x \; n$ *dapat dihitung dengan mengalikan entri pada suatu kolom ke-j atau baris ke-i dengan masing-masing kofaktor dan menjumlahkan hasil perkalian tersebut. Determinan matriks* $\boldsymbol{A}$ *dinyatakan sebagai berikut:*

$$|A| = a_{1j}.C_{1j} + a_{2j}.C_{2j} + \cdots + a_{nj}.C_{nj}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke$-j$)

atau

$$|A| = a_{i1}.C_{i1} + a_{i2}.C_{i2} + \cdots + a_{in}.C_{in}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris ke$-i$)

Contoh:

Determinan dari matriks $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ adalah sebagai berikut:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3.[(-4).(-2) - 3.4] + 2.[1.(-2) - 0.4] + 5.[1.3 - 0.(-4)]$$

$$= 3.(-4) + 2.(-2) + 5.3 = -1$$

5. Invers Matriks

Definisi 2. 13 (Anton, 2010). *Jika* ***A*** *matriks persegi dan jika terdapat suatu matriks* ***B*** *dengan ukuran yang sama sedemikian sehingga* ***AB****=****BA****=****I*** *dengan* ***I*** *merupakan matriks identitas, maka* ***A*** *invertible (dapat dibalik) dan* ***B*** *adalah invers dari* ***A****. Invers dari* ***A*** *dinotasikan dengan* $\boldsymbol{A^{-1}}$*sehingga* $\boldsymbol{AA^{-1}}$ *dan* $\boldsymbol{A^{-1}A = I}$.

Jika matriks ***A*** berukuran $n\ x\ n$ maka invers dari matriks ***A*** adalah

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|A|}[adj(\boldsymbol{A})] \tag{2.13}$$

dengan,

Adj $(\boldsymbol{A})$: matriks adjoin dari ***A*** yaitu transpose dari matriks kofaktor ***A***.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Minor dari a_{11}

$$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Kofaktor dari a_{11} adalah

$$c_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^{1+1}[a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}] \tag{2.16}$$

Kofaktor dan minor hanya berbeda tanda $c_{ij} = \pm M_{ij}$ untuk membedakan kofaktor pada M_{ij} adalah (+) atau (–) seperti matrik berikut:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

Contoh:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}, kof\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, adj\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = 3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

maka,

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|A|}\ [adj(\boldsymbol{A})]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
$$

D. Analisis Multivariat

Definisi 2.14 (Johnson & Wichern, 2007)**.** *Analisis statistik multivariat merupakan metode statistik untuk menganalisis hubungan antara lebih dari dua variabel secara bersamaan. Data sampel analisis multivariat secara umum dapat digambarkan dalam bentuk matriks dengan* n *objek dalam* p *variabel sebagai berikut:*

	Variabel 1	Variabel 2	$\cdots$	Variabel k	$\cdots$	Variabel p
Objek 1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1k}	$\cdots$	x_{1p}
Objek 2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2k}	$\cdots$	x_{2p}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Objek j	x_{j1}	x_{j2}	$\cdots$	x_{jk}	$\cdots$	x_{jp}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Objek n	x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{nk}	$\cdots$	x_{np}

*atau dapat ditulis dalam bentuk matriks **X** dengan* n *baris dan* p *kolom sebagai berikut:*

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} & \cdots & x_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{j1} & x_{j2} & \cdots & x_{jk} & \cdots & x_{jp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}.$$

1. Distribusi Multivariat Normal

Definisi 2. 15 (Johnson & Wichern, 2007). *Fungsi distribusi multivariat normal merupakan perluasan dari fungsi distribusi univariat normal untuk* $p \geq 2$. *Jika* $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ *adalah* p*-variat multivariat normal dengan rata-rata* μ *dan matriks varians-kovarians* Σ*, dimana*

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p1} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}.$$

maka fungsi densitas multivariat normal adalah

$$f(X) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)/2} \qquad (2.\ 18)$$

dengan $-\infty < X_i < \infty, i = 1,2,\ldots..p$.

2. Vektor random dan matriks random

Definisi 2. 16 (Johnson & Wichern, 2007). *Vektor random adalah vektor yang elemen-elemennya berupa peubah acak (random variable). Jika suatu unit eksperimen hanya memiliki satu variabel terukur maka variabel terukur disebut peubah acak, sedangkan jika terdapat lebih dari satu variabel terukur, misalkan* n *variabel maka variabel-variabel* *tersebut disebut vektor random dengan n komponen. Sedangkan matriks random adalah matriks yang mempunyai elemen peubah acak.*

3. *Mean* dan Kovarians Vektor Random

Definisi 2. 17 (Johnson & Wichern, 2007). *Dimisalkan X adalah variabel random dengan mean $\mu = E(X)$ dan matriks kovarians Σ. Mean vektor random X dengan ordo p x 1 dapat dinyatakan sebagai berikut:*

$$E(X) = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \mu \qquad (2.19)$$

Sedangkan kovarians vektor random X dengan ordo p x 1 adalah $\sum = E(X-\mu)(X-\mu)'$

$$= E\left(\begin{bmatrix} X_1-\mu_1 \\ X_2-\mu_2 \\ \vdots \\ X_p-\mu_p \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1-\mu_1 & X_2-\mu_2 & \cdots & X_p-\mu_p \end{pmatrix} \right)$$

$$= E\begin{bmatrix} (X_1-\mu_1)^2 & (X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) & \cdots & (X_1-\mu_1)(X_p-\mu_p) \\ (X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1) & (X_2-\mu_2)^2 & \cdots & (X_2-\mu_2)(X_p-\mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_p-\mu_p)(X_1-\mu_1) & (X_p-\mu_p)(X_2-\mu_2) & \cdots & (X_p-\mu_p)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E(X_1-\mu_1)^2 & E(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) & \cdots & E(X_1-\mu_1)(X_p-\mu_p) \\ E(X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1) & E(X_2-\mu_2)^2 & \cdots & E(X_2-\mu_2)(X_p-\mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(X_p-\mu_p)(X_1-\mu_1) & E(X_p-\mu_p)(X_2-\mu_2) & \cdots & E(X_p-\mu_p)^2 \end{bmatrix}$$

Atau dapat dinyatakan,

$$\sum = Cov(X) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p1} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix} \qquad (2.20)$$

Dengan σ_{ij} : kovarian dari X_i dan $X_j, i = 1,2,\dots p$ dan $j = 1,2,\dots p$.

Kovarians untuk sampel dinyatakan

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p1} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix} \qquad (2.21)$$

Dengan s_{ij} : kovarian dari $\hat{X}_i$ dan $\hat{X}_j, i = 1,2,\dots p$ dan $j = 1,2,\dots p$

E. Aturan Bayes

1. Konsep Probabilitas

Probabilitas adalah ukuran kemungkinan yang dapat terjadi dalam suatu peristiwa tertentu. Suatu percobaan mempunyai ruang sampel S dan kejadian-kejadian $A_1, A_2, \dots$ yang mungkin terjadi, $\mathrm{P}(A)$ dalam selang [0,1] disebut probabilitas dari A dan $\mathrm{P}(S) = 1$.

Probabilitas terjadinya suatu kejadian A bila diketahui bahwa kejadian C telah terjadi disebut probabilitas bersyarat dan dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathrm{P}(A|C) = \frac{\mathrm{P}(A \cap C)}{\mathrm{P}(C)} \tag{2.22}$$

Lambang $\mathrm{P}(A|C)$ biasanya dibaca "probabilitas A terjadi bila diketahui C terjadi" atau lebih sederhana lagi "probabilitas A, bila C diketahui".

2. Probabilitas Total dan Aturan Bayes

Misalkan kejadian-kejadian $C_1, C_2, \ldots, C_n$ saling asing sehingga $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n = S$. Probabilitas total dari kejadian A dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|C_1)\,\mathrm{P}(C_1) + \mathrm{P}(A|C_2)\,\mathrm{P}(C_2) + \cdots + \mathrm{P}(A|C_n)\,\mathrm{P}(C_n)$$

Misalkan kejadian-kejadian $C_1, C_2, \ldots, C_n$ saling asing sehingga $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n = S$. Peluang bersyarat dari C_i dengan kejadian A telah diketahui, aturan bayes dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\mathrm{P}(C_i|A) = \frac{\mathrm{P}(A|C_i)\mathrm{P}(C_i)}{\mathrm{P}(A|C_1)\,\mathrm{P}(C_1) + \mathrm{P}(A|C_2)\,\mathrm{P}(C_2) + \cdots + \mathrm{P}(A|C_n)\,\mathrm{P}(C_n)}$$

Atau secara sederhana

$$\mathrm{P}(C_i|A) = \frac{\mathrm{P}(A|C_i)\mathrm{P}(C_i)}{\mathrm{P}(A)} \tag{2.23}$$

(Dekking & Kraaikamp, 2005)

F. Turunan

1. Turunan Parsial

Definisi 2.18 (Varberg & Purcell, 2001). *Bila* $z = f(x, y)$ *terdefinisi dalam dominan* D *dibidang* XY*, sedangkan turunan pertama* f *terhadap* x *dan* y *di setiap titik* (x, y) *ada, maka:*

Turunan pertama f *di* x *(selain* x *dianggap konstan) adalah :*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Turunan pertama f *di* y *(selain* y *dianggap konstan) adalah :*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

atau dapat dinotasikan dengan :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_x(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_y(x, y)$$

Turunan dari fungsi vector

Definisi 2.19 (Felippa, 2001). *Misalkan* $\boldsymbol{x}$ *dan* $\boldsymbol{y}$ *adalah vektor dengan order* n *dan* m *yaitu:*

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, dan $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$, *dimana setiap komponen y_i adalah fungsi dari semua x_j, atau dapat dikatakan $\boldsymbol{y}$ adalah fungsi dari $\boldsymbol{x}$, atau $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$.*

Jika $n = 1$, maka $\boldsymbol{x}$ adalah skalar yang kemudian disebut x. Jika $m = 1$, maka $\boldsymbol{y}$ adalah skalar yang kemudian disebut y.

1. Turunan Vektor terhadap Vektor

Turunan vector $\boldsymbol{y}$ terhadap vector $\boldsymbol{x}$ adalah matriks $n\ x\ m$.

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \ddots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

2. Turunan Skalar terhadap Vektor

Jika y adalah skalar maka,

$$\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

3. Turunan Vector terhadap Skalar

Jika x adalah skalar maka,

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

Contoh:

Misalkan $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Dan $y_1 = x_1^2 - x_2$

$y_2 = x_3^2 + 3x_2$

Turunan parsial matriks $\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}$ adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_3} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2x_3 \end{bmatrix}$$

2. Aturan Rantai

Andaikan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ merupakan fungsi komposit $y = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$. Jika g terdiferensialkan di x dan f terdiferensialkan di $u = g(x)$, maka $f \circ g$ terdiferensialkan di x sehingga $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ yakni $D_x y = D_u y D_x y$.

Contoh:

Jika $y = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$, carilah $D_x y$

Misalkan $y = u^{60}$ dan $u = 2x^2 - 4x + 1$

Maka, $D_x y = D_u y . D_x u$

$= (60u^{59})(4x - 4)$

$= 60(2x^2 - 4x + 1)^{59}(4x - 4)$

Aturan Rantai untuk Fungsi Vector

Misalkan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}$, dan $\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}$

Dimana $\boldsymbol{z}$ adalah fungsi dari $\boldsymbol{y}$ dan $\boldsymbol{y}$ adalah fungsi dari $\boldsymbol{x}$. Sehingga

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial z_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_m}{\partial x_1} & \frac{\partial z_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial z_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Setiap entri dari matriks diatas dapat diperluas sebagai berikut:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_j} = \sum_{q=1}^{r} \frac{\partial z_i}{\partial y_q} . \frac{\partial y_q}{\partial x_j} \qquad \begin{cases} i = 1,2, \dots, m \\ j = 1,2, \dots n \end{cases}$$

Kemudian

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial z_1}{\partial y_q} . \frac{\partial y_q}{\partial x_1} & \sum \frac{\partial z_1}{\partial y_q} . \frac{\partial y_q}{\partial x_2} & \cdots & \sum \frac{\partial z_1}{\partial y_q} . \frac{\partial y_q}{\partial x_n} \\ \sum \frac{\partial z_2}{\partial y_q} . \frac{\partial y_q}{\partial x_1} & \sum \frac{\partial z_2}{\partial y_q} . \frac{\partial y_q}{\partial x_2} & \cdots & \sum \frac{\partial z_2}{\partial y_q} . \frac{\partial y_q}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum \frac{\partial z_m}{\partial y_q} . \frac{\partial y_q}{\partial x_1} & \sum \frac{\partial z_m}{\partial y_q} . \frac{\partial y_q}{\partial x_2} & \cdots & \sum \frac{\partial z_m}{\partial y_q} . \frac{\partial y_q}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_r} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_2}{\partial y_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_m}{\partial y_1} & \frac{\partial z_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_m}{\partial y_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_r}{\partial x_1} & \frac{\partial y_r}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_r}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T = \left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)^T \qquad (2.27)$$

Sehingga diperoleh $\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{y}}$ yang mana ini adalah aturan rantai untuk vector.

G. *Moving Average*

Metode *simple average* adalah metode peramalan yang dilakukan dengan menggunakan rata-rata dari semua data pengamatan sebagai ramalan untuk periode selanjutnya. Namun jika seorang pengamat ingin menggunakan data terbaru saja, maka dapat ditentukan suatu data sebagai titik awal pengamatan dan nilai rata-rata dihitung dimulai dari data tersebut. Dengan *moving average* dapat ditentukan nilai pengamatan terbaru, yaitu dengan mengambil data-data terbaru dan menghitung rata-ratanya. *Moving average* ini digunakan untuk meramalkan pengamatan periode selanjutnya. Istilah *moving average* digunakan karena setiap data observasi baru tersedia, maka angka rata-rata yang baru dihitung dan dipergunakan sebagi ramalan. Berikut adalah persamaan *moving average:*

$$\hat{Y}_{t+1} = \frac{Y_t + Y_{t-1} + \cdots + Y_{t-k+1}}{k} \tag{2.28}$$

dengan,

Y_{t+1} : nilai peramalan untuk periode $t + 1$

Y_t : nilai aktual pada periode t

k : jumlah batas dalam *moving average*

Moving average untuk periode waktu t adalah rata-rata aritmatika dari k pengamatan terbaru (Hanke & Winchern, 2005).

H. Investasi

1. Tahap Pengambilan keputusan Investasi

Investasi adalah komitmen atas sejumlah dana atau sumber daya lainnya yang dilakukan pada saat ini dengan tujuan memperoleh sejumlah keuntungan di masa datang (Tandelilin, 2010). Proses investasi menunjukkan bagaimana seharusnya seorang investor membuat keputusan investasi pada efek-efek yang dapat dipasarkan dan kapan dilakukan. Proses pengambilan keputusan investasi merupakan proses yang berkesinambungan (*On Going Process*). Proses keputusan investasi terdiri dari lima tahap yang terus berlangsung sampai tercapai keputusan investasi yang baik, yaitu:

a. Penentuan tujuan investasi

Tahap pertama dalam proses keputusan investasi untuk menentukan tujuan investasi yang akan dilakukan. Tujuan investasi untuk masing-masing investor bisa berbeda tergantung pada investor yang membuat keputusan tersebut.

b. Penentuan kebijakan investasi

Tahap penentuan kebijakan investasi dilakukan dengan penentuan keputusan alokasi aset. Keputusan ini menyangkut pendistribusian dana yang dimiliki pada berbagai kelas aset yang tersedia (saham, obligasi, bangunan maupun sekuritas luar negeri).

c. Pemilihan strategi portofolio

Strategi portofolio yang bisa dipilih yaitu strategi portofolio aktif dan strategi portofolio pasif. Strategi portofolio aktif meliputi kegiatan penggunaan informasi yang tersedia untuk mencari kombinasi portofolio yang lebih baik. Strategi portofolio pasif meliputi aktifitas investasi pada portofolio yang seiring dengan kinerja indeks pasar. Asumsi strategi pasif ini adalah bahwa semua informasi yang tersedia akan diserap pasar dan direfleksikan pada harga saham.

d. Pemilihan aset

Pemilihan aset yang dilakukan untuk membentuk suatu portofolio. Tahap ini memerlukan pengukuran kinerja setiap sekuritas yang ingin dimasukkan dalam portofolio yang efisien, yaitu portofolio yang menawarkan *expected return* yang tertinggi dengan tingkat risiko tertentu atau sebaliknya menawarkan *expected return* tertentu dengan tingkat risiko rendah.

e. Pengukuran dan Evaluasi Kinerja Portofolio

Tahap pengukuran dan evaluasi kinerja portofolio ini meliputi pengukuran kinerja portofolio dan membandingkan hasil pengukuran tersebut dengan kinerja portofolio lainnya. Proses ini biasanya dilakukan terhadap indeks portofolio pasar untuk mengetahui seberapa baik kinerja portofolio yang telah ditentukan dibanding kinerja portofolio lainnya (portofolio pasar).

2. Saham

Saham adalah surat berharga yang menunjukkan kepemilikan perusahaan sehingga pemegang saham memiliki hak klaim atas dividen atau distribusi lain yang dilakukan perusahaan kepada pemegang saham lainnya. Saham merupakan secarik kertas yang menunjukkan hak pemodal (yaitu pihak yang memiliki kertas tersebut) untuk memperoleh bagian dari prospek atau kekayaan organisasi yang menerbitkan sekuritas tersebut dan berbagai kondisi yang memungkinkan pemodal tersebut menjalankan haknya. Saham adalah salah satu di antara beberapa alternatif yang dapat dipilih untuk berinvestasi. Berikut adalah contoh gambar lembar saham yang diakses dari google.com.

Gambar 2. 1 Gambar Lembar Saham

3. Indeks LQ-45

Indeks *Liquid Quality-45* (LQ-45) terdiri dari 45 saham yang telah terpilih memiliki likuiditas dan kapitalisasi pasar yang tinggi dan di*review* setiap 6 bulan pada awal Februari dan Agustus. Menurut Tandelilin (2010) saham-saham pada indeks LQ-45 harus memenuhi kriteria sebagai berikut:

1. Masuk dalam urutan 60 terbesar dari total transaksi saham di pasar regular (rata-rata nilai transaksi selama 12 bulan terakhir).
2. Masuk dalam urutan 60 terbesar berdasarkan kapitalisasi pasar di pasar regular (rata-rata nilai kapitalisasi pasar selama 12 bulan terakhir).
3. Telah tercatat di BEI selama paling sedikit 3 bulan.

Jika saham tidak memenuhi kriteria tersebut pada saat *review* maka saham tersebut akan dikeluarkan dari perhitungan indeks dan diganti dengan saham lainnya yang memenuhi kriteria.

I. Portofolio

1. Pengertian Portofolio

Portofolio secara sederhana bisa disebut kumpulan aset investasi, bisa berupa properti, deposito, saham, emas, obligasi, atau instrumen lainnya. Portofolio saham adalah kumpulan aset investasi berupa saham, baik yang dimiliki perorangan atau perusahaan. Tujuan dari pembentukan portofolio ini adalah untuk mengurangi risiko dengan mengadakan diversifikasi. Filosofi portofolio yang digunakan adalah *"Wise Investor Do Not Put All Their Eggs Into Just One Basket".*

Teori portofolio adalah pemilihan portofolio dari sekian banyak aset untuk memaksimalkan *return* yang diharapkan pada tingkat risiko tertentu yang bersedia ditanggung investor. Dengan kata lain, teori portofolio membahas bagaimana cara untuk membentuk portofolio yang optimal.

a. *Return* Portofolio

Return adalah hasil yang diperoleh dari suatu investasi. Adanya hubungan positif antara *return* portofolio dan risiko dalam berinvestasi yang dikenal dengan *high risk – high return,* yang artinya semakin besar risiko yang diambil, maka semakin besar pula *return* yang diperoleh. Hal ini dimaksudkan bahwa harus ada pertambahan *return* sebagai kompensasi dari pertambahan risiko yang ditanggung oleh investor.

Return dapat berupa realized *return* yang sudah terjadi atau *expected return* yang belum terjadi tetapi diharapkan akan diperoleh pada masa mendatang (Jogiyanto, 2010). *Realized return* portofolio dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$Rp = \sum_{i=1}^{n} \left(w_i . R_i \right) \tag{2.29}$$

keterangan:

R_p : *realized return* portofolio,

w_i : proporsi dana investor pada sekuritas ke-*i*,

R_i : *realized return* dari sekuritas ke-*i*,

n : banyaknya sekuritas.

Return suatu sekuritas untuk dapat dihitung menggunakan rumus:

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \tag{2.30}$$

keterangan:

P_t : harga sekuritas pada periode ke-t,

P_{t-1}: harga sekuritas pada periode ke-$(t-1)$.

Return suatu sekuritas untuk sampel dinyatakan dengan rumus:

$$R_t = \frac{\overline{P_t}}{\overline{P_{t-1}}} - 1 = \frac{\overline{P_t} - \overline{P_{t-1}}}{\overline{P_{t-1}}} \tag{2.31}$$

Sedangkan *expected return* portofolio merupakan rata-rata tertimbang dari *expected return* masing-masing sekuritas dalam portofolio. *Expected return* portofolio dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$E(Rp) = \sum_{i=1}^{n} \left(w_i . E(R_i) \right) \tag{2.32}$$

keterangan:

$E(R_p)$: *expected return* dari portofolio,

w_i : proporsi dana investor pada sekuritas ke-*i*,

$E(R_i)$: *expected return* dari sekuritas ke-*i*,

n : banyaknya sekuritas.

Nilai *expected return* pada Persamaan (2.32) secara matematis dapat dibentuk dalam matriks adalah sebagai berikut:

$$E(Rp) = w_1(E(R_1)) + w_2(E(R_2)) + \cdots + w_n(E(R_n))$$

$$= [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n]\begin{bmatrix} E(R_1) \\ E(R_2) \\ \vdots \\ E(R_n) \end{bmatrix} = \boldsymbol{W}'\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) \qquad (2.33)$$

keterangan:

$\boldsymbol{W}$: matriks bobot tiap sekuritas dalam portofolio,

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})$: matriks *expected return* tiap sekuritas dalam portofolio.

b. Risiko Portofolio

Risiko dalam portofolio dapat diartikan sebagai tingkat kerugian tidak terduga yang besarnya tergantung pada portofolio yang dibentuk. Salah satu pengukur risiko adalah deviasi standar atau varians yang merupakan kuadrat dari standar deviasi. Risiko portofolio dapat diukur dengan besarnya varians dari nilai-nilai *return* saham-saham tunggal yang ada di dalamnya. Banyaknya sekuritas dalam suatu portofolio dapat mempengaruhi nilai varians dari risiko. Pembentukan suatu portofolio diperlukan minimal dua sekuritas. Varians dengan dua sekuritas adalah sebagai berikut (Jogiyanto, 2010)

$$Var(Rp) = \sigma_P^{\ 2}$$

$$= E[Rp - E(Rp)]^2$$

$$= E[(w_1R_1 + w_2R_2) - E(w_1R_1 + w_2R_2)]^2$$

$$= E[(w_1R_1 + w_2R_2) - E(w_1R_1) - E(w_2R_2)]^2$$

$$= E\left[\left(w_1R_1 + w_2R_2\right) - w_1E\left(R_1\right) - w_2E\left(R_2\right)\right]^2$$

$$= E\left[w_1\left(R_1 - E\left(R_1\right)\right) + w_2\left(R_2 - E\left(R_2\right)\right)\right]^2$$

$$= E\left[w_1^2\left(R_1 - E\left(R_1\right)\right)^2 + 2w_1w_2\left(R_1 - E\left(R_1\right)\right)\left(R_2 - E\left(R_2\right)\right) + w_2^2\left(R_2 - E\left(R_2\right)\right)^2\right]$$

$$= w_1^2E\left(\left(R_1 - E\left(R_1\right)\right)^2\right) + 2w_1w_2E\left(\left(R_1 - E\left(R_1\right)\right)\left(R_2 - E\left(R_2\right)\right)\right) + w_2^2E\left(\left(R_2 - E\left(R_2\right)\right)^2\right)$$

$$= w_1^2\sigma_1^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} + w_2^2\sigma_2^2 . \qquad (2.34)$$

Varians dengan 3 sekuritas adalah sebagai berikut :

$$Var(Rp) = \sigma_p^2$$

$$= E[Rp - E(Rp)]^2$$

$$= E[(w_1R_1 + w_2R_2 + w_3R_3) - E(w_1R_1 + w_2R_2 + w_3R_3]^2$$

$$= [w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^3] + [2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_1w_3\sigma_{13}$$

$$+2w_2w_3\sigma_{23}] \qquad (2.35)$$

Selanjutnya varians dengan *n* sekuritas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\sigma_p^2 = [w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^3 + \cdots + w_n^2\sigma_n^2] + [2w_1w_2\sigma_{12}$$

$$+2w_1w_3\sigma_{13} + \cdots + 2w_1w_n\sigma_{1n} + 2w_2w_3\sigma_{23} + \cdots$$

$$+2w_2w_n\sigma_{2n} + \cdots + 2w_{n-1}w_n\sigma_{n-1,n}]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_1^2\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} w_1w_j\sigma_{ij} \qquad (2.36)$$

Persamaan (2.36) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks yaitu:

$$\sigma_p^2 = [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{W}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{W} \tag{2.37}$$

keterangan:

$\boldsymbol{\Sigma}$: matriks varians kovarians *n x n*,

$\boldsymbol{W}$: matriks bobot tiap sekuritas *n x* 1.

Risiko portofolio dihitung menggunakan rumus deviasi standar sebagai berikut:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} \tag{2.38}$$

keterangan:

σ_p : deviasi standar dari *return* portofolio.

Risiko portofolio untuk sampel dinyatakan sebagai berikut:

$$S_p = \sqrt{\widehat{\boldsymbol{W}}'\boldsymbol{S}\widehat{\boldsymbol{W}}} \tag{2.39}$$

keterangan:

$\boldsymbol{S}$: matriks varians kovarians sampel *n x n*,

$\widehat{\boldsymbol{W}}$: matriks bobot sampel tiap sekuritas *n x* 1

2. Model Portofolio

a. Model *Mean-Variance* Markowitz

Model *mean-variance* Markowitz pertama kali diperkenalkan tahun 1952 oleh Harry Markowitz tentang pemilihan portofolio optimal secara kuantitatif pada tahun 1952 (Markowitz, 1952). Model *mean-variance* Markowitz menggunakan asumsi-asumsi sebagai berikut (Guerard, 2010):

1. Investor hanya memperhatikan *mean* dan varians portofolio
2. Preferensi investor akan meminimumkan risiko dengan tingkat *return* tertentu.
3. Preferensi investor akan memaksimumkan *return* dengan tingkat risiko tertentu.
4. Tidak ada biaya transaksi dan tidak ada pinjaman.

Menurut Moehring (2013) portofolio optimal menggunakan model *mean-variance* Markowitz berdasarkan preferensi investor adalah sebagai berikut:

a. Meminimumkan risiko untuk tingkat *return* tertentu

$Min\ Var(R_p) = \boldsymbol{W'\Sigma W}$ dengan $E(R_p) = \boldsymbol{W'}\mu$ (2.40)

b. Memaksimumkan *return* dengan tingkat risiko tertentu

$Maks\ E(R_p) = \boldsymbol{W'}\mu$ dengan $Var(R_p) = \boldsymbol{W'\ \Sigma W}$ (2.41)

Bobot untuk masing-masing sekuritas dapat dinyatakan dengan $\boldsymbol{W'} = [w_1 \ \ldots \ w_n]$ dan μ merupakan matriks *expected return* masing-masing sekuritas $n\ x$ 1.

Optimasi untuk memaksimumkan *return* dengan tingkat risiko tertentu dapat diselesaikan dengan menggunakan fungsi Lagrange L sebagai berikut:

$$L = \boldsymbol{W'\mu} - \lambda(\boldsymbol{W'\Sigma W} - \sigma^2) \qquad (2.42)$$

Turunan parsial L terhadap $\boldsymbol{W}$ adalah dijabarkan sebagai berikut:

$$\frac{\partial L}{\partial W} = \frac{\partial(\boldsymbol{W'\mu}) - \boldsymbol{\partial}(\lambda(\boldsymbol{W'\Sigma W} - \sigma^2))}{\partial \boldsymbol{W}}$$

Misalkan,

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{W'} = [w_1 \quad w_2], \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Maka,

$$\boldsymbol{W'\mu} = [w_1 \quad w_2] \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = w_1\mu_1 + w_2\mu_2$$

Dengan menggunakan Persamaan (2.25) diperoleh turunan parsial dari $\frac{\partial(W'\mu)}{\partial W}$ adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial(W'\mu)}{\partial W} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(w_1\mu_1 + w_2\mu_2)}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial(w_1\mu_1 + w_2\mu_2)}{\partial w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu}$$

$$\boldsymbol{W'\Sigma W} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$= w_1^2\sigma_1^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} + w_2^2\sigma_2^2$$

Dengan menggunakan Persamaan (2.25) diperoleh turunan parsial dari

$\frac{\partial(W'\Sigma W)}{\partial W}$ adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial(W'\Sigma W)}{\partial W} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(w_1^2\sigma_1^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} + w_2^2\sigma_2^2)}{\partial w_1} \\ \frac{\partial(w_1^2\sigma_1^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} + w_2^2\sigma_2^2)}{\partial w_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2w_1\sigma_1^2 + 2w_2\sigma_{12} \\ 2w_2\sigma_1^2 + 2w_1\sigma_{12} \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_{12} \\ w_2\sigma_1^2 + w_1\sigma_{12} \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{\Sigma W}$$

Sehingga turunan parsial L terhadap $\boldsymbol{W}$adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial L}{\partial W} = \frac{\partial(\boldsymbol{W'\mu}) - \boldsymbol{\partial}(\lambda(\boldsymbol{W'\Sigma W} - \sigma^2))}{\partial \boldsymbol{W}}$$

$$= \boldsymbol{\mu} - 2\lambda\boldsymbol{\Sigma W} \tag{2.43}$$

Optimasi harus memenuhi syarat $\frac{\partial L}{\partial W} = 0$ sehingga

$$\boldsymbol{\mu} - 2\lambda\boldsymbol{\Sigma W} = \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{\mu} = 2\lambda\boldsymbol{\Sigma W}$, karena $\lambda = \frac{\delta}{2}$ maka

$$\boldsymbol{\mu} = \delta\boldsymbol{\Sigma W} \tag{2.44}$$

Dengan δ merupakan koefisien *risk aversion* (Moehring, 2013).

Rumus bobot portofolio model *mean*-variance Markowitz untuk masing-masing sekuritas dalam pasar (market) berdasarkan rumus (2.44) adalah sebagai berikut :

$$\boldsymbol{W_m} = (\delta\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\mu} \tag{2.45}$$

dengan $\boldsymbol{W_m}$ yaitu matriks bobot masing-masing sekuritas.

b. Capital Asets Pricing Model (CAPM)

Capital Asets Pricing Model (CAPM) pertama kali diperkenalkan oleh Williah Sharpe, Jhon Lintner dan Jan Mossin pada tahun 1964. CAPM didasari oleh teori portofolio Markowitz yaitu masing-masing investor diasumsikan akan mendiversifikasikan portofolionya dan memilih portofolio yang optimal berdasarkan pandangan investor terhadap *return* dan risiko.

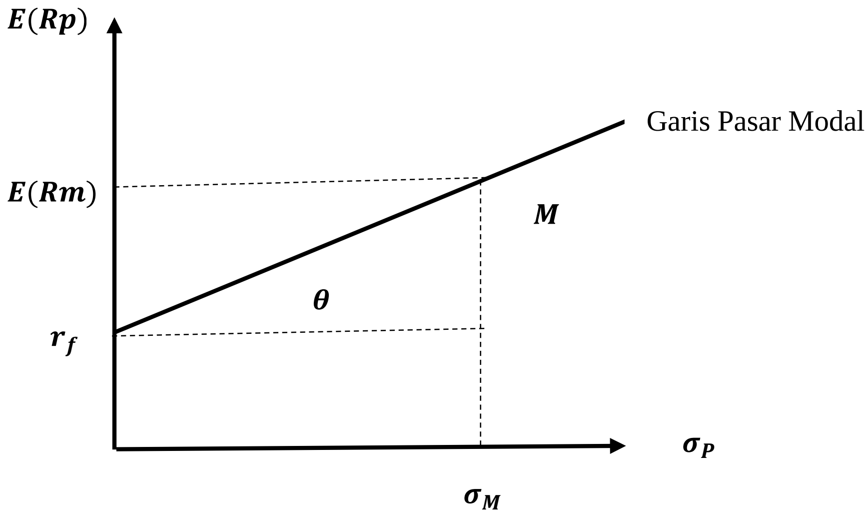
Untuk mengembangkan model CAPM diperlukan beberapa asumsi. Asumsi-asumsi ini digunakan untuk menyederhanakan persoalan-persoalan yang sesungguhnya terjadi di dunia nyata, supaya suatu model lebih mudah untuk dipahami dan diuji. Asumsi-asumsi yang digunakan di model CAPM adalah sebagai berikut (Strong, 2009):

1. Varians *return* dan mean *return* menjadi keputusan investor.
2. Investor sebagai pengambil harga dan tidak dapat mempengaruhi harga saham.
3. Investor mempunyai probabilitas tingkat *return* di masa depan yang sama dan akses harga yang sama untuk informasi yang relevan.

4. Tidak terdapat pajak atau biaya transaksi.
5. Semua investor mengamati dalam periode investasi yang sama.
6. Setiap orang mempunyai keahlian yang sama dalam menganalisis sekuritas dan menginterpretasikan berita.

Ekuilibrium pasar terjadi jika harga-harga dari aktiva berada di suatu tingkat yang tidak dapat memberikan insentif lagi untuk melakukan perdagangan spekulatif. Keadaan ekulibrium pasar yang dapat menyangkut *return* ekspektasi dan risiko dapat digambarkan oleh Garis Pasar Modal (GPM) atau *Capital Market Line* (CML).

Jika semua asumsi tersebut dipenuhi, maka akan terbentuk kondisi pasar yang ekuilibrium. Hubungan *expected return* dan risiko dalam keadaan ekuilibrium pasar dapat digambarkan pada Gambar 2.2.



Gambar 2. 2 *Capital Market Line*

Slope dalam garis pasar modal disimbolkan θ merupakan harga pasar dari risiko untuk portofolio yang dinyatakan dengan rumus sebagai berikut:

$$\theta = \frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M} \tag{2.46}$$

Perubahan θ yang semakin kecil mengakibatkan risiko portofolio semakin besar dan sebaliknya. Garis pasar modal menunjukan semua kemungkinan kombinasi portofolio efisien yang terdiri sekuritas-sekuritas berisiko dan sekuritas bebas risiko (Jogiyanto, 2010). Garis pasar modal terbentuk sepanjang titik *expected return* sekuritas bebas risiko (r_f) sampai titik *M*. *Expected return* sekuritas bebas risiko didekati dengan tingkat *return* suku bunga bank sentral, di Indonesia umumnya diambil dari tingkat *return* suku bunga bank Indonesia. Portofolio CAPM diharapkan memberikan keuntungan lebih besar dibandingkan sekuritas yang diinvestasikan pada bank. *Expected return* dalam portofolio CAPM berdasarkan Gambar 2.2 dapat dirumuskan dengan:

$$E(R_p) = r_f + \frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M}\sigma_p \tag{2.47}$$

keterangan:

$E(R_p)$: *expected return* portofolio

r_f : *return* sekuritas bebas risiko

$E(R_M)$: *expected return* portofolio pasar

σ_M : standar deviasi dari *return* portofolio pasar

σ_p : standar deviasi dari *return* portofolio.

Kontribusi masing-masing sekuritas terhadap risiko portofolio pasar tergantung dari besarnya kovarians *return* sekuritas dengan portofolio pasar. Mensubstitusikan kontribusi risiko sekuritas terhadap risiko pasar untuk sekuritas ke-*i* yaitu $\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M}$ pada Persamaan (2.47) dan diperoleh:

$$\begin{aligned} E(r_i) &= r_f + \frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M} \cdot \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M} \\ &= r_f + \frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M{}^2} . \sigma_{i,M} \\ &= r_f + \beta_i \left[E(R_M) - r_f \right] \end{aligned} \tag{2.48}$$

dengan $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M{}^2} = \frac{\operatorname{cov}(R_i, R_M)}{\operatorname{var}(R_M)}$ sebagai pengukur tingkat risiko dari suatu sekuritas terhadap risiko pasar dan $E(r_i)$ sebagai *expected return* CAPM masing-masing sekuritas. *Expected return* CAPM untuk suatu sampel dapat dinyatakan dengan persamaan (2.49).

$$\overline{E(r_i)} = r_f + \beta_i \left[\overline{E(R_M)} - r_f \right]. \tag{2.49}$$

Indeks Harga Saham Gabungan (IHSG) merupakan penggambaran secara keseluruhan keadaan harga-harga saham. Pasar dalam model ini yaitu indeks harga saham gabungan (IHSG) disebut juga *Jakarta*

Composite Index (JCI) atau *JSX Composite* yang merupakan salah satu indeks pasar saham yang digunakan oleh Bursa Efek Indonesia (BEI).

c. Portofolio Model Black-Litterman

Model Black-Litterman diperkenalkan oleh Fisher Black and Robert Litterman di Goldman Sachs pada tahun 1990. Model ini menggabungkan 2 jenis informasi yaitu *return* ekuilibrium dari CAPM dan *expected return* yang merupakan titik acuan dari model Black-Litterman (He & Litterman, 1999). Satchell & Scowcroft (2000) menjelaskan pendekatan *bayes* untuk menyelesaikan kombinasi distribusi probabilitas model Black-Litterman. Model Black-Litterman dengan pendekatan *bayes* menggunakan pandangan investor (*views*) sebagai informasi prior dan informasi pasar sebagai data sampel yang kemudian dikombinasi untuk membentuk data baru (data posterior).

Seorang investor dapat memiliki pandangan hanya untuk sejumlah *k* aset dari *n* aset yang terdapat dalam portofolio atau dengan kata lain investor tidak perlu menyatakan pandangannya (*views*) pada tiap-tiap aset pada semua portofolio namun cukup pada sejumlah portofolio yang menjadi perhatian investor. *Views* model Black-Litterman digunakan untuk menyesuaikan *expected return* ekuilibrium dalam memprediksi *return* di masa yang akan datang. Model Black-Litterman ini memberikan dua kemungkinan pandangan investor baik berupa *absolute views* maupun *relative views* (Idzorek, 2004).

a. Pandangan pasti (*absolute views*)

Pandangan pasti *(absolute views)* terbentuk apabila seorang investor akan memberikan prediksinya terhadap suatu saham, maka investor tersebut akan mengungkapkan pandangannya dengan yakin/pasti terhadap besarnnya *return* yang akan diberikan oleh masing-masing saham.

Contoh:

Views 1 : "Saya prediksikan *return* saham A akan meningkat sebesar 2%".

Views 2 : "Saya prediksikan *return* saham B akan meningkat sebesar 3%"

b. Pandangan relatif (*relative views*)

Pandangan relatif *(*relative views*)* terbentuk jika seorang investor diminta untuk memberikan pandangannya tentang dua buah saham atau lebih, kemudian investor tersebut melakukan perbandingan antara *return* yang akan diberikan kedua saham tersebut, maka terbentuklah pandangan relative.

Contoh:

"Saya prediksikan bahwa *return* saham A akan melebihi *return* saham B sebesar 2%".

“Saya prediksikan bahwa *return* saham A dan B akan melebihi *return* saham C dan D sebesar 2%”.

Idzorek (2004) memberikan contoh penerapan *views* investor terhadap 7 buah saham sebagai berikut:

Suatu portofolio terbentuk dari 7 sekuritas, yaitu sekuritas A, B, C, D, E, F dan G. Pada contoh ini, investor menyatakan ketujuh sekuritas tersebut dalam 3 *views* sebagai berikut:

Views 1: “Saya yakin sekuritas A akan memberikan *return* 2%”.

Views 2: “Saya yakin sekuritas B akan memberikan *return* 4% melampaui sekuiritas C”.

Views 3: “Saya yakin sekuritas D dan E akan memberikan *return* 1,5% melampaui sekuiritas F dan G ”.

Jika $E(r)$ adalah estimasi *return* investor dengan 7 sekuritas, yaitu A , B , C, D, E, F dan G maka ketiga *views* investor tersebut dapat dinyatakan dengan:

$E(r_A) = 0{,}02;$

$E(r_B) - E(r_C) = 0{,}04;$

$(E(r_D) + E(r_E)) - (E(r_F) + E(r_G)) = 0{,}015.$

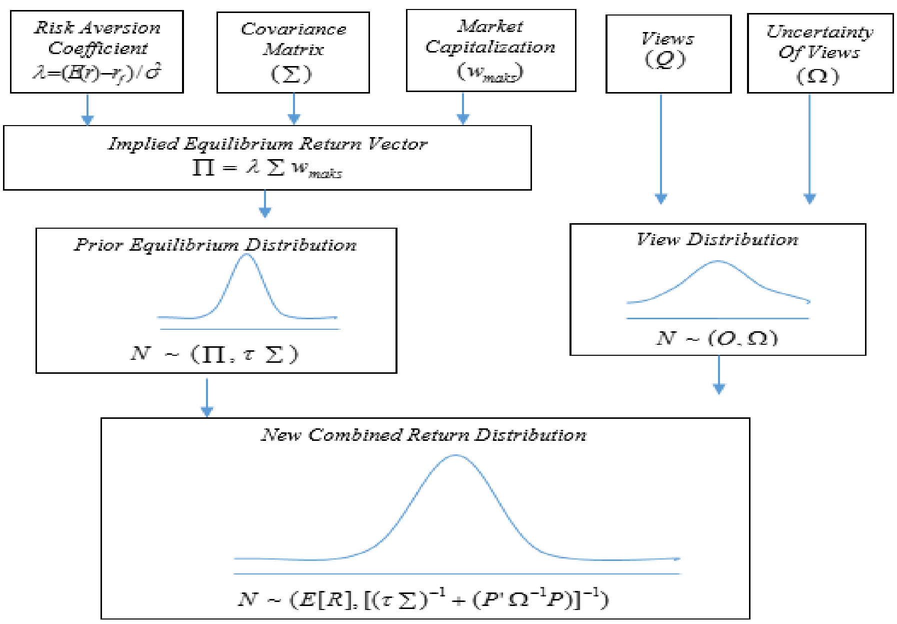
Matriks *views* dapat disusun sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$E(r) = \begin{bmatrix} E(r_A) \\ E(r_B) - E(r_C) \\ \big(E(r_D) + E(r_E)\big) - \big(E(r_F) + E(r_G)\big) \end{bmatrix}, \qquad q = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.04 \\ 0.015 \end{bmatrix}$$

P adalah matriks *views* dari *return* dimana tiap baris matriks menyatakan satu *views* pada suatu portofolio. Jika investor memiliki *views* yang pasti maka jumlah bobot saham dalam *views* akan bernilai satu. Sedangkan jika investor memiliki *views* yang relatif maka jumlah bobot saham dalam *views* akan bernilai nol.

Proses kombinasi dua sumber informasi menggunakan pendekatan bayes adalah sebagai berikut (Idzorek, 2004)



Gambar 2. 3 Proses kombinasi dengan pendekatan bayes

Pembentukan model Black-Litterman menggunakan pendekatan *bayes* untuk menggabungkan *return* ekuilibrium CAPM dengan *views* sebagai informasi prior untuk membentuk distribusi posterior baru dari *return*. Dua informasi pada model Black-Litterman dimisalkan sebagai dua kejadian yaitu *expected return* (kejadian C) dan ekuilibrium *return* CAPM (kejadian A). Berdasarkan Persamaan 2.23 pada aturan *bayes* maka diperoleh sebagai berikut:

$$P(\mathrm{E}(\mathrm{r})|\pi) = \frac{P\left(\boldsymbol{\pi}\middle|\mathbf{E}(\mathbf{r})\right)P(\mathbf{E}(\mathbf{r}))}{P(\boldsymbol{\pi})} \tag{2.50}$$

dengan,

$\boldsymbol{r}$: vektor excess *return* ukuran n x 1

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$: vektor *expected return* investor ukuran n x 1

$\boldsymbol{\pi}$: equilibrium *return* CAPM

Diasumsikan keyakinan prior $\Pr(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}))$ yang mempunyai bentuk *k* kendala linear dari vektor *expected return* $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ dan ditulis dengan matriks *P* berukuran $k\ x\ n$ sehingga

$$\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{v} \tag{2.51}$$

dengan $\boldsymbol{v}$ yaitu vektor *error* yang berdistribusi normal dengan *mean*nya nol dan variansinya $\boldsymbol{\Omega}$, atau $\boldsymbol{v} \sim N(0, \boldsymbol{\Omega})$ dimana $\boldsymbol{\Omega}$ adalah matriks diagonal kovarians dari *views*. He & Litterman (1999) merumuskan kovarians dari *views* adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{P}(\tau\sum)\mathbf{P}' \tag{2.52}$$

Jika elemen $\mathbf{\Omega}$ adalah nol maka investor dianggap sangat yakin terhadap pandangannya.

Skalar τ merupakan kuantitas yang diberikan oleh investor untuk menyatakan keyakinan dalam pandangannya. Kebanyakan peneliti menggunakan nilai τ yang berbeda. Satchell & Scowcroft (2000) menentukan nilai τ sama dengan 1, sedangkan He & Litterman (1999) menggunakan nilai τ yaitu 0,025. Nilai τ tergantung dari tingkat keyakinan investor terhadap *views*, sehingga nilai τ untuk akan berkisar antara 0 sampai 1.

Persamaan 2.52 dapat dinyatakan dengan bentuk matriks

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{P_k\Sigma P_k'}\right)^*\tau & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \left(\mathbf{P_k\Sigma P_k'}\right)^*\tau \end{bmatrix} \tag{2.53}$$

Distribusi $\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r})$ diasumsikan sebagai berikut: $\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) \sim N(\boldsymbol{q}, \mathbf{\Omega})$. Sedangkan fungsi densitas dari data *equilibrium return* dengan syarat informasi prior, diasumsikan berdistribusi $(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), \tau\boldsymbol{\Sigma})$. Asumsi bahwa *mean* ekuilibrium *return* sama dengan *mean return* pasar yang dapat diperoleh melalui CAPM dinyatakan $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$.

Jika informasi prior yang dimiliki investor memiliki tingkat *views* yang tidak pasti yaitu $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$ dengan asumsi $\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) \sim N(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\Omega})$ dan $(\boldsymbol{\pi}|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})) \sim N(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), \tau\boldsymbol{\Sigma})$ maka fungsi densitas posterior $(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|\boldsymbol{\pi})$ berdistribusi multivariat normal dengan *mean* dan varians sebagai berikut (Syvertsen, 2013):

Diasumsikan $\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) \sim N(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\Omega})$ dan $(\boldsymbol{\pi}|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})) \sim N(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), \tau\boldsymbol{\Sigma})$ sebagai berikut:

$$f\big(\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r})\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\boldsymbol{\Omega}|}} e^{\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{q})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{q})\right)} \tag{2.54}$$

$$f\big(\boldsymbol{\pi}|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\tau\boldsymbol{\Sigma}|}} e^{\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}))'(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}(\boldsymbol{\pi}-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}))\right)} \tag{2.55}$$

Fungsi densitas (2.54) dan (2.55) disubstitusikan pada Persamaan (2.50) sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\Pr(E(r)|\pi) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi|\tau\boldsymbol{\Sigma}|}}\frac{1}{\sqrt{2\pi|\boldsymbol{\Omega}|}} e^{\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}))'(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}(\boldsymbol{\pi}-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}))\right)\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{q})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{q})\right)}}{\Pr(\boldsymbol{\pi})}$$

Misalkan dinyatakan dalam $\Pr(E(r)|\pi) = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2\pi|\tau\boldsymbol{\Sigma}|}}\frac{1}{\sqrt{2\pi|\boldsymbol{\Omega}|}} e^{\left(-\frac{1}{2}\varphi\right)}}{\Pr(\boldsymbol{\pi})}$ maka:

$$\varphi = (\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}))'(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}(\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}))(\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{q})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{q})$$

$$= \boldsymbol{\pi}'(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}'(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$
$$+[\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r})]'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{q}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) - [\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r})]'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}$$

$$= \boldsymbol{\pi}'(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}'(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$
$$+\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{q}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}$$

$$= \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'\left[(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}\right]\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\pi}'(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{\pi}$$
$$-\boldsymbol{\pi}'(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{q}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}$$

$$= \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'\left[(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}\right]\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - (\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - (\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$
$$-\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\pi}'(\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{q}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}$$

$$= \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'\left[(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}\right]\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - 2[(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}]\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$
$$+\boldsymbol{\pi}'(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{q}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}$$

Untuk

$\boldsymbol{A} = (\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-\mathbf{1}} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}$

$\boldsymbol{B} = (\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-\mathbf{1}} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}$, dengan $\boldsymbol{B}$ simetris dengan $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}'$

$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\pi}(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{q}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}$

Sehingga dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \mathbf{2}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{C}$$
$$= \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \mathbf{2}\boldsymbol{B}'\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{C}$$
$$= (\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{B})'\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$$

Sehingga $\boldsymbol{C} - \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{B}$ akan menjadi konstanta dan selanjutnya

$$(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{B})'\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{B})$$

$$=(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{B})'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{B})$$

$$=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})'\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$$

$$=(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})'\boldsymbol{A}(\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$$

Maka *mean* posteriornya $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ yaitu

$[(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}+\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}+\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}]$ dan variansnya $\boldsymbol{A}^{-1}$ yaitu $[(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}+\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}$

Jadi distribusi *return* kombinasi yang baru $(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|\boldsymbol{\pi})$ sebagai distribusi posterior berdistribusi normal

$$(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|\boldsymbol{\pi})\sim N([(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}+\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}+\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}],[(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}+\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}$$

Selanjutnya,

$$\mu_{BL}=[(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}+\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}+\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}]$$

$$=[(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}+\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}(\tau\boldsymbol{\Sigma})[(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}+\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}]$$

$$=[\boldsymbol{I}+\tau\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[\boldsymbol{\pi}+\tau\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{q}]$$

$$=[\boldsymbol{I}+\tau\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[\boldsymbol{I}+\tau\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P})\boldsymbol{\pi}+\tau\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{\pi})]$$

$$=\boldsymbol{\pi}+[\boldsymbol{I}+\tau\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[\tau\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{\pi})]$$

$$=\boldsymbol{\pi}+[\boldsymbol{I}+\tau\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[\tau\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\{(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{P}'\tau\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{P})(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{P}'\tau\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{P})^{-1}\}$$

$(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{P\pi})]$

$$= \boldsymbol{\pi} + [(\boldsymbol{I} + \tau\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P})^{-1}(\boldsymbol{I} + \tau\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P})]\tau\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{P}'\tau\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{P})^{-1}$$

$(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{P\pi})$

$$= \boldsymbol{\pi} + \tau\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{P}'\tau\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{P})^{-1}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{P\pi}) \quad (2.56)$$

dengan,

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BL}})$: *expected return* model Black-Litterman

$\boldsymbol{\pi}$: vektor *k* x 1 untuk *return* ekuilibrium CAPM

τ : skala tingkat keyakinan dalam *views* (*range* 0-1)

$\boldsymbol{\Sigma}$: matriks varians kovarians *return*

$\boldsymbol{\Omega}$: matriks diagonal kovarians dari *views*

$\boldsymbol{P}$: matriks *k* x *n* untuk *views* yang berkaitan dengan *return*

$\boldsymbol{q}$: vektor *k* x 1 untuk *views return* yang diberikan investor.

Pembobotan portofolio model Black-Litterman dihitung menggunakan model *mean variance* Markowitz, sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{BL}} = (\delta\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{BL}} \quad (2.57)$$

dengan,

$\boldsymbol{W_{BL}}$: bobot sekuritas pada model Black-Litterman

δ : koefisien *risk aversion*

$\boldsymbol{\Sigma}$: matriks varians kovarians *return*

$\boldsymbol{\mu_{BL}}$: *expected return* Black-Litterman.