

BAB II

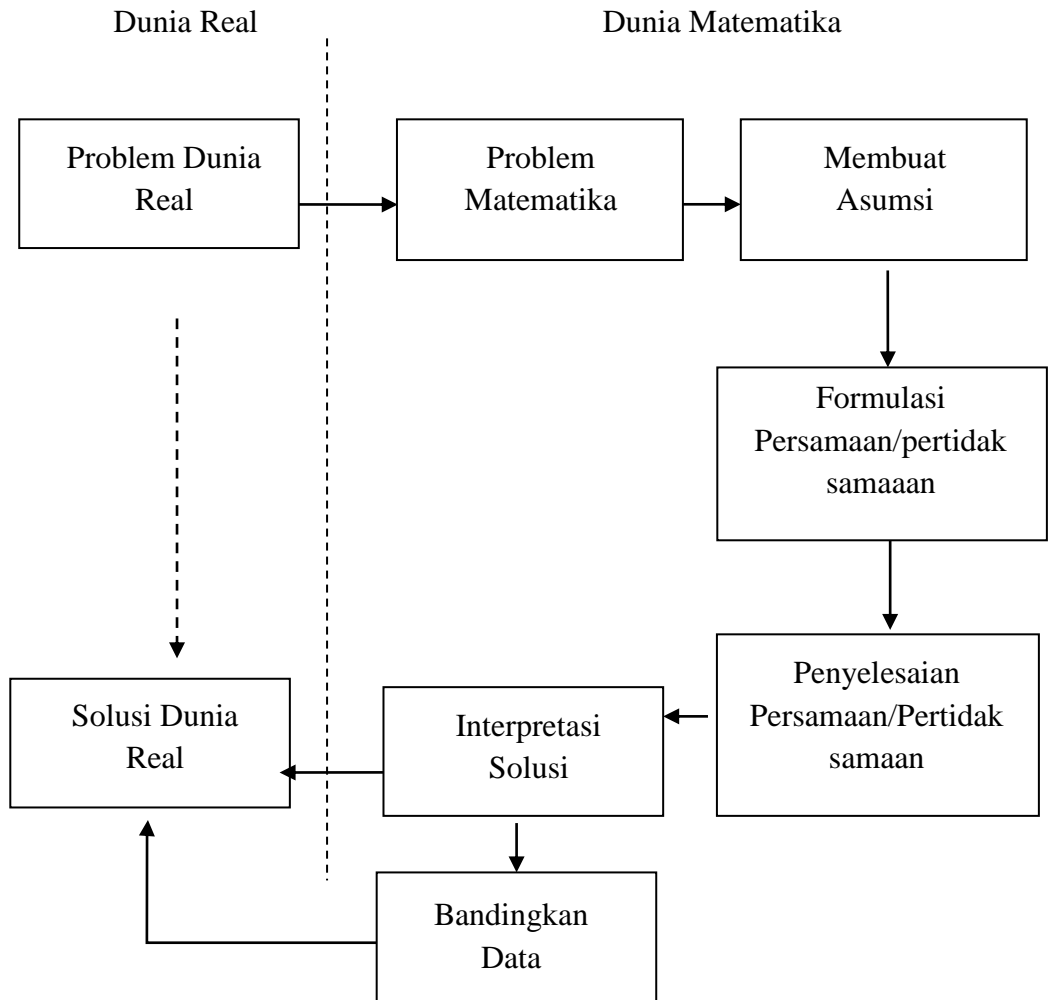
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai landasan teori yang akan digunakan pada bab pembahasan. Teori-teori ini digunakan sebagai bahan acuan yang mendukung tujuan penulisan. Materi-materi yang akan dibahas antara lain persamaan diferensial, sistem persamaan diferensial, titik kesetimbangan, linearisasi, analisis kestabilan, nilai eigen dan vektor eigen, pemodelan matematika, model epidemi *SIS (Susceptible-Infected-Susceptible)*, dan bilangan reproduksi dasar.

A. Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang digunakan untuk mempresentasikan dan menjelaskan sistem-sistem fisik atau problem pada dunia nyata dalam pernyataan matematika (Widowati dan Sutimin, 2007:1).

Representasi matematika yang dihasilkan dari pemodelan matematika disebut sebagai model matematika. Model matematika banyak dimanfaatkan dalam bidang studi yang lain. Menurut Widowati dan Sutimin (2007:3) beberapa tahap dalam menyusun model matematika dapat dinyatakan dalam Gambar 2.1.



Gambar 2. 1 Proses Pemodelan

Gambar 2.1 menggambarkan perumusan perilaku atau fenomena di dunia nyata yang dibawa ke dalam bentuk matematis dengan menentukan asumsi-asumsi yang tepat sesuai masalah nyata, sehingga dapat dibentuk suatu model matematika. Langkah-langkah dalam mengkonstruksi model matematika sebagai berikut:

i. Identifikasi Masalah

Mengidentifikasi masalah adalah mengidentifikasi apa yang akan dikerjakan dan diselesaikan. Langkah ini meliputi identifikasi variabel-

variabel apa saja yang terlibat atau yang menggambarkan fenomena yang terjadi, membentuk beberapa hubungan antara variabel-variabel ini. Menjabarkan variabel-variabel dan sistem menjadi model matematika.

ii. Merumuskan asumsi-asumsi

Langkah ini meliputi membuat asumsi tentang model matematika. Asumsi ini secara esensial mencerminkan bagaimana proses berfikir sehingga model dapat berjalan.

iii. Membuat formulasi persamaan/pertidaksamaan

Berdasarkan variabel-variabel dan asumsi-asumsi yang telah dibuat sehingga dapat dibentuk suatu persamaan atau pertidaksamaan yang menggambarkan masalah yang ada dalam dunia nyata. Langkah selanjutnya akan melibatkan suatu usaha memformulasikan persamaan atau sekumpulan persamaan untuk menyelesaikan hubungan ini. Langkah ini merupakan langkah yang paling penting. Terkadang perlu adanya pengujian kembali asumsi-asumsi agar dapat dibentuk formulasi yang sesuai sehingga dapat diselesaikan dan hasilnya realistis.

iv. Menyelesaikan formulasi persamaan/pertidaksamaan

Setelah terbentuk formulasinya, langkah selanjutnya adalah menyelesaikan formulasi tersebut. Perlu kehati-hatian dan fleksibilitas dalam proses pemodelan secara menyeluruh. Seiring dengan kemajuan teknologi informasi, penyelesaiannya dapat diperoleh dengan menggunakan *software* matematika, yang memudahkan mendapatkan solusi.

- v. Menginterpretasikan solusi matematis ke dalam dunia nyata

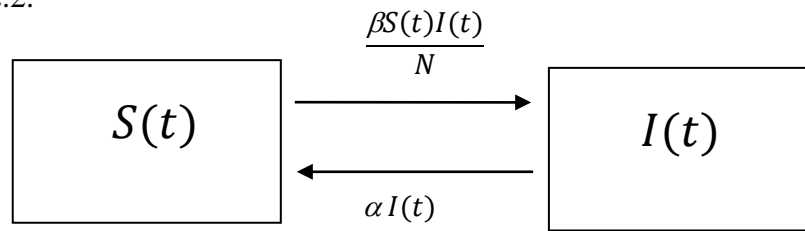
Langkah ini akan menghubungkan penyelesaian formulasi matematika ke problem dunia nyata. Ini dapat dilakukan dalam berbagai cara. Dari sinilah akan dihasilkan suatu kesimpulan atau keputusan yang dalam penyelesaian masalah dunia nyata merupakan suatu hal yang sangat penting.

B. Model Epidemik SIS

Model matematika yang dibahas dalam tugas akhir ini adalah model matematika epidemik *SIS*. Kermack W.O dan Mc Kendrick (Brauer, 2008: 24) menyatakan secara umum model epidemik *SIS*. Model populasi *SIS* adalah model matematika untuk mendeskripsikan suatu penyakit dimana penderita yang terinfeksi tidak memiliki kekebalan imun untuk mencegah terjangkit penyakit tersebut kembali. Populasi dalam model matematika ini terbagi menjadi 2 kelas yaitu kelas *Susceptible* (*S*) yaitu populasi yang sehat dan rentan terjangkit penyakit, dan kelas *Infected* (*I*) yaitu populasi yang terinfeksi suatu penyakit. Model ini mengidentifikasi setiap individu dari kelas *susceptible* yang terinfeksi setelah pulih akan kembali masuk ke kelas *susceptible* kembali.

Model epidemik *SIS* terdiri dari $S(t)$ yang menyatakan populasi *susceptible* pada saat t dan $I(t)$ menyatakan sebagai populasi *infected* saat t . Didefinisikan parameter β yang menyatakan laju kontak antara populasi *susceptible* dan populasi *infected* per satuan waktu t . Parameter α yang menyatakan laju populasi *infected* yang sembuh per satuan waktu. Diasumsikan tidak ada kelahiran dan kematian alami, tidak ada masa inkubasi, setelah sembuh dari penyakit maka akan

kembali rentan. Diagram transfer model matematika *SIS* klasik ditunjukkan pada Gambar 2.2.



Gambar 2. 2 Diagram Transfer Model Epidemi SIS

Gambar 2.2 menunjukkan laju perubahan $S(t)$ proporsional dengan bertambahnya laju kesembuhan $I(t)$ sebesar $\alpha I(t)$, dan berkurangnya rata-rata setiap populasi dalam kelas *susceptible* yang melakukan kontak dengan populasi *infected* per satuan waktu t sebesar $\frac{\beta S(t)I(t)}{N}$. Jika N adalah jumlah total

populasi, maka didapatkan persamaan,

$$\frac{dS(t)}{dt} = \alpha I(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{N} \quad (2.1)$$

Laju perubahan $I(t)$ proporsional dengan bertambahnya laju infeksi $S(t)$ sebesar $\frac{\beta S(t)I(t)}{N}$ dan berkurang karena adanya laju kesembuhan $I(t)$ sebesar $\alpha I(t)$. Jadi diperoleh persamaan,

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \alpha I(t) \quad (2.2)$$

Berdasarkan Persamaan (2.1) dan (2.2), maka dapat diperoleh model epidemi *SIS* yang ditunjukkan pada Sistem (2.3) berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= \alpha I(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{N} \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \alpha I(t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

Sistem (2.3) di atas dilengkapi dengan nilai awal $S(0) = S_0 \geq 0$, dan $I(0) = I_0 > 0$,

C. Persamaan Diferensial

Model matematika penyebaran penyakit diare berbentuk persamaan diferensial. Oleh karena itu, salah satu teori yang akan dikaji dalam bab ini adalah Persamaan diferensial.

Definisi 2. 1 (Ross, 1984:4)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi dua berdasarkan jumlah variabel bebas yang terlibat, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

Definisi 2. 2 (Ross,1984:4)

Persamaan diferensial biasa yaitu suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

Contoh 2. 1

Diberikan beberapa contoh persamaan diferensial biasa yaitu:

$$\frac{du}{dt} + 3tu = \cos t\tag{2.4a}$$

$$\frac{dx}{dt} + x = e^{2t} \quad (2.4b)$$

Berdasarkan Definisi (2.2), maka Persamaan (2.4a) dan (2.4b) merupakan persamaan diferensial biasa karena melibatkan satu variabel bebas yaitu t .

Definisi 2.3 (Ross, 1984:4)

Persamaan diferensial parsial yaitu suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap lebih dari satu variabel bebas.

Contoh 2.2

Contoh persamaan diferensial parsial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.5a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2.5b)$$

Berdasarkan Definisi (2.3), maka Persamaan (2.5a) dan (2.5b) merupakan persamaan diferensial parsial karena melibatkan dua variabel bebas yaitu x dan t .

D. Orde Persamaan Diferensial

Orde suatu persamaan diferensial didefinisikan sebagai orde tertinggi dari turunan yang terkandung dalam persamaan diferensial tersebut. Secara umum persamaan diferensial dituliskan dalam bentuk

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.6)$$

Persamaan (2.6) adalah persamaan diferensial orde ke- n . Persamaan (2.6) merepresentasikan relasi antara peubah tak bebas x .

Contoh 2.3

1. $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ (Persamaan Diferensial orde 1)

2. $\frac{d^2y}{dt^2} + 7\frac{dy}{dt} + 2y = 0$ (Persamaan Diferensial orde 2)

E. Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah kumpulan dari beberapa persamaan diferensial. Diberikan vektor $\mathbf{x} \in E$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ dengan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T$ dan E adalah himpunan terbuka dari \mathbb{R}^n . Fungsi $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ dengan $f = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)^T$ dan $f \in C^1(E)$ dimana $C^1(E)$ adalah himpunan semua fungsi yang mempunyai turunan pertama yang kontinu di E . Jika $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ menyatakan turunan pertama \mathbf{x} terhadap t , maka sistem persamaan diferensial dapat dituliskan menjadi,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{2.7}$$

Sistem (2.7) dapat dituliskan menjadi

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\tag{2.8}$$

Berdasarkan kelinearannya sistem persamaan diferensial dibedakan menjadi dua yaitu sistem persamaan diferensial linear dan sistem persamaan diferensial non-linear.

1. Sistem Persamaan Diferensial Linear

Sistem persamaan diferensial linear orde satu dapat muncul dalam masalah yang melibatkan beberapa variabel tak bebas x_1, x_2, \dots, x_n dan variabel bebas t . Secara umum, sistem persamaan diferensial linear orde satu dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Jika setiap fungsi $b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)$ adalah fungsi nol, maka Sistem (2.9) disebut sistem persamaan diferensial linear homogen, sedangkan jika tidak bernilai nol, maka Sistem (2.9) disebut sistem persamaan diferensial nonhomogen.

Notasi matriks Sistem (2.9) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

atau dapat dinyatakan dalam persamaan berikut

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{B}(t) \tag{2.10}$$

dengan

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

Contoh 2. 4

Berikut diberikan contoh sistem persamaan diferensial linear.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 6x - y \\ \frac{dy}{dt} &= -x - 2y \end{aligned} \tag{2.11}$$

Sistem persamaan diferensial (2.11) merupakan persamaan diferensial linear homogen.

2. Sistem Persamaan Diferensial Non linear

Definisi 2. 4 (Ross, 1984:5)

Persamaan diferensial nonlinear adalah persamaan diferensial biasa yang tidak linear.

Suatu persamaan diferensial dikatakan nonlinear jika memenuhi salah satu sebagai berikut (Ross, 1984:5).

- a. Memuat variabel tak bebas dan/atau turunannya yang berpangkat selain satu.
- b. Terdapat perkalian dari variabel tak bebas dan/atau turunan-turunannya.

- c. Terdapat fungsi transedental dari variabel tak bebas dan turunan-turunannya.

Contoh 2. 5

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6y = 0 \quad (2.12a)$$

$$\frac{dy}{dx} + y = e^y \quad (2.12b)$$

$$4y \frac{dy}{dx} + xy = 0 \quad (2.12c)$$

- a. Persamaan (2.12a) merupakan persamaan diferensial nonlinear, karena

terdapat variabel tak bebas yang berpangkat dua $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ dan turunannya

yang berpangkat dua $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

- b. Persamaan (2.12b) merupakan persamaan diferensial nonlinear, karena terdapat fungsi transenden (e^y).

- c. Persamaan (2.12c) merupakan persamaan diferensial nonlinear karena

terdapat perkalian variabel tak bebas dan turunannya $\left(y \frac{dy}{dx}\right)$.

Sistem persamaan diferensial dikatakan nonlinear, jika persamaan diferensial yang membentuknya merupakan persamaan diferensial nonlinear.

Contoh 2. 6

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \mu + \beta I - \alpha SI - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha SI - \beta I - \mu I\end{aligned}\tag{2.13}$$

Sistem (2.13) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear dengan variabel bebas t dan variabel tak bebas S dan I . Sistem (2.9) adalah sistem persamaan diferensial nonlinear karena memuat persamaan diferensial nonlinear yaitu terdapat perkalian dari variabel tak bebasnya.

F. Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan menjadi salah satu pembahasan dalam bab ini karena titik kesetimbangan diperlukan dalam proses analisis penyebaran penyakit diare. Titik kesetimbangan digunakan untuk mengetahui nilai dari bilangan reproduksi dasar.

Definisi 2. 5 (Wiggins, 2003)

Diberikan Sistem persamaan diferensial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Titik $\hat{\mathbf{x}} \in R^n$ disebut titik kesetimbangan dari $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. jika memenuhi $f(\hat{\mathbf{x}}) = 0$.

Contoh 2. 7

Akan dicari titik kesetimbangan dari Sistem (2.13) sebagai berikut,

$$\begin{aligned}f_1 &= \mu + \beta I - \alpha SI - \mu S \\ f_2 &= \alpha SI - \beta I - \mu I\end{aligned}$$

Menurut Definisi (2.5) titik kesetimbangan (\hat{S}, \hat{I}) dari Sistem (2.13) dapat diperoleh jika $f(\hat{\mathbf{x}}) = 0$. Akan dicari titik kesetimbangan dari Sistem (2.13) sedemikian, sehingga $f_1(\hat{S}, \hat{I})^T = 0$ dan $f_2(\hat{S}, \hat{I})^T = 0$.

Dengan

$$f_1(\hat{S}, \hat{I}) = \mu + \beta\hat{I} - \alpha\hat{S}\hat{I} - \mu\hat{S}$$

$$f_2(\hat{S}, \hat{I}) = \alpha\hat{S}\hat{I} - \beta\hat{I} - \mu\hat{I}$$

Untuk $f_2(\hat{S}, \hat{I})^T = 0$,

$$\alpha\hat{S}\hat{I} - \beta\hat{I} - \mu\hat{I} = 0$$

$$\hat{I}(\alpha\hat{S} - \beta - \mu) = 0$$

$$\hat{I} = 0 \text{ atau } \hat{S} = \frac{\beta + \mu}{\alpha}$$

a. Jika $\hat{I} = 0$ disubstitusikan ke persamaan $f_1(\hat{S}, \hat{I})^T = 0$, maka diperoleh

$$\mu + \beta\hat{I} - \alpha\hat{S}\hat{I} - \mu\hat{S} = 0$$

$$\mu + \beta \cdot 0 - \alpha\hat{S} \cdot 0 - \mu\hat{S} = 0$$

$$\hat{S} = 1$$

Jadi, diperoleh titik kesetimbangan pertama yaitu $(0,1)^T$.

b. Jika $\hat{S} = \frac{\beta + \mu}{\alpha}$ disubstitusikan ke persamaan $f_1(\hat{S}, \hat{I})^T = 0$, maka diperoleh

$$\mu + \beta\hat{I} - \alpha\hat{S}\hat{I} - \mu\hat{S} = 0$$

$$\mu + \beta\hat{I} - \alpha\left(\frac{\beta + \mu}{\alpha}\right)\hat{I} - \mu\left(\frac{\beta + \mu}{\alpha}\right) = 0$$

$$\mu + \beta\hat{I} - \beta\hat{I} - \mu\hat{I} - \mu\left(\frac{\beta + \mu}{\alpha}\right) = 0$$

$$\mu - \mu\hat{I} - \mu\left(\frac{\beta + \mu}{\alpha}\right) = 0$$

$$\mu\hat{I} = \mu - \left(\frac{\beta + \mu}{\alpha}\right)$$

$$\hat{I} = 1 - \frac{\beta + \mu}{\alpha}$$

Jadi, titik kesetimbangan kedua diperoleh $\left(\frac{\beta + \mu}{\alpha}, 1 - \frac{\beta + \mu}{\alpha}\right)^T$.

Berdasarkan hasil yang diperoleh, dapat disimpulkan bahwa Sistem (2.13)

memiliki dua titik kesetimbangan yaitu $(0,1)^T$ dan $\left(\left(\frac{\beta + \mu}{\alpha}\right), \left(1 - \frac{\beta + \mu}{\alpha}\right)\right)^T$.

Titik kesetimbangan dapat diklasifikasikan menjadi dua yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit. Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah kesetimbangan saat kelas terinfeksi nol atau saat penyakit tidak menyebar dalam populasi. Titik kesetimbangan endemik penyakit adalah titik kesetimbangan saat kelas terinfeksi tidak nol atau saat penyakit menyebar dalam populasi.

G. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai eigen digunakan untuk mengetahui kestabilan dari suatu sistem persamaan diferensial.

Definisi 2. 6 (Howard , 1997:277)

A adalah matriks, vektor tak nol \mathbf{x} didalam R^n dinamakan vektor eigen (eigenvector) dari *A* jika $A\mathbf{x}$ adalah kelipatan skalar dari \mathbf{x} yaitu

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

Untuk mencari nilai-nilai eigen dari Matriks A yang berukuran $n \times n$ maka dapat dituliskan kembali menjadi $Ax = \lambda x$ sebagai

$$Ax = \lambda x$$

$$Ax = \lambda Ix$$

$$(\lambda I - A)x = \mathbf{0} \tag{2.14}$$

Berdasarkan Howard (1997:278) menyatakan agar λ menjadi nilai eigen maka haruslah ada solusi tak nol dari persamaan tersebut, dengan I adalah matriks identitas. Persamaan (2.14) akan memiliki penyelesaian tak nol jika dan hanya jika

$$|\lambda I - A| = 0 \tag{2.15}$$

Persamaan (2.15) dinamakan persamaan karakteristik dari A dan skalar yang memenuhi persamaan karakteristik (2.15) adalah nilai eigen dari A .

Contoh 2. 8

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ dengan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari Matriks A .

Penyelesaian:

- a. Nilai eigen dari Matriks A

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 6 & -1 \\ 2 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

maka persamaan karakteristik dari A adalah

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -1 \\ 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 20$$

dari persamaan karakteristik A adalah

$$\lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0$$

$$\lambda_1 = 4 \text{ atau } \lambda_2 = 5$$

Jadi, nilai eigen dari matriks A adalah 4 atau 5.

b. Vektor eigen Matriks A

Untuk $\lambda_1 = 4$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$-2x_1 - x_2 = 0$$

Persamaan $-2x_1 - x_2 = 0$ ekuivalen dengan $x_1 = -\frac{1}{2}x_2$, jika $x_1 = s$

maka $x_2 = -2s$

sehingga diperoleh

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} s$$

Jadi, vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 4$ adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Untuk $\lambda_2 = 5$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$-x_1 - x_2 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 = 0$$

Persamaan $x_1 - x_2 = 0$ ekuivalen dengan $x_1 = -x_2$, jika $x_1 = t$, maka $x_2 = -t$ sehingga diperoleh

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t$$

Jadi, vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 5$ adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

H. Linearisasi

Linearisasi diperlukan karena bentuk model matematika penyebaran penyakit diare adalah persamaan diferensial nonlinear. Linearisasi adalah proses metransformasi sistem persamaan diferensial nonlinear ke bentuk persamaan diferensial linear. Proses ini dilakukan dengan linearisasi disekitar titik kesetimbangan.

Namun, sebelumnya akan dibahas terlebih dahulu mengenai matriks Jacobian yang dijelaskan dalam Teorema 2.1 berikut.

Teorema 2.1 (Perko, 2001:67)

Jika $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ terdiferensial di x_0 maka turunan parsial $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ dengan $i, j =$

$1, 2, 3, \dots, n$, di x_0 ada untuk semua $x \in \mathbb{R}^n$ dan

$$Df(x_0)x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)x_j.$$

Bukti:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)x_j &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0)x_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0)x_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0)x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0)x_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0)x_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0)x_2 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0)x_n \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0)x_n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0)x_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0)x_1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0)x_2 & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0)x_n \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0)x_1 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0)x_2 & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0)x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0)x_1 & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0)x_2 & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0)x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= Df(x_0)x
\end{aligned}$$

Matriks $Df(x_0)$ disebut matriks Jacobian dari fungsi $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ yang terdiferensial di $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Untuk Selanjutnya $Df(x_0)$ dinotasikan dengan $Jf(x_0)$.

Selanjutnya akan dijelaskan mengenai proses linearisasi dari sistem persamaan diferensial nonlinear menjadi sistem persamaan diferensial linear.

Diberikan Sistem (2.8) yang merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear.

Misalkan $\hat{x} = \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n$ adalah titik kesetimbangan Sistem (2.8), maka pendekatan linear Sistem (2.8) disekitar titik kesetimbangan diperoleh dengan menggunakan deret Taylor dari fungsi f disekitar titik kesetimbangan $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)^T$ yaitu

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T &= f_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)^T + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)^T \\
&\quad (x_1 - \hat{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)^T (x_n - \hat{x}_n) + R_{f_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T &= f_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)^T + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)^T \\
&\quad (x_1 - \hat{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)^T(x_n - \hat{x}_n) + R_{f_2} \\
f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T &= f_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)^T + \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)^T \\
&\quad (x_1 - \hat{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_3}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)^T(x_n - \hat{x}_n) + R_{f_3} \\
&\quad \vdots \tag{2.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T &= f_n(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)^T + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)^T \\
&\quad (x_1 - \hat{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)^T(x_n - \hat{x}_n) + R_{f_n}
\end{aligned}$$

Karena nilai $R_{f_1}, R_{f_2}, R_{f_3}, \dots, R_{f_n}$ mendekati 0, maka $R_{f_1}, R_{f_2}, R_{f_3}, \dots, R_{f_n}$ dapat diabaikan. Oleh karena itu, pendekatan linear Sistem (2.8) adalah

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)^T(x_1 - \hat{x}_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)^T \\
&\quad (x_2 - \hat{x}_2) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)^T(x_n - \hat{x}_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)^T(x_1 - \hat{x}_1) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)^T \\
&\quad (x_2 - \hat{x}_2) + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)^T(x_n - \hat{x}_n)
\end{aligned}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)^T(x_1 - \hat{x}_1) + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)^T$$

$$\dot{y} = Jy \quad (2.19)$$

Persamaan (2.19) disebut hasil linearisasi dari Sistem (2.8).

Definisi 2. 7 (Perko, 2001:102)

Titik kesetimbangan $\hat{x} \in R^n$ disebut titik kesetimbangan hiperbolik dari Sistem (2.8), jika tidak ada bagian real nilai eigen yang bernilai 0. Jika titik kesetimbangan dari sistem mempunyai bagian real nol, maka disebut titik kesetimbangan nonhiperbolik.

Contoh 2. 8

Diberikan Sistem persamaan diferensial nonlinear (2.13) seperti pada Contoh (2.6)

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu + \beta I - \alpha SI - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha SI - \beta I - \mu I \end{aligned}$$

Sistem (2.13) mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu $(0,1)^T$ dan

$$\left(\frac{\beta + \mu}{\alpha}, 1 - \frac{\beta + \mu}{\alpha} \right)^T.$$

Matriks jacobian dari Sistem (2.13) sebagai berikut

$$\begin{aligned} Jf &= \begin{bmatrix} \frac{\partial(\mu + \beta I - \alpha SI - \mu S)}{\partial S} & \frac{\partial(\mu + \beta I - \alpha SI - \mu S)}{\partial I} \\ \frac{\partial(\alpha SI - \beta I - \mu I)}{\partial S} & \frac{\partial(\alpha SI - \beta I - \mu I)}{\partial I} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\alpha I - \mu & \beta - \alpha S \\ \alpha I & \alpha S - \beta - \mu \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Untuk $E_1(\hat{S}, \hat{I}) = (1,0)^T$

$$Jf(1,0)^T = \begin{bmatrix} -\mu & \beta - \alpha \\ 0 & \alpha - \beta - \mu \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari $Jf(1,0)^T$ diperoleh

$$\begin{vmatrix} -\mu - \lambda & -\beta + \alpha \\ 0 & \alpha - \beta - \mu - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\mu - \lambda)(\alpha - \beta - \mu - \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = \mu \text{ dan } \lambda_2 = \beta + \mu - \alpha$$

Karena nilai eigen untuk Sistem (2.8) real dan tidak nol, sehingga titik kesetimbangan $E_1(\hat{S}, \hat{I}) = (1,0)^T$ adalah titik kesetimbangan hiperbolik.

$$\text{Untuk } E_2(\hat{S}, \hat{I}) = \left(\frac{\beta + \mu}{\alpha}, 1 - \frac{\beta + \mu}{\alpha} \right)^T$$

$$\begin{aligned} J &= \begin{bmatrix} -\alpha I - \mu & \beta - \alpha S \\ \alpha I & \alpha S - \beta - \mu \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\alpha \left(1 - \frac{\beta + \mu}{\alpha}\right) - \mu & \beta - \alpha \left(\frac{\beta + \mu}{\alpha}\right) \\ \alpha \left(1 - \frac{\beta + \mu}{\alpha}\right) & \alpha \left(\frac{\beta + \mu}{\alpha}\right) - \beta - \mu \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\alpha + \beta + \mu - \mu & \beta - \beta - \mu \\ \alpha - \beta - \mu & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\alpha + \beta & \beta - \beta - \mu \\ \alpha - \beta - \mu & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nilai eigen dari $Jf\left(\frac{\beta + \mu}{\alpha}, 1 - \frac{\beta + \mu}{\alpha}\right)^T$ diperoleh

$$\begin{vmatrix} -\alpha + \beta - \lambda & \mu \\ \beta + \mu - \alpha & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\alpha + \beta - \lambda)(-\lambda) - \mu(\beta + \mu - \alpha) = 0$$

$$\lambda^2 - \beta\lambda + \alpha\lambda - \mu\beta - \mu^2 + \mu\alpha = 0$$

$$(\lambda - \beta + \alpha - \mu)(\lambda + \mu) = 0$$

$$\lambda_1 = \beta - \alpha + \mu \vee \lambda_2 = -\mu$$

Tidak terdapat bagian real nilai eigen yang bernilai nol maka titik kesetimbangan

$E_2(\hat{S}, \hat{I}) = \left(\frac{\beta + \mu}{\alpha}, 1 - \frac{\beta + \mu}{\alpha} \right)^T$ adalah titik kesetimbangan hiperbolik.

I. Analisis Kestabilan

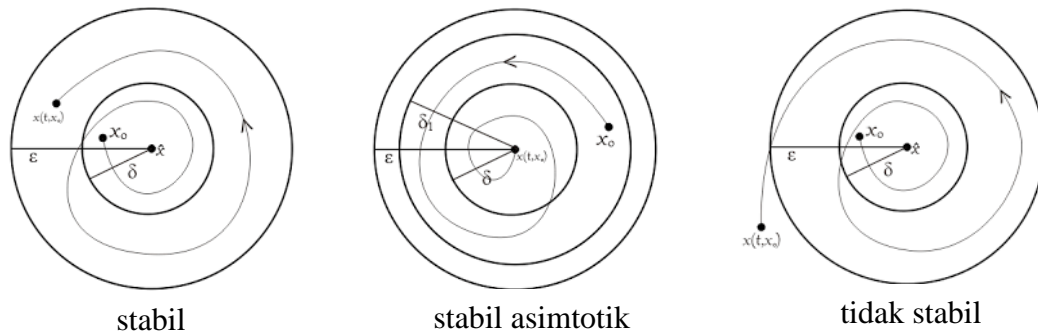
Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui apakah suatu penyakit menyebar atau menghilang dari suatu populasi, sehingga dapat dilakukan tindakan lebih lanjut.

Definisi 2. 8 (Olsder and Woude, 2004: 57)

Diberikan sistem persamaan diferensial orde satu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ dan $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ adalah solusi persamaan $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ pada saat t dengan nilai awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

- (i) Titik kesetimbangan $\hat{\mathbf{x}}$ dikatakan stabil jika diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga jika $\|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}\| < \delta$ (dengan $\|\cdot\|$ adalah norm pada \mathbb{R}^n), maka $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \hat{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$ untuk $t \geq 0$.
- (ii) Titik kesetimbangan $\hat{\mathbf{x}}$ dikatakan stabil asimtotik jika titik kesetimbangannya stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \hat{\mathbf{x}}\| = 0$, asalkan $\|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}\| < \delta_1$.
- (iii) Titik kesetimbangan $\hat{\mathbf{x}}$ dikatakan tidak stabil jika titik kesetimbangan tersebut tidak memenuhi (i).

Definisi (2.8) disimulasikan pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Ilustrasi Kestabilan

Diberikan penjelasan mengenai sifat kestabilan suatu sistem yang dilihat dari nilai eigen untuk mempermudah dalam menganalisis kestabilan di sekitar titik kesetimbangan. Penjelasan tersebut dijelaskan dalam Teorema 2.2 berikut,

Teorema 2.2 (Olsder and Woude, 2004: 58)

Diberikan sistem persamaan diferensial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$, dengan \mathbf{A} suatu matriks $n \times n$ yang mempunyai k nilai eigen berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ dengan $k \leq n$.

- (i) Titik kesetimbangan $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika $\Re_e(\lambda_i) < \mathbf{0}$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.
- (ii) Titik kesetimbangan $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ dikatakan stabil jika dan hanya jika $\Re_e(\lambda_i) \leq \mathbf{0}$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$ dan jika setiap nilai eigen λ_i imajiner dengan $\Re_e(\lambda_i) = \mathbf{0}$, maka multiplisitas aljabar dan geometri untuk nilai eigen harus sama.
- (iii) Titik kesetimbangan $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika $\Re_e(\lambda_i) > \mathbf{0}$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.

Bukti :

(i) Akan dibuktikan bahwa jika titik kesetimbangan $\hat{x} = 0$ stabil asimtotik, maka $\Re y_i < 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.

(\Rightarrow)

Berdasarkan definisi (2.10), titik kesetimbangan $\hat{x} = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - \hat{x}\| = 0$. Hal ini berarti bahwa untuk $t \rightarrow \infty$, $x(t, x_0)$ akan menuju $\hat{x} = 0$. Karena $x(t, x_0)$ merupakan solusi dari sistem persamaan diferensial, maka $x(t, x_0)$ memuat $e^{\Re(y_i)t}$. Artinya, agar $e^{\Re(y_i)t}$ menuju $\hat{x} = 0$, maka y haruslah bernilai negatif.

(\Leftarrow)

Akan dibuktikan bahwa jika $\Re(y_i) < 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$, maka titik kesetimbangan $\hat{x} = 0$ stabil asimtotik.

$x(t, x_0)$ merupakan solusi dari sistem persamaan diferensial, maka $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{\Re(y_i)t}$. Jika $\Re(y_i) < 0$, maka untuk $t \rightarrow \infty$, $x(t, x_0)$ akan menuju $\hat{x} = 0$. Berdasarkan definisi (2.10), titik kesetimbangan $\hat{x} = 0$ stabil asimtotik.

(ii) Akan dibuktikan bahwa jika titik kesetimbangan $\hat{x} = 0$ stabil, maka $\Re y_i \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.

(\Rightarrow)

Andaikan $\Re(y_i) > 0$, maka solusi persamaan diferensial $x(t, x_0)$ yang selalu memuat $e^{\Re(y_i)t}$ akan menuju ∞ (menjauh dari titik kesetimbangan $\bar{x} = 0$) untuk $t \rightarrow \infty$, sehingga sistem tidak stabil. Hal ini sesuai dengan kontraposisi pernyataan jika titik kesetimbangan $\bar{x} = 0$ stabil, maka $\Re y_i \leq 0$ untuk setiap

$i = 1, 2, \dots, k$. Jadi terbukti bahwa jika titik kesetimbangan $\bar{x} = 0$ stabil, maka $\Re y_i \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.

(\Leftarrow)

Akan dibuktikan bahwa jika $\Re(y_i) \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$, maka titik kesetimbangan $\hat{x} = 0$ stabil dan jika ada $\Re(y_i) = 0$, maka multiplisitas aljabar dan geometri untuk nilai eigen harus sama. $x(t, x_0)$ merupakan solusi dari sistem persamaan diferensial, maka $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{\Re(y_i)t}$. Jika $\Re(y_i) < 0$, maka titik kesetimbangan $\hat{x} = 0$ stabil asimtotik (pasti stabil). Jika $\Re(y_i) = 0$, maka nilai eigen berupa bilangan kompleks murni. Multiplisitas aljabar berhubungan dengan nilai eigen sedangkan geometri berhubungan dengan vektor eigen (Luenberger, 1979:85). Akan dibuktikan bahwa banyak nilai eigen dan vektor eigen adalah sama.

Ambil sebarang sistem pada R^2 yang mempunyai nilai eigen bilangan kompleks murni. Diambil sistem sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \text{ dengan } r > 0, s > 0 \quad (2.19)$$

a. Akan ditentukan nilai eigen dari sistem (2.19)

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 0 & -r \\ s & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & -r \\ s & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^2 + rs = 0 \quad (2.20)$$

Akar dari Persamaan (2.20) adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4rs}}{2} = \frac{\pm 2i\sqrt{rs}}{2} = \pm i\sqrt{rs}$$

$$\lambda_1 = i\sqrt{rs} \text{ atau } \lambda_2 = -i\sqrt{rs}$$

b. Vektor Eigen

Berdasarkan definisi, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^T$ adalah vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan y jika dan hanya jika y adalah pemecahan trivial dari

$$(A - \lambda I)y = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & -r \\ s & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Untuk $\lambda_1 = i\sqrt{rs}$ maka Persamaan (2.21) menjadi

$$\begin{bmatrix} -i\sqrt{rs} & -r \\ s & -i\sqrt{rs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Matriks augmented dari sistem (2.22) yaitu

$$\begin{bmatrix} -i\sqrt{rs} & -r & | & 0 \\ s & -i\sqrt{rs} & | & 0 \end{bmatrix} \text{ baris pertama dikali dengan } \left(\frac{1}{rs}i\sqrt{rs}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{i}{s}\sqrt{rs} & | & 0 \\ s & -i\sqrt{rs} & | & 0 \end{bmatrix} \text{ baris kedua dikali dengan } \left(\frac{1}{s}\right) \text{ kemudian}$$

dikurangi dengan baris pertama

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{i}{s}\sqrt{rs} & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

diperoleh

$$y_1 + \frac{i\sqrt{rs}}{s} y_2 = 0$$

$$y_1 = -\frac{i\sqrt{rs}}{s} y_2$$

misal $y_2 = t$, maka $y_1 = -\frac{i\sqrt{rs}}{s} t$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\sqrt{rs}}{s} t \\ t \end{bmatrix}, \text{ diambil } t=1 \text{ diperoleh } \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\sqrt{rs}}{s} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu, vektor eigen yang bersesuaian dengan $y_2 = -i\sqrt{rs}$ adalah

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -\frac{i\sqrt{rs}}{s} t \\ -1 \end{bmatrix}$$

(iii) Akan dibuktikan bahwa jika titik kesetimbangan $\hat{x} = 0$ tidak stabil, maka $\Re y_i > 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$

(\Rightarrow)

Titik kesetimbangan tidak stabil, jika untuk $t \rightarrow \infty$ solusi persamaan differensial $x(t, x_0)$ akan menuju ∞ . Hal ini dapat terpenuhi jika $\Re y_i > 0$.

(\Leftarrow)

Diketahui bahwa jika $\Re y_i > 0$ maka solusi persamaan differensial $x(t, x_0)$ yang memuat $e^{\Re(y_i)t}$ akan menuju ∞ . Oleh karena itu, titik kesetimbangan $\hat{x} = 0$ tidak stabil.

Disimpulkan bahwa linearisasi digunakan untuk mengetahui kestabilan Sitem (2.8), agar Sistem (2.8) menjadi sistem linear $\dot{x} = Ax$ dimana $A = J(f(\hat{x}))$ adalah matriks Jacobian. Titik kesetimbangan $\hat{x} \in R^n$ dikatakan

stabil asimtotik lokal jika semua nilai eigen matriks Jacobian mempunyai bagian real negatif.

J. Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar adalah bilangan yang menyatakan banyaknya rata-rata individu infektif sekunder akibat tertular individu infektif primer yang berlangsung di dalam populasi *susceptible*.

Bilangan reprodruksi dasar merupakan parameter penentu kestabilan dari titik-titik kesetimbangan model, dan dinotasikan dengan lambang R_0 . Titik kritis R_0 berkisar 1, jika $R_0 < 1$ maka rata-rata populasi yang terinfeksi berkurang atau menghilang dari populasi atau infeksi tersebut akan berkurang atau menghilang dari populasi. Jika $R_0 > 1$, maka infeksi akan membesar atau meningkat pada suatu populasi. Bilangan reproduksi dasar dapat diperoleh dengan menentukan nilai eigen dari matriks jacobian pada titik kesetimbangan bebas penyakit.

Cara lain dalam menentukan bilangan reproduksi dasar adalah dengan menggunakan metode matriks *next generation*. Pada metode matriks *next generation* R_0 didefinisikan sebagai nilai eigen terbesar dari matriks *next generation*. Formasi ini terdiri dari 2 kelas dari model yaitu terinfeksi dan tidak terinfeksi. Diasumsikan terdapat n kelas tidak terinfeksi dan m kelas terinfeksi. Selanjutnya dimisalkan x sebagai subpoulasi kelas terinfeksi dan y sebagai subpopulasi yang tidak terinfeksi, dan $x \in R^n$ dan $y \in R^m$, untuk $m, n \in N$, sehingga

$$\dot{x} = \varphi_i(x, y) - \psi_i(x, y), \text{ dengan } i=1, 2, \dots, m \quad (2. 23)$$

$$\dot{y} = \psi_j(x, y), \text{ dengan } j=1,2, \dots, n \quad (2.24)$$

dengan φ_i adalah matriks dari individu yang masuk dan menambah banyaknya individu yang masuk ke kelas terinfeksi, dan ψ_i adalah matriks dari laju peningkatan jumlah individu yang keluar dari kelas terinfeksi yang menyebabkan berkurangnya jumlah individu pada kelas terinfeksi.

Didefinisikan matriks *next generation* H dari Persamaan (2.23) dan (2.24) adalah

$$H = PR^{-1} \quad (2.25)$$

dengan

$$P = \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right\} \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

dan

$$R = \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \right\} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Didefinisikan bilangan reproduksi dasar sebagai nilai eigen terbesar dari matriks *next generation* H adalah

$$R_0 = \rho(H) = \rho(PR^{-1}).$$

Contoh 2. 9

Diberikan sistem persamaan diferensial berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \mu + \beta I(t) - \alpha S(t)I(t) - \mu S(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) - \mu I(t) \end{aligned} \quad (2.26)$$

dengan $S(t)$ menyatakan populasi individu rentan pada saat t , $I(t)$ menyatakan populasi individu terinfeksi pada saat t . Sistem (2.26) mempunyai titik kesetimbangan bebas penyakit $P_0 = (1,0)$. Matriks *next generation* dapat diperoleh dari kelas I , sehingga kelas I dapat dituliskan sebagai berikut

$$I(t) = \varphi(S, I) - \psi(S, I)$$

dengan

$$\varphi = [\alpha S(t)I(t)] \text{ dan } \psi = [\beta I(t) + \mu I(t)].$$

Hasil linearisasi dari φ dan ψ masing-masing adalah $P = \alpha \hat{S}(t)$ dan $R = \beta + \mu$. Matriks *next generation*nya sebagai berikut

$$H = PR^{-1} = [\alpha \hat{S}(t)] \begin{bmatrix} 1 \\ \beta + \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \hat{S}(t) \\ \beta + \mu \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Substitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit $P_0 = (1,0)^T$ ke Persamaan (2.27) diperoleh

$$H = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta + \mu \end{bmatrix}$$

maka diperoleh nilai R_0 dari Sistem (2.27) adalah

$$R_0 = \frac{\alpha}{\beta + \mu}.$$

K. Rumus Akar Kuadrat

Persamaan kuadrat adalah persamaan plinomial orde dua. Bentuk umum persamaan kuadrat adalah

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dengan $a \neq 0$. Rumus akar kuadrat digunakan untuk menghitung akar-akar persamaan kuadrat yang bergantung pada nilai a, b, c pada suatu persamaan kuadrat. Rumus yang dimaksud memiliki bentuk

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Bukti:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ ax^2 + bx &= -c \\ x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ x + \frac{b}{2a} &= \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \end{aligned}$$