BAB II
KAJIAN PUSTAKA

Pada Bab II akan dijelaskan mengenai dasar teori yang akan mendukung pembentukan model suku bunga stokastik waktu diskrit dan penerapannya dalam anuitas, yaitu: peluang, peubah acak diskrit, nilai harapan, variansi, peluang bersyarat, momen bersyarat, distribusi binomial, martingale, tingkat bunga & diskon, nilai sekarang, nilai masa depan, anuitas, obligasi tanpa kupon, *term structure*, model suku bunga stokastik waktu diskrit Black-Derman-Toy dengan *forward-induction*, *MAPE* dan *MSE*.

A. Peluang dan Peubah Acak

Peluang memiliki beberapa definisi, definisi peluang dan sifat yang menyertainya yang akan digunakan dalam skripsi ini adalah sebagai berikut:

Definisi 1. (Bain & Engelhardt, 1991)

Untuk suatu percobaan yang dilakukan, S menotasikan seluruh hasil yang mungkin dan $A, A_1, A_2, \ldots$ mewakili kejadian-kejadian yang mungkin. Suatu fungsi yang menghubungkan setiap kejadian A dengan tepat satu bilangan real $P(A)$ disebut fungsi peluang. $P(A)$ selanjutnya disebut peluang dari A dan memenuhi sifat-sifat berikut:

$$0 \leq P(A) \text{ untuk setiap } A \tag{2.1}$$

$$P(S) = 1 \tag{2.2}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{2.3}$$

untuk $A_1, A_2, A_3, \ldots$ *saling lepas satu sama lain*

Adapun definisi klasik peluang suatu kejadian A dengan asumsi setiap kejadian tidak mungkin terjadi bersamaan dan masing-masing kejadian mempunyai kemungkinan yang sama untuk terjadi, dengan $n(A)$ mewakili banyaknya cara kejadian A dapat terjadi dan N mewakili banyak seluruh hasil yang mungkin terjadi adalah,

$$P(A) = \frac{n(A)}{N}. \tag{2.4}$$

Definisi 2. (Bain & Engelhardt ,1991)

Peubah acak X adalah fungsi yang didefinisikan pada ruang sampel S, yang menghubungkan e yaitu setiap hasil yang mungkin dari S dengan tepat satu bilangan real $X(e) = x$.

Contoh 1

Pada pelemparan koin 2 kali yang hasilnya bisa berupa gambar (G) maupun angka (A), peubah acak X menghubungkan hasil yang mungkin dari pelemparan koin sebanyak 2 kali $S = \{(G,G),(G,A),(A,G),(A,A)\}$ dengan banyaknya angka yang muncul sehingga $X(GG) = 0$, $X(GA) = 1$, $X(AG) = 1$, dan $X(AA) = 2$.

Berdasarkan banyak hasil yang mungkin terjadi, peubah acak dapat dibagi menjadi dua jenis, yaitu peubah acak diskrit dan peubah acak kontinu.

Definisi 3. (Bain & Engelhardt ,1991)

Peubah acak dengan domain himpunan yang dapat dihitung (*countable set*) disebut peubah acak diskrit.

Peubah acak diskrit memiliki fungsi peluang dan fungsi peluang kumulatif. Fungsi peluang merupakan fungsi yang menghubungkan nilai peubah acak tertentu ke peluang yang menyertai nilai tersebut. Fungsi peluang kumulatif adalah fungsi yang memberikan nilai peluang untuk seluruh nilai yang kurang dari atau sama dengan suatu nilai peubah acak.

Definisi 4. (Bain & Engelhardt ,1991)

Peubah acak diskrit memiliki fungsi peluang $f(x) = P[X = x]$ untuk $x = x_1, x_2, x_3, \ldots$ dan fungsi peluang kumulatif $F(x) = P[X \leq x]$.

Sifat-sifat kedua fungsi tersebut adalah:

$$f(x_i) \geq 0 \textit{ untuk semua } x_i \tag{2.5}$$

$$\sum_{\forall\, x_i} f(x_i) = 1 \tag{2.6}$$

$$f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}) \tag{2.7}$$

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i). \tag{2.8}$$

Contoh 2

Diketahui pada Contoh 1 untuk $X = 0$ ada 1 cara, $X = 1$ ada 2 cara dan $X = 2$ ada 1 cara. Peluang masing-masing kejadian dihitung dengan persamaan (2.4) sebagai berikut:

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{n(X = 0)}{N} = \frac{1}{4}$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{n(X = 1)}{N} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{n(X = 2)}{N} = \frac{1}{4}$$

Jadi untuk $x = 0,1,2$ sifat (2.5) terpenuhi. Kemudian $f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$ sehingga sifat (2.6) terpenuhi.

Definisi 5. (Bain & Engelhardt ,1991)

Peubah acak diskrit X memiliki nilai harapan:

$$E(X) = \sum_{x} xf(x). \tag{2.9}$$

Contoh 3

Akan dicari nilai harapan dari peubah acak di Contoh 1

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{0}^{2} xf(x) \\ &= 0.f(0) + 1.f(1) + 2.f(2) \\ &= 0.\frac{1}{4} + 1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Teorema 1. **(**Bain & Engelhardt ,1991)

Sifat-sifat nilai harapan peubah acak diskrit adalah:

Jika $u(x)$ adalah fungsi bernilai real yang domainnya memuat nilai-nilai yang mungkin dari X, maka

$$E[u(x)] = \sum_{x} u(x)f(x) \tag{2.10}$$

Jika X adalah peubah acak dengan fungsi peluang $f(x)$, a dan b adalah konstanta, $g(x)$ dan $f(x)$ adalah fungsi bernilai real dengan daerah asal adalah semua nilai dari X, maka

$$E[ag(X) + bh(X)] = aE[g(X)] + bE[h(X)]. \tag{2.11}$$

Bukti:

$$\begin{aligned} E[ag(X) + bh(X)] &= \sum [ag(X) + bh(X)]\, f(x) \\ &= \sum [ag(X)f(x) + bh(X)f(x)] \\ &= \sum ag(X)f(x) + \sum bh(X)f(x) \\ &= a\sum g(X)f(x) + b\sum h(X)\, f(x) \\ &= aE[g(X)] + bE[h(X)]. \end{aligned}$$

■

Definisi 6. Bain & Engelhardt (1991: 73)

Variansi dari peubah acak X adalah,

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2]. \tag{2.12}$$

Teorema 2. **(**Bain & Engelhardt ,1991)

Jika X peubah acak diskrit, maka sifat-sifat variansinya adalah:

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 \tag{2.13}$$

$$Var(aX+b) = a^2 Var(X) \textit{ dengan } a, b \textit{ konstanta.} \tag{2.14}$$

bukti:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[(X-\mu)^2] \\ &= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(aX+b) &= E\left[\left(aX + b - (a\mu_x + b)\right)^2\right] \\ &= E[(aX + b - a\mu_x - b)^2] \\ &= E[(aX - a\mu_x)^2] \\ &= E[a^2(X-\mu_x)^2] \\ &= a^2 E[(X-\mu_x)^2] \\ &= a^2 Var(X). \end{aligned}$$

■

Contoh 4

Akan dihitung variansi dari peubah acak X di contoh 1, dengan rumus (2.13) diperoleh:

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2$$

$$= \sum_{0}^{2} x^2 f(x) - [E(X)]^2$$

$$= \left[0^2.\frac{1}{4} + 1^2.\frac{1}{2} + 2^2.\frac{1}{4}\right] - 1^2$$

$$= 2 - 1 = 1.$$

Definisi 7. (Bain & Engelhardt, 1991)

Momen ke-k di sekitar asal dari peubah acak X adalah

$$\mu_k' = E(X^k) \qquad (2.15)$$

dan momen ke-k di sekitar rata-ratanya adalah

$$\mu_k = E[X - E(X)]^k = E(X - \mu)^k. \qquad (2.16)$$

Definisi 8. (Bain & Engelhardt ,1991)

Peluang bersyarat dari kejadian A, dengan syarat B didefinisikan oleh:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (2.17)$$

untuk $P(B) \neq 0$.

Definisi 9. (Bain & Engelhardt ,1991)

Untuk X dan Y peubah acak yang berdistribusi bersama $f(x, y)$, harapan bersyarat dari Y dengan syarat $X = x$ adalah,

$$E(Y|x) = \sum_{y} y f(y|x) \qquad (2.18)$$

Teorema 3. **(**Bain & Engelhardt ,1991)

Jika X dan Y peubah acak dengan distribusi bersama $f(x,y)$, $f_1(x)$ dan $f_2(y)$ masing-masing fungsi peluang marjinal dari X dan Y, sifat-sifat harapan bersyarat adalah sebagai berikut:

$$E[E(Y|X)] = E(Y) \tag{2.19}$$

Jika X dan Y saling bebas, maka $E(Y|X) = E(Y)$ dan $E(X|Y) = E(X)$. (2.20)

Bukti:

$$\begin{aligned} E[E(Y|X)] &= \sum_{\forall x} E(Y|X)f(x) \\ &= \sum_{\forall y}\sum_{\forall x} yf(y|x)f_1(x) \\ &= \sum_{\forall y} y \sum_{\forall x} \frac{f(x,y)}{f_1(x)} f_1(x) \\ &= \sum_{\forall y} y \sum_{\forall x} f(x,y) \\ &= \sum_{\forall y} yf_2(y) \\ &= E(Y). \end{aligned}$$

Jika X dan Y saling bebas, maka

$$\begin{aligned} E[Y|X] &= \sum_{\forall y} yf(y|x) \\ &= \sum_{\forall y} y\frac{f(x,y)}{f(x)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{\forall y} y f(y)$$

$$= E[Y].$$

■

Definisi 10. (Bain & Engelhardt ,1991)

Variansi bersyarat dari Y dengan syarat $X = x$ didefinisikan oleh:

$$Var(Y|x) = E\{[Y - E(Y|x)]^2\}. \quad (2.21)$$

Teorema 4. **(**Bain & Engelhardt ,1991)

Sifat variansi bersyarat adalah sebagai berikut:

$$Var(Y) = E_x[Var(Y|X)] + Var_x[E(Y|X)].$$

Bukti:

$$E_x[Var(Y|X)] = E_x\{E(Y^2|X) - [E(Y|X)]^2\}$$

$$= \{E(Y^2) - E_x[E(Y|X)^2]\}$$

$$= E(Y^2) - [E(Y)]^2 - \{E_x[E(Y|X)]^2 - [E(Y)]^2\}$$

$$= Var(Y) - Var_x[E(Y|X)].$$

■

B. Fungsi Peluang Binomial

Dalam peubah acak, dikenal beberapa fungsi peluang istimewa salah satunya adalah fungsi peluang binomial.

Definisi 11. (Ross, 1998)

Peubah acak binomial X dengan parameter (n, p) yang menyatakan banyaknya percobaan yang berhasil dari percobaan sebanyak n kali dengan peluang berhasil p dan peluang gagal $1-p$. Fungsi peluang dari X yaitu,

$$f(x) = b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \text{ dengan } x = 0,1,2,\dots,n. \qquad (2.22)$$

Teorema 5. (Ross, 1998)

Jika Y adalah peubah acak binomial dengan parameter $(n-1, p)$, momen ke-k di sekitar asal peubah acak binomial X didefinisikan sebagai,

$$E(X^k) = npE[(Y+1)^{k-1}]. \qquad (2.23)$$

Bukti:

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \sum_{x=0}^{n} x^k \, b(x; n, p) \\ &= \sum_{x=0}^{n} x^k \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=1}^{n} x^k \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \end{aligned}$$

dengan menggunakan identitas

$$x\binom{n}{x} = n\binom{n-1}{x-1},$$

akan diperoleh

$$E[X^k] = np\sum_{x=1}^{n} x^{k-1}\binom{n-1}{x-1}p^{x-1}(1-p)^{n-x}$$

$$= np\sum_{y=0}^{n-1}(y+1)^{k-1}\binom{n-1}{y}p^{y}(1-p)^{n-1-y}\ dengan\ y = x-1$$

$$= npE[(Y+1)^{k-1}].$$

■

Teorema 6. (Ross, 1998)

Jika X peubah acak binomial dengan parameter (n, p), maka

$$E(X) = np \qquad (2.24)$$

$$Var(X) = npq. \qquad (2.25)$$

Bukti:

Dengan menggunakan Teorema 5, $k = 1$ menghasilkan nilai $E(X)$

$$E(X^k) = npE[(Y+1)^{k-1}]$$

$$E(X^1) = npE[(Y+1)^{1-1}]$$

$$E(X) = npE[(Y+1)^{0}]$$

$$E(X) = np,$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= npE[(Y+1)^1] - (np)^2$$

$$= np[E(Y) + 1] - (np)^2$$

$$= np[(n-1)p + 1] - n^2p^2$$

$$= np[np - p + 1] - n^2p^2$$

$$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$$

$$= np - np^2$$

$$= np(1-p).$$

■

C. Proses Stokastik

Definisi 12. (Lin, 2006)

Andaikan $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ suatu ruang peluang, filtrasi $\mathcal{F}$ merupakan himpunan semua kejadian yang mungkin dan mewakili semua informasi yang dimuat di ruang peluang.

Diketahui bahwa serangkaian percobaan dilakukan pada waktu $t = 0,1,2,\ldots$. Jika $\mathcal{F}_t$ merupakan himpunan semua kejadian yang mungkin di $\mathcal{F}$ yang dapat terjadi sebelum waktu t, maka $\mathcal{F}_t$ mewakili semua informasi hingga waktu ke-t. Keterangan yang menyertai pernyataan tersebut adalah sebagai berikut:

(i) $\mathcal{F}_t$ adalah struktur informasi yang lebih umum dibandingkan $\mathcal{F}$, atau dengan kata lain $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, karena $\mathcal{F}_t$ tidak memuat lebih banyak informasi dibandingkan $\mathcal{F}$.

(ii) Jika $s < t$, maka $\mathcal{F}_s$ tidak memuat lebih banyak informasi dari $\mathcal{F}_t$, karena seiring berjalannya waktu informasi yang tersedia akan semakin banyak. Disimpulkan bahwa $\mathcal{F}_s$ lebih umum dibandingkan $\mathcal{F}_t$, sehingga $\{\mathcal{F}_t, t = 0,1,2,\ldots\}$ naik dalam t dan membentuk struktur informasi yang bergantung pada waktu atau sebuah filtrasi di $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dengan $\mathcal{F}_t$ mewakili informasi hingga waktu ke-t.

Apabila suatu struktur informasi memenuhi (i) dan (ii), struktur informasi tersebut dapat dinamakan filtrasi pada $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dan $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ disebut ruang terfiltrasi.

Definisi 13. (Lin, 2006)

Suatu proses stokastik waktu diskrit pada $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ merupakan barisan peubah acak $X(0), X(1), \dots, X(t), \dots$, pada $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$, yang biasa dinotasikan sebagai $X(t)$.

Catat bahwa struktur informasi $\mathcal{F}$ digantikan oleh struktur informasi pada waktu ke-t, yang berarti bahwa nilai $X(t)$ hanya bergantung pada struktur informasi hingga waktu ke-t.

D. Martingale

Martingale secara umum adalah sebuah proses stokastik yang harapan kejadian di masa depan hanya bergantung pada kejadian di masa sekarang. Gambaran mengenai martingale dapat diketahui dari ilustrasi berikut:

Pada suatu permainan melempar koin, seorang pemain harus membayar sebesar \$1 jika hasil yang muncul dari pelemparan koin adalah gambar. Sebaliknya, jika hasil yang muncul adalah angka maka ia akan mendapat \$1. Apabila sebelum pelemparan sang pemain telah memiliki modal sebesar \$2, maka terdapat 2 kemungkinan nilai modal pemain setelah terjadi pelemparan yaitu \$1 jika kalah dan \$3 jika menang. Rata-rata dari nilai modal pemain setelah terjadi pelemparan koin adalah:

$$E[modal] = \frac{1}{2}(\$1) + \frac{1}{2}(\$3) = \$0{,}5 + \$1{,}5 = \$2.$$

Ternyata rata-rata (harapan) nilai modal pemain setelah terjadi pelemparan koin sama dengan modal awal sang pemain sebelum terjadi pelemparan koin. Sifat ini merupakan karakteristik dari martingale, sehingga dapat disimpulkan bahwa pada permainan melempar koin ini, modal pemain adalah martingale.

Secara matematis definisinya adalah sebagai berikut:

Definisi 14. (Lin, 2006)

Suatu proses stokastik $\{M(t), t = 0,1,2, \dots,\}$ dengan $E\{|M(t)|\} < \infty$ untuk setiap t pada $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ disebut martingale jika

$$E(M(t+1)|\mathcal{F}_t) = M(t) \tag{2.26}$$

dengan bentuk lain seperti berikut

$$\begin{aligned} E(M(t+1) - M(t)|\mathcal{F}_t) &= E(M(t+1)|\mathcal{F}_t) - E(M(t)|\mathcal{F}_t) \\ &= E(M(t+1)|\mathcal{F}_t) - M(t) = 0. \end{aligned}$$

E. Bunga dan Anuitas

Pengertian bunga, anuitas, obligasi dan sifatnya diperlukan untuk melakukan pembahasan mengenai pemodelan anuitas bunga stokastik.

Definisi 15. (Kellison, 1991)

Bunga dapat didefinisikan sebagai kompensasi yang dibayarkan peminjam modal (*borrower*) kepada yang meminjamkan modal (*lender*) atas kegunaannya, sehingga bunga dapat dianggap sebagai kompensasi atas hilangnya kegunaan modal itu akibat kegiatan pinjam-meminjam tersebut.

Misalnya, seorang petani meminjam uang kepada bank untuk modal membeli peralatan bertani. Sesuai kesepakatan, uang itu dipinjam selama 2 tahun. Setelah dua tahun, sang petani harus membayarkan kembali uang yang telah dipinjamnya beserta dengan bunganya sebagai kompensasi karena selama 2 tahun tersebut Bank tidak dapat menggunakan uang tersebut untuk hal lain karena dipinjam oleh sang petani.

Untuk melakukan pemodelan tingkat bunga diperlukan definisi fungsi akumulasi dan fungsi jumlah.

Definisi 16. (Kellison, 1991)

Fungsi akumulasi $a(t)$ adalah fungsi yang menyatakan nilai akumulasi pada waktu $t \geq 0$ dari investasi awal sebesar 1.

Sifat-sifat fungsi akumulasi ini adalah,

(1) $a(0) = 1$

(2) $a(t)$ adalah fungsi naik

(3) Jika bunga diberikan secara kontinu, maka fungsi akumulasi $a(t)$ juga kontinu.

Fungsi jumlah A(t) adalah fungsi yang menyatakan nilai akumulasi pada waktu $t \geq 0$ dari investasi awal sebesar k. Sehingga,

$$A(t) = ka(t). \tag{2.27}$$

Definisi 17. (Kellison, 1991)

Banyaknya bunga yang diperoleh pada periode ke-n dinotasikan oleh I_n yang dinyatakan oleh

$$I_n = A(n) - A(n-1). \tag{2.28}$$

Definisi 18. (Kellison, 1991)

Tingkat bunga efektif i adalah perbandingan jumlah bunga yang diperoleh selama satu periode terhadap jumlah modal yang diinvestasikan pada awal periode.

Dalam definisi matematis, i dinyatakan oleh

$$i_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{I_n}{A(n-1)} \tag{2.29}$$

dengan i_n menyatakan tingkat bunga efektif pada periode ke-n dari tanggal investasi.

Tingkat bunga dibagi menjadi dua jenis menurut penghitungan bunganya yaitu tingkat bunga tunggal dan tingkat bunga majemuk.

Definisi 19. (Kellison, 1991)

Tingkat bunga tunggal adalah tingkat bunga dengan asumsi bahwa jumlah bunga yang diterima konstan setiap periodenya. Tingkat bunga tunggal memiliki fungsi akumulasi

$$a(t) = 1 + it \tag{2.30}$$

yang jika dihitung tingkat bunga efektifnya adalah sebagai berikut:

$$i_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)}$$

$$= \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)}$$

$$= \frac{1 + in - [1 + i(n-1)]}{1 + i(n-1)}$$

$$= \frac{1 + in - 1 - in + i}{1 + i(n-1)}$$

$$= \frac{i}{1 + i(n-1)} \quad (2.31)$$

Diketahui dari (2.31) bahwa tingkat bunga tunggal yang konstan akan menghasilkan tingkat bunga efektif yang menurun.

Definisi 20. (Kellison, 1991)

Tingkat bunga majemuk mengasumsikan bahwa modal dan bunga diinvestasikan kembali di setiap periodenya. Tingkat bunga majemuk memiliki fungsi akumulasi

$$a(t) = (1 + i)^t \quad (2.32)$$

Tingkat bunga efektif dari fungsi akumulasi tingkat bunga majemuk adalah sebagai berikut:

$$i_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} \quad (2.33)$$

$$= \frac{(1+i)-1}{1} = i.$$

Jadi untuk setiap n, $i_n = i$ pada tingkat suku bunga majemuk. Selanjutnya dalam tulisan ini tingkat bunga yang akan digunakan adalah tingkat bunga majemuk.

Contoh 5. (Kellison, 1991)

Akan dicari nilai akumulasi dari \$2000 yang diinvestasikan selama 4 tahun dengan tingkat suku bunga majemuk 8%. Dari soal dapat diketahui $t = 4$, $i = 8\%$ dan $k = \$2000$. Dengan menggunakan persamaan (2.32) dan (2.27) diperoleh

$$A(4) = k.a(4) = \$2000.(1+8\%)^4 = \$2720{,}98.$$

Definisi 21. (Kellison, 1991)

Suku $(1+i)$ pada (2.32) sering disebut dengan faktor akumulasi. Kebalikan dari faktor akumulasi disebut dengan faktor diskon yang dilambangkan dengan v,

$$v = \frac{1}{1+i}. \tag{2.34}$$

Faktor diskon kemudian digunakan untuk membuat fungsi diskon yang dilambangkan $a^{-1}(t)$,

$$a^{-1}(t) = \frac{1}{(1+i)^t} = v^t. \tag{2.35}$$

Contoh 6. (Kellison, 1991)

Akan dicari nilai sejumlah uang yang harus diinvestasikan agar diperoleh \$1000 pada akhir tahun ke-3 dengan tingkat suku bunga 9% per tahun. Adapun dari soal diketahui bahwa $A(3) = \$1000$ dan $i = 9\%$. Dengan persamaan (2.38) dan (2.27) diperoleh

$$A(3) = \$1000$$

$$A(0) = A(3).a^{-1}(3) = \$1000 \frac{1}{(1+9\%)^3} = \$772{,}18.$$

Proses mengalikan suatu modal dengan faktor diskon disebut mendiskontokan modal tersebut. Pada Contoh 6, $A(0)$ adalah nilai sekarang dari $A(3)$. Berbagai teori yang telah disajikan di atas dapat digunakan untuk menghitung suatu produk keuangan yang lebih spesifik, yaitu anuitas.

Definisi 22. (Kellison, 1991)

Anuitas adalah serangkaian pembayaran yang dilakukan pada selang waktu yang sama.

Berdasarkan kepastian pembayarannya, anuitas dibagi menjadi 2 jenis yaitu anuitas pasti dan anuitas kontingen. Anuitas pasti pembayarannya dilakukan selama waktu tertentu yang disebut dengan jangka waktu anuitas. Contoh anuitas pasti adalah pembayaran pinjaman bank atau kredit usaha. Anuitas kontingen adalah anuitas yang pembayaran anuitas tidak memiliki kepastian, misalnya anuitas hidup. Contoh dari anuitas hidup, di mana pembayarannya hanya dilakukan pada saat si pembayar masih hidup adalah dana pensiun atau pembayaran premi asuransi.

Berdasarkan waktu pembayarannya, anuitas dibedakan menjadi 2 yaitu anuitas awal (*annuity-due*) dan anuitas akhir (*annuity-immediate*). Anuitas awal pembayarannya dilakukan di setiap awal periode sedangkan anuitas akhir pembayarannya dilakukan di akhir periode. Anuitas yang akan dibahas lebih spesifik pada tulisan ini adalah anuitas akhir.

Definisi 23. (Kellison, 1991)

Nilai sekarang dari suatu anuitas adalah nilai seluruh rangkaian pembayaran apabila nilai seluruh pembayaran di tiap-tiap periode disesuaikan nilainya dengan titik waktu pada saat ini atau dengan kata lain setiap pembayaran yang dilakukan didiskontokan sesuai dengan lama waktu antara saat ini dengan waktu pembayaran. Adapun nilai sekarang dari anuitas akhir sebesar 1 untuk n periode pembayaran yang dilambangkan $a_{\overline{n}|}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \cdots + v^{n-1} + v^n. \tag{2.36}$$

Definisi 24. (Kellison, 1991)

Nilai masa depan suatu anuitas adalah nilai seluruh pembayaran apabila seluruh pembayaran di tiap-tiap periode disesuaikan nilainya dengan titik waktu di akhir periode anuitas tersebut, atau setiap pembayaran diakumulasikan sesuai dengan lama waktu antara waktu pembayaran dengan akhir periode anuitas. Sedangkan nilai akumulasi (nilai masa depan) dari anuitas akhir sebesar 1 untuk n periode yang dilambangkan $s_{\overline{n}|}$ didefinisikan oleh,

$$s_{\overline{n}|} = 1 + (1+i) + \cdots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}. \tag{2.37}$$

F. Obligasi Tanpa Kupon

Dalam dunia keuangan dikenal beberapa instrumen keuangan, salah satunya adalah obligasi.

Definisi 25. (Mishkin, 2004)

Obligasi adalah instrumen keuangan berbentuk surat hutang yang menjanjikan pembayaran berkala selama jangka waktu tertentu. Harga yang dibayarkan pembeli obligasi di awal periode disebut **harga beli obligasi**, nilai yang diperoleh pembeli obligasi di akhir periode disebut **nilai par**, tingkat suku bunga yang digunakan untuk menghitung pembayaran bunga berkala (biasanya setiap 6 bulan) yang diperoleh pembeli obligasi disebut **kupon**, dan besarnya tingkat bunga efektif yang digunakan sebagai kompensasi disebut **tingkat imbal hasil**.

Untuk mempermudah pemahaman diberikan suatu contoh obligasi dengan periode 2 tahun yang memiliki nilai par \$100, kupon 4% dan tingkat imbal hasil 5%. Akan dicari harga beli obligasi tersebut. Penghitungan kupon akan dilakukan per 6 bulan sehingga tingkat kupon per 6 bulan adalah 2%, jadi besar bunga yang diterima pembeli adalah \$2 setiap 6 bulan. Pada akhir tahun ke-2 pembeli juga akan menerima \$100 dengan tingkat imbal hasil per 6 bulan adalah 5% dibagi dua yaitu 2,5%. Jadi harga beli obligasi adalah nilai sekarang dari seluruh pembayaran yang diterima oleh pembeli.

$$Harga = \$100\left(\frac{1}{(1+2{,}5\%)^4}\right) + \$2\left(\frac{1}{1+2{,}5\%} + \frac{1}{(1+2{,}5\%)^2} + \frac{1}{(1+2{,}5\%)^3} + \frac{1}{(1+2{,}5\%)^4}\right)$$

$$= \$90{,}70 + \$1{,}95 + \$1{,}9 + \$1{,}86 + \$1{,}81 = \$98{,}22.$$

Berdasarkan ada tidaknya kupon, obligasi dibagi menjadi dua yaitu obligasi dengan kupon dan obligasi tanpa kupon.

Definisi 26. (Broverman, 2010)

Obligasi tanpa kupon adalah sebuah surat hutang yang tidak memiliki kupon dan memiliki pembayaran tunggal pada saat waktu jatuh tempo. Contoh obligasi tanpa kupon adalah Surat Perbendaharaan Negara (SPN) dan Obligasi Negara (ON) tanpa kupon yang diterbitkan Bank Indonesia (Undang Undang Republik Indonesia, 2002) dan *Treasury Bills* yang diterbitkan oleh *United States Department of Treasury*. Prinsip kerja obligasi tanpa kupon adalah sebagai berikut, misalnya sebuah obligasi tanpa kupon dengan nilai par \$100 dengan waktu jatuh tempo 1 tahun memiliki tingkat imbal hasil sebesar 10%. Pembeli obligasi tanpa kupon tersebut harus membayarkan sebesar:

$$Harga = \$100\left(\frac{1}{1+10\%}\right) = \$90{,}91$$

atau sebesar \$100 yang didiskontokan dengan tingkat imbal hasil 10% dengan periode 1 tahun yaitu \$90.91. Secara umum harga sebuah obligasi tanpa kupon ($L(0,0,t)$) dengan nilai par 1 dan imbal hasil sebesar $y(0,0,t)$ untuk waktu jatuh tempo t tahun adalah sebagai berikut:

$$L(0,0,t) = \left(\frac{1}{1+y(0,0,t)}\right)^{t}. \qquad (2.38)$$

Definisi 27. (Broverman, 2010)

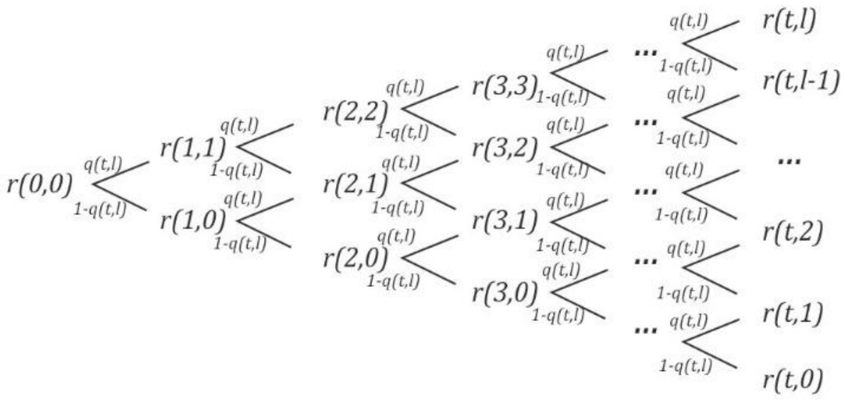
Term structure dari tingkat suku bunga pada waktu sekarang adalah himpunan tingkat imbal hasil dari obligasi tanpa kupon pada semua waktu jatuh tempo. *Term structure* sering juga disebut dengan istilah kurva imbal hasil untuk obligasi tanpa kupon.

G. Model Black-Derman-Toy dengan Teknik *Forward-Induction*

Black, Derman dan Toy (1990) pada makalahnya yang berjudul *"A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options"* mengusulkan sebuah model suku bunga stokastik yang menganggap bahwa semua harga instrumen keuangan bergantung hanya pada satu faktor yaitu *short-rate* atau suku bunga sesaat. Suku bunga sesaat adalah suku bunga yang hanya berlaku selama 1 tahun. Black, Derman dan Toy juga memberikan 3 asumsi utama sebagai dasar pembangun model suku bunga stokastik:

1. Model Black-Derman-Toy (BDT) memodelkan suku bunga sesaat, yaitu suku bunga yang hanya berlaku satu tahun.
2. Input yang digunakan untuk model ini adalah barisan tingkat imbal hasil dan barisan volatilitas imbal hasil untuk obligasi yang sama. Kedua barisan tersebut secara bersama-sama membentuk kurva imbal hasil.
3. Model BDT memberikan variasi rerata dan volatilitas suku bunga sesaat sesuai dengan input yang diberikan.

Model BDT memanfaatkan pohon binomial untuk menjelaskan bahwa suku bunga sesaat memiliki dua kemungkinan, yaitu naik atau turun. Setiap kemungkinan suku bunga sesaat nantinya akan memiliki dua kemungkinan lagi dan seterusnya. Diasumsikan pengamatan dimulai di waktu ke-0, maka banyaknya kemungkinan suku bunga sesaat pada waktu ke-t adalah $t + 1$. Kemungkinan-kemungkinan suku bunga sesaat pada waktu ke-t dinotasikan sebagai $r(t, l)$ dengan $l = 0,1,2, \ldots, t$ di mana l adalah indeks kemungkinan suku bunga untuk waktu t. Pada model BDT, peluang naik dan turun suku bunga sesaat dilambangkan $q(t, l)$ dan ditetapkan sebesar 0,5. Pohon suku bunga sesaat dapat dilihat seperti Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Pohon Suku Bunga Sesaat

Untuk mempermudah penulisan, pohon suku bunga sesaat dapat dinyatakan dalam bentuk tabel. Bentuk tabel tersebut disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Tabel Penyajian Suku Bunga Sesaat.

$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	…
$r(0,0)$	$r(1,0)$ $r(1,1)$	$r(2,0)$ $r(2,1)$ $r(2,2)$	$r(3,0)$ $r(3,1)$ $r(3,2)$ $r(3,3)$	$r(4,0)$ $r(4,1)$ $r(4,2)$ $r(4,3)$ $r(4,4)$	

Sifat-sifat yang harus dipenuhi oleh pohon suku bunga sesaat dalam model BDT (Qoyyimi, 2008) adalah:

(i) $r(t+1,l) < r(t,l)$

(ii) $r(t+1,l+1) > r(t,l)$.

Apabila ada minimal satu suku bunga sesaat yang tidak memenuhi kedua sifat tersebut, maka pohon suku bunga sesaat yang memuat suku bunga tersebut dapat dikatakan tidak layak, karena peluang naik dan turun yang sama tidak terpenuhi.

Kemudian diasumsikan peluang naik dan turun suku bunga sesaat dalam pohon suku bunga sesaat mengikuti ukuran martingale (Gaillardetz, 2008: 213) karena nilai harapan dari harga obligasi tetap sama tanpa memandang lintasan suku bunga sesaat yang dilewati (Black dkk, 1990). Adapun ukuran keragaman naik dan turun suku bunga sesaat disebut dengan volatilitas suku bunga sesaat.

Pohon suku bunga sesaat dapat diperoleh dari volatilitas suku bunga sesaat dan harga obligasi di tiap-tiap periode waktu. Namun volatilitas suku bunga sesaat merupakan faktor yang hanya dapat diperoleh jika suku bunga sesaat telah ditentukan. Adapun data yang dapat diambil dari pasar obligasi tanpa kupon adalah kurva imbal hasil dan kurva volatilitas imbal hasil. Oleh karena itu diperlukan suatu teknik yang dapat memanfaatkan kurva volatilitas imbal hasil untuk membangun proses pohon suku bunga sesaat tersebut.

Makalah Black-Derman-Toy memberikan kebebasan kepada pembacanya untuk membangun modelnya dengan berbagai cara berbeda. Haerini (2013) membangun model BDT dengan memecahkan model persamaan diferensial stokastik BDT menggunakan kalkulus stokastik dan gerak Brown. Qoyyimi (2008) menyelesaikan model BDT dengan teknik *forward-induction* yang menggunakan harga obligasi pada tiap-tiap titik waktu yang disebut harga Arrow-Debreu, sehingga penghitungan suku bunga sesaat menggunakan persamaan diferensial stokastik dapat dihindari. Teknik tersebut diperkenalkan oleh Panjer dkk pada tahun 1998. Pada skripsi ini akan digunakan teknik *forward-induction* seperti yang digunakan Qoyyimi. Teknik *forward-induction* nantinya akan memberikan persamaan yang dapat dipecahkan dengan peubah-peubah berupa volatilitas suku bunga sesaat dan salah satu dari kemungkinan suku bunga sesaat.

Input yang digunakan dalam membangun model BDT adalah kurva imbal hasil dan kurva volatilitas imbal hasil. Volatilitas imbal hasil diperoleh dengan menghitung simpangan baku dari logaritma natural tingkat imbal hasil harian untuk obligasi tanpa kupon dengan waktu jatuh tempo yang sama. Selanjutnya digunakan $\sigma_y(t)$ untuk melambangkan volatilitas imbal hasil. Kurva imbal hasil dan kurva volatilitas imbal hasil dapat disajikan dalam sebuah tabel seperti pada Tabel 2.

Tabel 2.Tabel penyajian kurva imbal hasil dan kurva volatilitas imbal hasil.

Waktu jatuh tempo (t)	1	2	3	4	...	n
Tingkat imbal hasil ($y(0,0,t)$)	$y(0,0,1)$	$y(0,0,2)$	$y(0,0,3)$	$y(0,0,4)$	...	$y(0,0,n)$
Volatilitas imbal hasil ($\sigma_y(t)$)	$\sigma_y(1)$	$\sigma_y(2)$	$\sigma_y(3)$	$\sigma_y(4)$	...	$\sigma_y(n)$

Sebelum dibahas langkah-langkah membangun pohon suku bunga sesaat model BDT, akan diperkenalkan beberapa teori yang akan digunakan dalam proses penghitungan suku bunga sesaat. Teori yang akan dibahas meliputi volatilitas suku bunga sesaat, harga obligasi tanpa kupon, volatilitas imbal hasil dan harga Arrow-Debreu.

Definisi 28. (Black dkk, 1990)

Volatilitas suku bunga sesaat didefinisikan sebagai berikut:

$$\sigma_r(t) = 0{,}5 \ \ln\left(\frac{r(t, l+1)}{r(t, l)}\right) \tag{2.39}$$

atau dalam bentuk lain:

$$\sigma_r(t) = 0{,}5 \ \ln\left(\frac{r(t, l+1)}{r(t, l)}\right)$$

$$2\sigma_r(t) = \ln\left(\frac{r(t, l+1)}{r(t, l)}\right)$$

$$e^{2\sigma_r(t)} = \frac{r(t, l+1)}{r(t, l)}$$

$$r(t, l+1) = e^{2\sigma_r(t)} r(t, l). \tag{2.40}$$

Andaikan $q(t, l)$ adalah nilai pada ukuran martingale Q yang menunjukkan peluang suku bunga sesaat naik pada waktu $t+1$ apabila $r(t) = r(t, l)$, maka nilai $q(t, l)$ adalah:

$$q(t, l) = Q[r(t+1) = r(t+1, l+1) | r(t) = r(t, l)]. \tag{2.41}$$

Seperti telah disampaikan di penjelasan di awal subbab ini, $q(t, l)$ ditetapkan sebesar 0,5. Diasumsikan model menyesuaikan barisan volatilitas suku bunga sesaat $(\sigma_r(1), \sigma_r(2), \ldots, \sigma_r(t), \ldots)$, yang diasumsikan dapat diperoleh dari pasar keuangan. Didefinisikan $\sigma_r(t)^2$ sebagai berikut

$$\sigma_r(t)^2 = Var[\ln r(t)|r(t-1) = r(t-1,l)]. \tag{2.42}$$

Kemudian diperoleh dari persamaan (2.18) dan (2.41) bahwa

$$E[\ln r(t)|r(t-1) = r(t-1,l)] = 0{,}5 \ln r(t,l+1) + 0{,}5 \ln r(t,l) \tag{2.43}$$

Sehingga dengan persamaan (2.43) dan (2.13) diperoleh

$$\begin{aligned}
&\sigma_r(t)^2 = Var[\ln r(t)|r(t-1) = r(t-1,l)] \\
&= E[\ln^2 r(t)|\ r(t-1) = r(t-1,l)] - \{E[\ln r(t)|\ r(t-1) = r(t-1,l)]\}^2 \\
&= 0{,}5 \ln^2 r(t,l+1) + 0{,}5 \ln^2 r(t,l) - [\ 0{,}5 \ln r(t,l+1) + 0{,}5 \ln r(t,l)]^2 \\
&= 0{,}5 \ln^2 r(t,l+1) + 0{,}5 \ln^2 r(t,l) - [0{,}25 \ln^2 r(t,l+1) + 0{,}5 \ln r(t,l+1) \ln(r(t,l) + 0{,}25 \ln^2 r(t,l)] \\
&= \ 0{,}25 \ln^2 r(t,l+1) - 0{,}5 \ln r(t,l+1) \ln(r(t,l) + 0{,}25 \ln^2 r(t,l) \\
&= [0{,}5 \ln r(t,l+1) - 0{,}5 \ln r(t,l)]^2 \\
&= \left[0{,}5 \ln\left(\frac{r(t,l+1)}{r(t,l)}\right)\right]^2.
\end{aligned}$$

Akar kuadrat dari $\sigma_r(t)^2$ akan menghasilkan persamaan (2.39).

Definisi 29. (Gaillardetz, 2008)

Bentuk umum harga obligasi tanpa kupon yang memanfaatkan pohon suku bunga sesaat dalam penghitungannya didefinisikan oleh:

$$L(0,0,t) = \frac{2^{-t+1}}{(1+r(0))} \sum_{l_1=0}^{1} \sum_{l_2=l_1}^{l_1+1} \dots \sum_{l_{t-1}=l_{t-2}}^{l_{t-2}+1} \prod_{m=1}^{t-1} \left(1 + r(m,l_m)\right)^{-1}. \tag{2.44}$$

Definisi 30. (Panjer dkk, 1998)

Harga obligasi tanpa kupon $L(n,j,m)$ adalah harga obligasi tanpa kupon di titik (n,j) pada pohon suku bunga sesaat untuk waktu jatuh tempo m. Diperkenalkan juga $y(n,j,m)$ yaitu tingkat imbal hasil pada posisi yang sama dengan $L(n,j,m)$. Hubungan keduanya didefinisikan sebagai berikut:

$$L(n,j,m) = \frac{1}{\left(1 + y(n,j,m)\right)^{m-n}}. \tag{2.45}$$

Definisi 31. (Panjer dkk, 1998)

Volatilitas tingkat imbal hasil dapat didefinisikan sebagai berikut

$$\sigma_y(t) = 0{,}5\ \ln\left(\frac{y(1{,}1,t)}{y(1{,}0,t)}\right) \tag{2.46}$$

dengan $y(1{,}1,t)$ dan $y(1{,}0,t)$ masing-masing adalah tingkat imbal hasil pada titik (1,1) dan (1,0) untuk obligasi dengan waktu jatuh tempo t.

Definisi 32. (Panjer dkk, 1998)

Harga Arrow-Debreu yang disimbolkan $A(n,i,m,j)$ adalah nilai harapan harga obligasi pada titik (n,i) dengan $n < m$ di mana lintasan yang dilalui proses suku bunga sesaat melalui titik (m,j). Dengan asumsi bahwa peluang naik dan turun suku bunga sesaat adalah 0,5 dan $n = m - 1$, dapat didefinisikan harga $A(n,i,m,j)$ sebagai berikut:

$$A(m-1,i,m,j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2[1 + r(m-1,j)]}, i = j \\ \dfrac{1}{2[1 + r(m-1,j-1)]}, i = j-1 \\ 0, \quad \text{untuk yang lain.} \end{cases} \tag{2.47}$$

Adapun hubungan antara $A(n,i,m,j)$ dengan $L(n,i,m)$ adalah

$$L(n,i,m) = \sum_{j=0}^{m} A(n,i,m,j)\,. \tag{2.48}$$

Jika hanya rumus di atas yang digunakan, maka akan ada harga Arrow-Debreu pada titik-titik tertentu yang tidak dapat dihitung nilainya. Kemudian diperkenalkan harga Arrow-Debreu yang memiliki hubungan rekursif untuk menghitung semua harga Arrow-Debreu yang mungkin:

$$A(n,i,m+1,j) = \begin{cases} \dfrac{A(n,i,m,j)}{2(1+r(m,j))}, j = 0 \\ \dfrac{A(n,i,m,j)}{2(1+r(m,j))} + \dfrac{A(n,i,m,j-1)}{2(1+r(m,j-1))}, j = 1,2,\dots,m \\ \dfrac{A(n,i,m,j-1)}{2(1+r(m,j-1))}, j = m+1. \end{cases} \quad (2.49)$$

Langkah-langkah membangun pohon suku bunga sesaat model BDT dengan teknik *forward-induction* adalah sebagai berikut:

1. Untuk menentukan $r(0,0)$, tetapkan $y(0,0,1) = r(0,0)$. Alasan penetapan ini adalah karena keduanya adalah tingkat suku bunga yang berlaku selama setahun antara periode ke-0 dan periode ke-1. Kemudian dicari harga $A(0,0,1,0)$ dan $A(0,0,1,1)$ menggunakan persamaan (2.47).
2. Untuk menentukan $r(1,0)$ dan $r(0,0)$ terlebih dahulu harus diketahui bahwa $y(1,0,2)$ dan $y(1,1,2)$ masing-masing adalah tingkat imbal hasil pada titik (1,0) dan (1,1) sehingga diperoleh hubungan $y(1,0,2) = r(1,0)$ dan $y(1,1,2) = r(1,1)$. Dengan persamaan (2.46) akan dihasilkan hubungan $r(1,0)$ dan $r(1,1)$ yaitu

$$r(1,1) = e^{2\sigma_y(2)} r(1,0). \quad (2.50)$$

Kemudian dengan memanfaatkan persamaan (2.38) dan (2.40) akan dibentuk persamaan utama yang dapat digunakan untuk memecahkan $r(1,0)$. Persamaan yang diperoleh akan menjadi seperti demikian:

$$L(0,0,2) = L(0,0,2)$$

$$\left(\frac{1}{1+y(0,0,2)}\right)^2 = \frac{0,5}{1+r(0,0)}\left(\frac{1}{1+r(1,0)} + \frac{1}{1+r(1,1)}\right)$$

$$= \frac{A(0,0,1,0)}{1+r(1,0)} + \frac{A(0,0,1,1)}{1+r(1,1)} \tag{2.51}$$

$$= \frac{A(0,0,1,0)}{1+r(1,0)} + \frac{A(0,0,1,1)}{1+r(1,1)}$$

$$= \frac{A(0,0,1,0)}{1+r(1,0)} + \frac{A(0,0,1,1)}{1+e^{2\sigma_y(2)}r(1,0)}.$$

Karena nilai $y(0,0,2)$, $\sigma_y(2)$, $A(0,0,1,0)$, dan $A(0,0,1,1)$ telah diketahui, maka hanya tersisa satu peubah yaitu $r(1,0)$, sehingga persamaan (2.51) dapat diselesaikan untuk $r(1,0)$. Setelah nilai $r(1,0)$ diperoleh, kemudian dengan persamaan (2.50) dapat dihitung nilai $r(1,1)$. Untuk mempermudah langkah selanjutnya, dihitung nilai $A(0,0,2,j)$ untuk $j = 0,1,2$ dengan persamaan (2.49) dan nilai $A(1,i,2,j)$ untuk $i = 0,1$ dan $j = 0,1,2$ dengan persamaan (2.47).

3. Untuk menentukan $r(2,2)$, $r(2,1)$ dan $r(2,0)$ dan $r(t,l)$ selanjutnya terlebih dahulu dibuat hubungan antara ketiganya dengan persamaan (2.39). Andaikan $e^{2\sigma_r(2)} = \sigma(2)$, maka hubungan ketiga suku bunga sesaat berbentuk demikian:

$$\begin{aligned} r(2,1) &= \sigma(2)r(2,0) \\ r(2,2) &= \sigma(2)r(2,1) = \big(\sigma(2)\big)^2 r(2,0). \end{aligned} \tag{2.52}$$

Pada tahap ini ada dua peubah yang tidak diketahui nilainya yaitu $\sigma(2)$ dan $r(2,0)$. Kemudian digunakan persamaan (2.44) dan (2.38) untuk membuat persamaan utama. Secara singkat persamaan tersebut memiliki bentuk seperti ini:

$$L(0,0,3) = L(0,0,3)$$

$$\left(\frac{1}{1+y(0,0,3)}\right)^3 = \frac{A(0,0,2,0)}{1+r(2,0)} + \frac{A(0,0,2,1)}{1+r(2,1)} + \frac{A(0,0,2,2)}{1+r(2,2)}$$

$$= \frac{A(0,0,2,0)}{1+r(2,0)} + \frac{A(0,0,2,1)}{1+\sigma(2)r(2,0)}$$

$$+ \frac{A(0,0,2,2)}{\left(\sigma(2)\right)^2 r(2,0)}$$

$$= \sum_{j=0}^{2} \frac{A(0,0,2,j)}{\left(\sigma(2)\right)^j r(2,0)}. \tag{2.53}$$

Langkah ini baru menghasilkan satu persamaan saja dengan dua peubah, artinya diperlukan satu lagi persamaan agar kedua peubah dapat diselesaikan. Pembentukan persamaan kedua akan menggunakan informasi volatilitas imbal hasil tahun ke-3 yaitu dengan memanfaatkan persamaan (2.45) dan (2.46). Dengan persamaan (2.46) diperoleh:

$$y(1,1,3) = y(1,0,3)e^{2\sigma_y(3)}. \tag{2.54}$$

Persamaan (2.45) menghasilkan:

$$L(1,j,3) = \frac{1}{\left(1+y(1,j,3)\right)^2}, j = 0,1 \tag{2.55}$$

atau bentuk lainnya adalah

$$y(1,j,3) = \left(L(1,j,3)\right)^{-\frac{1}{2}} - 1, j = 0,1. \tag{2.56}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan (2.56) ke (2.54) diperoleh persamaan berikut:

$$\left(L(1,1,3)\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 = \left(\left(L(1,0,3)\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right) e^{2\sigma_y(3)} \tag{2.57}$$

Nilai $L(1,0,3)$ dan $L(1,1,3)$ dapat ditentukan dengan persamaan (2.44) yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L(1,0,3) &= \frac{1}{1+r(1,0)}\left(\frac{1}{2\left(1+r(2,0)\right)} + \frac{1}{2\left(1+r(2,1)\right)}\right) \\ &= \frac{A(1,0,2,0)}{1+r(2,0)} + \frac{A(1,0,2,1)}{1+r(2,1)} \\ &= \sum_{j=0}^{1} \frac{A(1,0,2,j)}{1+r(2,j)} = \sum_{j=0}^{1} \frac{A(1,0,2,j)}{1+r(2,0)\left(\sigma(2)\right)^{j}}, \end{aligned} \tag{2.58}$$

$$\begin{aligned} L(1,1,3) &= \frac{1}{1+r(1,1)}\left(\frac{1}{2\left(1+r(2,1)\right)} + \frac{1}{2\left(1+r(2,2)\right)}\right) \\ &= \frac{A(1,1,2,1)}{1+r(2,1)} + \frac{A(1,1,2,2)}{1+r(2,2)} \\ &= \sum_{j=1}^{2} \frac{A(1,1,2,j)}{1+r(2,j)} = \sum_{j=1}^{2} \frac{A(1,1,2,j)}{1+r(2,0)\left(\sigma(2)\right)^{j}}. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Dua persamaan di atas dapat disubstitusikan ke persamaan (2.57) menjadi bentuk demikian:

$$\left(\sum_{j=1}^{2} \frac{A(1,1,2,j)}{1+r(2,0)\left(\sigma(2)\right)^{j}}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 = \left(\left(\sum_{j=0}^{1} \frac{A(1,0,2,j)}{1+r(2,0)\left(\sigma(2)\right)^{j}}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right) e^{2\sigma_y(3)}. \tag{2.60}$$

Sekarang telah didapatkan dua persamaan yang mengandung peubah $r(2,0)$ dan $\sigma(2)$, yaitu persamaan (2.60) dan (2.53). Sistem persamaan taklinear tersebut kemudian dapat diselesaikan dengan metode numerik yang menghasilkan nilai $r(0,2)$ dan $\sigma(2)$. Secara otomatis nilai $r(2,1)$ dan $r(2,2)$ dapat diperoleh juga. Untuk nilai-nilai $r(t,l)$ selanjutnya dapat menggunakan cara yang sama dengan proses menghitung $r(2,0), r(2,1)$ dan $r(2,2)$. Tentunya terlebih dahulu harus dihitung harga Arrow-Debreu yang bersesuaian.

Contoh 7

Diketahui data kurva imbal hasil pasar obligasi tanpa kupon adalah seperti pada Tabel 3 berikut:

Tabel 3. Tabel Kurva Imbal Hasil (Black dkk, 1990)

Waktu jatuh tempo t	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Tingkat imbal hasil ($y(0,0,t)$)	10%	11%	12%	12.5%	13%
Volatilitas imbal hasil ($\sigma_y(t)$)	20%	19%	18%	17%	16%

Akan dibuat pohon suku bunga sesaat selama 3 tahun dari data kurva imbal hasil pada Tabel 3. Langkah-langkah untuk membangun pohon suku bunga sesaat akan mengikuti langkah yang telah diuraikan sebelumnya.

1. Ditetapkan $y(0,1)$ sebagai $r(0,0)$ jadi $y(0,0,1) = r(0,0) = 10\%$. Kemudian akan ditentukan harga $A(0,0,1,0)$ dan $A(0,0,1,1)$ dengan persamaan (2.47)

$$A(0,0,1,0) = A(0,0,1,1) = \frac{1}{2\big(1 + r(0,0)\big)} = \frac{1}{2(1 + 10\%)} = 0{,}4545.$$

2. Diketahui $y(0,0,2) = 11\%$ dan $\sigma_y(2) = 19\%$. Dibuat hubungan antara $r(1,1)$ dan $r(1,0)$ dengan persamaan (2.50) yang akan berbentuk:

$$r(1,1) = e^{2(19\%)} r(1,0)$$

$$= 1,462\, r(1,0).$$

Kemudian dilakukan penghitungan nilai $L(0,2)$ dengan persamaan (2.38) sebagai berikut:

$$L(0,2) = \left(\frac{1}{1 + 11\%}\right)^2 = 0,8116.$$

Setelah itu akan dibentuk persamaan utama dengan persamaan (2.51), yang berbentuk demikian:

$$\left(\frac{1}{1 + 11\%}\right)^2 = \frac{0,4545}{1 + r(1,0)} + \frac{0,4545}{1 + 1,462 r(1,0)}$$

$$0,8116 = \frac{0,4545}{1 + r(1,0)} + \frac{0,4545}{1 + 1,462 r(1,0)}.$$

Persamaan di atas kemudian dapat diselesaikan untuk $r(1,0)$ sehingga diperoleh nilai $r(1,0) = 9,79\%$ dan

$$r(1,1) = 1.462 r(1,0) = 1.462(9,79\%) = 14,32\%.$$

Langkah selanjutnya adalah menentukan harga Arrow-Debreu untuk $A(n, i, 2, j)$ untuk $n, i = 0,1$ dan $j = 0,1,2$. Adapun untuk $A(0,0,2,j)$ diselesaikan dengan persamaan (2.49) sedangkan yang lain diselesaikan dengan persamaan (2.47). Uraian penyelesaian harga-harga tersebut adalah sebagai berikut:

$$A(0,0,2,0) = \frac{A(0,0,1,0)}{2\big(1 + r(1,0)\big)} = \frac{0,4545}{2(1 + 9,79\%)} = 0,2070$$

$$A(0,0,2,1) = \frac{A(0,0,1,0)}{2\big(1 + r(1,0)\big)} + \frac{A(0,0,1,1)}{2\big(1 + r(1,1)\big)} = 0,4058$$

$$A(0,0,2,2) = \frac{A(0,0,1,1)}{2\big(1 + r(1,1)\big)} = \frac{0,4545}{2(1 + 14,32\%)} = 0,1988$$

$$A(1,0,2,0) = A(1,0,2,1) = \frac{1}{2\big(1 + r(1,0)\big)} = \frac{1}{2(1 + 9,79\%)} = 0,4554$$

$$A(1,1,2,0) = A(1,1,2,1) = \frac{1}{2\big(1 + r(1,0)\big)} = \frac{1}{2(1 + 14,32\%)} = 0,4374$$

$$A(1,0,2,2) = A(1,1,2,0) = 0.$$

3. Diketahui $y(0,3) = 12\%$ dan $\sigma_y(3) = 18\%$. Akan dicari nilai $r(2,0), r(2,1)$ dan $r(2,0)$. Dengan persamaan (2.52) diperoleh hubungan antar suku bunga sesaat di waktu ke-2 adalah sebagai berikut:

$$r(2,1) = \sigma(2)r(2,0)$$

$$r(2,2) = \sigma(2)r(2,1) = \big(\sigma(2)\big)^2 r(2,0).$$

Kemudian digunakan persamaan (2.53) untuk menemukan persamaan pertama

$$\left(\frac{1}{1 + y(0,3)}\right)^3 = \sum_{j=0}^{2} \frac{A(0,0,2,j)}{\big(\sigma(2)\big)^j r(2,0)}$$

$$\left(\frac{1}{1 + 12\%}\right)^3 = \sum_{j=0}^{2} \frac{A(0,0,2,j)}{\big(\sigma(2)\big)^j r(2,0)}$$

$$0,7117 = \frac{A(0,0,2,0)}{1 + r(2,0)} + \frac{A(0,0,2,1)}{1 + \sigma(2)r(2,0)} + \frac{A(0,0,2,2)}{\big(\sigma(2)\big)^2 r(2,0)}$$

$$0,7117 = \frac{0,2070}{1 + r(2,0)} + \frac{0,4058}{1 + \sigma(2)r(2,0)} + \frac{0,1988}{\big(\sigma(2)\big)^2 r(2,0)}. \qquad (2.61)$$

Persamaan kedua dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.60), dengan informasi yang telah dimiliki bentuknya adalah demikian:

$$\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{A(1,1,2,j)}{1+r(2,0)\big(\sigma(2)\big)^{j}}\right)^{-\frac{1}{2}}-1=\left(\left(\sum_{j=0}^{1}\frac{A(1,0,2,j)}{1+r(2,0)\big(\sigma(2)\big)^{j}}\right)^{-\frac{1}{2}}-1\right)e^{2\sigma_y(3)}$$

$$\left(\frac{A(1,0,2,0)}{1+r(2,0)}+\frac{A(1,0,2,1)}{1+r(2,0)\sigma(2)}\right)^{-\frac{1}{2}}-1=\left(\left(\frac{A(1,1,2,1)}{1+r(2,0)\sigma(2)}+\frac{A(1,1,2,2)}{1+r(2,0)\big(\sigma(2)\big)^{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}-1\right)e^{2(18\%)}$$

$$\left(\frac{0{,}4554}{1+r(2,0)}+\frac{0{,}4554}{1+r(2,0)\sigma(2)}\right)^{-\frac{1}{2}}-1=\left(\left(\frac{0{,}4374}{1+r(2,0)\sigma(2)}+\frac{0{,}4374}{1+r(2,0)\big(\sigma(2)\big)^{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}-1\right)1{,}433. \tag{2.62}$$

Persamaan (2.61) dan persamaan (2.62) membentuk sistem persamaan taklinear dengan dua peubah yaitu $r(2{,}0)$ dan $\sigma(2)$. Metode numerik digunakan untuk mendekati nilai $r(2{,}0)$ dan $\sigma(2)$ kemudian dihasilkan nilai $r(2{,}0) = 9{,}76\%$ dan $\sigma(2) = 1{,}411$. Nilai $r(2{,}1)$ dan $r(2{,}2)$ kemudian dihasilkan dari hubungannya masing-masing dengan $r(2{,}0)$ sesuai dengan persamaan (2.52) sehingga diperoleh $r(2{,}1) = 13{,}77\%$ dan $r(2{,}2) = 19{,}42\%$. Pohon suku bunga sesaat yang telah diperoleh disajikan pada Tabel 4.

Tabel 4. Tabel Pohon Suku Bunga Sesaat.

$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$
10%	9,79% 14,32%	9,76% 13,77% 19,42%

H. Pengukuran Galat

Pada bidang peramalan dan model regresi dikenal beberapa jenis pengukuran galat yang digunakan untuk mengukur seberapa dekat prediksi model dengan data yang sebenarnya. Beberapa jenis pengukuran galat yang telah dikenal antara lain *MAPE* (*Mean Absolute Percentage Error*) dan *MSE* (*Mean Squared Error*).

Definisi 33. (Hanke & Wichern, 2005)

Mean Absolute Percentage Error adalah pengukuran galat yang dirumuskan sebagai berikut:

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{\left|Y_t - \hat{Y}_t\right|}{Y_t} \times 100\% \tag{2.63}$$

dengan Y_t adalah data aktual, $\hat{Y}_t$ hasil peramalan dan n adalah banyaknya data.

Definisi 34. (Hanke & Wichern, 2005)

Mean Squared Error adalah pengukuran galat yang dirumuskan sebagai berikut:

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(Y_t - \hat{Y}_t\right)^2. \tag{2.64}$$