BAB II

KAJIAN PUSTAKA

A. Logika *Fuzzy*

Logika *fuzzy* pertama kali dikembangkan oleh Prof. Lotfi A. Zadeh, seorang peneliti dari Universitas California, pada tahun 1960-an. Logika *fuzzy* dikembangkan dari teori himpunan *fuzzy*.

1. Himpunan *Fuzzy*

Himpunan *fuzzy* adalah pengelompokan berdasarkan variabel bahasa (*linguistik variable*), yang dinyatakan dengan fungsi keanggotaan, dalam semesta S. Keanggotaan suatu nilai pada himpunan dinyatakan dengan derajat keanggotaan yang nilainya berada pada interval [0,1].

Himpunan *fuzzy* didasarkan pada jangkauan fungsi karakteristik sedemikian hingga fungsi tersebut akan mencakup bilangan real pada interval [0.1]. Nilai keanggotaannya menunjukkan bahwa suatu item tidak hanya bernilai benar atau salah. Nilai nol menunjukkan salah, nilai 1 menunjukkan benar, dan masih ada nilai-nilai yang terletak antara benar dan salah.

Definisi 2.1

Himpunan *fuzzy* A pada X dikatakan subset dari himpunan *fuzzy* B pada X, jika dan hanya jika $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, $\forall\ x \in X$.

$\mu_A(x)$ dapat ditulis $A(x)$ dan $\mu_B(x)$ dapat ditulis $B(x)$.

2. Fungsi Keanggotaan

Dalam logika *fuzzy* fungsi keanggotaan menyatakan keanggotaan pada suatu himpunan. Fungsi keanggotaan $\mu_A(x)$ bernilai 1 jika x anggota himpunan A. Jadi fungsi keanggotaan hanya bisa bernilai 0 atau 1.

$\mu_A(x) : \rightarrow x \{0,1\}$

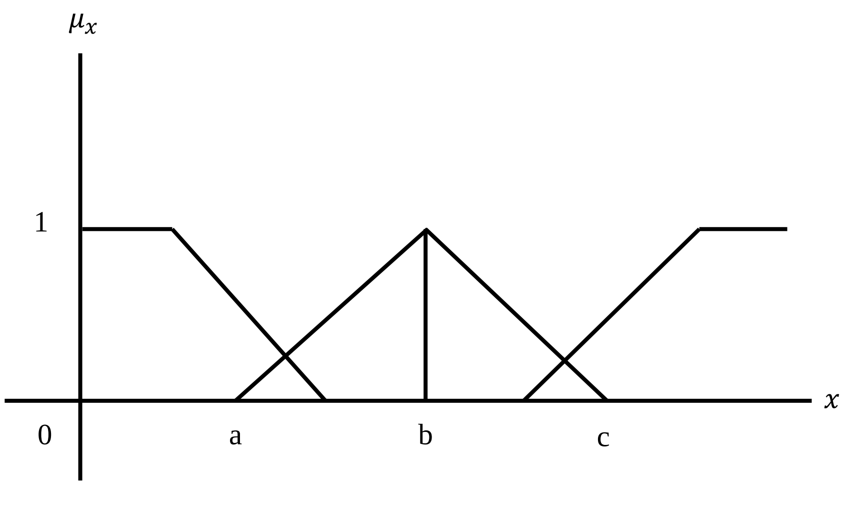
Berikut beberapa jenis fungsi keanggotaan:

a. Fungsi Keanggotaan Segitiga

Persamaan fungsi keanggotaan segitiga adalah

$$\mu(x; a, b, c) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & b \leq x \leq a \\ \frac{c-x}{c-b} & b < x \leq c \\ 1 & x < c \end{cases} \quad (1)$$

Persamaan tersebut direpresentasikan dalam bentuk grafik sebagai berikut:



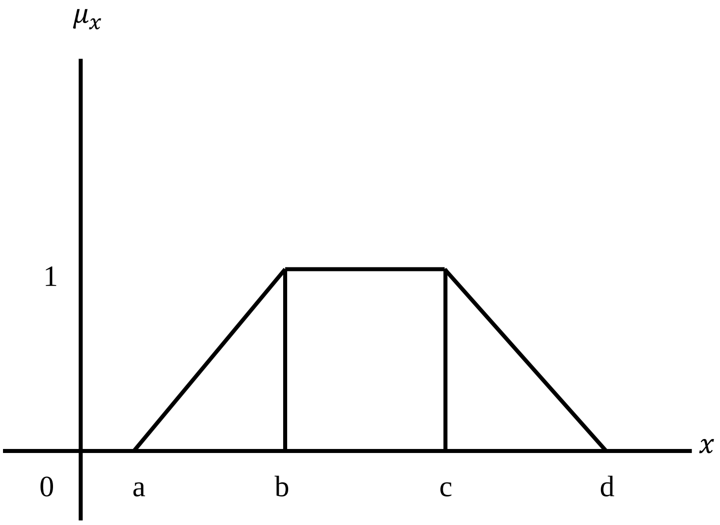
Gambar 2.1 Grafik fungsi keanggotaan Segitiga

b. Fungsi Keanggotaan Trapesium

Persamaan fungsi keanggotaan trapesium adalah

$$\mu(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le b < x \\ 1 & b \le x \le c \\ \frac{d-x}{d-c} & c < x \le d \\ 0 & x > d \end{cases} \quad (2)$$

Persamaan tersebut direpresentasikan dalam bentuk grafik sebagai berikut:



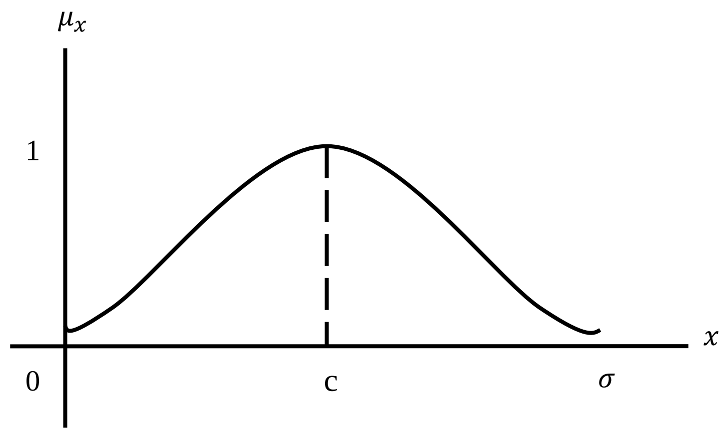
Gambar 2.2 Grafik fungsi keanggotaan Trapesium

c. Fungsi Keanggotaan Gaussian

Persamaan fungsi keanggotaan Gaussian adalah

$$\mu(x; c, \sigma) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2} \quad (3)$$

Persamaan tersebut direpresentasikan dalam bentuk grafik sebagai berikut:



Gambar 2.3 Grafik fungsi keanggotaan Gaussian

3. Operasi Logika *Fuzzy*

Operasi-operasi yang dapat dilakukan dalam logika dan himpunan *fuzzy* sama dengan dalam logika dan himpunan biasa namun mempunyai definisi yang berbeda.

Definisi 2.2

Diberikan dua himpunan *fuzzy* A dan B pada semesta X, $A \cup B$ dan $A \cap B$ adalah himpunan-himpunan *fuzzy* pada X yang derajat keanggotaannya didefinisikan untuk semua $x \in X$ oleh persamaan:

$$\mu_{(A\cup B)}(x) = \mu_A \vee \mu_B(x)$$

$$= Max[\mu_A(x), \mu_B(x)], \forall x \in X$$

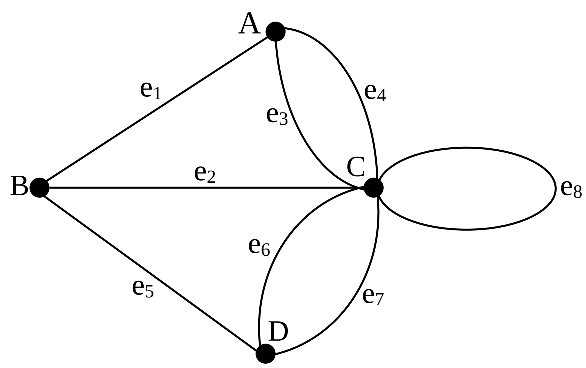
$$\mu_{(A\cap B)}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

$$= Min[\mu_A(x), \mu_B(x)], \forall x \in X$$

B. Teori Graf

Secara umum pengertian graf adalah himpunan berhingga simpul-simpul (*vertex/node*) tak kosong yang dinotasikan dengan simbol v dan himpunan sisi (*edge*) yang dinotasikan dengan e. Pengertian sisi adalah sebuah garis yang menghubungkan dua buah simpul. Sedangkan untuk penulisan graf, graf G dapat dinyatakan dengan $G = (V, E)$ dimana V adalah himpunan simpul dari E, dan E adalah himpunan sisi yang merupakan bagian dari $V \times V$. Untuk memudahkan pengertian graf biasanya menggunakan gambaran geometri dari graf dengan cara sebagai berikut:

Setiap simpul digambarkan sebagai suatu titik pada sebuah bidang datar, sedangkan setiap sisi digambarkan sebagai sebuah garis yang menghubungkan dua buah simpul dalam graf tersebut.



Gambar 2.4 Ilustrasi graf

Pada gambar tersebut, sisi $e_3 = (A, C)$ dan sisi $e_4 = (A, C)$ dinamakan sisi-sisi ganda (*multiple edges* atau *parallel edges*) karena kedua sisi tersebut menghubungkan dua simpul yang sama, yaitu simpul A dan C. Sedangkan sisi

$e_8 = (C, C)$ dinamakan sisi gelang atau kalang (*loop*) karena berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

1. Terminologi Dasar Graf

a. Bertetangga (*Adjacent*)

Dua buah simpul pada graf tak berarah G dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi pada graf G.

b. Beririsan (*Incidency*)

Ujung sebarang sisi $e = (v_j, v_k)$, sisi e dikatakan beririsan dengan simpul v_j dan simpul v_k.

c. Simpul terpencil (*Isolated vertex*)

Simpul terpencil adalah simpul yang tidak mempunyai sisi yang beririsan dengannya. Atau dapat dapat diartikan sebagai simpul yang tidak satupun bertetangga dengan simpul-simpul lainnya.

d. Gelang (*Loop*)

Gelang (*loop*) pada graf adalah sisi yang simpul awal dan simpul akhirnya sama.

e. Derajat (*Degree*)

Derajat suatu simpul pada graf tak berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut, dan ditulis sebagai *Nn* yang dalam hal ini *n* adalah jumlah simpul.

2. Jenis-Jenis Graf

a. Graf Nol (*Null Graph*)

Dalam definisi graf $G = (V, E)$ himpunan sisi E dimungkinkan merupakan sebuah himpunan kosong.

b. Graf Sederhana (*Simple Graph*)

Graf sederhana adalah graf yang tidak memiliki *loop* dan sisi parallel.

c. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf sederhana. Jika setiap pasang simpul v_i, v_j terdapat sebuah sisi yang menghubungkannya

d. Graf Bagian (*Subgraf*)

Sebuah graf H disebut graf bagian dari graf G, ditulis $H \subseteq G$, jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$.

e. Graf Teratur (*Regular Graph*)

Sebuah graf disebut graf teratur jika semua simpulnya berderajat sama.

f. Graf Bipartit (*Bipartite Graph*)

Sebuah graf disebut graf bipartit jika graf tersebut memuat simpul-simpul yang dapat dibagi menjadi dua himpunan sedemikian sehingga tak ada sisi-sisi yang menghubungkan simpul-simpul pada himpunan yang sama.

3. Konsep Keterhubungan Pada Graf

a. Perjalanan (*Walk*)

Misalkan u dan v adalah simpul-simpul dari graf G. Perjalanan $u - v$ di G adalah barisan berganti antara simpul dan rusuk di G, diawali dengan simpul u dan berakhir di simpul v, sedemikian sehingga setiap sisi menghubungkan simpul-simpul tepat sebelum dan sesudahnya.

b. Jalur (*Trail*)

Suatu jalur $u - v$ ($u - v$ trail) di dalam graf G adalah perjalan yang tidak mengulangi sebarang sisi.

c. Lintasan (*Path*)

Suatu lintasan $u - v$ ($u - v$ path) adalah perjalanan $u - v$ (atau jalur $u - v$) yang tidak mengulangi sebarang simpul.

d. Terhubung (*Connected*)

Dua buah simpul u dan v di dalam graf G dikatakan terhubung (*connected*), jika $u = v$, atau $u \neq v$ terdapatlah lintasan $u - v$ di G. Suatu graf G dikatakan terhubung jika dua simpul di G adalah terhubung jika tidak demikian G disebut takterhubung (*disconnected*).

e. Sirkuit (*Circuit*) dan Sikel (*Cycle*)

Lintasan $u - v$ dengan sifat $u = v$ dan paling sedikit memuat tiga sisi disebut sirkuit. Suatu sirkuit yang tidak mengulang sebarang simpul (kecuali pertama dan terakhir) disebut sikel.

C. Pengertian Graf *Fuzzy*

Graf *fuzzy* diperoleh dengan memberi bobot atau derajat keanggotaan pada simpul-simpul (*vertex*) dan pada sisi-sisi (*edge*) dari suatu graf.

Definisi 2.6

Graf *fuzzy* $G = (V, \sigma_G,\ \mu_G)$ adalah himpunan berhingga simpul tak kosong V dengan σ_G adalah himpunan simpul *fuzzy* pada V dengan fungsi keanggotaan σ dan μ_G adalah himpunan sisi *fuzzy* pada $V \times V$ dengan fungsi keanggotaan μ, sedemikian sehingga:

i. $\sigma : V\ [0,1]$

ii. $\mu : V \times V\ [0,1]$

$\mu\ (x, y) = \mu\ (xy) \leq \sigma(x) \wedge \sigma(y)$, $\forall\ x,y \in$ V,

dengan $\wedge$ menyatakan minimum dari $\sigma(x)$ dan $\sigma(y)$.

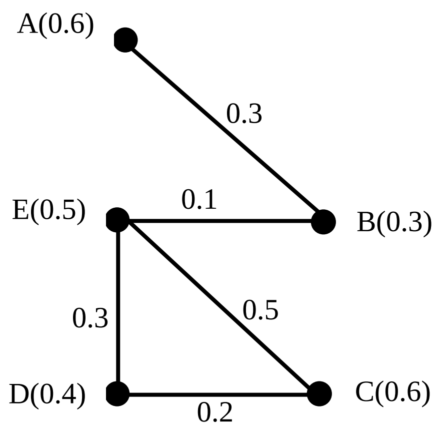
σ_G disebut himpunan simpul *fuzzy* graf G, dan

μ_G disebut himpunan sisi *fuzzy* graf G.

Contoh 2.2:

Misalkan diberikan graf *fuzzy* G dengan himpunan simpul $V = \{A, B, C, D, E\}$ dan himpunan sisi $E = \{(AB), (BE), (CD), (CD), (DE)\}$. Fungsi keanggotaan dari himpunan simpulnya adalah $\sigma(A) = 0.6$; $\sigma(B) = 0.3$; $\sigma(C) = 0.6$; $\sigma(D) = 0.4$; $\sigma(E) = 0.5$ dan fungsi keanggotaan himpunana sisinya adalah $\mu(AB) = 0.3$; $\mu(BE) = 0.1$; $\mu(CD) = 0.2$;

$\mu(CE) = 0.5\ ; \mu(DE) = 0.3,$ maka graf *fuzzy* G tersebut adalah sebagai berikut:



Gambar 2.5 Graf *fuzzy* G

Definisi 2.7

Graf *fuzzy* $H = \ V, v_H, t_H)$ disebut subgraf *fuzzy* dari graf *fuzzy* $G = (V, \sigma_G,$ $\mu_G)$ jika:

i. $v(x) \leq \sigma(x), \forall\ x \in V(G).$

ii. $t(xy) \leq \mu(xy), \forall\ xy \in V \times V.$

D. Operasi Pada Graf *Fuzzy*

Terdapat dua jenis operasi pada graf *fuzzy* yaitu Gabungan dan *Join*.

Definisi 2.8

Misalkan $G_1 = (V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1})$ dan $G_2 = (V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2})$ adalah graf *fuzzy*, dengan σ_i adalah fungsi keanggotaan V_i, dan μ_i adalah fungsi keanggotaan V_i $\times\ V_i\ \forall\ i$ = 1,2.

Didefinisikan gabungan fungsi keanggotaan G_1 dan G_2 sebagai berikut:

i. $(\sigma_1 \cup \sigma_2)\ (u) \ = \ \sigma_1(u)$ jika $u \in V_1,$

$(\sigma_1 \cup \sigma_2)\ (u) \ = \ \sigma_2(u)$ jika $u \in V_1,$

$(\sigma_1 \cup \sigma_2)\ (u) \ = \ \sigma_1(u) \vee \sigma_2(u) = max(\sigma_1(u), \sigma_2(u))$ jika $u \in V_1 \cap V_1$

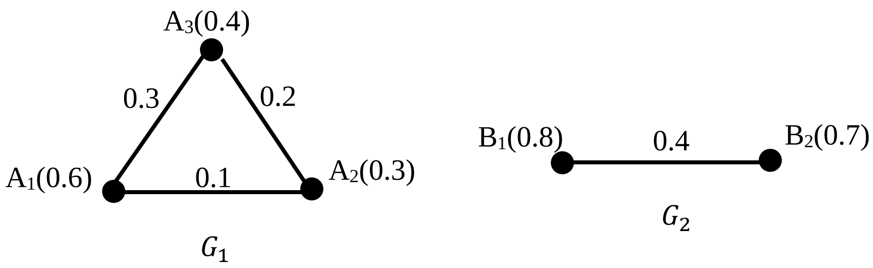
ii. $(\mu_1 \cup \mu_2)\ (uv) \ = \ \mu_1(uv)$ jika $uv \in E_1,$

$(\mu_1 \cup \mu_2)\ (uv) \ = \ \mu_2(uv)$ jika $uv \in E_2,$ dan

$(\mu_1 \cup \mu_2)(uv) = \ \mu_1(uv) \vee \mu_2(uv) = max\ \big(\mu_1(uv), \mu_2(uv)\big)$ jika $uv \in E_2 \cap E_1,$ dengan E_1 adalah himpunan sisi graf G_i , $i \ = \ 1,2.$

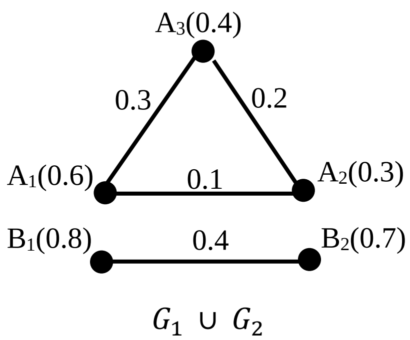
Contoh 2.3:

Diberikan graf *fuzzy* G_1 dan G_2 sebagai berikut:



Gambar 2.6 Graf *fuzzy* G_1 dan graf *fuzzy* G_2

Sehingga gabungan dari graf *fuzzy* G_1 dan G_2 adalah sebagai berikut:



Gambar 2.7 Gabungan dari graf *fuzzy* G_1 dan G_2

Proporsi 2.1

Misalkan $G_1 = (V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1})$ dan $G_2 = (V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2})$ adalah graf *fuzzy*, dengan σ_i adalah fungsi keanggotaan V_i, dan μ_i adalah fungsi keanggotaan $V_i \times V_i$ $\forall$ i = 1,2.

Maka $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, \sigma_{G_1 \cup G_2}, \mu_{G_1 \cup G_2})$ dengan $\sigma_{G_1 \cup G_2} = \sigma_{G_1} \cup \sigma_{G_2}$ dan $\mu_{G_1 \cup G_2} = \mu_{G_1} \cup \mu_{G_2}$ merupakan graf *fuzzy* dan disebut graf *fuzzy* gabungan.

Bukti:

Misalkan $uv \in E_1 \backslash E_2$,

i. Jika $u, v \in V_1 \backslash V_2$; maka

$$\begin{aligned}(\mu_1 \cup \mu_2)(uv) &= \mu_1(uv) \\ &\leq \sigma_1(u) \wedge \sigma_1(v) \\ &\leq (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v)\end{aligned}$$

ii. Jika $u \in V_1 \backslash V_2$ dan $v \in V_1 \cap V_2$; maka

$$\begin{aligned}(\mu_1 \cup \mu_2)(uv) &= \mu_1(uv) \\ &\leq \sigma_1(u) \wedge \sigma_1(v) \\ &\leq \sigma_1(u) \wedge (\sigma_1(v) \vee \sigma_2(v)) \\ &\leq (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v).\end{aligned}$$

iii. Jika $u, v \in V_1 \cap V_2$; maka

$$
\begin{aligned}
(\mu_1 \cup \mu_2)(uv) &= \mu_1(uv) \\
&\leq \sigma_1(u) \wedge \sigma_1(v) \\
&\leq (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v).
\end{aligned}
$$

Misalkan $uv \in E_2 \backslash E_1$,

i. Jika $u, v \in V_2 \backslash V_1$; maka

$$
\begin{aligned}
(\mu_1 \cup \mu_2)(uv) &= \mu_2(uv) \\
&\leq \sigma_2(u) \wedge \sigma_2(v) \\
&\leq (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v).
\end{aligned}
$$

ii. Jika $u \in V_2 \backslash V_1$ dan $v \in V_1 \cap V_2$; maka

$$
\begin{aligned}
(\mu_1 \cup \mu_2)\ (uv) &= \mu_2(uv) \\
&\leq \sigma_2(u) \wedge \sigma_2(v) \\
&\leq \sigma_2(u) \wedge (\sigma_1(v) \vee \sigma_2(v)) \\
&\leq (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v).
\end{aligned}
$$

iii. Jika $u, v \in V_1 \cap V_2$; maka

$$
\begin{aligned}
(\mu_1 \cup \mu_2)\ (uv) &= \mu_2(uv) \\
&\leq \sigma_2(u) \wedge \sigma_2(v) \\
&\leq (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v).
\end{aligned}
$$

Misalkan $u, v \in E_1 \cap E_2;$ maka

$$(\mu_1 \cup \mu_2)(uv) = \mu_1(uv) \vee \mu_2(uv)$$

$$\leq (\sigma_1(u) \wedge \sigma_1(v)) \vee (\sigma_2(u) \wedge \sigma_2(v))$$

$$\leq (\sigma_1(u) \wedge \sigma_2(u)) \wedge (\sigma_1(v) \vee \sigma_2(v))$$

$$\leq (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \wedge (\sigma_1 \cup \sigma_2)(v).$$

Maka $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, \sigma_{G_1 \cup G_2}, \mu_{G_1 \cup G_2})$ dengan $\sigma_{G_1 \cup G_2} = \sigma_{G_1} \cup \sigma_{G_2}$ dan $\mu_{G_1 \cup G_2} = \mu_{G_1} \cup \mu_{G_2}$ merupakan graf *fuzzy* dan disebut graf *fuzzy* gabungan.

Definisi 2.9

Misalkan $G_1 = (V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1})$ dan $G_2 = (V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2})$ adalah graf *fuzzy*, diasumsikan $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, dengan σ_i adalah fungsi keanggotaan dari V_i , dan μ_i adalah fungsi keanggotaan dari $V_i \times V_i$ $\forall$ i = 1,2. Didefinisikan *join* fungsi keanggotaan G_1 dan G_2 sebagai berikut:

$(\sigma_1 + \sigma_2)(u) = (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u)$ $\forall u \in V_1 \cup V_2$;

$(\mu_1 + \mu_2)(uv) = (\mu_1 \cup \mu_2)(uv)$ jika $uv \in E_1 \cup E_2$, dan

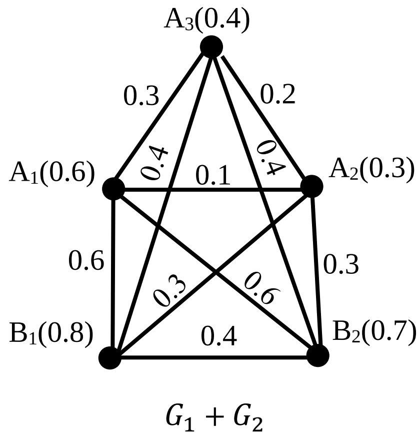
$(\mu_1 + \mu_2)(uv) = \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v)$

$= \min(\sigma_1(u), \sigma_2(v))$ jika $uv \in E'$.

dengan E adalah himpunan semua garis yang menggabungkan simpul-simpul dari V_1 dengan simpul-simpul dari V_2.

Contoh 2.4

Misalkan diberikan graf *fuzzy* G_1 dan G_2 pada contoh 2.3 gambar 2.6, maka *join* dari kedua graf *fuzzy* tersebut adalah:



Gambar 2.8 *Join* dari graf *fuzzy* G_1 dan G_2

Proposisi 2.2

Misalkan $G_1 = (V_1, \sigma_{G_1}, \mu_{G_1})$ dan $G_2 = (V_2, \sigma_{G_2}, \mu_{G_2})$ adalah graf *fuzzy*, dengan σ_i adalah fungsi keanggotaan V_i, dan μ_i adalah fungsi keanggotaan $V_i \times V_i$ $\forall$ i = 1,2.

Maka $G_1 + G2 = (V1 \cup V2, \sigma_{G_1 + G_2}, \mu_{G_1 + G_2})$ dengan $\sigma_{G_1+G_2} = \sigma_{G_1} + \sigma_{G_2}$ dan $\mu_{G1+G_2} = \mu_{G_1} + \mu_{G_2}$ merupakan graf *fuzzy* dan disebut graf *fuzzy join*.

E. Pewarnaan Graf

Pewaarnaan graf (*graf coloring*) adalah kasus khusus dari pelabelan graf. Pelabelan disini maksudnya, yaitu memberikan warna pada simpul-simpul pada batas tertentu. Ada tiga macam pewarnaan graf:

a. Pewarnaan simpul

Pewarnaan simpul (*vertex coloring*) adalah memberi warna pada simpul-simpul suatu graf sedemikian sehingga tidak ada dua simpul bertetangga mempunyai warna yang sama.

b. Pewarnaan sisi

Pewarnaan sisi (*edge coloring*) adalah memberi warna yang berbeda pada sisi yang bertetangga sehingga tidak ada sisi yang bertetangga mempunyai warna yang sama.

c. Pewarnaan bidang

Pewarnaan bidang adalah memberi warna pada bidang sehingga tidak ada bidang yang bertetangga mempunyai warna yang sama. Pewarnaan bidang hanya bisa dilakukan dengan membuat graf tersebut menjadi graf planar terlebih dahulu. Sebuah graf G disebut sebagai graf planar apabila graf tersebut dapat digambarkan pada sebuah bidang datar tanpa ada sisi yang saling berpotongan.

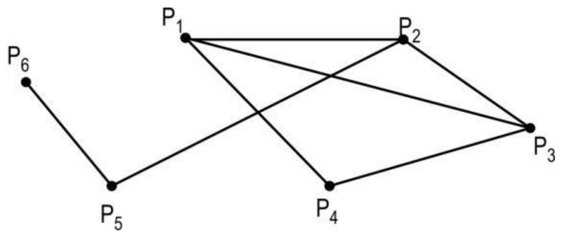
1. Pewarnaan Simpul Suatu Graf

Contoh 2.5

Andaikan sebuah pabrik kimia ingin mengirimkan hasil produknya dengan menggunakan kereta api. Sesuai dengan ketentuan yang ada, tidak semua zat kimia ini dapat dimuat dalam satu kereta, karena kemungkinan bercampurnya zat kimia yang dapat menyebabkan terjadinya reaksi berupa ledakan yang membahayakan. Bagaimana zat-zat kimia ini dikirim? Dengan maksud meminimumkan biaya, pabrik itu ingin menggunakan gerbong kereta api sesedikit mungkin. Berapa banyaknya gerbong kereta api itu?

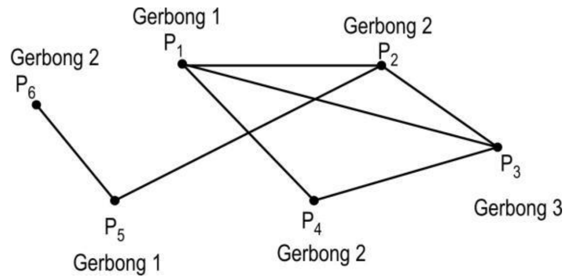
Pada contoh tersebut ada objek (hasil zat kimia) dan ada keterhubungan diantara objek itu. Karena hal ini merupakan ide dasar suatu graf, maka dapat disajikan dalam bentuk graf. Pada contoh tersebut, simpul-simpulnya adalah zat kimia dan sisinya menghubungkan zat-zat kimia yang tidak dapat diangkut dalam gerbong kereta yang sama.

Sebagai ilustrasi, diasumsikan bahwa pada contoh 2.5 ada enam zat kimia P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, dan P_6. Serta P_1 dengan P_2, P_3, atau P_4 tidak dapat diangkut dalam kereta yang sama, juga P_2 dengan P_3 atau P_5, P_3 dengan P_4, dan P_5 dengan P_6. Graf yang menyajikan hal ini dapat dilihat pada gambar 2.9, yang simpul-simpulnya menunjukkan enam zat kimia dan sisinya menghubungkan pasangan zat kimia yang tidak dapat dimuat dalam gerbong kereta yang sama.



Gambar 2.9 Implementasi graf contoh 2.5

Berapa banyak minimum gerbong kerata yang diperlukan? Dalam graf pada gambar 2.9, zat kimia yang disajikan dengan simpul yang berdekatan harus dimuat dalam gerbong kereta yang tidak sama. Misal: zat P_1 dan P_2 berdekatan, misalkan zat P_1 deletakan pada gerbong kereta 1, kereta lain deperlukan untuk mememuat P_2, katakana gerbong kereta 2. Karena P_3 berdekatan P_1 dan P_2, maka diperlukan gerbong kereta lain untuk P_3, katakana gerbong kereta 3. Tetapi tidak diperlukan gerbong kereta lain lagi untuk P_4, gerbong kereta 2 dapat digunakan lagi. Demikian pula halnya, tidak diperlukan gerbong kereta lain lagi unutk P_5, kerena gerbong kereta 1 atau 3 dapat digunakan lagi. Misalnya dipilih gerbong kereta 1, maka untuk P_6 dipilih gerbong kereta 2 atau 3, katakan gerbong kereta 2. Graf pada gambar 2.10 menunjukkan bagaimana simpul-simpul itu diberi nama (label) sehingga zat kimia yang tidak dapat berada bersama, dimuat dalam gerbong kereta yang berbeda. Juga karena P_1, P_2, dan P_3 saling berdekatan, maka paling sedikit harus digunakan tiga gerbong kereta berbeda. Sehingga banyak minimum gerbong kereta yang harus digunakan ada tiga.



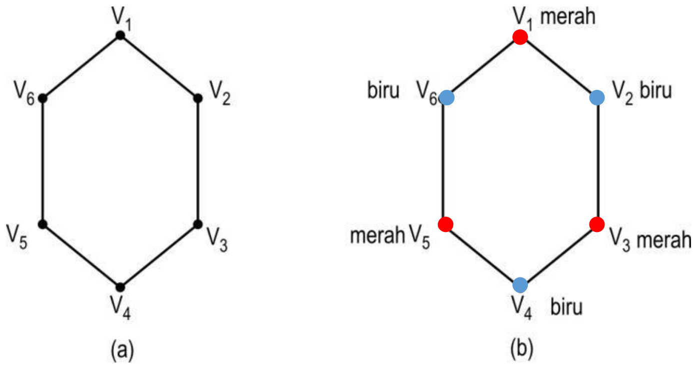
Gambar 2.10 Pelabelan graf pada gambar 2.9

Apa yang telah dilakukan di atas, adalah memberi label pada simpul-simpul graf sehingga simpul yang berdekatan mendapatkan label yang berbeda. Ide ini sering terjadi dalam teori graf, dan label ini disebut warna. Mewarnai sebuah graf berarti memberi warna pada setiap simpul graf, sedemikian hingga simpul yang berdekatan mendapat warna berbeda. Menanyakan banyak minimum gerbong kereta yang diperlukan pada contoh 2.5 adalah sama seperti menanyakan banyak minimum warna yang diperlukan untuk mewarnai graf pada gambar 2.9, dengan warna mewakili gerbong kereta.

Bila suatu graf G dapat diwarnai minimal dengan n warna, maka G dikatakan memiliki bilangan kromatik n. Jadi graf G pada gambar 2.9 memiliki bilangan kromatik 3.

Contoh 2.6

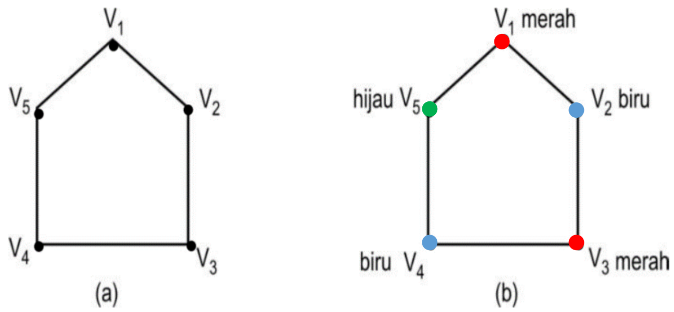
Graf pada gambar 2.11 (a) memiliki bilangan kromatik 2 karena simpul V_1, V_3, dan V_5 dapat diwarnai dengan satu warna (misalkan merah) dan tiga simpul lainnya dengan warna kedua (misalkan biru), seperti yang terlihat pada Gambar 2.11 (b). Secara umum, jika suatu sikel memiliki simpul yang banyaknya genap, maka sikel itu dapat diwarnai menggunakan dua warna.



Gambar 2.11 Graf sikel dengan banyak simpul genap serta pewarnaannya

Contoh 2.7

Bila suatu sikel memiliki simpul yang banyaknya ganjil, seperti pada gambar 2.12 (a), maka harus digunakan tiga warna. Bila dicoba menggunakan warna itu secara berselang seperti pada gambar 2.11, warna merah untuk simpul V_1 dan V_3 serta warna biru tidak dapat digunakan lagi untuk V_5. Penggunaan tiga warna untuk mewarnai sikel yang banyak simpulnya ganjil diilustrasikan pada gambar 2.12 (b).

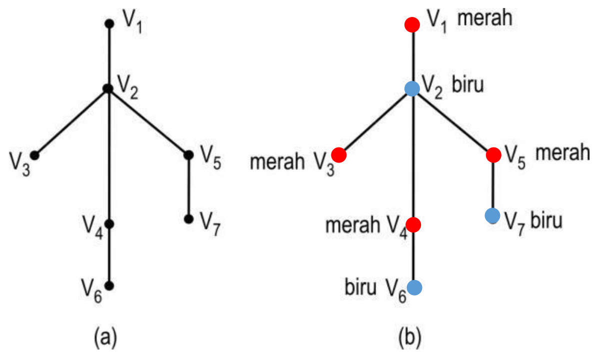


Gambar 2.12 Graf sikel dengan banyak simpul ganjil serta pewarnaannya

Dalam graf lengkap K_n, setiap simpul saling berdekatan dengan simpul lainnya. Jadi, kurang dari n warna atau tidak cukup untuk mewarnai graf itu. Oleh karena itu graf lengkap K_n memiliki bilangan kromatik n.

Contoh 2.8

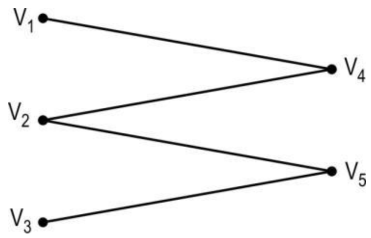
Graf pada gambar 2.13 (a) dapat diwarnai dengan menggunakan dua warna, seperti terlihat pada gambar 2.13 (b).



Gambar 2.13 Pewarnaan graf pada contoh 2.8

Contoh 2.9

Graf pada gambar 2.14 memiliki bilangan kromatik 2 karena simpul di sebelah kiri dapat diwarnai dengan menggunakan warna pertama dan simpul di sebelah kanan dapat diwarnai dengan menggunakan warna kedua.



Gambar 2.14 Graf pada contoh 2.9

Secara umum, sangat sulit untuk menentukan banyak minimum warna yang diperlukan untuk mewarnai graf. Salah satunya dengan mendaftar semua cara mewarna (yang berbeda) simpul-simpul graf, kemudian memeriksa setiap cara itu untuk menentukan mana yang menggunakan banyak warna minimum. Sayangnya, walaupun simpul graf tidak seberapa banyak, dan kita menggunakan komputer super, proses ini sangat memakan waktu, bahkan sampai berabad-abad.

Tetapi, ada beberapa cara yang berhasil diperoleh untuk dapat menunjukkan bilangan kromatik suatu graf. Misal, seperti yang terlihat pada contoh 2.7, sikel yang panjangnya ganjil memiliki bilangan kromatik 3. Jadi setiap graf yang memiliki sikel jenis ini membutuhkan minimum 3 warna. Graf pada gambar 2.12 merupakan salah satu contohnya. Bila sikel pada suatu graf panjangnya genap, maka 2 warna sudah cukup.

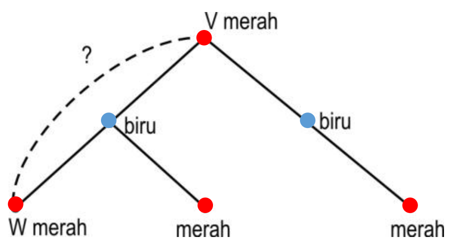
Teorema 2.1

Suatu graf G tidak memiliki sikel yang panjangnya ganjil, jika dan hanya jika G dapat diwarnai dengan 2 warna.

Bukti:

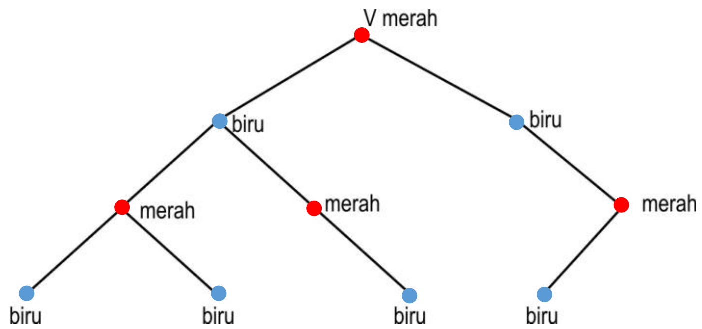
Seperti uraian di atas, bila G memiliki sikel yang panjangnya ganjil, maka pewarna G membutuhkan paling sedikit 3 warna.

Sekarang andaikan G tidak memiliki sikel yang panjangnya ganjil. Pilih suatu simpul V yang diberi warna merah. Kemudian pada setiap simpul yang berdekatan dengan V diberi warna biru. Sekarang, pada simpul-simpul yang berdekatan dengan simpul yang baru diberi warna biru itu, diberi warna merah. Dapatkah salah satu dari simpul yang berwarna merah ini, katakan simpul W, berdekatan dengan simpul V yang juga berwarna merah? Diagram pada gambar 2.15 mengilustrasikan situasi ini.



Gambar 2.15 Ilustrasi graf pada bukti teorema 2.1

Terlihat bahwa jika V dan W berdekatan, maka akan ada sikel yang panjangnya 3. Dengan demikian, setiap simpul lain yang baru saja diwarnai warna merah tidak berdekatan dengan simpul yang berwarna merah, karena jika tidak demikian berarti ada sikel yang panjangnya ganjil. Berikutnya, simpul yang berdekatan dengan yang baru saja diwarnai warna merah diberi warna biru. Hal ini diperlihatkan pada gambar 2.16.



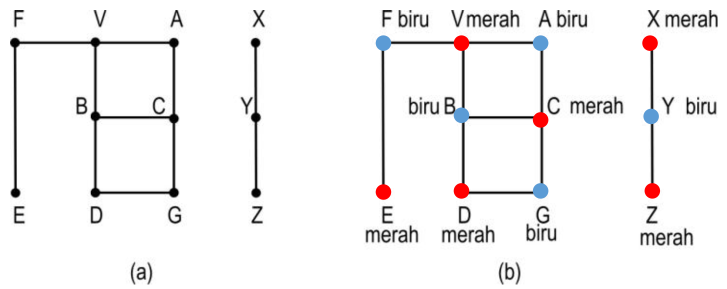
Gambar 2.16 Pewarnaan graf pada gambar 2.15

Kemudian, jika dua simpul yang diwarnai biru terletak berdekatan, maka ada sikel yang panjangnya ganjil. Kemudian dilanjutkan dengan mewarnai merah simpul yang berdekatan dengan simpul yang baru diwarnai biru. Seperti sebelumnya, tidak ada simpul yang baru diwarnai merah dapat terletak berdekatan dengan simpul yang telah berwarna merah. Proses ini diulangi sampai tidak ada simpul yang belum mendapat warna terletak berdekatan dengan simpul yang telah diwarnai.

Jika grafnya tidak terhubung, maka akan ada simpul yang tidak berdekatan dengan simpul yang telah berwarna, sehingga belum mendapat warna. Untuk simpul-simpul seperti itu, proses di atas diulang lagi dengan menggunakan warna merah dan biru. Akhirnya semua simpul dapat diwarnai dengan warna merah dan biru (Terbuki).

Contoh 2.10

Pada graf dalam gambar 2.17 (a), proses pewarnaan di atas dimulai dengan memilih simpul V dan mewarnainya dengan warna merah. Karena F, B, dan A terletak berdekatan dengan V, maka warna biru diberikan pada simpul itu. Simpul yang belum mendapat warna dan terletak berdekatan dengan simpul biru itu adalah $C, D,$ dan E, sehingga diberi warna merah. Akhirnya, simpul G adalah simpul yang belum diwarnai dan terletak berdekatan dengan simpul merah, sehingga diwarnai biru. Sekarang, X adalah simpul belum diwarnai yang terletak tidak berdekatan dengan simpul yang berwarna, sehingga X diberi warna merah. Kemudian Y diberi warna biru, serta akhirnya Z diberi warna merah. Lihat gambar 2.17 (b).



Gambar 2.17 Pewarnaan graf pada contoh 2.10

Teorema berikut ini memberikan batas atas pada banyak warna yang diperlukan untuk mewarna sebuah graf.

Teorema 2.2

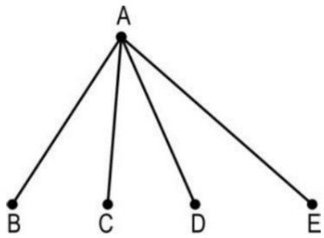
Bilangan kromatik dari graf G tidak dapat lebih satu dari derajat maksimum simpul-titk dari G.

Bukti:

Misalkan k adalah derajat maksimum simpul dari G. Akan ditunjukkan bahwa G dapat diwarnai dengan menggunakan $k+1$ warna C_0, …, C_k. Pertama simpul V dipilih dan diberi warna C_0. Kemudian, beberapa simpul W lain dipilih. Karena paling banyak ada k simpul yang berdekatan dengan W dan ada paling sedikit $k+1$ warna yang tersedia, maka paling sedikit ada satu warna (dapat lebih banyak) yang belum digunakan untuk mewarnai simpul yang berdekatan dengan W. Pilih warna itu. Proses ini dapat dilanjutkan sampai semua simpul dari G mendapat warna (Terbukti).

Contoh 2.11

Proses yang digambarkan pada teorema 2.2 dapat menggunakan lebih banyak warna daripada yang sebenarnya diperlukan. Graf pada Gambar 2.18 memiliki simpul berderajat 4, yang merupakan derajat maksimumnya, sehingga dengan teorema 2.2 di atas, graf itu dapat diwarnai dengan menggunakan 4 + 1 = 5 warna. Tetapi, dengan menggunakan prosedur yang digambarkan pada teorema 1, graf itu dapat diwarnai dengan menggunakan 2 warna.



Gambar 2.18 Ilustrasi graf pada contoh 2.11

Berikut ini akan diuraikan algoritma yang ditemukan Welsh dan Powell, untuk pewarnaan simpul-simpul dari suatu graf.

Algoritma Welsh dan Powell

Algoritma ini memberikan cara mewarnai sebuah graf dengan memberi label simpul-simpulnya sesuai dengan derajatnya.

Langkah 1

Label simpul V_1, V_2, …, V_n sedemikian hingga derajat (V_1) $\geq$ deraja (V_2) $\geq$ …$\geq$ derajat (V_n).

Langkah 2

Berikan warna yang belum digunakan pada simpul belum berwana yang pertama pada daftar simpul itu. Lakukan hal itu pada simpul dalam daftar secara terurut, berikan warna baru ini pada setiap simpul yang tidak berdekatan dengan setiap simpul lain yang telah diwarnai ini.

Langkah 3

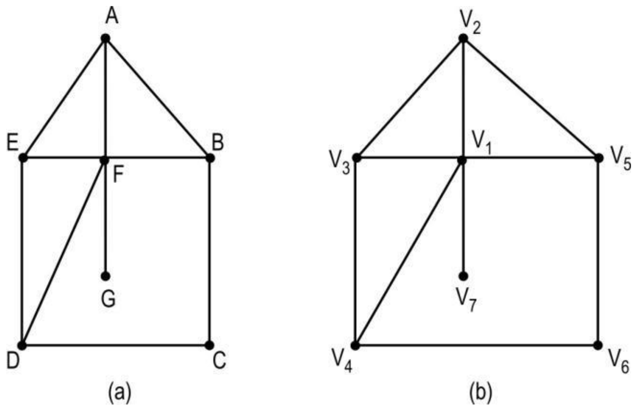
Jika beberapa simpulnya belum berwarna, maka kembalilah ke langkah 2.

Langkah 4

Pewarnaan graf telah dilakukan.

Contoh 2.12

Untuk graf pada gambar 2.19 (a), simpul F memiliki derajat terbesar, yaitu 4 sehingga F diberi label V_1. Simpul $A, D,$ dan E berderajat 3 sehingga diberi label V_2, V_3, dan V_4 secara random. Demikian pula simpul B dan C yang berderajat 2 diberi label V_5 dan V_6. Simpul G merupakan satu-satunya simpul yang tersisa, diberi label V_7. Hal ini diperlihatkan pada gambar 2.19 (b).



Gambar 2.19 Proses pewarnaan graf pada contoh 2.12

Penyajian dalam bentuk daftar berdekatan sangat muda digunakan dengan algoritma Welsh dan Powell ini. Untuk graf pada gambar 2.19 (b), penyajian daftar berdekatannya adalah sebagai berikut.

$V_1 : V_2, V_3, V_4, V_5, V_7$

$V_2 : V_1, V_3, V_5$

$V_3 : V_1, V_2, V_4$

$V_4 : V_1, V_3, V_6$

$V_5 : V_1, V_2, V_6$

$V_6 : V_4, V_5,$

$V_7 : V_1,$

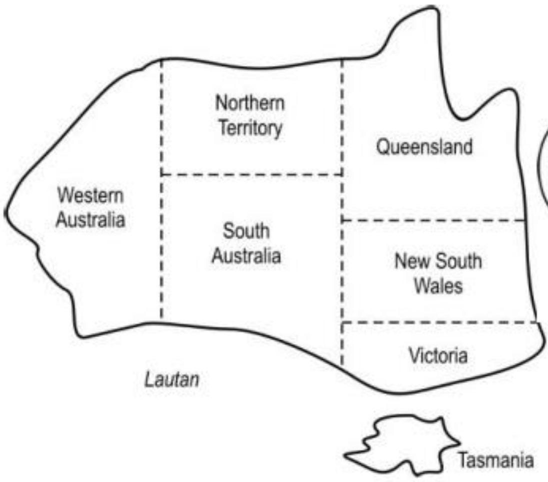
Pada Algoritma Welsh dan Powell ini, simpul belum berwarna pertama dalam daftar adalah V_1 yang diberi warna merah. Kemudian dicari simpul berikut yang tidak berdekatan dengan V_1 pada daftar, yaitu simpul di bawah V_1 yang tidak mengikuti V_1. Diperoleh simpul V_6, yang diberi warna merah. Dilanjutkan dengan melihat bagian bawah daftar untuk mencari simpul berikutnya yang tidak berdekatan dengan V_1 maupun V_6. Karena simpul seperti itu tidak ada, maka kembali dilihat bagian atas daftar dan ditentukan lagi simpul belum berwarna yang pertama, yaitu V_2, yang diberi warna biru. Kemudian simpul belum berwarna berikutnya ditentukan yang tidak berdekatan dengan V_2. Diperoleh simpul V_4 dan diberi warna biru. Cara ini dilanjutkan lagi, dan diperoleh simpul V_7 yang belum berwarna dan tidak tidak berdekatan dengan V_2 maupun V_4, sehingga V_7 diwarnai biru, bagian atas daftar dilihat kembali dan ditentukan simpul belum berwarna berikutnya, yaitu V_3, yang diberi warna hijau. Karena V_5 belum diwarnai dan tidak berdekatan dengan V_3, yang diberi warna hijau. Dengan demikian maka graf pada gambar 2.19 (b) dapat diwarnai dengan tiga warna.

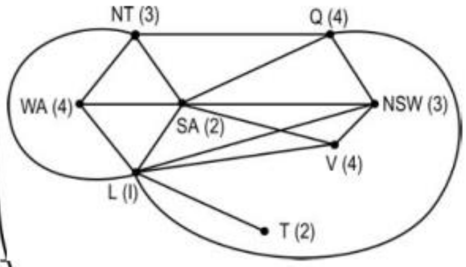
Penyajian daftar berdekatan membuat algoritma Welsh dan Powell mudah digunakan, karena simpulnya dapat ditandai ketika diwarnai, sehingga tinggal memperhatikan simpul belum berwarna sisanya dalam proses perwarnaan itu.

2. Pewarnaan Bidang Dan Pewarnaan Sisi

Sebuah atlas akan sangat mudah dipahami kalau masing-masing daerah yang saling berbatasan mempunyai warna yang berlainan. Suatu masalah yang menarik ialah menentukan banyaknya minimum warna yang harus disediakan agar tujuan tersebut terwujud. Misalnya untuk mewarnai peta negara tetangga kita Australia seperti diperlihatkan pada gambar 2.20. Pewarnaan peta sama dengan pewarnaan simpul-simpul graf dari gambar peta tersebut sedemikian hingga tidak ada dua simpul berdekatan yang mendapat warna sama.

Dalam hal ini negara-negara bagiannya dan lautan yang mengelilinginya diwakili oleh simpul-simpul. Selanjutnya pasangan simpul yang mewakili daerah- daerah yang saling berbatasan dihubungkan dengan sebuah sisi, sehingga model grafnya seperti tampak pada gambar 2.21. Oleh karena itu derajat suatu simpul mencerminkan banyaknya perbatasan yang mengelilingi daerah yang diwakili simpul itu. Jadi rumusan persoalan grafnya ialah mewarnai semua simpul graf sedemikian hingga simpul-simpul yang terhubung oleh sisi mempunyai warna berbeda satu sama lain.





Gambar 2.20 Peta Australia

Gambar 2.21 Ilustrasi graf dari peta Australia

Jadi dapat disimpulkan bahwa langkah-langkah yang dilakukan dalam pemodelan dengan graf adalah menentukan:

a. Objek apa yang akan dikonversikan sebagai simpul graf?

b. Hubungan apa yang dicerminkan oleh sisi graf? Pasangan simpul apa saja yang harus dihubungkan oleh sisi?

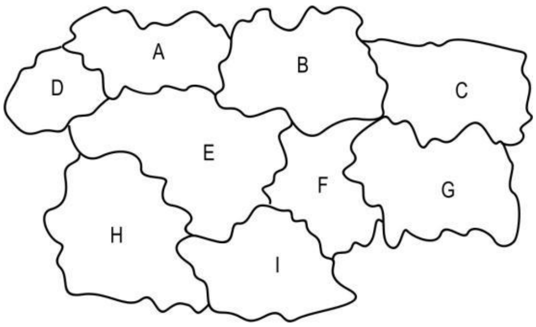
c. Merumuskan masalah nyata dalam bahasa teori graf.

Angka-angka pada gambar 2.21 menyatakan kemungkinan penempatan warna, dan masih ada pula kemungkinan penempatannya yang lain. Dari graf tersebut tampak bahwa dengan empat macam warna kita telah mampu membuat peta Australia sedemikian hingga dua negara bagian yang saling berbatasan dapat dibedakan dengan jelas.

a. Pewarnaan Bidang

Contoh 2.13

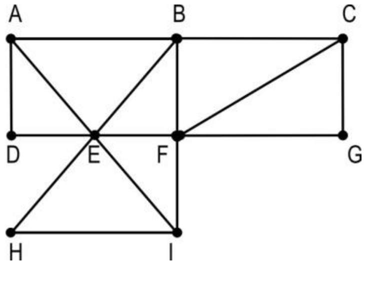
Warnai peta pada gambar 2.22, kemudian tentukan bilangan kromatiknya.



Gambar 2.22 Ilustrasi peta pada contoh 2.13

Jawab:

Peta pada gambar 2.22, dapat dilukiskan bentuk grafnya seperti pada gambar 2.23 berikut ini.



Gambar 2.23 Ilustrasi graf pada pada gambar 2.22

1) Pengurutan Derajat Simpul

Tabel 2.1. Urutan Derajat Simpul

Simpul	E	F	B	A	C	I	D	G	H
Derajat simpul	6	5	4	3	3	2	2	2	2

2) Pewarnaan Simpul

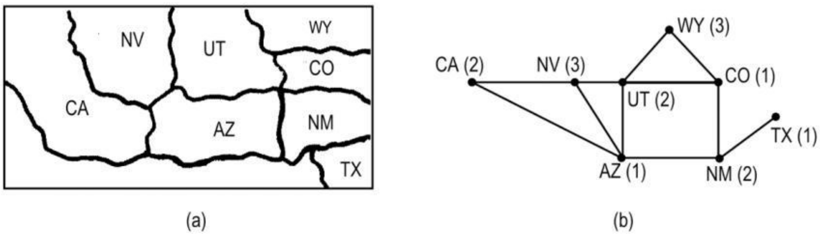
Pertama tandai simpul E dengan angka 1. Telusuri daftar simpul tadi dan amati gambar grafnya, ternyata simpul C adalah simpul pertama yang tidak berdekatan dengan E. Kembali ke daftar simpul, tandai simpul F dengan angka 2, dan juga simpul A dan H, karena tidak berdekatan dengan F. Penelusuran ketiga kalinya terhadap daftar simpul akan menandai simpul B dengan angka 3, lalu tandai simpul $I, D,$ dan G dengan angka 3. Dengan demikian bilangan kromatik graf tersebut adalah 3. Langkah-langkah tersebut dirangkum dalam bentuk tabel berikut.

Tabel 2.2. Proses Pewarnaan Bidang pada Contoh 2.12

Simpul		E	F	B	A	C	I	D	G	H
Warna	Tahap 1	1				1				
	Tahap 2		2		2					2
	Tahap 3			3			3	3	3	

Contoh 2.14

Gambar 2.24 (a) merupakan bagian dari peta Amerika Serikat. Grafnya beserta warna (label) diperlihatkan pada gambar 2.24 (b) dengan menggunakan algoritma Welsh dan Powell.



Gambar 2.24 Pewarnaan graf menggunakan algoritma Welsh dan Powell

Berikut ini tabel yang menunjukkan hubungan antara simpul, derajat simpul dan warna.

Tabel 2.3. Hubungan Antara Simpu, Derajat Simpul dan Warna

Simpul	AZ	UT	NV	CO	NM	CA	WY	TX
Derajat simpul	4	4	3	3	3	2	2	1
Warna	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(2)	(3)	(1)

Peta pada gambar 2.24 (a) dapat diwarnai dengan 3 warna.

b. Pewarnaan Sisi

Pewarnaan sisi pada suatu graf adalah penentuan warna sisi-sisi suatu graf sehingga setiap sisi yang berdekatan mendapatkan warna yang berbeda. Ukuran keberwarnaan suatu graf didefinisikan sama dengan ukuran keberwarnaan simpul, yaitu mengacu kepada banyaknya warna yang memungkinkan sehingga setiap sisi yang berdekatan mendapat warna yang berbeda.

Jumlah warna minimal yang dapat digunakan untuk mewarnai sisi-sisi dalam suatu graf G disebut bilangan kromatik G.

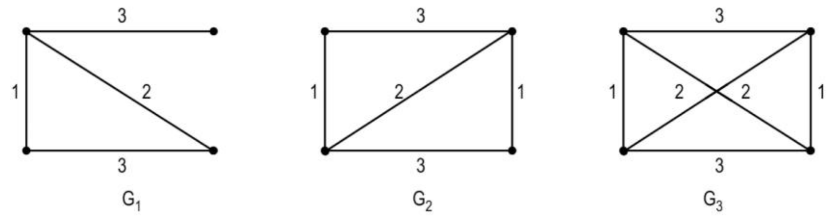
Teorema 2.3

Jika G adalah graf sederhana yang derajat maksimum simpulnya adalah m, maka bilangan kromatiknya $\chi(G)$ adalah

$$m \leq \chi(G) \leq m + 1$$

Contoh 2.15

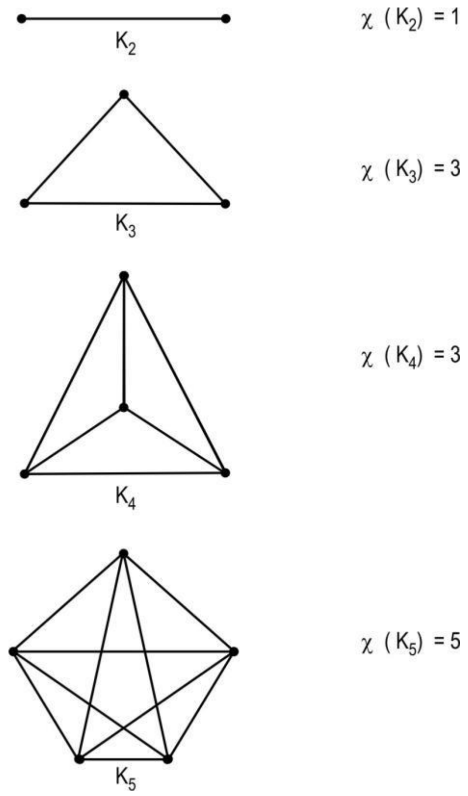
Diberikan graf G_1, G_2, dan G_3 seperti pada gambar 2.25 berikut.



Gambar 2.25 Graf G_1, G_2, dan G_3

Derajat maksimum simpul dari graf G_1, G_2, dan G_3 adalah 3. Sehingga bilangan kromatiknya dari graf G_1, G_2, dan G_3 adalah 3.

Graf lengkap K_n mempunyai sifat khusus mengenai bilangan kromatiknya. Perhatikan beberapa contoh graf lengkap berikut ini.



Hubungan antara banyaknya simpul graf lengkap dan bilangan kromatik untuk graf itu dapat dirumuskan dalam teorema berikut ini.

Teorema 2.4

$\chi\ (K_n) = n$ jika n ganjil dan $n > 1$

$\chi\ (K_n) = n - 1$, jika n genap

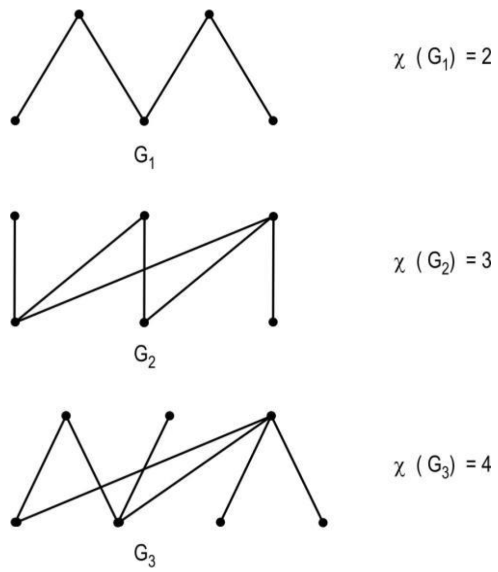
Contoh 2.16

$\chi(K_3) = 5$; $\chi(K_6) = 5$; $\chi(K_7) = 7$; $\chi(K_8) = 7$.

Teorema 2.5

Jika G adalah graf sederhana bipartit yang derajat maksimum simpulnya adalah m, maka $\chi(G) = m$.

Contoh 2.17



Berdasarkan teorema 2.3, dapat disimpulkan bahwa $\chi(K_{p,t}) = \max(p,t)$. $K_{p,t}$ adalah lambang untuk graf bipartit lengkap yang himpunan simpulnya terpisah menjadi himpunan pertama terdiri atas p simpul dan himpunan kedua terdiri atas t simpul.

Max(p,t) menyatakan yang terbesar diantara p dan t.

Contoh 2.18