

## BAB II

### KAJIAN TEORI

Pada bab II akan dibahas tentang materi-materi dasar yang digunakan untuk mendukung pembahasan pada bab selanjutnya, yaitu matriks, kombinasi linier, varian dan simpangan baku, standarisasi data, koefisien korelasi, matriks korelasi, matriks kovarian, nilai eigen dan vektor eigen, analisis multivariat, multikolinearitas, analisis *cluster*, dan kemiskinan.

#### A. Matriks

##### Definisi 2. 1 (Imrona, 2013: 1)

Matriks adalah susunan bilangan atau fungsi yang terbentuk dalam baris dan kolom serta diapit oleh dua kurung siku. Bilangan atau fungsi tersebut dinamakan entri atau elemen dari matriks. Matriks  $A$  berukuran  $m$  baris dan  $n$  kolom dapat ditulis sebagai berikut:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

atau

$$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij}]$$

dengan  $i = 1, 2, \dots, m$  dan  $j = 1, 2, \dots, n$ . Elemen yang berada pada baris ke  $i$  dan kolom ke  $j$  pada matriks  $A$  disimbolkan  $a_{ij}$ . Misal  $a_{21}$  adalah elemen matriks  $A$  yang terletak pada baris kedua kolom pertama.

**Definisi 2. 2 (Anton dan Rorres, 2010)**

Dua matriks dikatakan sama jika mempunyai ukuran sama dan elemen-elemen yang seletak bernilai sama. Jika  $A = [a_{ij}]$  dan  $B = [b_{ij}]$  maka dapat ditulis:

$$A = B \text{ atau } a_{ij} = b_{ij} \text{ dengan } i = 1, 2, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, \dots, n.$$

**Definisi 2. 3 (Anton dan Rorres, 2010)**

Matriks  $A$  berukuran  $n$  baris dan  $n$  kolom disebut matriks persegi berukuran  $n$ . Matriks persegi mempunyai elemen  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  yang disebut sebagai diagonal utama matriks  $A$ .

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

**Definisi 2. 4 (Imrona, 2013: 3)**

Matriks diagonal adalah matriks persegi yang semua elemen diluar diagonal utama bernilai nol.

Contoh: 
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

**Definisi 2. 5 (Imrona, 2013: 3)**

Matriks identitas adalah matriks diagonal yang elemen pada diagonal utamanya adalah bilangan satu dan elemen lainnya bernilai nol. Matriks identitas dilambangkan  $I_n$  dengan  $n$  adalah ukuran dari matriks.

Contoh: 
$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Definisi 2. 6 (‘Imrona, 2013: 3)**

Matriks skalar adalah matriks diagonal yang semua elemen pada diagonal utamanya bernilai sama tetapi tidak nol ( $c \neq 0$ ), dengan  $c$  adalah skalar.

Contoh: 
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ maka } c = 4$$

**Definisi 2. 7 (Anton dan Rorres, 2010)**

Jika  $A$  matriks berukuran  $m \times n$ , maka transpose matriks  $A$  berukuran  $n \times m$ . Transpose matriks  $A$  dinotasikan  $A^T$  atau  $A'$ . Transpose matriks mengubah baris pada matriks  $A$  menjadi kolom pada matriks  $A^T$  dan kolom pada matriks  $A$  menjadi baris pada matriks  $A^T$ .

Contoh:

$$A_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \rightarrow A_{3 \times 4}^T = A_{4 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}$$

**Definisi 2. 8 (Johnson dan Wichern, 2007: 57)**

Matriks persegi disebut sebagai matriks simetri jika  $A = A^T$  atau  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

**Definisi 2. 9 (Anton dan Rorres, 2010)**

Jika  $A$  dan  $B$  matriks berukuran sama, maka jumlah dari matriks  $A$  dan  $B$  ( $A + B$ ) merupakan penjumlahan dari elemen-elemen matriks  $B$  yang seletak dengan elemen-elemen matriks  $A$ , dan selisih dari matriks  $A$  dan  $B$  ( $A -$

$B$ ) merupakan pengurangan dari elemen-elemen matriks  $B$  yang seletak dengan elemen-elemen matriks  $A$ .

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \text{ maka}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{bmatrix}$$

**Definisi 2. 10 (Anton dan Rorres, 2010)**

Jika  $A$  matriks dan  $c$  skalar, maka  $cA$  adalah matriks hasil kali dari elemen matriks  $A$  oleh  $c$ . Matriks  $cA$  disebut sebagai perkalian matriks  $A$  dengan skalar  $c$ .

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ dan } c \rightarrow cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix}$$

**Definisi 2. 11 (Anton dan Rorres, 2010)**

Jika matriks  $A$  berukuran  $m \times r$  dan matriks  $B$  berukuran  $r \times n$ , maka hasil kali  $AB$  adalah matriks berukuran  $m \times n$ . Elemen-elemen matriks  $AB$  merupakan hasil kali dari elemen baris ke- $i$  pada matriks  $A$  dengan elemen kolom ke- $j$  pada matriks  $B$  secara bersama, kemudian menjumlahkan hasil perkalian tersebut.

Contoh:  $A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, B_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \text{ maka}$

$$AB_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

**Definisi 2. 12 (Anton dan Rorres, 2010)**

Jika  $A$  matriks persegi berukuran  $n \times n$ , maka determinan matriks  $A$  dihitung dengan mengalikan elemen pada baris ke- $i$  atau kolom ke- $j$  dengan masing-masing kofaktor dan menjumlahkan hasil perkalian tersebut. Determinan matriks  $A$  dinyatakan sebagai berikut:

$$|A| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke- $j$ )

dan

$$|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris ke- $i$ )

Misal:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

**Definisi 2. 13 (Anton dan Rorres, 2010)**

Jika  $A$  matriks persegi, maka minor dari elemen  $a_{ij}$  dinotasikan  $M_{ij}$  didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  dihilangkan dari matriks  $A$ . Bilangan  $(-1)^{i+j}M_{ij}$  dinyatakan sebagai  $C_{ij}$  dan disebut sebagai kofaktor dari matriks. Kofaktor ( $C$ ) dari matriks  $A$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

dengan  $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  (2. 1)

Misal:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$M_{22}$  adalah minor yang diperoleh dari elemen  $a_{22}$  dengan menghapus baris ke-2 dan kolom ke-2.

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Kofaktor dari matriks  $A$  adalah:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

⋮

$$C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

**Definisi 2. 14 (Anton dan Rorres, 2010)**

Jika  $A$  matriks persegi dan jika terdapat suatu matriks  $B$  berukuran sama, sedemikian sehingga  $AB = BA = I$ , maka  $A$  *invertible* (dapat dibalik) dan  $B$  merupakan invers dari  $A$ . Invers dari  $A$  dinotasikan  $A^{-1}$  sehingga  $AA^{-1} = I$  dan  $A^{-1}A = I$ . Jika matriks  $A$  berukuran  $n \times n$  maka invers dari matriks  $A$  adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A) \quad (2. 2)$$

$\text{Adj}(A)$  adalah matriks adjoin dari  $A$  yaitu transpose dari matriks kofaktor  $A$ .

$$\text{Adj}(A) = C^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

**Definisi 2. 15 (Anton dan Rorres, 2010)**

Jika  $A$  matriks persegi, maka trace dari matriks  $A$  didefinisikan sebagai penjumlahan elemen-elemen pada diagonal utama matriks  $A$ . Trace dari matriks  $A$  dinotasikan  $\text{tr}(A)$ . Trace dari matriks  $A$  tidak dapat didefinisikan jika matriks  $A$  bukan matriks persegi.

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

**Definisi 2. 16 (Johnson dan Wichern, 2007: 59)**

Matriks orthogonal adalah matriks persegi yang mempunyai karakteristik

$$AA^T = A^T A = I \text{ atau } A^T = A^{-1}$$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

## B. Kombinasi Linear

### Definisi 2. 17 (Anton dan Rorres, 2010)

Jika  $A_1, A_2, \dots, A_r$  adalah matriks berukuran sama dan  $c_1, c_2, \dots, c_r$  merupakan skalar, maka kombinasi linear dari  $A_1, A_2, \dots, A_r$  dengan koefisien  $c_1, c_2, \dots, c_r$  adalah sebagai berikut:

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \dots + c_rA_r$$

Misal:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ dan } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

maka kombinasi linearnya:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

## C. Varian dan Simpangan Baku

Varian adalah rata-rata hitung dari kuadrat simpangan setiap objek terhadap rata-rata hitungnya. Simpangan baku adalah salah satu ukuran dispersi yang diperoleh dari akar kuadrat positif varian (Supranto, 2008: 139).

Rumus varian ( $\sigma^2$ ) dan simpangan baku ( $\sigma$ ) untuk populasi sebagai berikut:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \quad (2.3)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}} \quad (2.4)$$

dengan  $x_i$  = nilai atau objek ke- $i$  dan  $\mu$  = rata-rata populasi

Sedangkan rumus varian ( $s^2$ ) dan simpangan baku ( $s$ ) untuk sampel sebagai berikut:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (2.5)$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (2.6)$$

dengan  $x_i$  = nilai atau objek ke- $i$  dan  $\bar{x}$  = rata-rata sampel

#### D. Standarisasi Data

Standarisasi data adalah pengubahan nilai-nilai variabel asal menjadi nilai-nilai baru yang memiliki rata-rata nol dan simpangan baku satu (Supranto, 2010: 328). Standarisasi data dilakukan apabila data mempunyai skala berbeda. Persamaan standarisasi adalah sebagai berikut:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} \quad (2.7)$$

dengan  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$  merupakan rata-rata variabel  $x_i$  dan  $s$  merupakan simpangan baku persamaan (2.6).

#### E. Koefisien Korelasi

Koefisien korelasi digunakan untuk mengukur hubungan antara dua variabel dalam analisis korelasi dan dinotasikan dengan  $r$ . Koefisien korelasi sampel antara variabel  $X$  dan  $Y$  dinotasikan  $r_{xy}$  adalah sebagai berikut (Johnson dan Wichern, 2007: 8):

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_{xx}}\sqrt{s_{yy}}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}} \quad (2.8)$$

dengan  $s_{xy}$  adalah kovarian dari  $x$  dan  $y$  sedangkan  $s_{xx}$  dan  $s_{yy}$  adalah simpangan baku. Nilai dari koefisien korelasi untuk mengukur hubungan antara dua variabel berkisar antara -1 sampai 1. Jika koefisien bertanda (+) maka kedua variabel mempunyai hubungan searah dan jika koefisien bertanda (-) maka kedua variabel mempunyai hubungan tidak searah.

## F. Matriks Korelasi

Matriks korelasi populasi dinotasikan ( $\rho$ ) terdiri dari koefisien korelasi dan dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1p} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p1} & \rho_{p2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \rho_{12} = \rho_{21}, \rho_{13} = \rho_{31}, \dots, \rho_{1p} = \rho_{p1}$$

Sedangkan untuk matriks korelasi sampel dinotasikan ( $R$ ) dan dapat dituliskan sebagai berikut:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, r_{12} = r_{21}, r_{13} = r_{31}, \dots, r_{1p} = r_{p1}$$

## G. Matriks Kovarian

Matriks kovarian dinotasikan ( $\Sigma$ ) dan dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \Sigma &= E(X - \mu)_{p \times 1} E(X - \mu)^T_{1 \times p} \\ &= E \left( \begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \\ \vdots \\ X_p - \mu_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 & X_2 - \mu_2 & \cdots & X_p - \mu_p \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E \begin{bmatrix} (X_1 - \mu_1)^2 & (X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2) & \cdots & (X_1 - \mu_1)(X_p - \mu_p) \\ (X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1) & (X_2 - \mu_2)^2 & \cdots & (X_2 - \mu_2)(X_p - \mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_p - \mu_p)(X_1 - \mu_1) & (X_p - \mu_p)(X_2 - \mu_2) & \cdots & (X_p - \mu_p)^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} E(X_1 - \mu_1)^2 & E(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2) & \cdots & E(X_1 - \mu_1)(X_p - \mu_p) \\ E(X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1) & E(X_2 - \mu_2)^2 & \cdots & E(X_2 - \mu_2)(X_p - \mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(X_p - \mu_p)(X_1 - \mu_1) & E(X_p - \mu_p)(X_2 - \mu_2) & \cdots & E(X_p - \mu_p)^2 \end{bmatrix} \\
&= Cov(X) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Sedangkan untuk matriks kovarian sampel dinyatakan sebagai berikut:

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}$$

## H. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

### Definisi 2. 18 (Imrona, 2013: 111)

Misalkan  $A$  adalah matriks berordo  $n \times n$ . Vektor  $x$  dengan  $x \neq 0$  disebut vektor eigen jika terdapat  $\lambda$  (nilai eigen), sehingga memenuhi persamaan:

$$Ax = \lambda x \quad (2. 9)$$

Persamaan (2. 9) dapat ditulis sebagai berikut:

$$Ax - \lambda x = 0 \quad (2. 10)$$

Misalkan matriks  $A$  berordo  $n \times n$  dan vektor  $x$  berordo  $n \times 1$  maka dengan mengalikan dengan matriks identitas  $I$  berordo  $n \times n$ , persamaan (2. 10) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
Ax - \lambda Ix &= 0 \\
(A - \lambda I)x &= 0 \quad (2. 11)
\end{aligned}$$

karena vektor eigen  $x \neq 0$ , maka persamaan (2. 11) harus mempunyai penyelesaian tak nol, dan didapatkan persamaan:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (2. 12)$$

Persamaan (2. 12) disebut sebagai persamaan karakteristik dari matriks  $A$ . Persamaan ini menyederhanakan permasalahan pencarian nilai eigen dengan mencari akar-akar dari polinomial berderajat  $n$ .

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

Maka

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

## I. Analisis Multivariat

Analisis multivariat merupakan metode statistik untuk menganalisis hubungan antara lebih dari dua variabel secara bersamaan. Analisis ini berhubungan dengan semua teknik statistik yang secara simultan menganalisis sejumlah pengukuran pada individu atau objek.

Data dalam analisis multivariat dapat dinyatakan dalam bentuk matriks. Misal suatu pengamatan terdapat  $n$  objek dan  $p$  variabel, maka

observasi  $x_{jk}$  dengan  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  dan  $k = 1, 2, 3, \dots, p$  dapat ditunjukkan sebagai berikut:

	Variabel 1	Variabel 2	...	Variabel $k$	...	Variabel $p$
Objek 1:	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1k}$	...	$x_{1p}$
Objek 2:	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2k}$	...	$x_{2p}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Objek $j$ :	$x_{j1}$	$x_{j2}$	...	$x_{jk}$	...	$x_{jp}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Objek $n$ :	$x_{n1}$	$x_{n2}$	...	$x_{nk}$	...	$x_{np}$

atau dapat dinyatakan dalam matriks  $X$  berukuran  $n \times p$ , dengan  $n$  menyatakan baris dan  $p$  menyatakan kolom sebagai berikut:

$$X_{n \times p} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{j1} & x_{j2} & \dots & x_{jk} & \dots & x_{jp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} & \dots & x_{np} \end{bmatrix}$$

Secara garis besar, analisis multivariat dikelompokkan menjadi dua, yaitu analisis dependensi dan analisis interdependensi. Analisis dependensi merupakan analisis untuk mengetahui hubungan antara variabel dependen dan independen. Contoh analisis dependensi yaitu: anova, ancova, analisis regresi berganda, analisis diskriman, dll. Analisis interdependensi adalah analisis untuk mengetahui hubungan antar variabel independen. Contoh analisis interdependensi yaitu: analisis faktor, analisis *cluster*, penskalaan multidimensi, dan analisis kategori.

## J. Multikolinearitas

Multikolinearitas adalah adanya korelasi atau hubungan yang sangat tinggi antar variabel independen (Yamin, Rachmach, dan Kurniawan, 2011: 115). Multikolinearitas dibedakan menjadi dua, yaitu (Sembiring, 2003: 239):

### 1. Multikolinearitas sempurna

Multikolinearitas sempurna terjadi apabila berlaku hubungan sebagai berikut:

$$\sum_{j=1}^k c_j X_j = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + \dots + c_k X_k = 0 \quad (2.13)$$

dengan  $c$  merupakan bilangan konstan dan  $c \neq 0$ . Untuk mengetahui adanya multikolinearitas sempurna, misal  $c_2 \neq 0$ , dapat ditunjukkan untuk setiap observasi ke-  $i$ , persamaan (2.12) dinyatakan sebagai berikut:

$$X_{2i} = -\frac{c_1}{c_2} X_{1i} - \frac{c_3}{c_2} X_{3i} - \frac{c_4}{c_2} X_{4i} - \dots - \frac{c_k}{c_2} X_{ki} \quad (2.14)$$

Persamaan (2.13) menunjukkan bahwa variabel  $X_{2i}$  berhubungan linear sempurna dengan variabel lain secara keseluruhan.

### 2. Multikolinearitas tidak sempurna

Hubungan linear tidak sempurna terjadi apabila berlaku hubungan sebagai berikut:

$$\sum_{j=1}^k c_j X_j = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + \dots + c_k X_k + \varepsilon_i = 0 \quad (2.15)$$

dengan  $\varepsilon_i$  adalah galat sisa. Untuk mengetahui adanya multikolinearitas tidak sempurna, misal  $c_2 \neq 0$ , dapat ditunjukkan untuk setiap observasi ke-  $i$ , persamaan (2.14) dinyatakan sebagai berikut:

$$X_{2i} = -\frac{c_1}{c_2} X_{1i} - \frac{c_3}{c_2} X_{3i} - \frac{c_4}{c_2} X_{4i} - \dots - \frac{c_k}{c_2} X_{ki} - \frac{1}{c_2} \varepsilon_i \quad (2.16)$$

Persamaan (2. 15) menunjukkan bahwa variabel  $X_{2i}$  tidak berhubungan linear sempurna dengan variabel lain, karena masih tergantung pada galat ( $\varepsilon_i$ ).

Untuk mengetahui adanya multikolinearitas salah satunya menggunakan matriks korelasi. Interpretasi nilai korelasi antar variabel menurut Yamin dan Kurniawan (2014: 70) diklasifikasikan sebagai berikut:

- a. 0,00 – 0,09 : hubungan korelasi diabaikan
- b. 0,10 – 0,29 : hubungan korelasi rendah
- c. 0,30 – 0,49 : hubungan korelasi moderat
- d. 0,50 – 0,70 : hubungan korelasi sedang
- e. > 0,70 : hubungan korelasi sangat kuat

Dua variabel atau lebih dikatakan terjadi multikolinearitas apabila memiliki nilai korelasi lebih dari 0,7. Cara untuk mengatasi masalah multikolinearitas antara lain dengan menghilangkan variabel yang mengalami multikolinearitas, menambah variabel baru, dan tetap mempertahankan variabel yang digunakan dengan meminimumkan masalah multikolinearitas menggunakan suatu metode tertentu.

## **K. Analisis Cluster**

Analisis *cluster* merupakan salah satu teknik analisis multivariat yang bertujuan menempatkan sekumpulan objek ke dalam dua atau lebih *cluster* berdasarkan kesamaan karakteristiknya (Simamora, 2005: 200-201). Setiap objek yang memiliki kesamaan paling dekat dengan objek lain berada pada

*cluster* yang sama. Hasil pengelompokan bergantung pada variabel-variabel yang digunakan sebagai dasar untuk menilai kesamaan. Ciri-ciri *cluster* yang baik yaitu:

1. mempunyai kesamaan (homogenitas) yang tinggi antar anggota dalam satu *cluster* (*within cluster*), dan
2. mempunyai ketaksamaan (heterogenitas) yang tinggi antar *cluster* (*between cluster*).

Terdapat asumsi-asumsi yang harus dipenuhi dalam analisis *cluster*, yaitu: sampel yang diambil harus mewakili populasi dan multikolinearitas. Sebaiknya dalam analisis *cluster* tidak terjadi multikolinearitas antar variabel. Dalam analisis *cluster* setiap variabel diberi bobot yang sama dalam perhitungan jarak. Jika terjadi multikolinearitas, menyebabkan pembobotan yang tidak seimbang sehingga dapat mempengaruhi hasil dari analisis *cluster*.

Langkah dalam melakukan analisis *cluster* adalah sebagai berikut (Supranto, 2010: 147):

### **1. Merumuskan Masalah**

Analisis *cluster* bertujuan untuk mengelompokkan suatu objek menjadi dua kelompok atau lebih yang mempunyai kesamaan karakteristik. Pemilihan variabel merupakan hal terpenting dalam perumusan masalah. Variabel-variabel yang digunakan harus relevan dan dipilih berdasarkan pada penelitian sebelumnya, teori atau suatu pertimbangan yang berkaitan dengan permasalahan. Memasukkan variabel

yang tidak relevan mengakibatkan penyimpangan hasil *cluster* yang kemungkinan bermanfaat (Supranto, 2010: 148).

## 2. Memilih Ukuran Jarak

Ukuran jarak digunakan untuk mengetahui kesamaan atau ketaksamaan karakteristik antar objek. Semakin besar jarak menunjukkan ketaksamaan antar objek, sebaliknya semakin kecil jarak menunjukkan kesamaan antar objek. Terdapat beberapa macam ukuran jarak yang dapat digunakan, antara lain:

### a. Jarak Euclid (*Euclidean Distance*)

Jarak Euclid adalah akar dari jumlah kuadrat perbedaan nilai untuk tiap variabel. Ukuran jarak antar objek ke-*i* dengan objek ke-*j* disimbolkan dengan  $d_{ij}$  dan  $k = 1, 2, 3, \dots, p$ . Nilai  $d_{ij}$  dapat dihitung dengan persamaan:

$$d_{ij} = \sqrt{\sum_{k=1}^p (x_{ik} - x_{jk})^2} \quad (2.17)$$

Keterangan:

$d_{ij}$  = jarak antar objek ke-*i* dan objek ke-*j*

$p$  = jumlah variabel *cluster*

$x_{ik}$  = nilai atau data dari objek ke-*i* pada variabel ke-*k*

$x_{jk}$  = nilai atau data dari objek ke-*j* pada variabel ke-*k*

### b. Jarak Euclid kuadrat (*Squared Euclidean Distance*)

Jarak Euclid kuadrat akan dijelaskan pada bab III.

### c. Jarak Manhattan (*Cityblock Distance*)

Jarak Manhattan adalah jumlah perbedaan nilai mutlak untuk tiap variabel. Jarak ini disebut juga dengan jarak *Minkowski*.

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^p |x_{ik} - x_{jk}| \quad (2.18)$$

d. Jarak *Chebychev* (*Chebychev Distance*)

Jarak *Chebychev* adalah perbedaan nilai mutlak maksimum antar kedua objek untuk tiap variabel.

$$d_{ij} = \max (|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|) \quad (2.19)$$

### 3. Memilih Prosedur Pengelompokan

Secara garis besar, metode-metode pada analisis *cluster* terbagi menjadi dua metode, yaitu:

a. Metode Hirarki (*Hierarchical Method*)

Metode hirarki adalah metode pembentukan *cluster* yang dilakukan secara bertahap dan membentuk tingkatan tertentu. Hasil dari pengelompokan divisualisasikan dalam bentuk diagram pohon (dendogram). Dendogram adalah representasi visual yang menunjukkan pembentukan *cluster* dan nilai koefisien jarak pada tiap langkah. Metode hirarki terbagi menjadi dua metode, yaitu metode *agglomerative* dan metode *divisive*.

1) Metode *Agglomerative*

Metode *agglomerative* adalah metode yang menganggap setiap objek sebagai sebuah *cluster* tersendiri. Selanjutnya, dua *cluster* yang mempunyai kesamaan terdekat digabungkan menjadi sebuah *cluster* baru. Langkah-langkah penyelesaian menggunakan metode *agglomerative* (Johnson dan Winchern, 2007: 681-682), sebagai berikut:

- (a) Membuat matriks jarak berukuran  $N \times N$  (matriks similaritas)  $D = \{d_{ij}\}$ .
- (b) Menemukan pasangan *cluster* dalam matriks yang mempunyai jarak paling dekat, misal *cluster* I dan J maka jaraknya  $d_{IJ}$
- (c) Menggabungkan *cluster* I dan J menjadi sebuah *cluster* baru dan memberi nama *cluster* IJ.
- (d) Membuat matriks jarak yang baru dengan cara menghapus baris dan kolom yang menghubungkan *cluster* I dan J, kemudian menambah baris dan kolom untuk memberi jarak antara *cluster* IJ dan *cluster-cluster* yang lain.
- (e) Mengulangi langkah (a) dan (b) sampai semua objek tergabung ke dalam satu *cluster*.

Metode *agglomerative* terdiri dari tiga metode, yaitu: *linkage method* dan *variance method*. *Linkage method* terbagi menjadi tiga metode, yaitu:

(1) Metode Pautan Tunggal (*Single Linkage Method*)

Metode pautan tunggal adalah metode pengelompokan yang didasarkan pada jarak terdekat antar dua *cluster* yang ada. Untuk menghitung jarak terdekat digunakan persamaan:

$$d_{(IJ)K} = \min(d_{IK}, d_{JK}) \quad (2.20)$$

Keterangan:

$d_{(IJ)K}$  = jarak terpendek antara *cluster* IJ dan *cluster* K

$d_{IK}$  = jarak terpendek antara *cluster* I dan K

$d_{JK}$  = jarak terpendek antara *cluster* J dan K

(2) Metode Pautan Lengkap (*Complete Linkage Method*)

Metode pautan lengkap adalah metode pengelompokan yang didasarkan pada jarak terjauh antar dua *cluster* yang ada. Untuk menghitung jarak terjauh digunakan persamaan:

$$d_{(IJ)K} = \max(d_{IK}, d_{JK}) \quad (2. 21)$$

Keterangan:

$d_{(IJ)K}$  = jarak terjauh antara *cluster* IJ dan *cluster* K

$d_{IK}$  = jarak terjauh antara *cluster* I dan K

$d_{JK}$  = jarak terjauh antara *cluster* J dan K

(3) Metode Pautan Rata-rata (*Average Linkage Method*)

Metode pautan rata-rata akan dijelaskan lebih lanjut di bab selanjutnya yaitu bab III.

Selain *linkage method*, metode *agglomerative* yang lain yaitu *variance method*. *Variance method* hanya terdiri dari satu metode yaitu metode *Ward*. Pembahasan lebih lanjut tentang metode *Ward* pada bab III.

2) Metode *Divisive*

Metode *divisive* adalah metode yang memiliki sebuah *cluster* besar terdiri dari semua objek. Objek yang mempunyai nilai ketaksamaan tertinggi dipisahkan dari *cluster* besar tersebut menjadi beberapa *cluster*.

b. Metode Non Hirarki (*Non Hirarchical Method*)

Metode non hierarki yang sering digunakan dalam pengelompokan yaitu metode *K-means*. Selain metode *K-means*, terdapat tiga metode lain yang merupakan metode non hirarki lainnya,

yaitu: *Sequential Threshold*, *Parallel Threshold*, dan *Optimizing Partitioning*

Dari uraian diatas, skripsi ini menggunakan metode hirarki *agglomerative*. Metode *agglomerative* yang digunakan yaitu metode *Ward* dan *Average Linkage*.

#### **4. Menentukan Banyaknya Cluster**

Masalah utama dalam analisis *cluster* adalah menentukan jumlah *cluster* yang akan dibentuk. Beberapa petunjuk yang dapat digunakan (Supranto, 2010: 159-160), yaitu:

- a. pertimbangan teoritis, konseptual, dan praktis dapat digunakan untuk menentukan jumlah *cluster* yang sebenarnya,
- b. dalam analisis hirarki, jarak antar *cluster* yang digabung dapat digunakan sebagai kriteria penentuan banyaknya *cluster*,
- c. dalam analisis non hirarki, perbandingan jumlah varian dalam *cluster* dan antar *cluster* digunakan sebagai kriteria penentuan banyaknya *cluster*,
- d. jumlah *cluster* yang terbentuk harus berguna dan bermanfaat.

#### **5. Menginterpretasi Cluster**

Menginterpretasi dan memprofilkan hasil *cluster* bertujuan untuk memberikan gambaran karakteristik dari *cluster* yang terbentuk. Metode yang digunakan yaitu dengan melihat nilai *centroid* tiap *cluster* (Supranto, 2010: 160). *Centroid* adalah rata-rata nilai objek yang terdapat dalam

*cluster* pada tiap variabel. Nilai *centroid* dapat dihitung menggunakan persamaan di bawah ini:

$$C = \frac{\sum x_{jk}}{n} \quad (2.22)$$

Keterangan:

$C$  = nilai *centroid* tiap *cluster*

$x_{jk}$  = nilai atau data dari objek ke- $j$  pada variabel ke- $k$ ;  
dengan  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  dan  $k = 1, 2, 3, \dots, p$

$n$  = jumlah objek tiap *cluster*

## L. Kemiskinan

Kemiskinan merupakan suatu kondisi kehidupan serba kekurangan yang dialami seseorang sehingga ia tidak mampu dalam memenuhi kebutuhan minimum hidupnya. Badan Pusat Statistik (BPS) menggunakan konsep kemampuan memenuhi kebutuhan dasar (*basic needs approach*) dalam mengukur kemiskinan. Kemiskinan dipandang sebagai ketidakmampuan dari sisi ekonomi untuk memenuhi kebutuhan dasar makanan dan bukan makanan yang diukur dari sisi pengeluaran. Penduduk yang memiliki rata-rata pengeluaran perkapita per bulan dibawah garis kemiskinan dikategorikan sebagai penduduk miskin.

Garis kemiskinan merupakan penjumlahan dari Garis Kemiskinan Makanan (GKM) dan Garis Kemiskinan Non Makanan (GKNM). Garis Kemiskinan Makanan (GKM) merupakan nilai pengeluaran kebutuhan minimum makanan yang disetarakan dengan 2100 kilokalori perkapita perhari. Paket komoditi kebutuhan dasar makanan diwakili oleh 52 jenis komoditi, diantaranya: padi-padian, umbi-umbian, ikan, daging, telur dan

susu, sayuran, dll. Sedangkan Garis Kemiskinan Non Makanan (GKNM) adalah kebutuhan minimum untuk perumahan, sandang, pendidikan dan kesehatan. Paket komoditi kebutuhan dasar non makanan diwakili oleh 51 jenis komoditi di perkotaan dan 47 jenis komoditi di pedesaan.

Terdapat beberapa faktor yang mempengaruhi kemiskinan, khususnya di Provinsi Jawa Tengah. Menurut Prastyo (2010), pertumbuhan ekonomi, upah minimum, pendidikan, dan tingkat pengangguran berpengaruh signifikan terhadap tingkat kemiskinan. Pertumbuhan ekonomi, upah minimum, dan pendidikan mempunyai hubungan negatif dengan tingkat kemiskinan. Hal ini berarti bahwa apabila pertumbuhan ekonomi, upah minimum, dan pendidikan meningkat maka tingkat kemiskinan mengalami penurunan. Sedangkan tingkat pengangguran mempunyai hubungan positif dengan tingkat kemiskinan. Artinya, semakin tinggi tingkat pengangguran maka kemiskinan juga semakin meningkat.

Menurut Wahyudi dan Rejekingsih (2013), pendidikan, kesehatan, pengeluaran pemerintah, dan pertumbuhan ekonomi mempunyai hubungan negatif dengan tingkat kemiskinan. Hal ini berarti bahwa apabila pendidikan, kesehatan, pengeluaran pemerintah, dan pertumbuhan ekonomi meningkat maka tingkat kemiskinan mengalami penurunan. Sedangkan tingkat pengangguran mempunyai hubungan positif dengan tingkat kemiskinan. Artinya, semakin tinggi tingkat pengangguran maka kemiskinan juga semakin meningkat.