# BAB II
# KAJIAN TEORI

Bab ini menjabarkan beberapa kajian literatur yang digunakan untuk analisis sistem antrean pada penelitian. Beberapa hal yang akan dibahas berkaitan dengan teori probabilitas, teori antrean, model-model antrean, uji distribusi Kolmogorov-Smirnov, simulasi Monte Carlo, *software* SPSS dan WinQSB sebagai alat bantu, serta profil RS. Mata Dr. YAP Yogyakarta dan BPJS.

## A. Teori Probabilitas

Probabilitas adalah sebuah bilangan yang terletak diantara 0 dan 1 yang berkaitan dengan suatu kejadian tertentu. Jika kejadian itu pasti terjadi, maka probabilitas kejadian itu adalah 1 dan jika kejadian itu mustahil terjadi, maka probabilitasnya adalah 0 (Harinaldi, 2005: 46).

Menurut Hines & Montgomery (1989: 11), probabilitas didefinisikan sebagai suatu fungsi himpunan dimana elemen-elemen daerah asal adalah himpunan-himpunan dan elemen-elemen dari *range* bilangan riil. Jika kejadian $A$ adalah sebuah elemen pada daerah asal fungsi ini, $P(A)$ menunjukkan elemen-elemen yang berkaitan dengan *range*-nya.

Berikut ini merupakan beberapa definisi dan teorema tentang teori probabilitas, diantaranya:

**Definisi 2.1** (Bain & Engelhardt, 1992: 9)

Untuk suatu percobaan dengan $S$ sebagai ruang sampel dan $A, A_1, A_2, \ldots$ mewakili kejadian yang mungkin. Fungsi yang berhubungan dengan nilai riil *P(A)* dengan tiap kejadian *A* disebut fungsi peluang dan *P(A)* disebut peluang dari *A* jika syarat berikut terpenuhi:

$$0 \leq P(A), \quad \text{untuk tiap } A \tag{2.1}$$

$$P(S) = 1 \tag{2.2}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{2.3}$$

jika $A_1, A_2, \ldots$ adalah kejadian yang saling lepas *(mutually exclusive)* satu sama lain, sedemikian sehingga

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$$

**Teorema 2.1** (Walpole, 1995: 90)

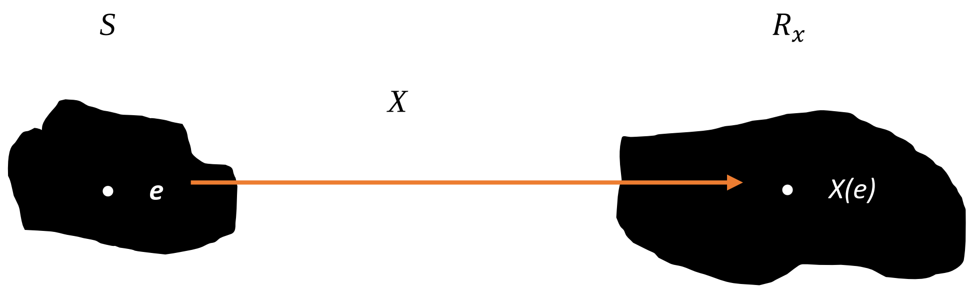
Bila suatu percobaan mempunyai *N* hasil percobaan yang berbeda, dan masing-masing mempunyai kemungkinan yang sama untuk terjadi, dan bila tepat *n* diantara hasil percobaan itu menyusun kejadian *A*, maka probabilitas kejadian *A* adalah

$$P(A) = \frac{n}{N} \tag{2.4}$$

## 1. Variabel Acak

Variabel acak adalah suatu fungsi yang memetakan setiap anggota ruang sampel *S* ke bilangan riil. Anggota ruang sampel dinotasikan dengan

$e$ dan fungsi yang memetakan anggota $e$ ke bilangan riil $x$ dinotasikan dengan $X$. Hasil pemetaan yaitu sebuah bilangan riil $x$ untuk setiap $e$ dari ruang sampel yang dinotasikan dengan $x$=$X(e)$. Berikut Gambar 2.1 yang menggambarkan sifat fungsi $X$:




(a) (b)

Gambar 2.1 Konsep dari sebuah variabel acak

(a) $S$ adalah ruang sampel dari $e$ (b) $R_x$ : ruang *range* dari $X$

Berikut definisi dalam teori probabilitas tentang variabel acak yang digunakan pada penelitian skripsi ini:

**Definisi 2.2** (Bain & Engelhardt, 1992: 53)

Sebuah variabel acak $X$ adalah fungsi yang didefinisikan atas ruang sampel $S$ yang menghubungkan $e \in S$ dengan bilangan riil $x = X(e)$.

Variabel acak dibedakan menjadi dua yaitu variabel acak diskrit dan variabel acak kontinu. Berikut definisi mengenai kedua jenis variabel acak tersebut:

### a. Variabel acak diskrit

Variabel acak diskrit adalah variabel acak yang memiliki nilai yang dapat dicacah atau *countable* (Harinaldi, 2005: 62). Berikut definisi dan teorema yang menjelaskan tentang variabel acak diskrit:

**Definisi 2.3** (Bain & Engelhardt, 1992: 56)

Jika nilai-nilai yang mungkin dari variabel acak $X$ dapat dihitung, $x_1, x_2, \dots, x_n$ atau $x_1, x_2, \dots$, maka $X$ disebut variabel acak diskrit. Fungsi

$$f(x) = P[X = x] \qquad x = x_1, x_2, \dots \tag{2.5}$$

menyatakan bahwa probabilitas $X = x$ disebut fungsi densitas probabilitas.

**Teorema 2.2** (Bain & Engelhardt, 1992: 57)

Sebuah fungsi $f(x)$ adalah fungsi densitas probabilitas diskrit jika dan hanya jika fungsi tersebut memenuhi syarat

$$f(x_i) \geq 0 \tag{2.6}$$

untuk semua nilai $x_i$, dan

$$\sum_{x_i} f(x_i) = 1 \tag{2.7}$$

Bukti:

Syarat (2.6) mengikuti fakta dimana nilai dari fungsi densitas probabilitas diskrit adalah sebuah probabilitas dan tidak negatif. Karena $x_1, x_2, \ldots$ menunjukkan semua nilai yang mungkin dari $X$ maka kejadian $[X = x_1], [X = x_2], \ldots$ merupakan partisi lengkap dari ruang sampel. Dengan demikian,

$$\sum_{x_i} f(x_i) = \sum_{x_i} P[X = x_i] = 1$$

untuk semua $x_i$. Hal ini mengakibatkan fungsi densitas probabilitas harus memenuhi syarat (2.6) dan (2.7) dan fungsi yang memenuhi syarat-syarat tersebut akan memberikan probabilitas yang sesuai dengan definisi (2.1).

**Definisi 2.4** (Bain & Engelhardt, 1992: 58)

Fungsi distribusi kumulatif dari variabel acak $X$ didefinisikan dengan

$$F(x) = P[X \leq x], \qquad \text{untuk semua bilangan riil } x \qquad (2.8)$$

**Definisi 2.5** (Bain & Engelhardt, 1992: 61)

Jika $X$ adalah variabel acak diskrit dengan fungsi densitas probabilitas $f(x)$, maka nilai harapan dari $X$ didefinisikan sebagai

$$\mu = E(X) = \sum_{x} x\, f(x) \qquad (2.9)$$

b. **Variabel acak kontinu**

Variabel acak kontinu merupakan variabel acak yang memiliki nilai yang tak terhingga banyaknya, sepanjang sebuah interval tidak terputus. Variabel acak kontinu biasanya diperoleh dari hasil pengukuran (Harinaldi, 2005: 62). Berikut ini merupakan beberapa definisi dan teorema tentang variabel acak kontinu diantaranya yaitu:

**Definisi 2.6** (Bain & Engelhardt, 1992: 64)

Variabel acak *X* dikatakan variabel acak kontinu jika ada fungsi *f(x)* yang merupakan fungsi densitas probabilitas dari *X*. Dengan demikian, fungsi distribusi kumulatifnya dapat direpresentasikan sebagai

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{2.10}$$

**Teorema 2.3** (Bain & Engelhardt, 1992: 65)

Sebuah fungsi *f(x)* merupakan fungsi densitas probabilitas untuk suatu variabel acak kontinu *X* jika dan hanya jika fungsi tersebut memenuhi syarat

$$f(x) \geq 0 \tag{2.11}$$

untuk semua riil *x*, dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \tag{2.12}$$

**Definisi 2.7** (Bain & Engelhardt, 1992: 67)

Apabila $X$ merupakan variabel acak kontinu dengan fungsi densitas probabilitas $f(x)$, maka nilai harapan dari $X$ didefinisikan dengan

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \qquad (2.13)$$

jika integral pada persamaan (2.13) benar-benar terpusat atau konvergen. Jika sebaliknya, maka *E(X)* tidak ada.

## 2. Distribusi Poisson

Distribusi Poisson adalah distribusi nilai-nilai bagi suatu variabel acak diskrit, yaitu banyaknya hasil percobaan yang terjadi didalam suatu interval waktu tertentu atau suatu daerah tertentu (Hasan, 2002: 54). Berikut ini merupakan definisi tentang fungsi distribusi probabilitas Poisson yaitu:

**Definisi 2.8** (Bain & Engelhardt, 1992: 103)

Variabel acak diskrit $X$ dikatakan memiliki distribusi Poisson dengan parameter $\mu > 0$ jika memiliki fungsi densitas probabilitas diskrit yang berbentuk

$$f(x;\mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.14)$$

Keterangan: $x$ = hasil yang mungkin dari variabel acak diskrit $X$

$e$ = konstanta dasar (basis) logaritma natural = 2,71828 . . .

$\mu$ = nilai harapan dari $X$, dimana $X$ adalah variabel acak diskrit

### 3. Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial digunakan untuk menggambarkan distribusi waktu. Misalnya pada fasilitas jasa, dengan asumsi bahwa waktu pelayanan bersifat acak. Artinya waktu untuk melayani *customer* tidak tergantung pada lama waktu yang telah dihabiskan untuk melayani *customer* sebelumnya dan tidak bergantung pada jumlah *customer* yang menunggu untuk dilayani. Berikut ini merupakan definisi yang menjelaskan tentang distribusi Eksponensial:

**Definisi 2.9** (Djauhari, 1990: 175-176)

Variabel acak $X$ dikatakan berdistribusi Eksponensial dengan parameter λ jika memiliki fungsi kepadatan probabilitas sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{untuk } x \geq 0 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases} \tag{2.16}$$

dimana $x$ menyatakan waktu yang dibutuhkan sampai terjadi satu kali sukses dengan λ adalah rata-rata banyaknya sukses dalam selang waktu satuan.

Fungsi distribusi kumulatif Eksponensial merupakan integral dari persamaan (2.16), sehingga diperoleh

$$F(x;\lambda) = \begin{cases} \int_0^x \lambda e^{-\lambda x}\, dt = 1 - e^{-\lambda x}, & \text{untuk } x \geq 0 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases} \tag{2.17}$$

## B. Teori Antrean

Pembahasan teori antrean lebih difokuskan pada upaya penguraian waktu tunggu yang terjadi dalam barisan antrean. Antrean dapat dilihat dalam berbagai situasi yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari. Sebagai contoh, kendaraan yang menunggu pada *traffic light* atau pasien yang menunggu untuk diperiksa.

### 1. Konsep Dasar Teori Antrean

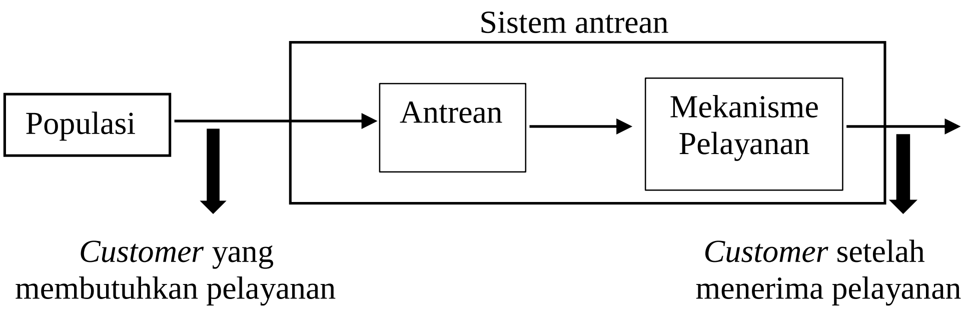
Teori antrean dikemukakan dan dikembangkan oleh A. K. Erlang, seorang insinyur Denmark pada tahun 1910. Erlang melakukan eksperimen tentang fluktuasi permintaan fasilitas telepon yang berhubungan dengan *automatic dialing equipment*, yaitu peralatan penyambungan telepon secara otomatis. Dalam waktu-waktu yang sibuk operator sangat kewalahan untuk melayani para penelepon, sehingga para penelepon atau *customer* harus antre menunggu giliran yang mungkin cukup lama.

Rata-rata *customer* mengantre tergantung pada rata-rata kecepatan pelayanan. Rata-rata pelayanan merupakan banyaknya pelayanan yang dapat diberikan dalam waktu tertentu. Lamanya waktu pelayanan dapat bersifat acak ataupun seragam. Sama halnya dengan kedatangan *customer* dapat bersifat seragam (*uniform*) selama dalam periode tertentu atau secara acak. Hal ini karena *customer* tidak datang pada waktu yang sama, demikian juga dengan waktu pelayanannya. Oleh karena itu, digunakan teori probabilitas untuk menentukan ukuran-ukuran keefektifan sistem antrean berdasarkan laju kedatangan dan pelayanan *customer*.

Kedatangan *customer* untuk mendapatkan pelayanan akan mengalami suatu proses antrean. Proses antrean merupakan suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan *customer* pada suatu fasilitas pelayanan, menunggu dalam baris antrean jika belum dapat dilayani, dilayani dan akhirnya meninggalkan fasilitas tersebut sesudah dilayani (Kakiay, 2004: 10). Proses antrean terjadi pada sistem antrean yang mana merupakan suatu himpunan *customer*, pelayan dan suatu aturan yang mengatur pelayanan kepada *customer*.

**2. Struktur Dasar Model Antrean**

Proses dasar yang dianggap oleh model antrean ialah bahwa *customer* yang memerlukan pelayanan berasal dari suatu populasi yang disebut sumber masukan (*input source*). *Customer* memasuki sistem antrean (*queuing system*) dan menggabungkan diri atau membentuk suatu antrean. Pada waktu tertentu, anggota dalam antrean dipilih untuk memperoleh pelayanan dengan menggunakan aturan tertentu yang disebut disiplin pelayanan (*service discipline*). Pelayanan yang diperlukan oleh *customer* kemudian dilakukan oleh mekanisme pelayanan (*service mechanism*). Setelah pelayanan diperoleh, maka *customer* meninggalkan sistem (Supranto, 2013: 325). Proses ini dapat dilihat pada gambar berikut:

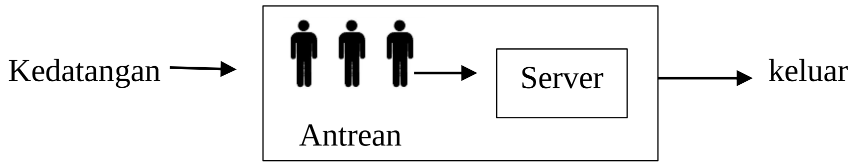


Gambar 2.2 Struktur antrean

Desain sarana pelayanan dapat diklasifikasikan dalam *channel* dan *phase* yang akan membentuk struktur antrean yang berbeda-beda. Istilah *channel* menunjukkan jumlah jalur untuk memasuki sistem pelayanan atau jumlah fasilitas pelayanan. Istilah *phase* berarti banyaknya stasiun-stasiun pelayanan, dimana *customer* harus melaluinya sebelum pelayanan dinyatakan lengkap. Ada beberapa struktur model antrean yang biasa digunakan dalam sistem antrean, diantaranya yaitu:

a. *Single Channel Single Phase*

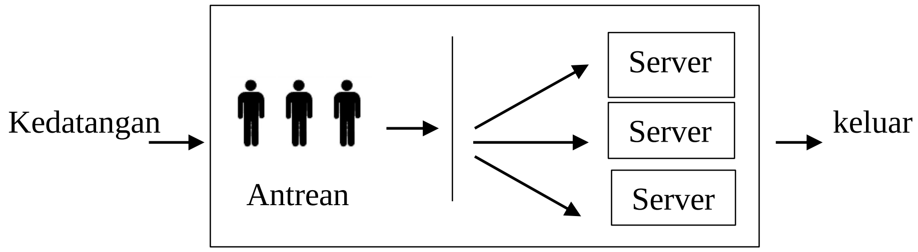
*Single Channel Single Phase* adalah suatu sistem antrean dimana *customer* hanya dilayani oleh satu penyedia layanan *(server)* dan melalui satu *phase* pelayanan. Desain dari sistem antrean ini merupakan desain yang paling sederhana. Sebagai contoh yaitu minimarket yang hanya memiliki satu kasir atau praktek seorang dokter gigi.




Gambar 2.3 Model *single channel single phase*

b. *Multiple Channel Single Phase*

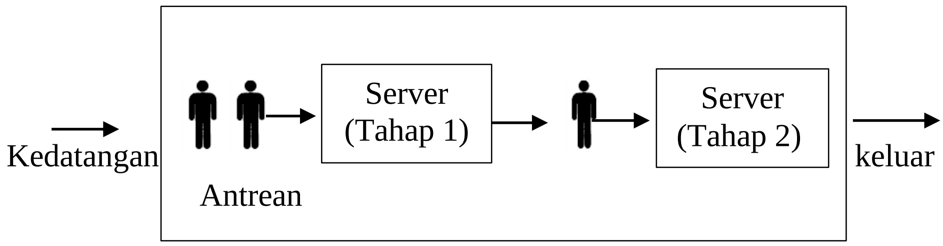
*Multiple Channel Single Phase* adalah suatu sistem antrean yang memiliki dua atau lebih fasilitas pelayanan *(server)* yang terdiri dari antrean tunggal. Misalnya, supermarket yang memiliki beberapa kasir atau pelayanan pembelian tiket yang dilayani lebih dari satu loket.




Gambar 2.4 Model *multiple channel single phase*

c. *Single Channel Multiple Phase*

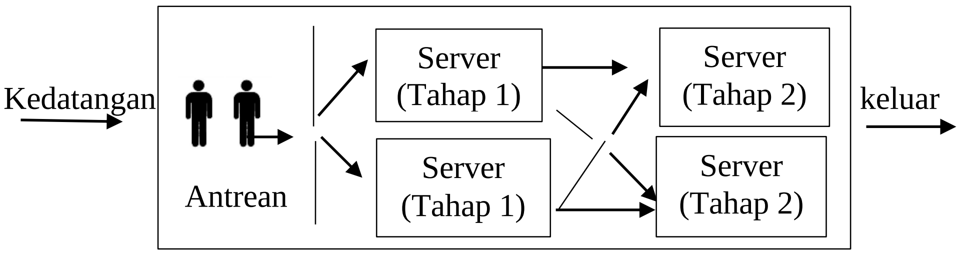
*Single Channel Multiple Phase* adalah suatu sistem antrean yang memiliki dua atau lebih pelayanan yang dilaksanakan secara berurutan. Misalnya, tempat pencucian mobil atau mengurus surat izin usaha melalui beberapa orang pejabat Pemerintahan.




Gambar 2.5 Model *single channel multiple phase*

d. *Multiple Channel Multiple Phase*

*Multiple Channel Multiple Phase* adalah suatu sistem antrean yang memiliki beberapa *phase*, dimana setiap *phase* dilayani beberapa *server*. Hal ini berarti ada lebih dari satu *customer* yang dilayani pada waktu yang bersamaan disetiap *phase*. Sebagai contoh salah satunya yaitu pelayanan kepada pasien di Rumah Sakit. Rumah Sakit mempunyai beberapa perawat yang akan memeriksa pasien secara teratur dan kontinu (sebagai suatu urutan pekerjaan). Secara skematis akan terlihat sebagai berikut:




Gambar 2.6 Model *multiple channel multiple phase*

## 3. Faktor Sistem Antrean

Terdapat beberapa faktor penting yang berpengaruh terhadap barisan antrean dan pelayanannya, antara lain:

a. Distribusi Kedatangan

Pada sistem antrean, distribusi kedatangan merupakan faktor penting yang berpengaruh besar terhadap kelancaran pelayanan. Distribusi kedatangan terbagi menjadi dua, diantaranya:

1) Kedatangan secara individu (*single arrivals*)

2) Kedatangan secara kelompok (*bulk arrivals*)

Distribusi kedatangan diasumsikan bahwa kedatangan *customer* mengikuti suatu proses dengan distribusi probabilitas tertentu. Distribusi probabilitas yang sering digunakan ialah distribusi Poisson, dimana kedatangan bersifat bebas, tidak terpengaruh oleh kedatangan sebelum ataupun sesudahnya. Asumsi distribusi Poisson menunjukkan bahwa kedatangan *customer* sifatnya acak dan mempunyai nilai rata-rata kedatangan sebesar *lamda* ($\lambda$) (Kakiay, 2004: 11).

b. Distribusi Pelayanan

Distribusi pelayanan berkaitan dengan banyaknya fasilitas pelayanan yang dapat disediakan. Distribusi pelayanan terbagi menjadi dua komponen penting, yaitu:

1) Pelayanan secara individual (*single service)*
2) Pelayanan secara kelompok (*bulk service*)

Distribusi probabilitas yang biasa digunakan pada ditribusi waktu pelayanan yaitu distribusi Poisson. Lain halnya dengan waktu antar pelayanan yang diasumsikan berdistribusi Eksponensial. Distribusi Eksponensial merupakan distribusi acak yang variabelnya berdiri sendiri tanpa memori masa lalu. Artinya, waktu antar pelayanan tidak bergantung dengan pelayanan sebelumnya. Rata-rata laju pelayanan dengan simbol $\mu$ (mu) merupakan banyaknya *customer* yang dapat dilayani dalam satuan waktu.

c. Fasilitas Pelayanan

Fasilitas pelayanan berkaitan erat dengan baris antrean yang akan dibentuk. Desain fasilitas pelayanan ini dapat dibagi dalam tiga bentuk, yaitu:

1) Bentuk series

   Fasilitas pelayanan dengan bentuk series merupakan fasilitas pelayanan yang berurutan dalam satu garis lurus.

2) Bentuk paralel atau sejajar

   Fasilitas pelayanan dengan bentuk paralel merupakan fasilitas pelayanan yang dilakukan secara bercabang dengan fungsi yang sama.

3) Bentuk *network station* atau antrean jaringan

   Fasilitas pelayanan dengan bentuk *network station* merupakan fasilitas pelayanan series dan paralel yang terjadi secara bersama-sama.

d. Disiplin Pelayanan

Menurut Kakiay (2004: 12), disiplin antrean merupakan aturan dimana para *customer* dilayani, atau disiplin pelayanan *(service discipline)* yang memuat urutan *(order)* para *customer* menerima layanan. Aturan pelayanan menurut kedatangan ini dapat didasarkan pada:

1) *First Come First Served (FCFS)*

*FCFS* merupakan suatu peraturan dimana yang akan dilayani terlebih dahulu adalah *customer* yang datang pertama. Misalnya, antrean di loket-loket penjualan karcis kereta api.

2) *Last Come First Served (LCFS)*

*LCFS* merupakan antrean dimana yang datang paling akhir akan dilayani paling awal. Misalnya, pada sistem bongkar muat barang di dalam truk, dimana barang yang masuk terakhir justru akan keluar terlebih dahulu.

3) *Service in Random Order (SIRO)*

*SIRO* merupakan antrean dimana pelayanan dilakukan secara acak. Misalnya arisan, dimana pelayanan atau *service* dilaksanakan berdasarkan undian *(random)*.

4) Prioritas pelayanan, yang berarti pelayanan dilakukan khusus pada *customer* utama (*VIP customer*)

Prioritas pelayanan adalah antrean dimana pelayanan didasarkan pada prioritas khusus. Misalnya, dalam suatu pesta dimana tamu-tamu yang dikategorikan VIP akan dilayani terlebih dahulu.

e. Kapasitas Antrean

Kapasitas antrean merupakan besarnya sistem antrean dapat menampung banyaknya individu-individu atau *customer*. Ada dua desain yang dapat dipilih untuk menentukan besarnya antrean. Desain pertama yaitu ukuran kedatangan *customer* tidak terbatas *(infinite queue),* sedangkan desain kedua yaitu ukuran kedatangan secara terbatas *(finite queue).*

f. Sumber Pemanggilan

Sumber pemanggilan pada fasilitas pelayanan dapat berupa mesin maupun manusia. Bila ada sejumlah mesin yang rusak maka sumber pemanggilan akan berkurang dan tidak dapat melayani *customer*. Sumber pemanggilan dibedakan menjadi dua yaitu sumber pemanggilan terbatas *(finite calling source)* dan tidak terbatas *(infinite calling source).*

## 4. Notasi Kendall

Karakteristik dan asumsi dari model antrean dirangkum dalam bentuk notasi. Menurut Kakiay (2004: 17-18), bentuk kombinasi proses kedatangan dengan pelayanan pada umumnya dikenal sebagai standar universal. Standar universal disebut notasi Kendall yaitu:

$$(a/b/c) : (d/e/f)$$

dimana simbol *a, b, c, d, e,* dan *f* merupakan unsur-unsur model baris antrean. Penjelasan dari simbol-simbol tersebut adalah sebagai berikut:

*a :* Distribusi kedatangan *(Arrival Distribution)*

*b* : Distribusi waktu pelayanan atau keberangkatan *c* : Banyaknya *server* dalam paralel (dimana *c* = 1, 2, 3, . . ∞)

*d* : Disiplin antrean, seperti *FCFS, LCFS, SIRO*.

*e* : Jumlah maksimum yang diizinkan dalam sistem *(Queue and System)*

*f* : Banyaknya *customer* yang ingin memasuki sistem sebagai sumber

Notasi standar ini dapat diganti dengan kode-kode yang sebenarnya dari distribusi-distribusi yang terjadi dan bentuk lainnya, seperti:

*M* : Distribusi kedatangan atau pelayanan dari proses Poisson.

*D* : *Desterministic inter arrival* atau *service time* (waktu pelayanan)

*k* : Banyaknya *server* dalam bentuk paralel atau seri

*N* : Jumlah maksimum *customer* dalam sistem

$E_d$ : Erlang distribusi untuk waktu antar kedatangan dan pelayanan

*G* : Distribusi umum dari *service time* atau keberangkatan *(departure)*

*GI* : Distribusi umum yang independen dari proses kedatangan

*GD* : *General Discipline* (disiplin umum) dalam antrean (*FCFS*, *LCFS*, dll)

NPD: Non-*Preemptive Discipline*

*PRD*: *Preemptive Discipline*

Berikut ini merupakan contoh notasi Kendall yang digunakan untuk menentukan model antrean:

$$(M/M/k):(GD/\infty/\infty)$$

Hal ini berarti: *M* = *Distribution of Poisson Arrival* atau kedatangan berdistribusi Poisson

$M$ = Waktu pelayanan berdistribusi Poisson

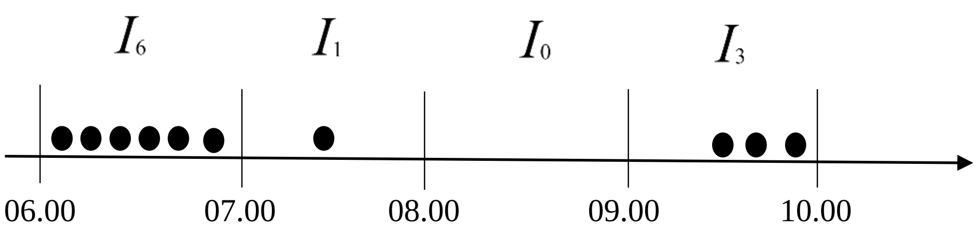
$k$ = Banyaknya *server k*

*GD* = *General Discipline*

$\infty$ = Kapasitas *customer* dan sumber pemanggilan tidak terbatas

## 5. Tingkat Kedatangan

Menurut pengamatan A. K. Erlang di Copenhagen Telephone, pola permintaan *customer* telepon yang meminta sambungan dalam kurun waktu yang tidak terputus *(continuous of time)* dapat dibagi dalam beberapa interval waktu yang sama. Dalam hal ini, permintaan *customer* terdistribusi secara acak pada masing-masing interval waktu tetap dalam kurun waktu yang tidak terputus disebut proses Poisson (Siswanto, 2007: 218). Berikut ilustrasi proses Poisson pada kedatangan *customer* dan interval waktu tetap dalam suatu kurun waktu:




Gambar 2.7 Proses Poisson berdasarkan interval waktu

Berdasarkan Gambar 2.7 terdapat 10 *customer* yang datang antara jam 06.00-10.00. Pada interval $I_6$ ada 6 *customer* yang datang, sedangkan pada interval $I_0$ tidak ada yang datang sama sekali. Inilah contoh fenomena yang diamati oleh A. K. Erlang dengan mengikuti proses Poisson. Dalam hal ini, diasumsikan:

1) Kedatangan *customer* bersifat acak
2) Kedatangan *customer* antar interval waktu tidak saling mempengaruhi

Dalam Gambar 2.7, kurun waktu observasi tersebut dibagi menjadi empat interval waktu tetap. Jika *I* menandai banyaknya interval waktu maka

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i \tag{2.18}$$

dimana $I_i$ adalah interval ke-*i*.

Dalam kasus ini, $I_6$ = 1 interval dengan 6 kedatangan; $I_1$ = 1 interval dengan 1 kedatangan; $I_0$ = 1 interval dengan 0 kedatangan; dan $I_3$ = 1 interval dengan 3 kedatangan. Dengan demikian diperoleh bahwa banyaknya interval yaitu 4 atau $I = 4$. Selanjutnya, jika *N* menandai banyaknya *customer* yang datang selama *I* interval dan di interval $I_i$ ada $K_i$ *customer*, maka banyaknya *customer* selama kurun waktu *I* adalah:

$$N = \sum_{i=1}^{n} K_i I_i \tag{2.19}$$

dimana, $K_i$ adalah banyaknya *customer* yang datang di interval $I_i$. Dalam kasus ini, $N = 6 + 1 + 0 + 3 = 10$.

Jadi, di dalam setiap interval yang sama tersebut *customer* datang secara acak *(random)*. Jika pada setiap interval tersebut dibagi menjadi *n* sub interval dengan asumsi dan proses yang sama, maka kedatangan pada setiap interval waktu tetap dapat dinyatakan dengan distribusi Poisson (Siswanto, 2007: 219). Dengan demikian, rata-rata laju kedatangan *customer* pada setiap interval waktu tersebut dapat diestimasi dengan:

$$\lambda = \frac{N}{I} \tag{2.20}$$

Menggunakan persamaan (2.20), rata-rata laju kedatangan *(arrival rate)* pada contoh Gambar 2.7 diperoleh:

$$\lambda = \frac{N}{I} = \frac{10}{4} = 2{,}5\ \frac{customer}{jam}$$

Artinya setiap jam rata-rata 2,5 *customer* datang, maka rata-rata interval kedatangan antara satu *customer* dengan *customer* yang lain adalah:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2{,}5}\frac{jam}{customer} = \frac{60}{2{,}5}\frac{menit}{customer} = 24\frac{menit}{customer}$$

Dengan demikian, jika λ menyatakan rata-rata laju kedatangan *customer* per interval waktu, maka $1/\lambda$ menyatakan rata-rata waktu antar kedatangan *customer*.

## 6. Tingkat Pelayanan

Rata-rata waktu pelayanan *(mean server rate)* diberi simbol μ (mu) merupakan banyaknya *customer* yang dapat dilayani dalam satuan waktu. Lain halnya dengan rata-rata waktu yang dipergunakan untuk melayani setiap *customer* diberi simbol $1/\mu$ satuan (Kakiay, 2004: 11). Misalnya, kapasitas fasilitas suatu pelayanan mampu melayani 4 *customer* per jam. Artinya rata-rata tingkat pelayanan adalah $\mu = 4$ *customer*/jam, maka rata-rata waktu pelayanan setiap *customer* adalah:

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{4}\frac{jam}{customer}$$

Selanjutnya, apabila rata-rata waktu antar pelayanan $1/\mu$ dalam satuan waktu per *customer* mengikuti distribusi Eksponensial, maka rata-rata pelayanan (μ) dalam *customer* per satuan waktu mengikuti distribusi Poisson (Siswanto, 2007: 221).

## C. Model-Model Antrean

Bagian ini membahas sejumlah model antrean yang mencakup berbagai operasi pelayanan. Pembahasan ini terdiri dari: proses kelahiran dan kematian murni; model kelahiran murni; model kematian murni; solusi *steady-state* dari kinerja sistem antrean; antrean Poisson khusus *(M/M/1):(GD/∞/∞)*; antrean Poisson khusus *(M/M/c):(GD/∞/∞)*; dan antrean tandem atau seri.

### 1. Proses Kelahiran dan Kematian *(Birth and Death)*

Kebanyakan model dasar antrean menganggap bahwa kedatangan (*input)* dan keberangkatan (*output)* dari sistem antrean terjadi menurut proses *birth-death* (kelahiran-kematian). Kelahiran adalah kedatangan *calling unit* yang baru dalam sistem antrean, sedangkan kematian adalah keberangkatan unit yang telah dilayani. Proses kelahiran dan kematian terjadi secara acak yang rata-rata terjadinya bergantung pada keadaan yang sedang berlangsung *(current state)* dari sistem ( Dimyati & Dimyati, 2002: 356).

Berikut ini merupakan penjelasan tentang proses kelahiran dan kematian:

1) *Birth postulate*

   Sistem pada *state* $E_n(n = 0, 1, 2 \dots)$ pada saat *t*, probabilitas bahwa tepat ada satu kelahiran selama interval waktu *t* sampai dengan $(t + \Delta t)$ adalah $[\lambda_n \, \Delta t + 0(\Delta t)]$, dimana $\lambda_n$ positif konstan.

2) *Death postulate*

   Sistem pada *state* $E_n(n = 0, 1, 2 \dots)$ pada saat *t*, probabilitas bahwa tepat ada satu kematian selama interval waktu *t* sampai dengan $(t + \Delta t)$ adalah $[\mu_n \, \Delta t + 0(\Delta t)]$, dimana $\mu_0 = 0$ dan $\mu_n$ positif konstan untuk $n > 0$.

3) *Multiple jump postulate*

   Sistem pada *state* $E_n(n = 0, 1, 2 \dots)$ pada saat *t*, probabilitas bahwa jumlah kombinasi kelahiran dan kematian lebih dari satu selama interval waktu *t* sampai $(t + \Delta t)$ adalah $0(\Delta t)$ (keterangan: $0(\Delta t)$ adalah fungsi dari $\Delta t$ yang mendekati nol). Dengan demikian, fungsi tersebut memenuhi persamaan:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{0(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

Sebagai akibat *postulate* ketiga, maka *postulate* pertama diasumsikan tepat ada 1 kelahiran dan tanpa kematian. Hal yang sama berlaku juga untuk *postulate* kedua yaitu ada 1 kematian dan tanpa kelahiran.

Proses kelahiran dan kematian selama interval waktu $t$ sampai dengan $(t + \Delta t)$ harus terjadi salah satu dari kejadian *mutually exclusive* (saling meniadakan) berikut:

1) Tepat ada 1 kelahiran tanpa kematian
2) Tepat ada 1 kematian tanpa kelahiran
3) Jumlah kelahiran dan kematian lebih besar dari 1
4) Tidak ada kelahiran atau kematian

Jumlah probabilitas kejadian tersebut adalah 1, sehingga probabilitas terjadi kejadian (4) adalah:

$$P(4) = 1 - [P(3) + P(2) + P(1)]$$

Dengan demikian, sistem dengan *state* $E_n (n = 0, 1, 2 \dots)$ pada saat *t* probabilitas bahwa tidak terjadi kelahiran dan kematian pada interval waktu *t* sampai dengan $(t + \Delta t)$ adalah:

$$[1 - (\lambda_n \Delta t) - (\mu_n \Delta t) + 0(\Delta t)]$$

Probabilitas kejadian dapat mencapai *state* $E_n$ pada saat *t* sampai $(t + \Delta t)$ dengan *n* > 0 yaitu:

Tabel 2.1 Probabilitas kejadian *mutually exclusive*

| State pada saat *t* | Kejadian dari *t* sampai $(t + \Delta t)$ | | Probabilitas |
|---|---|---|---|
| | Kelahiran | Kematian | |
| $E_{n-1}$ | 1 | 0 | $P_{n-1}(t)\ [\lambda_{n-1} \Delta t + 0(\Delta t)]$ |
| $E_{n+1}$ | 0 | 1 | $P_{n+1}(t)\ [\mu_{n+1} \Delta t + 0(\Delta t)]$ |
| $E_n$ | 1 | 1 | $0(\Delta t)$ |
| $E_n$ | 0 | 0 | $P_n(t)\ [1 - \lambda_n \Delta t - \mu_n \Delta t + 0(\Delta t)]$ |

Berdasarkan Tabel 2.1 dengan 4 probabilitas kejadian *mutually exclusive* maka diperoleh:

$$P_n(t+\Delta t) = P_{n-1}(t)[\lambda_{n-1}\Delta t + 0(\Delta t)] + P_{n+1}(t)[\mu_{n+1}\Delta t + 0(\Delta t)] \\ + 0(\Delta t) + P_n(t)[1 - \lambda_n\Delta t - \mu_n\Delta t + 0(\Delta t)]$$

Selanjutnya, proses penggabungan $0(\Delta t)$

$$P_n(t+\Delta t) = P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}\Delta t + P_{n+1}(t)\mu_{n+1}\Delta t + P_n(t)[1 - \lambda_n\Delta t - \mu_n\Delta t] \\ +0(\Delta t)$$

Kedua ruas kemudian dikurangi dengan $P_n(t)$ dan dibagi dengan $\Delta t$, maka didapatkan:

$$\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = P_{n-1}(t)\lambda_{n-1} + P_{n+1}(t)\mu_{n+1} + P_n(t)[-\lambda_n - \mu_n] \\ + \frac{0(\Delta t)}{\Delta t}$$

Untuk $\Delta t$ positif, maka berlaku:

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left\{\begin{matrix} P_{n-1}(t)\lambda_{n-1} + P_{n+1}(t)\mu_{n+1} + \\ P_n(t)[-\lambda_n - \mu_n] + \dfrac{0(\Delta t)}{\Delta t} \end{matrix}\right\} \quad (2.21)$$

dengan mengingat kembali tentang definisi turunan berikut:

$$f'(x) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

maka persamaan (2.21) menjadi:

$$P_n'(t) = \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)P_n(t)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)P_n(t), n > 0 \quad (2.22)$$

Jika $n = 0$ maka nilai $\lambda_{-1} = 0$ dan $\mu_0 = 0$, sehingga persamaan (2.22) menjadi:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu_1 P_1(t) - \lambda_0 P_0(t) \qquad (2.23)$$

## 2. Model Kelahiran Murni

Asumsikan bahwa $\lambda_n = \lambda$ dan $\mu_n = 0$ untuk seluruh $n$ ($n$ = 0, 1, 2,…). Ini menunjukkan bahwa kematian tidak akan pernah terjadi, sehingga prosesnya menjadi proses kelahiran murni dengan tingkat kedatangan konstan. Persamaan differensial dari persamaan (2.22) untuk kelahiran murni menjadi:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda\, P_0(t)\,, \qquad \text{untuk } n = 0 \qquad (2.24)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t), \qquad \text{untuk } n = 1, 2, \ldots \qquad (2.25)$$

Selanjutnya, diasumsikan bahwa sistem dalam *state* $E_0$ pada saat $t$ = 0, maka didapatkan:

$$P_o(t) = e^{-\lambda t}\,, \qquad \text{untuk } n = 0$$

Jika $n$ = 1, maka dengan menggunakan persamaan (2.25) diperoleh:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda\, P_0(t) - \lambda\, P_1(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda\, P_1(t) = \lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda\, P_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Mengalikan kedua ruas dengan $e^{\lambda t}$, maka diperoleh

$$e^{\lambda t}\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda e^{\lambda t} P_1(t) = \lambda$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} P_1(t)\right) = \lambda$$

Kedua ruas tersebut kemudian diintegrakan, sehingga didapatkan

$$e^{\lambda t} P_1(t) = \int \lambda \, dt$$

$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} + c$, karena $P_1$ adalah fungsi probabilitas maka nilai $c$ yang memenuhi adalah 0. Jadi didapatkan nilai $P_1$ yaitu :

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} \tag{2.26}$$

Jika $n$ = 2, maka dengan menggunakan persamaan (2.25) diperoleh:

$$\frac{dP_{2(t)}}{dt} = \lambda P_1(t) - \lambda P_2(t)$$

$$\frac{dP_{2(t)}}{dt} = \lambda^2 t e^{-\lambda t} - \lambda P_2(t)$$

$$\frac{dP_{2(t)}}{dt} + \lambda P_2(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$$

Selanjutnya mengalikan kedua ruas dengan $e^{\lambda t}$, maka diperoleh

$$e^{\lambda t}\frac{dP_{2(t)}}{dt} + \lambda e^{\lambda t} P_2(t) = \lambda^2 t$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} P_2(t)\right) = \lambda^2 t$$

Mengintegralkan kedua ruas tersebut, sehingga didapatkan

$$e^{\lambda t} P_2(t) = \frac{1}{2}\lambda^2 t^2 + c$$

$P_2(t) = \frac{1}{2}\lambda^2 t^2 e^{-\lambda t} + ce^{-\lambda t}$ , karena $P_2$ adalah fungsi probabilitas maka *c* = 0. Jadi didapatkan nilai $P_2$ yaitu

$$P_2(t) = \frac{1}{2}\lambda^2 t^2 e^{-\lambda t} \tag{2.27}$$

Berdasarkan persamaan (2.26) dan (2.27), maka dapat diambil rumus umum yaitu:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n\,!} \tag{2.28}$$

Mengingat kembali bahwa distribusi kemungkinan untuk *n* adalah distribusi Poisson dengan parameter $\lambda t$. Oleh karena itu, harga rata-rata dan variansi dari panjang garis pada saat *t* adalah $\lambda t$ dengan rata-rata laju kedatangan $\lambda$. Selanjutnya, misalkan *n* merupakan kedatangan *customer* digantikan dengan simbol *x*, maka probabilitas untuk *x customer* yaitu:

$$P_x(t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x\,!}, \;\; x = 0, 1, 2 \ldots \tag{2.29}$$

**3. Model Kematian Murni**

Asumsikan bahwa $\lambda_n = 0$ untuk *n* = 0, 1, 2, . . . dan $\mu_n = \mu$ untuk *n* = 1, 2, 3, . . . . Asumsikan juga bahwa sistem dalam keadaan *state* $E_N$ pada saat *t* = 0. Pada asumsi pertama menyatakan kelahiran tidak pernah terjadi, sehingga hanya terdapat kematian murni dengan tingkat pelayanan konstan sampai berakhir pada *state* $E_0$ (Dimyati & Dimyati, 2002: 360). Dengan demikian proses ini ekuivalen dengan kelahiran murni, kecuali proses ini bergerak dalam arah berlawanan, dan berhenti setelah *N* kejadian.

Persamaan diferensial untuk proses kematian murni yaitu:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \mu P_{n+1}(t) - \mu P_n(t), \qquad \text{untuk } n = 0, 1, 2, .., N-1 \tag{2.30}$$

$$\frac{dP_N(t)}{dt} = -\mu P_N(t), \qquad \text{untuk } n \approx N \tag{2.31}$$

Mengingat bahwa *(N-n)* adalah jumlah kejadian kematian yang telah terjadi dalam proses. Oleh karena itu, probabilitas bahwa tidak ada kejadian terjadi pada saat *t* adalah:

$$P_N(t) = e^{-\mu t} \tag{2.32}$$

Selanjutnya mencari probabilitas bahwa *(N-n)* kejadian telah terjadi, dimana $(N - n) < N$. Misalkan $n$ = *N-1*, maka dengan menggunakan persamaan (2.30) diperoleh:

$$\frac{dP_{N-1}(t)}{dt} = \mu P_N(t) - \mu P_{N-1}(t)$$

$$\frac{dP_{N-1}(t)}{dt} + \mu P_{N-1}(t) = \mu P_N(t)$$

$$\frac{dP_{N-1}(t)}{dt} + \mu P_{N-1}(t) = \mu e^{-\mu t}$$

Kedua ruas tersebut kemudian dikalikan dengan $e^{\mu t}$, maka didapatkan

$$e^{\mu t} \frac{dP_{N-1}(t)}{dt} + \mu e^{\mu t} P_{N-1}(t) = \mu$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\mu t} P_{N-1}(t)) = \mu$$

Selanjutnya kedua ruas diintegralkan, sehingga didapatkan

$$e^{\mu t} P_{N-1}(t) = \int \mu \, dt$$

$e^{\mu t} P_{N-1}(t) = \mu t + c$, karena $P_{N-1}$ adalah fungsi probabilitas maka *c*= 0.

Jadi diperoleh nilai $P_{N-1}$ yaitu

$$P_{N-1}(t) = \mu t e^{-\mu t} \tag{2.33}$$

Jika $n$ = $N$-2, maka dengan menggunakan persamaan (2.30) diperoleh

$$\frac{dP_{N-2}(t)}{dt} = \mu P_{N-1}(t) - \mu P_{N-2}(t)$$

$$\frac{dP_{N-2}(t)}{dt} + \mu P_{N-2}(t) = \mu P_{N-1}(t)$$

$$\frac{dP_{N-2}(t)}{dt} + \mu P_{N-2}(t) = \mu^2 t e^{-\mu t}$$

Kedua ruas tersebut kemudian dikalikan dengan $e^{\mu t}$, maka didapatkan

$$e^{\mu t}\frac{dP_{N-2}(t)}{dt} + \mu e^{\mu t} P_{N-2}(t) = \mu^2 t$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\mu t} P_{N-2}(t)) = \mu^2 t$$

Selanjutnya kedua ruas diintegralkan, sehingga diperoleh

$$e^{\mu t} P_{N-2}(t) = \int \mu^2 t \; dt$$

$$e^{\mu t} P_{N-2}(t) = \frac{1}{2}\mu^2 t^2 + c$$

$P_{N-2}(t) = \frac{1}{2}\mu^2 t^2 e^{-\mu t} + c\, e^{-\mu t}$, karena $P_{N-2}$ adalah fungsi probabilitas maka $c$ = 0. Jadi diperoleh nilai $P_{N-2}$ yaitu

$$P_{N-2}(t) = \frac{1}{2}(\mu t)^2 e^{-\mu t} \tag{2.34}$$

Berdasarkan persamaan (2.33) dan (2.34), maka diperoleh rumus umum probabilitas untuk kematian murni yaitu:

$$P_n(t) = \frac{(\mu t)^{N-n} e^{-\mu t}}{(N-n)!} \qquad (2.35)$$

**4. Solusi *Steady State* dari Kinerja Sistem Antrean**

Menurut Dimyati & Dimyati (2002: 361-362), jika sistem antrean mencapai kondisi *steady state* maka probabilitas $\{P_n(t)\}$ menjadi konstan dan independen terhadap waktu. Solusi *steady state* untuk $P_n$ bisa didapatkan dengan 2 pendekatan, antara lain:

1) Dengan menyelesaikan $P_n(t)$ dalam kasus transien dengan $t \rightarrow \infty$
2) Dengan menetapkan

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$$

Solusi transien tidak dapat digunakan untuk proses kelahiran dan kematian, maka digunakan pendekatan yang kedua. Dengan mengasumsikan bahwa:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} P_n(t) = P_n$$

sehingga

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \left\{\frac{dP_n(t)}{dt}\right\} = 0$$

Untuk $t \rightarrow \infty$ maka persamaan (2.22) dan (2.23) menjadi:

$$0 = \lambda_{n-1}P_{n-1} + \mu_{n+1}P_{n+1} - (\lambda_n + \mu_n)P_n\,, \quad \text{jika } n > 0 \qquad (2.36)$$

$$0 = \mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0\,, \quad \text{jika } n = 0 \qquad (2.37)$$

Jika $n$ = 0, maka dengan menggunakan persamaan (2.37) diperoleh:

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 \tag{2.38}$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (2.36) untuk $n$ = 1, maka diperoleh

$$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = (\lambda_1 + \mu_1) P_1 \tag{2.39}$$

Mensubstitusikan persamaan (2.38) ke dalam persamaan (2.39), sehingga persamaannya menjadi

$$P_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0 \tag{2.40}$$

Berdasarkan persamaan (2.38) dan (2.40), maka diperoleh rumus umum yaitu :

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \ldots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \ldots \mu_1} P_0 \tag{2.41}$$

berlaku untuk $n$ =1, 2, 3.

Nilai $P_0$ ditentukan dengan menggunakan persamaan berikut ini:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \tag{2.42}$$

Ukuran-ukuran *steady state* dari kinerja sistem antrean dengan $c$=pelayanan paralel diperoleh,

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n \, P_n \tag{2.43}$$

$$L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n - c) P_n \tag{2.44}$$

Terdapat hubungan yang kuat antara $L_s$ , $L_q$, $W_s$, dan $W_q$, sehingga salah satu ukuran secara otomasis dapat ditentukan dari ukuran lainnya. Anggap $\lambda_{eff}$ adalah rata-rata laju kedatangan efektif (tidak bergantung dengan jumlah sistem *n*), maka

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{eff}} \tag{2.45}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{eff}} \tag{2.46}$$

Hubungan langsung dari ukuran keefektifan juga terdapat antara $W_s$ dan $W_q$, berdasarkan definisi

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Waktu}\\ \text{menunggu}\\ \text{yang}\\ \text{diperkirakan}\\ \text{dalam sistem}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{Waktu}\\ \text{menunggu}\\ \text{yang}\\ \text{diperkirakan}\\ \text{dalam}\\ \text{antrean}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{Waktu}\\ \text{pelayanan}\\ \text{yang}\\ \text{diperkirakan}\end{array}\right\}$$

Diketahui bahwa μ adalah rata-rata laju pelayanan, maka waktu pelayanan yang diperkirakan adalah $1/\mu$. Dengan demikian diperoleh,

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \tag{2.47}$$

Selanjutnya mengalikan kedua sisi persamaan (2.47) dengan $\lambda_{eff}$, diperoleh

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_{eff}}{\mu} \tag{2.48}$$

Pemanfaatan yang diperkirakan dari sebuah sarana pelayanan didefinisikan sebagai fungsi dari banyaknya rata-rata pelayan *(server)* yang sibuk. Karena selisih antara $L_s$ dan $L_q$ harus sama dengan banyaknya pelayan yang sibuk, maka diperoleh

$$\left\{\begin{matrix}\text{Jumlah pelayanan sibuk} \\ \text{yang diperkirakan}\end{matrix}\right\} = \bar{c} = L_s - L_q = \frac{\lambda_{eff}}{\mu} \quad (2.49)$$

Persentase pemanfaatan sebuah sarana pelayanan dengan *c* pelayan yang paralel dapat dihitung sebagai

$$\text{Persentase pemanfaatan} = \frac{\bar{c}}{c} \times 100\% \quad (2.50)$$

Solusi *steady state* dari kinerja sistem antrean diatas diturunkan dengan asumsi bahwa parameter-parameter $\lambda_n$ dan $\mu_n$ adalah sedemikian sehingga kondisi *steady state* tercapai. Asumsi ini berlaku jika,

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1 \quad (2.51)$$

Kondisi stabil (*steady state)* dapat terpenuhi jika $\rho < 1$ yang berarti $\lambda < \mu$. Jika nilai $\rho > 1$ maka kedatangan terjadi dengan laju yang lebih cepat dari pada yang dapat dilayani *server*. Hal ini berarti panjang antrean yang diharapkan bertambah tanpa batas sehingga tidak *steady state*. Demikian juga jika $\rho = 1$, maka kedatangan terjadi dengan laju yang sama dengan laju pelayanan.

## 5. Antrean Poisson Khusus *(M/M/1):(GD/∞/∞)*

Proses kelahiran-kematian yang telah dijelaskan pada bagian sebelumnya digunakan untuk menganalisis ukuran keefektifan sistem antrean *(M/M/1):(GD/∞/∞)*. Mengingat kembali bahwa sistem antrean *(M/M/1):(GD/∞/∞)* memiliki waktu antar kedatangan Eksponensial (asumsikan rata-rata kedatangan per satuan waktu λ) dan satu *server* dengan waktu antar pelayanan Eksponensial (asumsikan setiap *customer* waktu pelayanannya Eksponensial dengan rata-rata μ) (Winston, 2004: 1072).

Pada bagian C.1, memperlihatkan bahwa sistem antrean *(M/M/1):(GD/∞/∞)* dimodelkan sebagai proses kelahiran-kematian dengan parameter berikut:

$$\lambda_n = \lambda \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mu_0 = 0$$

$$\mu_n = \mu \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

dengan menganggap $\rho = \lambda/\mu$. Selanjutnya, mengekspresikan $P_n$ ke dalam persamaan (2.41) yang telah digeneralisasi menjadi:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \rho^n P_0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.52}$$

Selanjutnya, nilai $P_0$ dicari dengan menggunakan persamaan (2.42) yaitu jumlah semua $P_n$ untuk $n$ = 0, 1, 2, . . . sama dengan 1, maka diperoleh

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \ldots = 1$$

$$P_0 + \rho^1 P_0 + \rho^2 P_0 + \rho^3 P_0 + \ldots = 1$$

$$P_0[1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots] = 1$$

Persamaan tersebut merupakan deret geometri, maka dapat disubstitusikan ke dalam rumus deret geometri tak hingga yang didefinisikan dengan:

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}, \qquad \rho < 1$$

maka diperoleh,

$$P_0 \left[\frac{1}{1-\rho}\right] = 1$$

$$P_0 = 1 - \rho \tag{2.53}$$

Selanjutnya mensubstitusikan persamaan (2.53) ke dalam persamaan (2.52), sehingga diperoleh rumus umum $P_n$ yaitu:

$$P_n = (1-\rho)\rho^n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.54}$$

yang merupakan sebuah distribusi geometris.

Persyaratan matematis $\rho < 1$ diperlukan untuk memastikan konvergensi dari serial geometris $[1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots]$. Pada intinya, $\rho < 1$ berarti bahwa $\lambda < \mu$ yang menyatakan bahwa laju kedatangan harus lebih kecil dari laju pelayanan agar sistem mencapai kondisi *steady state*. Dengan demikian, dapat diturunkan ukuran-ukuran keefektifan model antrean *(M/M/1)*:*(GD/∞/∞)* sebagai berikut:

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n$$

$$= (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\,\rho^n$$

$$= (1-\rho)[\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \ldots]$$

$$= (1-\rho)\rho[1 + 2\rho^1 + 3\rho^2 + \ldots]$$

$$L_s = (1-\rho)\rho\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} \tag{2.55}$$

Terlihat bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1}$ merupakan turunan sederhana dari $\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n}$ terhadap ρ. Selanjutnya dengan menggunakan definisi deret geometri ρ < 1, maka diperoleh:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\,\rho^n = \frac{1}{1-\rho}$$

akibatnya,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} = \frac{d[1/(1-\rho)]}{d\rho} = \frac{1}{(1-\rho)^2} \qquad (2.56)$$

Persamaan (2.56) kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (2.55), sehingga persamaannya menjadi:

$$L_s = (1-\rho)\rho \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1}$$

$$= (1-\rho)\rho \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

$$L_s = \frac{\rho}{(1-\rho)} \qquad (2.57)$$

Ukuran keefektifan rata-rata waktu *customer* menunggu dalam sistem dapat dicari dengan mensubstitusikan persamaan (2.57) ke persamaan (2.45) seperti berikut ini:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\lambda}$$

$$W_s = \frac{\rho}{(1-\rho)\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} \qquad (2.58)$$

Rata-rata waktu *customer* menunggu dalam antrean dapat dicari dengan cara mensubstitusikan persamaan (2.58) ke dalam persamaan (2.47), maka diperoleh

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$\frac{1}{\mu(1-\rho)} = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$W_q = \frac{1}{\mu(1-\rho)} - \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{1-(1-\rho)}{\mu(1-\rho)}$$

$$= \frac{1-1+\rho}{\mu(1-\rho)}$$

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \tag{2.59}$$

Selanjutnya, menentukan rata-rata banyaknya *customer* dalam antrean yaitu dengan cara mensubstitusikan persamaan (2.59) ke persamaan (2.46), sehingga diperoleh

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$\frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{Lq}{\lambda}$$

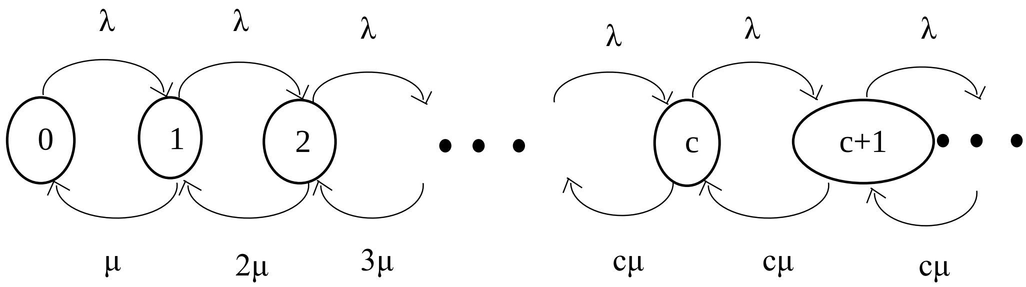
$$L_q = \frac{\lambda\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)} \tag{2.60}$$

Dengan demikian, banyak pelayanan yang sibuk atau kepadatan *customer* ($\bar{c}$) dapat dicari dengan mensubstitusikan persamaan (257) dan (2.60) ke dalam persamaan (2.49), sehingga diperoleh

$$\bar{c} = \frac{\rho}{(1-\rho)} - \frac{\rho^2}{(1-\rho)} = \frac{\rho(1-\rho)}{(1-\rho)} = \rho \qquad (2.61)$$

**6. Antrean Poisson Khusus *(M/M/c):(GD/∞/∞)***

Pada model *(M/M/c):(GD/∞/∞)* kedatangan *customer* berdistribusi Poisson dengan rata-rata λ. Selain itu, terdapat *c server* dimana setiap *server* independen dan diidentifikasi waktu antar pelayanan (1/μ) berdistribusi Eksponensial (Gross & Harris, 2008: 66-67). Berikut ini merupakan diagram yang menggambarkan tentang model *(M/M/c):(GD/∞/∞)*:




Gambar 2.8 Diagram tingkat perpindahan model *(M/M/c):(GD/∞/∞)*

Seperti antrean *(M/M/1):(GD/∞/∞)*, antrean *(M/M/c):(GD/∞/∞)* dapat dimodelkan sebagai proses kelahiran-kematian (Gambar 2.8). Dalam model ini, rata-rata laju kedatangan (λ) dan rata-rata laju pelayanan (μ) *customer* konstan. Selain itu juga terdapat maksimum *c (server)*, sehingga *customer* dapat dilayani secara bersamaan. Selanjutnya dari pembahasan pada bagian sebelumnya, yaitu solusi *steady state* dari kinerja sistem antrean dapat disimpulkan bahwa $\lambda_{eff} = \lambda$.

Pengaruh penggunaan *c server* yang paralel adalah mempercepat laju pelayanan dengan memungkinkan dilakukannya beberapa pelayanan secara bersamaan. Jika banyaknya *customer* dalam sistem sebanyak *n*, sama dengan atau lebih besar dari *c*, maka laju pelayanannya dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\lambda_n = \lambda\,, \qquad n \geq 0$$

$$\mu_n \begin{cases} n\mu, & n \leq c \\ c\mu, & n \geq c \end{cases}$$

Perhitungan $P_n$ untuk $n \leq c$ dapat dijabarkan sebagai,

$$P_n = \rho^n P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)(3\mu)\ldots(n\mu)} P_0$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} P_0 \tag{2.62}$$

dan $P_n$ untuk $n \geq c$ yaitu,

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)\ldots(c-1)\mu(c\mu)(c\mu)\ldots(c\mu)} P_0$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\mu^n} P_0 \tag{2.63}$$

Jadi, dari persamaan (2.62) dan persamaan (2.63) diperoleh

$$P_n \begin{cases} \left(\dfrac{\rho^n}{n!}\right) P_0 & 0 \leq n \leq c \\ \left(\dfrac{\rho^n}{c^{n-c}c!}\right) P_0 & n > c \end{cases} \tag{2.64}$$

dengan menganggap bahwa $\rho = \lambda/\mu$. Nilai $P_0$ didapatkan dengan cara mensubstitusikan persamaan (2.64) ke dalam persamaan $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ seperti berikut:

$$P_0 \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\rho^n}{c^{n-c}c!} \right\} = 1$$

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\rho^{n-c}}{c^{n-c}} \right\}^{-1}$$

Jika dimisalkan $j = n - c$, maka diperoleh

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^j \right\}^{-1}$$

karena $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^j$ merupakan deret geometri tak hingga, maka

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \left(\frac{1}{1 - \rho/c}\right) \right\}^{-1}, \qquad \frac{\rho}{c} < 1 \qquad (2.65)$$

Selanjutnya, menentukan ukuran keefektifan yang terdiri dari $L_q$, $L_s$, $W_q$, dan $W_s$ . Nilai $L_q$ dapat dicari dengan meggunakan persamaan (2.44) berikut

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty} (n - c) P_n$$

Jika dimisalkan $k = n - c$ dan mensubstitusikan persamaan (2.64) ke persamaan (2.44), maka diperoleh

$$L_q = \sum_{k=0}^{\infty} kP_{k+c}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\rho^{k+c}}{c^k c!} P_0$$

$$L_q = P_0 \frac{\rho^c}{c!} \frac{\rho}{c} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{\rho}{c}\right)^{k-1}$$

dimana

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{\rho}{c}\right)^{k-1} = \frac{d}{d\left(\frac{\rho}{c}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^k = \frac{d}{d\left(\frac{\rho}{c}\right)} \left[\frac{1}{1-\frac{\rho}{c}}\right] = \frac{1}{\left(1-\frac{\rho}{c}\right)^2}$$

Akibatnya,

$$L_q = P_0 \frac{\rho^c}{c!} \frac{\rho}{c} \frac{1}{\left(1-\frac{\rho}{c}\right)^2}$$

$$= \left[\frac{\rho^{c+1}}{c!\, c\left(\frac{c-\rho}{c}\right)^2}\right] P_0$$

$$= \left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\, c^2 \frac{(c-\rho)^2}{c^2}}\right] P_0$$

$$L_q = \left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\,(c-\rho)^2}\right] P_0 \qquad (2.66)$$

Selanjutnya, menentukan nilai $L_s$ dengan cara mensubstitusikan persamaan (2.66) ke dalam persamaan (2.48), sehingga didapatkan

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= L_q + \rho$$

$$L_s = \left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\,(c-\rho)^2}\right] P_0 + \rho \qquad (2.67)$$

Nilai $W_q$ dapat ditentukan dengan mensubstitusikan persamaan (2.66) ke dalam persamaan (2.46), seperti berikut

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W_q = \frac{\left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\,(c-\rho)^2}\right] P_0}{\lambda}$$

$$= \frac{\lambda\rho^c}{\mu(c-1)!\,(c-\rho)^2} P_0 \times \frac{1}{\lambda}$$

$$W_q = \frac{\rho^c}{\mu(c-1)!\,(c-\rho)^2} P_0 \qquad (2.68)$$

Nilai $W_s$ ditentukan dengan mensubstitusi persamaan (2.68) ke dalam persamaan (2.47), maka diperoleh

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$W_s = \frac{\rho^c}{\mu(c-1)!\,(c-\rho)^2} P_0 + \frac{1}{\mu} \qquad (2.69)$$

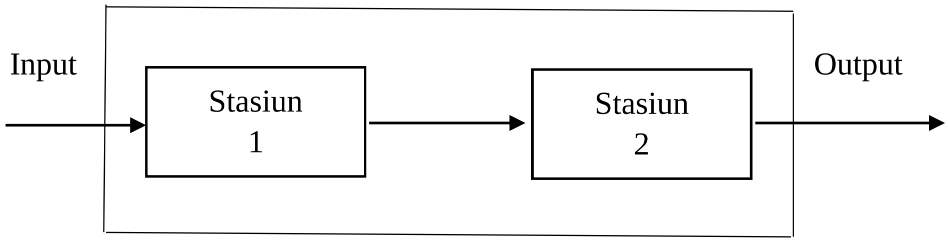
Dengan demikian, dapat dicari banyaknya pelayanan yang sibuk atau kepadatan *customer* ($\bar{c}$) dengan mensubstitusikan persamaan (2.66) dan (2.67) ke dalam persamaan (2.49), sehingga didapatkan

$$\bar{c} = \left\{\left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\,(c-\rho)^2}\right] P_0 + \rho\right\} - \left\{\left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\,(c-\rho)^2}\right] P_0\right\} = \rho \qquad (2.70)$$

## 7. Antrean Dua Stasiun Seri (Tandem)

Antrean model seri diuraikan melalui distribusi tertentu yang menunjukkan kedatangan *customer* pada suatu tempat dengan menggunakan sistem antrean tersebut. *Customer* harus melalui semua stasiun secara berurutan agar mendapatkan layanan secara tuntas (Kakiay, 2004: 189).

Sistem antrean seri yang melalui dua stasiun dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 2.9 Sistem antrean dua stasiun seri

Pada sistem antrean dua stasiun seri, antrean tidak diizinkan di depan stasiun-1 atau stasiun 2. Setiap *customer* yang datang harus melalui stasiun-1 dan kemudian masuk stasiun-2 agar dapat dilayani dengan tuntas. Waktu antar pelayanan mengikuti distribusi Eksponensial, sedangkan laju kedatangan mengikuti distribusi Poisson.

Pengembangan model antrean seri mengharuskan pertama-tama keadaan sistem di setiap saat diidentifikasi. Hal ini dapat dicapai apabila setiap stasiun mungkin bisa berisi, ada *customer* atau mungkin pula kosong. Dengan kata lain setiap stasiun mungkin bebas *(free),* bekerja *(busy)* atau *customer* ditahan *(blocked)* di stasiun-1 jika stasiun-2 masih ada *customer* yang dilayani.

Dengan demikian dapat diberikan pernyataan dengan simbol 0, 1, *b* yang menandakan bebas *(free)*, sibuk *(busy)*, dan ditahan *(blocked)*. Anggaplah *i* dan *j* mewakili keadaan stasiun-1 dan stasiun-2. Maka keadaan dalam sistem antrean ini dapat ditunjukkan sebagai berikut :

$$\{(i,j\} = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1),(b,1\}$$

Selanjutnya, mendefinisikan $P_{ij}(t)$ sebagai probabilitas bahwa sistem tersebut berada dalam keadaan *(i, j)* pada waktu *t*. Probabilitas transisi antara *t* dan *t+h* (*h* adalah sebuah kenaikan positif dalam waktu) yang diringkas dalam Tabel 2.2. Kotak yang kosong menunjukkan bahwa transisi antara keadaan yang ditunjukkan di *t* dan *t+h* adalah tidak mungkin (=0).

Tabel 2. 2 Probabilitas $P_{ij}\ (t+h)$

| **Keadaan di *t*** | **Keadaan di *t+h*** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **(0,0)** | **(0,1)** | **(1,0)** | **(1,1)** | **(*b*,1)** |
| | **(0,0)** | 1-λh | | | | |
| | **(0,1)** | μh(1-λh) | 1-μh-λh | | λh(1-μh) | |
| | **(1,0)** | | μh(1-λh) | 1-μh | | |
| | **(1,1)** | | μh(1-λh) | μh | $(1-\mu h)^2$ | μh |
| | **(*b*,1)** | | μh(1-λh) | | | 1-μh |

Masing-masing kotak diatas menjelaskan besarnya transisi probabilitas dari $P_{ij}\ (t)$ ke $P_{ij}\ (t+h)$. Sebagai contoh pada kotak $\mathrm{P_{01}}\ (\mathrm{t})$ ke $\mathrm{P_{00}}\ (\mathrm{t+h})$ besar probabilitasnya adalah μh(1-λh). Artinya, terdapat pelayanan di stasiun-2 tetapi tidak terdapat kedatangan di stasiun-1.

Berdasarkan Tabel 2.2, dengan mengabaikan $h^2$ maka diperoleh persamaan $\mathrm{P_{ij}}\ (\mathrm{t+h})$ sebagai berikut:

$P_{00}(t+h) = P_{00}(t)(1-\lambda h) + P_{01}(t)(\mu h)$

$P_{01}(t+h) = P_{01}(t)(1-\mu h-\lambda h) + P_{10}(t)(\mu h) + P_{b1}(t)(\mu h)$

$P_{10}(t+h) = P_{00}(t)(\lambda h) + P_{10}(t)(1-\mu h) + P_{11}(t)(\mu h)$

$P_{11}(t+h) = P_{01}(t)(\lambda h) + P_{11}(t)(1-2\mu h)$

$P_{b1}(t+h) = P_{11}(t)(\mu h) + P_{b1}(t)(1-\mu h)$

Selanjutnya mengambil limit yang sesuai dan mengikuti persamaan *steady state*, maka perumusan pada persamaan diatas dapat diuraikan menjadi:

$$P_{01} - \rho P_{00} = 0$$

$$P_{10} + P_{b1} - (1+\rho)P_{01} = 0$$

$$\rho P_{00} + P_{11} - P_{10} = 0$$

$$\rho P_{01} - 2P_{11} = 0$$

$$P_{11} - P_{b1} = 0$$

Salah satu persamaan diatas berlebihan, sehingga dengan menambahkan kondisi

$$P_{00} + P_{01} + P_{10} + P_{11} + P_{b1} = 1$$

dapat dicari pemecahan untuk $P_{ij}$ yaitu:

$$P_{00} = \frac{2}{A} \tag{2.71}$$

$$P_{01} = \frac{2\rho}{A} \tag{2.72}$$

$$P_{10} = \frac{\rho^2 + 2\rho}{A} \tag{2.73}$$

$$P_{11} = P_{b1} = \frac{\rho^2}{A} \tag{2.74}$$

dimana $A = 3\rho^2 + 4\rho + 2$.

Ekspektasi jumlah *customer* didalam sistem antrean dapat dinyatakan dengan:

$$L_s = 0(P_{00}) + 1(P_{01} + P_{10}) + 2(P_{11} + P_{b1})$$

$$= 0\left(\frac{2}{A}\right) + 1\left(\frac{2\rho}{A} + \frac{\rho^2 + 2\rho}{A}\right) + 2\left(\frac{\rho^2}{A} + \frac{\rho^2}{A}\right)$$

$$L_s = \frac{5\rho^2 + 4\rho}{A} \tag{2.75}$$

Dengan demikian, dapat ditentukan nilai $W_s$ atau rata-rata waktu menunggu *customer* dalam sistem menggunakan persamaan (2.45) sebagai berikut:

$$W_s = \frac{\frac{5\rho^2 + 4\rho}{A}}{\lambda_{eff}}$$

$\lambda_{eff}$ diperoleh dari $\lambda(P_{00} + P_{01})$, maka

$$W_s = \frac{\frac{5\rho^2 + 4\rho}{A}}{\lambda\left(\frac{2}{A} + \frac{2\rho}{A}\right)}$$

$$= \frac{5\rho^2 + 4\rho}{A} \times \frac{A}{\lambda(2 + 2\rho)}$$

$$W_s = \frac{5\rho^2 + 4\rho}{\lambda(2 + 2\rho)} \tag{2.76}$$

## D. Uji Distribusi Kolmogorov-Smirnov

Pengujian Kolmogorov-Smirnov merupakan salah satu uji pembanding dalam statistik non parametrik. Pengujian ini dapat dinyatakan sebagai suatu cara untuk menguji apakah terdapat perbedaan yang signifikan antara observasi distribusi frekuensi dengan teoritis distribusi frekuensi. Dengan demikian, pengujian Kolmogorov-Smirnov merupakan suatu perhitungan *goodness of-fit* untuk teori distribusi frekuensi (Kakiay, 2004: 143).

Misalkan $F_0(X)$ merupakan fungsi distribusi frekuensi kumulatif yang diharapkan (frekuensi teoritis) dari suatu distribusi Poisson dan $S_N(X)$ merupakan distribusi frekuensi kumulatif yang diobservasi dari sampel acak dengan *N* observasi. Berdasarkan distribusi teoritis dibawah asumsi $H_0$, maka diharapkan untuk setiap harga $X$, $S_N(X)$ harus jelas mendekati $F_0(X)$. Artinya, dibawah asumsi $H_0$ selisih antara $S_N(X)$ dan $F_0(X)$ menghasilkan nilai yang kecil dan ada dalam batas-batas kesalahan acak (Siegel, 1956: 48).

Tes Kolmogorov-Smirnov memusatkan perhatian pada penyimpangan (deviasi) terbesar. Nilai $F_0(X) - S_N(X)$ terbesar dinamakan deviasi maksimum, yang dirumuskan:

$$D = maksimum\ |F_0(X) - S_N(X)\ | \tag{2.77}$$

Tes Kolmogorov-Smirnov ini memperlihatkan dan mengerjakan suatu observasi terpisah dari yang lain. Dengan demikian, tes Kolmogorov-Smirnov tidak akan kehilangan informasi karena adanya penggabungan kategori. Hal ini yang menjadi alasan untuk menggunakan Kolmogorov-Smirnov sebagai uji distribusi. Selain itu, tes Kolmogorov-Smirnov dapat digunakan untuk menguji sampel yang sangat kecil. Fakta ini menunjukkan bahwa Tes Kolmogorov-Smirnov kekuatannya lebih besar dibandingkan dengan tes lainnya seperti $\chi^2$.

## E. Simulasi Monte Carlo

Simulasi Monte Carlo merupakan suatu pendekatan yang membentuk kembali distribusi peluang berdasarkan pada pilihan atau pengadaan bilangan acak. Penerapan simulasi Monte Carlo pada sistem antrean karena beberapa asumsi yang diperlukan sulit terpenuhi. Misalnya, keadaan sistem antrean yang belum *steady state* atau laju kedatangan dan pelayanan yang tidak berdistribusi Poisson.

Teknik simulasi Monte Carlo merupakan suatu teknik untuk memilih angka-angka secara acak dari distribusi probabilitas yang digunakan dalam suatu percobaan (komputer) (Taylor, 2008: 242). Adapun langkah-langkah simulasi Monte Carlo dengan bantuan *software* MS. Excel adalah sebagai berikut:

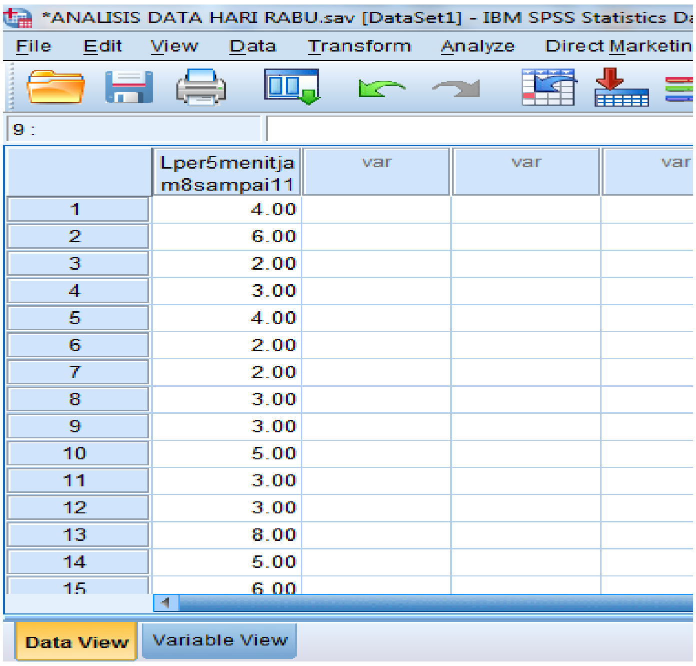
1. Menetapkan distribusi probabilitas untuk masing-masing waktu kedatangan dan waktu pelayanan.
2. Menghitung distribusi kumulatif pada masing-masing probabilitas.
3. Menetapkan suatu interval angka acak untuk masing-masing variabel.
4. Gunakan fasilitas yang telah disediakan pada *software* MS. Excel untuk pemilihan angka acak.
5. Selanjutnya, cari rata-rata panjang antrean dan rata-rata waktu menunggu dalam antrean.

Sesuai dengan langkah-langkah yang telah disebutkan, alur simulasi Monte Carlo pada sistem antrean dapat dilihat pada *lampiran 10.*

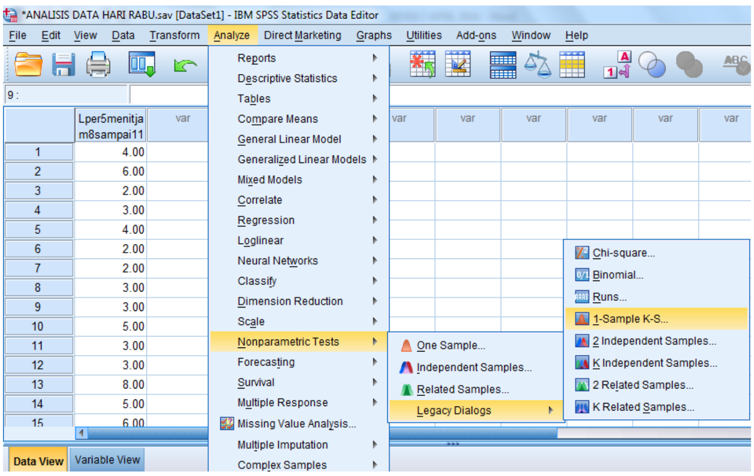
## F. *Software* SPSS

Berikut merupakan langkah-langkah uji Kolmogorov-Smirnov dengan menggunakan *software* SPSS:

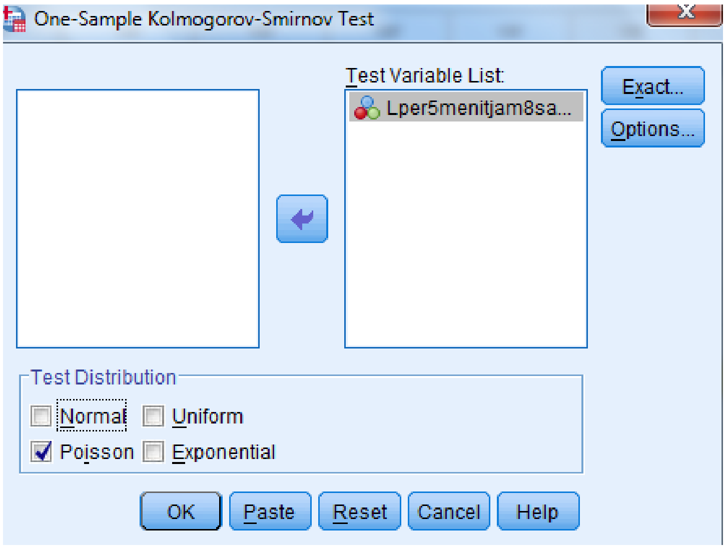
1. Input data ke *spreadsheets* Data View SPSS dilanjutkan dengan input parameter deskripsi ke *spreadsheets* Data Variable SPSS.




2. Klik Analyze → Nonparametric Test → Legacy Dialogs → 1-Sample K-S.



3. Muncul kotak One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test. Data yang akan diuji terletak di kiri dan dipindahkan ke kanan dengan tanda panah. Selanjutnya, pada Test Distribution pilih Poisson dan klik OK.




4. Hasilnya akan muncul seperti berikut ini:

**One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test**

| | | Lper5menitjam8sampai11 |
|---|---|---|
| N | | 36 |
| Poisson Parameter[a,b] | Mean | 3.0278 |
| Most Extreme Differences | Absolute | .109 |
| | Positive | .109 |
| | Negative | -.048 |
| Kolmogorov-Smirnov Z | | .654 |
| Asymp. Sig. (2-tailed) | | .786 |

a. Test distribution is Poisson.

b. Calculated from data.

Intepretasi dari hasil *output* 4 adalah sebagai berikut:

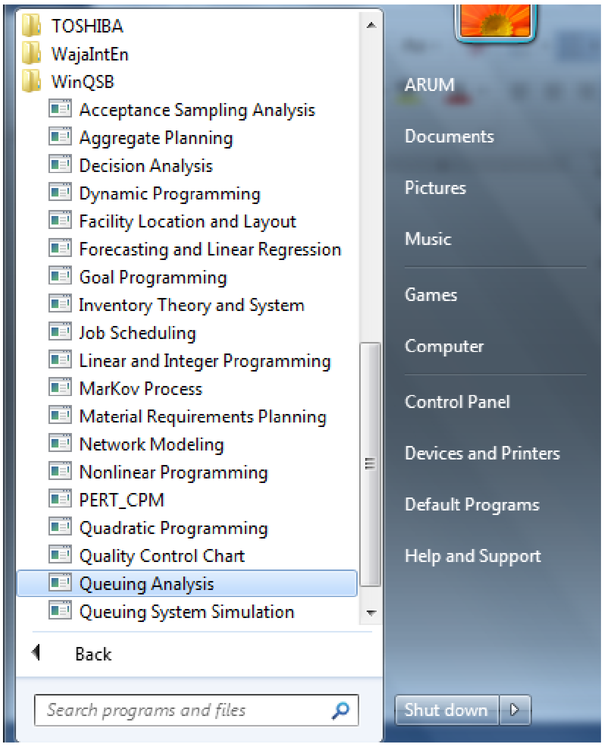
a. *N* merupakan jumlah data sample yang diuji pada Kolmogorov-Smirnov menggunakan SPSS.

b. Poisson Parameter Mean merupakan parameter (rata-rata laju kedatangan atau pelayanan) *customer* per satuan waktu.
c. Most Extreme Differences Absolute merupakan nilai statistik $D$ pada Uji Kolmogorov-Smirnov. Nilai $D$ pada uji Kolmogorov-Smirnov diatas sebesar 0,109.
d. Kolmogorov-Smirnov $Z$ pada hasil *output* tersebut sebesar 0,654. Hal ini berarti *p-value* > 0,05, sehingga $H_0$ diterima dan data terdistribusi secara normal.
e. Asymp. Sig. (2-tailed) merupakan *p-value* yang dihasilkan dari uji $H_0$ . Pada hasil *output* nilai Asymp. Sig. (2-tailed) sebesar 0,786, sehingga memenuhi asumsi normalitas karena nilainya diatas 0,05.

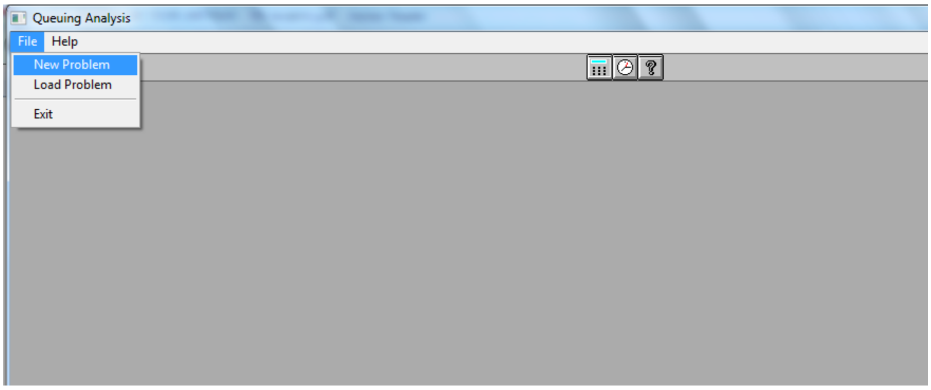
## G. *Software* WinQSB

*Software* winQSB merupakan salah satu alat bantu untuk menyelesaikan masalah model antrean. Menurut Retno S. & Nikenasih B. (2014: 22-25), langkah-langkah penyelesaian pada model antrean dengan *software* winQSB adalah sebagai berikut:

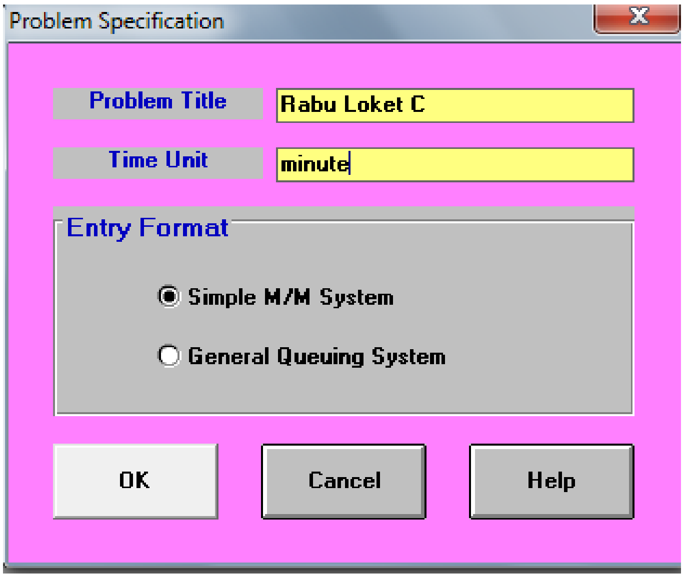
1. Buka aplikasi dengan cara klik Start → Program → WinQSB → Queuing Analysis.




2. Selanjutnya, akan muncul tampilan awal dari winQSB dan pilih File → New Problem.



3. Muncul problem Spesification




Langkah pertama : Masukkan judul masalah di Problem title. Judul kemudian muncul pada bagian atas untuk tampilan windows berikutnya.

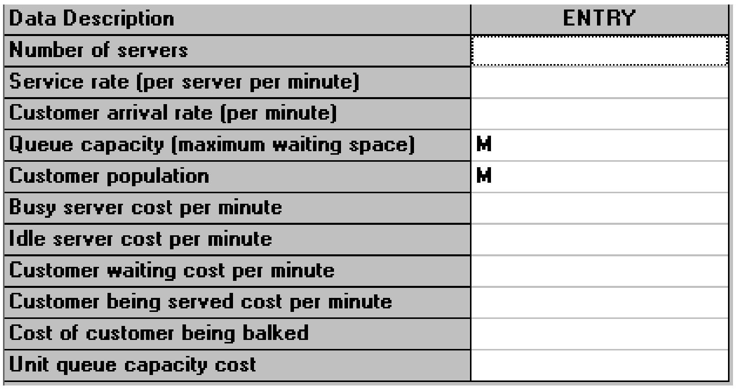
Langkah kedua : Masukkan satuan waktu yang sesuai dengan masalah.

Langkah ketiga : Pilih salah satu dari format masukannya.

a. **Simple M/M System** jika diketahui bahwa kedatangan *customer* dan pelayanannya terdistribusi Poisson.

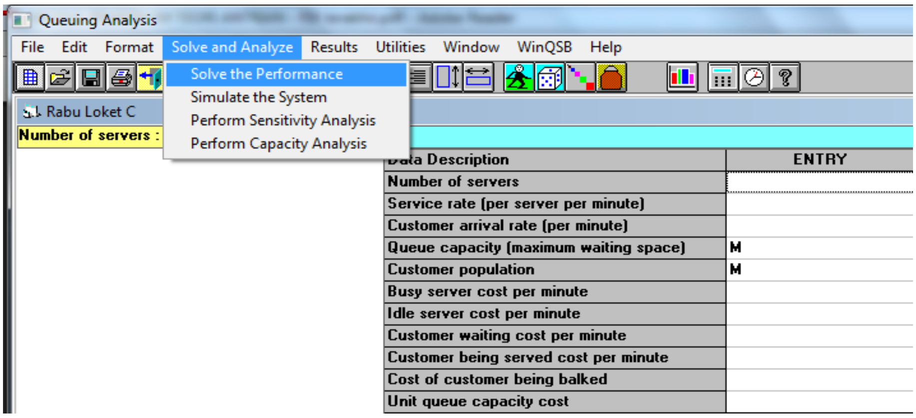
b. **General Queueing System**. Format GQS digunakan untuk model secara umum. Model *M/M* dapat pula dientrikan pada format GQS.

4. Berikut *output* yang muncul apabila memilih Simple M/M System



| Data Description | ENTRY |
|---|---|
| Number of servers | |
| Service rate (per server per minute) | |
| Customer arrival rate (per minute) | |
| Queue capacity (maximum waiting space) | M |
| Customer population | M |
| Busy server cost per minute | |
| Idle server cost per minute | |
| Customer waiting cost per minute | |
| Customer being served cost per minute | |
| Cost of customer being balked | |
| Unit queue capacity cost | |

5. Isi kolom dengan nilai sesuai dengan kasus yang akan diselesaikan. Kemudian pilih menu Solve and Analyze → Solve The Performance atau klik icon dari Solve The Performance berikut:




## H. Profil Rumah Sakit Mata Dr. Yap Yogyakarta

Profil Rumah Sakit Mata Dr. Yap Yogyakarta membahas tentang sejarah singkat berdirinya rumah sakit. Selain itu, menjelaskan visi dan misi yang dimiliki rumah sakit serta jenis-jenis pelayanan yang tersedia.

## 1. Sejarah Singkat Rumah Sakit Mata Dr. Yap

Rumah Sakit Mata Dr. Yap didirikan oleh Dr. Yap Hong Tjoen sejak tahun 1923. Dr. Yap merupakan warga keturunan Tionghoa yang menempuh pendidikan di negeri Belanda. Sejak di negeri Belanda sudah timbul hasrat Dr. Yap untuk mangamalkan keahliannya kepada rakyat Indonesia. Setelah selesai menempuh pendidikannya, Dr. Yap berusaha merealisasikan harapan dan cita-citanya. Dalam rangka mewujudkan harapan tersebut maka berdirilah Rumah Sakit Dr. Yap yang awal mulanya ditandai dengan:

a. Berdirinya Prinses Juliana Gasthuis voor Ooglijders
b. Berdirinya Balai Mardi Wuto
c. Perubahan menjadi Rumah Sakit Mata Dr. Yap

Pada tanggal 24 September 1920 Dr. Yap bersama beberapa warga keturunan Tionghoa mendirikan perkumpulan. Perkumpulan tersebut diberi nama *Centrale Veereeniging tot bevordering der Oogheelkunde in Nederlandsch-Indie (CVO)* dengan tujuan menolong penderita penyakit mata. Selanjutnya, Dr. Yap mendirikan sebuah Rumah Sakit mata yang dibangun di atas tanah seluas 2.995 $m^2$ di Yogyakarta. Akhirnya, pada tanggal 29 Mei 1923 bangunan Rumah Sakit mata kemudian diberi nama *Prinses Juliana Gasthuis voor Ooglijders*. Pada tahun 1942 *Prinses Juliana Gasthuis voor Ooglijders* yang dipimpin oleh Dr. Yap Hong Tjoen berganti nama menjadi Rumah Sakit Mata Dr. Yap.

Pada tahun 1948 Dr. Yap Hong Tjoen menyerahkan kuasa kepada puteranya Dr. Yap Kie Tiong untuk melanjutkan pengabdiannya kepada masyarakat. Sebelum wafat pada tanggal 9 Januari 1969, Dr. Yap Kie Tiong memberikan wasiat yang ditujukan kepada Gusti Paku Alam VIII dan empat orang lainnya. Wasiat yang diberikan berisi permintaan mengambil alih Rumah Sakit Mata Dr. Yap guna kepentingan masyarakat. Hingga akhirnya pada tanggal 1 April 1971, dr. Basarodin dari Fakultas Kedokteran UI menjabat sebagai pemimpin Rumah Sakit Mata Dr. Yap. Pengangkatan jabatan dilakukan secara definitif melalui penetapan dari Pemerintah (Kep. Pres. RI No. 13032/B/Pers/720/PT/1974). Periodisasi kepemimpinan dan struktur organisasi dapat dilihat pada *lampiran 1*.

## 2. Visi dan Misi Rumah Sakit Mata Dr. Yap Yogyakarta

Visi dari Rumah Sakit Mata Dr. Yap adalah menjadi pusat pelayanan kesehatan mata yang professional dan terjangkau oleh seluruh lapisan masyarakat serta dapat bersaing secara global di tahun 2020. Adapun misi dari Rumah Sakit Mata Dr. Yap adalah sebagai berikut:

a. Memberikan pelayanan yang berfokus pada pasien seutuhnya dan mengupayakan kerjasama dengan instansi atau lembaga lain untuk saling melengkapi.

b. Menyelenggarakan pelayanan kesehatan mata yang professional untuk Asia Tenggara dengan memenuhi harapan *stake holder*.

c. Mengembangkan ilmu kesehatan mata melalui pendidikan, penelitian, dan pelatihan bagi tenaga kesehatan dan masyarakat.

## I. Profil Badan Penyelenggara Jaminan Sosial (BPJS)

Profil BPJS membahas tentang sejarah singkat terbentuknya penyelenggaraan jaminan sosial serta menjelaskan visi dan misi yang dimiliki.

### 1. Sejarah singkat Badan Penyelenggara Jaminan Sosial (BPJS)

Penyelenggara jaminan sosial merupakan salah satu tanggung jawab dan kewajiban negara untuk memberikan perlindungan sosial ekonomi kepada masyarakat. Sesuai dengan kondisi negara, Indonesia mengembangkan program jaminan sosial berdasarkan *funded social security*. *Funded social security* merupakan jaminan sosial yang didanai oleh peserta dan masih terbatas pada masyarakat pekerja disektor formal.

Berawal dari terbentuknya PT. Jamsostek (persero) yang dimulai dengan UU No. 33/1947, kemudian mengalami kemajuan baik menyangkut landasan hukum maupun cara penyelenggaraan. Pada tahun 1977 dikeluarkan Peraturan Pemerintah No. 33 tentang pelaksanaan program Asuransi Sosial Tenaga Kerja (ASTEK) yang wajib diikuti oleh pengusaha dan BUMN. Selanjutnya, tahun 1992 lahir UU No. 3 tentang Jaminan Sosial Tenaga Kerja (JAMSOSTEK) yang memberikan perlindungan dasar bagi tenaga kerja dan keluarga.

Pada akhir tahun 2004 Pemerintah menerbitkan UU No. 40 tentang sistem Jaminan Sosial Nasional (JKN). Manfaat dari JKN memberikan rasa aman bagi pekerja sehingga dapat meningkatkan produktifitas dan motivasi kerja. Pada tahun 2011, ditetapkan UU No. 24 tahun 2011 tentang Badan Penyelenggara Jaminan Sosial (BPJS). Sesuai dengan UU tanggal 1 Januari 2014 PT. Jamsostek akan berubah menjadi Badan Hukum Publik. PT. Jamsostek yang bertransformasi menjadi BPJS Ketenagakerjaan tetap dipercaya untuk menyelenggarakan program jaminan sosial tenaga kerja. Program jaminan sosial meliputi JKK (Jaminan Kecelakaan Kerja), JKM (Jaminan Kematian), dan JHT (Jaminan Hari Tua).

**2. Visi dan Misi BPJS**

Visi yang dimiliki yaitu menjadi Badan Penyelenggara Jaminan Sosial berkelas dunia, terpercaya, bersahabat, dan unggul dalam operasional dan pelayanan.

Adapun misinya yaitu sebagai Badan Penyelenggara Jaminan Sosial tenaga kerja yang memenuhi perlindungan dasar bagi tenaga kerja serta menjadi mitra terpercaya bagi:

a. Tenaga kerja : Memberikan perlindungan yang layak bagi tenaga kerja dan keluarga.
b. Pengusaha : Menjadi mitra terpercaya untuk memberikan perlindungan kepada tenaga kerja dan meningkatkan produktifitas.
c. Negara : Berperan serta dalam pembangunan.