

**ANALISIS KESTABILAN DARI SISTEM DINAMIK MODEL SEIR PADA  
PENYEBARAN PENYAKIT CACAR AIR (VARICELLA) DENGAN  
PENGARUH VAKSINASI**

**SKRIPSI**

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Negeri Yogyakarta  
untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan  
guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains



**Oleh**  
**Ernik Oktavia**  
**NIM. 12305141006**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA  
2016**

**ANALISIS KESTABILAN DARI SISTEM DINAMIK MODEL SEIR PADA  
PENYEBARAN PENYAKIT CACAR AIR (VARICELLA) DENGAN  
PENGARUH VAKSINASI**

**SKRIPSI**

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Negeri Yogyakarta  
untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan  
guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains



**Oleh**  
**Ernik Oktavia**  
**NIM. 12305141006**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA  
2016**

## **PERSETUJUAN**

Skripsi yang berjudul

### **“ANALISIS KESTABILAN DARI SISTEM DINAMIK MODEL SEIR PADA PENYEBARAN PENYAKIT CACAR AIR (VARICELLA) DENGAN PENGARUH VAKSINASI”**

Yang disusun oleh:

Nama : Ernik Oktavia

NIM : 12305141006

Prodi : Matematika

Jurusan : Pendidikan Matematika

Telah disetujui oleh pembimbing pada tanggal 22/4/16

untuk diujikan di depan Dewan Penguji Skripsi

Program Studi Matematika

Jurusan Pendidikan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Yogyakarta

Menyetujui,

Dosen Pembimbing I

Dr. Hartono

NIP. 196203291987021002

Dosen Pembimbing II

Husna 'Arifah M.Sc

NIP. 197810152002122001

## **PERNYATAAN**

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Ernik Oktavia

NIM : 12305141006

Prodi : Matematika

Jurusan : Pendidikan Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Judul TAS : Analisis Kestabilan dari Sistem Dinamik Model *SEIR* pada  
Penyebaran Penyakit Cacar Air (*Varicella*) dengan Pengaruh  
Vaksinasi.

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini benar-benar karya saya sendiri. Sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya atau pendapat yang ditulis atau diterbitkan orang lain kecuali sebagai acuan atau kutipan dengan mengikuti tata penulisan karya ilmiah yang telah lazim.

Yogyakarta, 22 April 2016

Yang menyatakan,



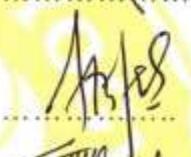
Ernik Oktavia

NIM. 12305141006

## PENGESAHAN

Skripsi dengan judul **“ANALISIS KESTABILAN DARI SISTEM DINAMIK MODEL SEIR PADA PENYEBARAN PENYAKIT CACAR AIR (VARICELLA) DENGAN PENGARUH VAKSINASI”** yang disusun oleh Ernik Oktavia, NIM. 12305141006 ini telah dipertahankan di depan Dewan Pengaji pada tanggal 09 Mei 2016 dan dinyatakan LULUS.

## DEWAN PENGUJI

Nama	Jabatan	Tanda Tangan	Tanggal
<u>Dr. Hartono</u> NIP. 19620329 198702 1 002	Ketua Pengaji		19/5/16
<u>Husna 'Arifah, M.Sc</u> NIP. 19781015 200212 2 001	Sekretaris Pengaji		19/5/16
<u>Atmini Dhoruri, M.S</u> NIP. 19600710 198601 2 001	Pengaji Utama		18/5/16
<u>Dwi Lestari, M.Sc</u> NIP. 19850513 201012 2 006	Pengaji Pendamping		18/5/16

Yogyakarta, 20 Mei 2016

Fakultas Matematika dan Ilmu  
Pengetahuan Alam  
Universitas Negeri Yogyakarta  
Dekan,



Dr. Hartono

NIP. 19620329 198702 1 002

## **MOTTO**

*“Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan”*

(Q. S. Al-Insyirah: 5-6)

*“Bukanlah kesulitan yang membuat kita takut, tetapi ketakutanlah yang membuat kita sulit. Jangan pernah mencoba untuk menyerah dan jangan pernah menyerah untuk mencoba”*

(Ali bin Abi Thalib)

*“Jika pikiran saya bisa membayangkan, hati saya bisa meyakininya, saya tahu saya akan mampu menggapainya”*

(Jesse Jackson)

*“Tidak ada yang tidak bisa dan tidak mungkin selagi kita mau berusaha dengan sungguh-sungguh”*

(Ernik Oktavia)

## **PERSEMBAHAN**

*Alhamdulillahirabbil'alamien....*

*Skripsi ini saya persembahkan untuk  
kedua orang tua saya yaitu Bapak Sucipto dan Ibu Sringati yang selalu  
mendampingi, memberikan dukungan, doa dan kasih sayang yang tidak  
berhingga kepada saya selama ini,  
untuk adik saya tercinta Aditya Rega Fernando yang selalu memberi  
saya semangat dan keceriaan,  
untuk semua teman-teman saya yang saya sayangi dan untuk semua  
pihak yang tidak bisa disebutkan satu per satu.*

# **ANALISIS KESTABILAN DARI SISTEM DINAMIK MODEL SEIR PADA PENYEBARAN PENYAKIT CACAR AIR (VARICELLA) DENGAN PENGARUH VAKSINASI**

Oleh  
Ernik Oktavia  
NIM. 12305141006

## **ABSTRAK**

Cacar air (*Varicella*) merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh *Varicella Zoster Virus* (VZV). Penyakit cacar air dapat menjadi wabah dalam suatu wilayah karena sifat menularnya yang begitu cepat. Diberikan program vaksinasi sebagai upaya pencegahan penyebaran penyakit cacar air. Skripsi ini mengkaji tentang model matematika pada penyebaran penyakit cacar air tanpa vaksinasi maupun dengan vaksinasi. Model matematika yang digunakan yaitu model *SEIR* (*Susceptible-Exposed-Infected-Recovered*) dengan laju kelahiran dan laju kematian alami diasumsikan sama. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh tingkat vaksinasi terhadap penyebaran penyakit cacar air dalam populasi.

Tahapan yang dilakukan dalam analisis model *SEIR* pada penyebaran penyakit cacar air yaitu membentuk model *SEIR* tanpa vaksinasi dan dengan vaksinasi, mencari titik ekuilibrium, menentukan nilai bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ), menganalisis kestabilan disekitar titik ekuilibrium dan melakukan simulasi menggunakan software Maple 18.

Model *SEIR* pada penyebaran penyakit cacar air tanpa vaksinasi maupun dengan vaksinasi memiliki empat kelas populasi yaitu kelas *Susceptible*, kelas *Exposed*, kelas *Infected* dan kelas *Recovered*. Model yang didapatkan berupa sistem persamaan diferensial nonlinear. Hasil analisis menunjukkan bahwa model penyebaran penyakit cacar air mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik yang kestabilannya bergantung pada parameter laju kontak antara individu rentan dengan individu terinfeksi. Jika laju kontak dan laju individu laten menjadi terinfeksi lebih kecil dari laju kelahiran, laju kesembuhan dan laju individu laten menjadi individu terinfeksi maka dalam jangka waktu tertentu penyakit akan menghilang dari populasi. Sebaliknya, jika laju kontak dan laju individu laten menjadi terinfeksi lebih besar dari laju kelahiran, laju kesembuhan dan laju individu laten menjadi individu terinfeksi maka penyakit cacar air masih ada dalam populasi atau menyebar dalam populasi. Berdasarkan simulasi yang dilakukan, didapatkan bahwa jika semakin besar tingkat vaksinasi yang diberikan pada populasi individu rentan menyebabkan populasi individu sembuh meningkat lebih cepat sedangkan populasi individu laten dan populasi individu terinfeksi menurun lebih cepat. Hal ini menunjukkan bahwa program vaksinasi dapat digunakan untuk mengendalikan penyebaran penyakit cacar air dalam suatu populasi.

**Kata Kunci:** Cacar air (*Varicella*), vaksinasi, model *SEIR*, titik ekuilibrium, *Basic Reproduction Number*, kestabilan.

## **KATA PENGANTAR**

*Assalamu'alaikum Wr. Wb*

Puji syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa yang telah memberikan rahmat, nikmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir skripsi yang berjudul “Analisis Kestabilan dari Sistem Dinamik Model *SEIR* pada Penyebaran Penyakit Cacar air (*Varicella*) dengan Pengaruh Vaksinasi”.

Tugas akhir ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Yogyakarta. Penulis mendapat dukungan dan bantuan dari banyak pihak selama proses penulisan tugas akhir skripsi ini. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah memberikan dukungan dan bantuan kepada penulis yaitu:

1. Bapak Dr. Hartono selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dan selaku pembimbing Tugas Akhir Skripsi yang dengan sabar telah memberikan bimbingan dan pengarahan dalam penyusunan Tugas Akhir Skripsi ini.
2. Bapak Dr. Ali Mahmudi selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta yang telah memberikan kemudahan dan kelancaran dalam urusan akademik.
3. Bapak Dr. Agus Maman Abadi selaku Ketua Program Studi Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta yang selalu memberikan dukungan dan arahan.

4. Ibu Himmawati Puji Lestari, M.Si selaku Pembimbing Akademik yang telah memberikan bimbingan, arahan dan nasehat selama masa studi di UNY.
5. Ibu Husna 'Arifah, M.Sc selaku Dosen Pembimbing Tugas Akhir Skripsi yang telah memberikan bimbingan, pengarahan dan saran sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir Skripsi ini dengan baik.
6. Bapak dan ibu dosen Jurusan Pendidikan Matematika yang telah memberikan ilmu kepada penulis secara langsung maupun tidak langsung.
7. Bapak, ibu dan keluarga yang tidak pernah lelah memberikan doa, dukungan, nasehat dan bimbingan untuk penulis.
8. Sahabat-sahabat dan semua pihak yang telah membantu dan memberikan dukungan sehingga proses penulisan tugas akhir skripsi ini dapat berjalan dengan lancar.

Penulis menyadari bahwa dengan keterbatasan kemampuan yang dimiliki sehingga penulisan tugas akhir ini jauh dari sempurna. Oleh karena itu, penulis sangat mengharap segala kritik dan saran yang dapat membangun tugas akhir skripsi ini menjadi lebih baik. Diharapkan semoga tugas akhir skripsi ini dapat bermanfaat tidak hanya kepada penulis tetapi juga bagi pembaca.

*Wassalamu'alaikum Wr. Wb*

Yogyakarta, 22 April 2016

Penulis



Ernik Oktavia

NIM. 12305141006

## DAFTAR ISI

PERSETUJUAN .....	ii
PERNYATAAN.....	iii
PENGESAHAN .....	iv
MOTTO .....	v
PERSEMBAHAN.....	vi
ABSTRAK .....	vii
KATA PENGANTAR .....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL.....	xii
DAFTAR GAMBAR .....	xiii
DAFTAR LAMPIRAN.....	xiv
DAFTAR SIMBOL.....	xv
BAB I PENDAHULUAN.....	1
A. Latar Belakang .....	1
B. Rumusan Masalah.....	7
C. Tujuan Penulisan.....	8
D. Manfaat Penulisan.....	8
BAB II LANDASAN TEORI .....	10
A. Pemodelan Matematika.....	10
B. Persamaan Diferensial.....	13
C. Solusi Persamaan Diferensial.....	15
D. Sistem Persamaan Diferensial.....	16
E. Bilangan Kompleks.....	20
F. Nilai Eigen dan Vektor Eigen .....	21
G. Titik Ekuilibrium .....	24
H. Linearisasi .....	25
I. Analisis Kestabilan .....	30
J. Bilangan Reproduksi Dasar .....	37
K. Kriteria Routh-Hurwitz.....	40

<b>BAB III PEMBAHASAN .....</b>	<b>42</b>
A. Model Matematika <i>SEIR</i> pada Penyebaran Penyakit Cacar Air .....	42
1. Asumsi-Asumsi Model .....	43
2. Formulasi Model .....	44
3. Transformasi Model.....	51
4. Titik Ekuilibrium .....	54
5. Bilangan Reproduksi Dasar .....	56
6. Kestabilan Titik Ekuilibrium .....	58
B. Model Matematika <i>SEIR</i> pada Penyebaran Penyakit Cacar Air ( <i>Varicella</i> ) dengan Pengaruh Vaksinasi.....	66
1. Asumsi-Asumsi Model .....	67
2. Formulasi Model .....	68
3. Transformasi Model.....	76
C. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium dari Model Matematika <i>SEIR</i> pada Penyebaran Penyakit Cacar Air dengan Pengaruh Vaksinasi .....	79
1. Titik Ekuilibrium .....	79
2. Bilangan Reproduksi Dasar .....	82
3. Kestabilan Titik Ekuilibrium .....	84
D. Simulasi Model .....	92
1. Simulasi Model Matematika <i>SEIR</i> pada Penyebaran Penyakit Cacar Air Tanpa Vaksinasi.....	93
2. Simulasi Model Matematika <i>SEIR</i> pada Penyebaran Penyakit Cacar Air dengan Pengaruh Vaksinasi.....	97
<b>BAB IV PENUTUP .....</b>	<b>103</b>
A. Kesimpulan .....	103
B. Saran .....	105
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>106</b>
<b>LAMPIRAN .....</b>	<b>109</b>

## **DAFTAR TABEL**

Tabel 2.1	Tabel Routh-Hurwitz.....	41
Tabel 3.1	Tabel Routh-Hurwitz.....	65
Tabel 3.2	Variabel dan Parameter dalam Model.....	68
Tabel 3.3	Tabel Routh-Hurwitz.....	91

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Proses Pemodelan Matematika.....	11
Gambar 2.2	Ilustrasi Kestabilan.....	31
Gambar 3.1	Diagram Transfer pada Penyebaran Penyakit Cacar Air 45 <i>(Varicella).....</i>	
Gambar 3.2	Diagram Transfer Penyebaran Penyakit Cacar Air 69 <i>(Varicella) dengan Pengaruh Vaksinasi.....</i>	
Gambar 3.3	Simulasi Sistem (3.53) dengan $\beta = 0.07$ .....	94
Gambar 3.4	Simulasi Sistem (3.53), untuk $R_0 = 2.479$ dengan $\beta = 0.2$ .....	95
Gambar 3.5	Simulasi Sistem (3.54) dengan $\beta = 0.2$ dan $\rho = 0.25$ ...	100
Gambar 3.6	Simulasi Sistem (3.54) dengan $\beta = 0.2$ dan $\rho = 0.5$ ....	100
Gambar 3.7	Simulasi Sistem (3.54) dengan $\beta = 0.2$ dan $\rho = 0.75$ ....	101

## **DAFTAR LAMPIRAN**

Lampiran 1	Program Maple untuk model matematika penyebaran penyakit cacar air tanpa vaksinasi saat $R_0 < 1$ dengan $\beta=0.07$ .....	109
Lampiran 2	Program Maple untuk model matematika penyebaran penyakit cacar air tanpa vaksinasi saat $R_0 > 1$ dengan $\beta=0.2$ .....	110
Lampiran 3	Program Maple untuk model matematika penyebaran penyakit cacar air dengan adanya pengaruh vaksinasi saat $\beta=0.2$ dengan $\rho = 0.25$ .....	111
Lampiran 4	Program Maple untuk model matematika penyebaran penyakit cacar air dengan adanya pengaruh vaksinasi saat $\beta=0.2$ dengan $\rho = 0.5$ .....	112
Lampiran 5	Program Maple untuk model matematika penyebaran penyakit cacar air dengan adanya pengaruh vaksinasi saat $\beta=0.2$ dengan $\rho = 0.75$ .....	113

## DAFTAR SIMBOL

$N(t)$	Jumlah total populasi
$S(t)$	Populasi kelas individu <i>Susceptible</i> pada saat $t$
$E(t)$	Populasi kelas individu <i>Exposed</i> pada saat $t$
$I(t)$	Populasi kelas individu <i>Infected</i> pada saat $t$
$R(t)$	Populasi kelas individu <i>Recovered</i> pada saat $t$
$x_0$	Nilai awal atau kondisi awal
$\dot{x}$	Turunan $x$ terhadap $t$
$E$	Himpunan terbuka
$C'(E)$	Himpunan semua fungsi yang mempunyai turunan pertama yang kontinu di $E$
$\mathbb{R}^n$	Himpunan bilangan real dimensi $n$
$\bar{x}$	Titik ekuilibrium
$Df(x_0)$	Turunan $f$ di $x_0$
$J(f(\bar{x}))$	Matriks Jacobian di $\bar{x}$
$\lambda$	Nilai eigen
$A$	Matriks berukuran $n \times n$
$I$	Matriks identitas
$\Re(\lambda_i)$	Bilangan real pada nilai eigen ke $i$
$\mu$	Laju kelahiran atau laju kematian alami
$\beta$	Laju infeksi dari individu rentan menjadi individu laten karena adanya kontak antara individu rentan dengan individu terinfeksi
$\gamma$	Laju individu terinfeksi yang telah menunjukkan gejala-gejala penyakit
$\varepsilon$	Laju kesembuhan dari setiap individu terinfeksi
$R_0$	Bilangan reproduksi dasar
$E_0$	Titik ekuilibrium bebas penyakit
$E_1$	Titik ekuilibrium endemik