BAB II

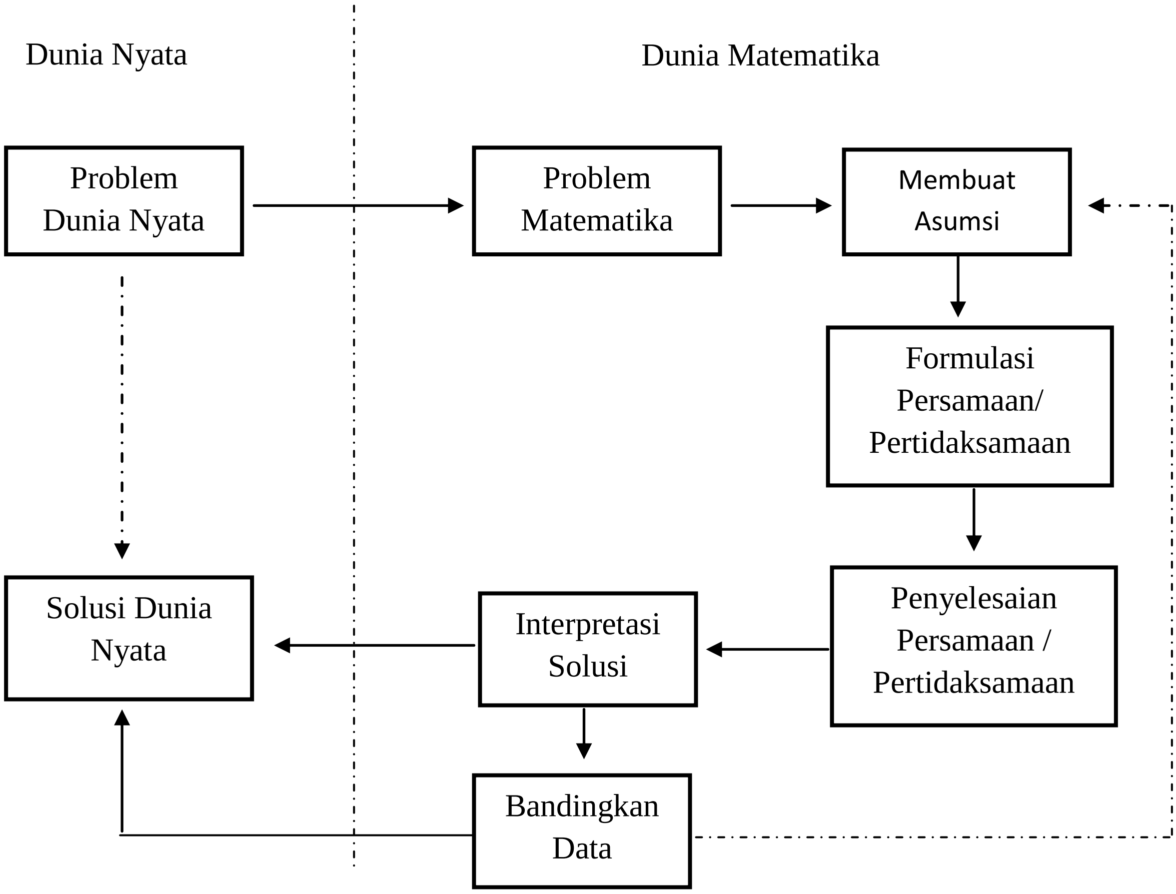
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas tentang landasan teori yang digunakan pada bab selanjutnya sebagai bahan acuan yang mendukung tujuan penulisan. Materi-materi yang diuraikan berupa definisi-definisi dan teorema. Adapun materi-materi yang dibahas yaitu pemodelan matematika, persamaan diferensial, solusi persamaan diferensial, sistem persamaan diferensial, bilangan kompleks, nilai eigen dan vektor eigen, titik ekuilibrium, linearisasi, analisis kestabilan, bilangan reproduksi dasar (*Basic Reproduction Number*), dan kriteria *Routh Hurwitz*.

A. Pemodelan Matematika

Peran matematika pada masalah kehidupan sehari-hari maupun pada ilmu lain dapat disajikan dalam pemodelan matematika. Widowati dan Sutimin, (2007: 1) menyatakan bahwa pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang merepresentasikan dan menjelaskan sistem-sistem fisik atau masalah pada dunia nyata ke dalam pernyataan matematik, sehingga diperoleh pemahaman dari masalah dunia nyata yang lebih tepat.

Representasi matematika yang dihasilkan dari pemodelan matematika disebut sebagai model matematika. Model matematika digunakan dalam banyak disiplin ilmu dan bidang studi yang berbeda. Menurut Widowati dan Sutimin, (2007: 3) proses pemodelan matematika dapat dinyatakan dalam diagram alur yang disajikan pada Gambar 2.1 berikut ini:



Gambar 2.1 Proses Pemodelan Matematika

Berdasarkan Gambar 2.1 diperoleh langkah-langkah pemodelan matematika adalah sebagai berikut:

1. Menyatakan masalah dunia nyata ke dalam pengertian matematika.

Penyelesaian masalah dunia nyata secara langsung kadang sulit dilakukan. Oleh karena itu untuk mempermudah mencari penyelesaiannya, masalah yang ada di dunia nyata dimodelkan ke dalam bahasa matematis. Berdasarkan masalah yang diperoleh, kemudian diidentifikasi variabel-variabel yang ada dalam masalah dan dibentuk beberapa hubungan antara variabel-variabel yang dihasilkan dari masalah tersebut.

2. Membuat asumsi-asumsi model

Langkah selanjutnya adalah membuat asumsi-asumsi yang sesuai dengan masalah dunia nyata. Pada dasarnya, asumsi mencerminkan bagaimana proses berfikir sehingga model dapat berjalan. Asumsi-asumsi ini dibuat agar model yang dihasilkan dapat menggambarkan dengan tepat masalah dalam dunia nyata.

3. Memformulasikan persamaan atau pertidaksamaan

Berdasarkan variabel-variabel yang ditentukan, hubungan antar variabel dan asumsi-asumsi yang telah dibuat sehingga dapat dibentuk suatu persamaan atau pertidaksamaan yang menggambarkan masalah yang ada dalam dunia nyata. Langkah ini merupakan langkah yang paling penting dan sulit. Terkadang diperlukan adanya pengujian kembali asumsi-asumsi agar proses formulasi persamaan sesuai, sehingga dapat diselesaikan dan realistik.

4. Menyelesaikan persamaan atau pertidaksamaan

Setelah didapatkan suatu persamaan atau pertidaksamaan, selanjutnya dapat dicari solusi dari model matematika dengan penyelesaian secara matematis. Namun tidak semua model matematika dapat dengan mudah dicari solusinya. Persamaan model matematika mungkin saja tidak memiliki solusi atau bahkan mempunyai lebih dari satu solusi. Oleh karena itu, pada langkah ini dapat dilakukan analisis sifat atau perilaku dari solusi model matematika tersebut.

5. Intepretasi hasil atau solusi

Intepretasi hasil atau solusi adalah salah satu langkah terakhir yang akan menghubungkan kembali formulasi model matematika ke masalah dunia nyata. Intepretasi dapat diwujudkan dalam berbagai cara, salah satunya dengan bentuk grafik yang digambarkan berdasarkan solusi yang diperoleh kemudian diintepretasikan sebagai solusi dunia nyata. Selanjutnya solusi yang didapatkan dibandingkan dengan beberapa data yang ada dan dihubungkan untuk melihat ketepatan model yang dibuat dengan situasi di dunia nyata. Apabila solusi yang didapatkan belum sesuai dengan situasi di dunia nyata maka dapat ditinjau ulang asumsi-asumsi yang telah dibuat sebelumnya.

B. Persamaan Diferensial

Definisi 2.1 (Ross, 1984: 3)

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Contoh 2.1

Berikut adalah beberapa contoh persamaan diferensial:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{2.1}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{4dy}{dx} + 8y = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{dv}{ds} + \frac{dv}{dt} = v \tag{2.3}$$

Berdasarkan banyaknya variabel bebas, persamaan diferensial dapat diklasifikasikan menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

1. Persamaan Diferensial Biasa

Definisi 2.2 (Ross, 1984: 4)

Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

Contoh 2.2

Berikut diberikan beberapa contoh persamaan diferensial biasa:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \tag{2.5}$$

Variabel y pada Persamaan (2.4) dan (2.5) merupakan variabel tak bebas sedangkan variabel x merupakan variabel bebas.

2. Persamaan Diferensial Parsial

Definisi 2.3 (Ross, 1984: 4)

Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas.

Contoh 2.3

Berikut beberapa contoh persamaan diferensial parsial:

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2.7}$$

Pada Persamaan (2.6) variabel *s* dan *t* merupakan variabel bebas dan *v* merupakan variabel tak bebas. Sedangkan pada Persamaan (2.7) variabel bebasnya *x* dan *y* dan variabel tak bebasnya adalah *u*.

C. Solusi Persamaan Diferensial

Definisi 2.4 (Ross, 1984: 8)

Diberikan suatu persamaan diferensial orde-n berikut:

$$F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right] = 0 \qquad (2.8)$$

dengan F adalah fungsi real.

1. *Misalkan f adalah fungsi bilangan real yang terdefinisi untuk semua x dalam interval I dan mempunyai turunan ke-n untuk semua x∈I. Fungsi f disebut solusi eksplisit dari (2.8) dalam interval I jika fungsi f memenuhi syarat berikut:*
   a. $F[x, f(x), f'(x), \dots, f^n(x)]$, *terdefinisi* $\forall x \in I$
   b. $F[x, f(x), f'(x), \dots, f^n(x)] = 0, \forall x \in I$

   Hal ini berarti bahwa substitusi f(x) dan variasi turunan y dan turunannya yang berkorespondensi ke (2.8) akan membuat (2.8) menjadi suatu identitas di interval I.
2. *Suatu relasi* $g(x, y) = 0$ *disebut solusi implisit dari Persamaan (2.8) jika relasi ini mendefinisikan sedikitnya satu fungsi bilangan real f dengan variabel x di interval I.*
3. *Solusi eksplisit dan solusi implisit biasa disebut sebagai solusi sederhana.*

Contoh 2.4

Carilah solusi dari persamaan diferensial berikut,

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

Penyelesaian:

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

$$dN = kNdt$$

$$\int \frac{1}{N} dN = \int kdt$$

$$\ln |N| = kt + c$$

$$N(t) = e^{kt} + c$$

Jadi, solusi dari persamaan diferensial $\frac{dN}{dt} = kN$ adalah $N(t) = e^{kt} + c$.

D. Sistem Persamaan Diferensial

Kumpulan dari beberapa persamaan diferensial disebut sebagai sistem persamaan diferensial. Diberikan vektor $x \in E$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ dengan $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T$ dan E adalah himpunan tebuka dari $\mathbb{R}^n$. $f: E \to \mathbb{R}^n$ dengan $f = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)^T$ dan $f \in C'(E)$ dimana $C'(E)$ adalah himpunan semua fungsi yang mempunyai turunan pertama yang kontinu di E. Jika $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ menyatakan turunan x terhadap t maka sistem persamaan diferensial dapat dituliskan menjadi,

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n),$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n),$$

$$\dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \tag{2.9}$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Sistem (2.9) dapat dituliskan menjadi

$$\dot{x} = f(x). \tag{2.10}$$

Sistem persamaan diferensial berdasarkan kelineararannya dibagi menjadi dua yaitu sistem persamaan diferensial linear dan sistem persamaan diferensial non-linear.

1. Sistem Persamaan Diferensial Linear

Secara umum sistem persamaan diferensial linear orde satu dengan variabel tak bebas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ serta variabel bebas *t* dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + a_{13}(t)x_3 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + F_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + a_{23}(t)x_3 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + F_2(t)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = a_{31}(t)x_1 + a_{32}(t)x_2 + a_{33}(t)x_3 + \cdots + a_{3n}(t)x_n + F_3(t)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + a_{n3}(t)x_3 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + F_n(t) \tag{2.11}$$

diasumsikan bahwa semua fungsi didefinisikan oleh $a_{ij}(t), i = 1,2,3, \dots, n$, $j = 1,2,3, \dots, n$. Jika $F_i(t) = 0$, dengan $i = 1,2,3, \dots, n$ untuk setiap *t* maka Sistem (2.11) disebut sistem persamaan diferensial linear homogen. Sedangkan jika $F_i(t) \neq 0$ maka sistem (2.11) disebut sistem persamaan diferensial linear nonhomogen (Ross, 1984: 505-506).

Selanjutnya Sistem (2.11) dapat dinyatakan menjadi

$$\dot{x} = Ax + F(t) \tag{2.12}$$

dengan $x \in \mathbb{R}^n$ merupakan variabel tak bebas dan A adalah matriks ukuran $n \times n$. Matriks A dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}^n, i = 1,2,3, \dots, n,\ \ j = 1,2,3, \dots, n$ dan $F(t)$ adalah matriks ukuran $n \times 1$ dalam fungsi t. Sehingga dapat dinyatakan,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_1(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{bmatrix}.$$

Jika pada Sistem (2.12) didefinisikan $F(t) = 0$ dan $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ dimana vektor $x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T$dan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ maka diperoleh sistem persamaan diferensial linear homogen,

$$\dot{x} = Ax \tag{2.13}$$

dengan A adalah matriks berukuran $n \times n$.

Contoh 2.5

Berikut diberikan sistem persamaan diferensial linear

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x + 2y + z \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - 4y + 5z \\ \frac{dz}{dt} &= 4x + y - 3z \end{aligned} \tag{2.14}$$

Sistem persamaan diferensial (2.14) merupakan sistem persamaan diferensial linear homogen.

2. Sistem Persamaan Diferensial Non Linear

Definisi 2.5 (Ross, 1984: 5)

Persamaan diferensial non linear adalah persamaan diferensial biasa yang tidak linear.

Persamaan diferensial dikatakan nonlinear jika persamaan diferensial tersebut memenuhi paling sedikit satu dari kriteria berikut ini (Ross, 1984: 6)

a. Memuat variabel tak bebas dan/atau turunan-turunannya berpangkat selain satu.
b. Terdapat perkalian pada variabel tak bebas dan/atau turunan-turunannya.
c. Terdapat fungsi transedental dari variabel tak bebas dan turunan-turunannya.

Contoh 2.6

Beberapa contoh persamaan diferensial non linear sebagai berikut,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 6x = 0 \tag{2.15}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 4y^2 = 0 \tag{2.16}$$

Persamaan (2.15) merupakan persamaan diferensial nonlinear, karena terdapat variabel tak bebas dan turunannya variabel bebas berpangkat dua. Kemudian Persamaan (2.16) merupakan persamaan diferensial nonlinear karena terdapat perkalian antar variabel tak bebas. Suatu sistem persamaan diferensial dikatakan nonlinear jika persamaan diferensial yang membentuknya merupakan persamaan diferensial nonlinear.

Contoh 2.7

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_1 x_2^2 \qquad (2.17a)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1^2 + 2x_2 - sinx_1 \qquad (2.17b)$$

Sistem (2.17) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear dengan variabel tak bebas $x_1$dan x_2 sedangkan variabel bebasnya *t*. Sistem (2.17) dikatakan sistem persamaan diferensial nonlinear karena pada Persamaan (2.17a) memuat perkalian antara variabel tak bebas dan pada Persamaan (2.17b) terdapat kuadrat dari variabel tak bebasnya.

Analisis dari sistem persamaan diferensial non linear ini akan lebih mudah dilakukan jika sistem persamaan diferensial non linear diubah ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial linear.

E. Bilangan Kompleks

Definisi 2.6 (Soemantri, 1994: 2)

Bilangan kompleks adalah bilangan yang berbentuk $a + bi$ *atau* $a + ib$ *dengan a dan b bilangan real dan* $i^2 = -1$.

Jika $z = x + iy$ menyatakan sebarang bilangan kompleks, maka *x* dinamakan bagian real dari *z* dan *y* dinamakan bagian imajiner dari *z*. Bagian real dan bagian imajiner dari bilangan kompleks *z* biasanya dinyatakan dengan $\mathrm{Re}(z)$ dan $\mathrm{Im}(z)$. Jika *x*, *y* real dan $z = x + iy$ maka

$$\mathrm{x} = \mathrm{Re}(z) \text{ dan } y = \mathrm{Im}(z).$$

Himpunan semua bilangan kompleks biasanya diberi notasi $\mathbb{C}$. Jadi $\mathbb{C} = (z: z = x + iy, x \in R$ dan $y \in R)$. Jika $\mathrm{Im}(z) = 0$ maka bilangan kompleks z menjadi bilangan real x, sehingga bilangan real adalah keadaan khusus dari bilangan kompleks. Jika $\mathrm{Re}(z) = 0$ dan $\mathrm{Im}(z) \neq 0$, maka z menjadi iy dan dinamakan bilangan imajiner murni kemudian *i* dinamakan satuan imajiner.

F. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai eigen digunakan untuk mengetahui kestabilan dari suatu sistem persamaan diferensial. Definisi untuk nilai eigen dan vektor eigen dijelaskan pada Definisi 2.7 berikut,

Definisi 2.7 (Anton, 1997: 277)

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x didalam $\mathbb{R}^n$ dinamakan vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yakni

$$Ax = \lambda x \tag{2.18}$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Selanjutnya untuk mencari nilai-nilai eigen dari matriks A, Persamaan (2.18) dapat ditulis menjadi

$$Ax = \lambda x$$

$$\Leftrightarrow Ax = \lambda I x$$

$$\Leftrightarrow Ax - \lambda I x = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0 \tag{2.19}$$

dengan I adalah matriks identitas. Menurut Anton (1991: 278) supaya λ menjadi nilai eigen maka harus ada pemecahan tak nol dari Persamaan (2.19). Persamaan (2.19) akan mempunyai pemecahan tak nol jika dan hanya jika

$$det(A - \lambda I) = 0. \tag{2.20}$$

Persamaan (2.20) disebut persamaan karakteristik dari A, sedangkan skalar λ yang memenuhi persamaan (2.20) adalah nilai eigen dari A.

Contoh 2.8

Diberikan matriks A berukuran 2×2 sebagai berikut,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$$

akan dicari nilai-nilai eigen dan vektor dari matriks A.

Penyelesaian:

a. Nilai eigen dari matriks A

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 - \lambda & 3 \\ -6 & -4 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik dari A yaitu,

$$det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 3 \\ -6 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (5 - \lambda)(-4 - \lambda) - (-6)3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2 \lor \lambda = -1$$

Jadi nilai-nilai eigen dari matriks A yaitu $\lambda = 2$ dan $\lambda = -1$.

b. Vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen matriks A.

Untuk $\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda & 3 \\ -6 & -4-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 0 \\ -6x_1 - 6x_2 = 0 \end{cases}$$

Persamaan $3x_1 + 3x_2 = 0$ ekuivalen dengan $x_1 = -x_2$, misalkan $x_2 = s$ maka $x_1 = -s$. Sehingga

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} s$$

jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$ adalah $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Untuk $\lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda & 3 \\ -6 & -4-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 0 \\ -6x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

Persamaan $6x_1 + 3x_2 = 0$ ekuivalen dengan $x_2 = -2x_1$, misalkan $x_1 = t$ maka $x_2 = -2t$. Sehingga

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} t$$

jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -1$ adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

G. Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium atau titik kesetimbangan merupakan solusi dari sistem $\dot{x} = f(x)$ yang tidak mengalami perubahan terhadap waktu. Definisi tentang titik ekuilibrium akan dijelaskan pada Definisi 2.8 berikut ini,

Definisi 2.8 (Perko, 2001: 102)

Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *adalah titik ekuilibrium dari* $\dot{x} = f(x)$ *jika*

$$f(\bar{x}) = 0. \tag{2.21}$$

Contoh 2.9

Akan dicari titik ekuilibrium dari sistem berikut ini,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 - x_1^2 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Penyelesaian:

Misalkan $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T$ adalah titik ekuilibrium dari Sistem (2.22) maka

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_1 \bar{x}_2 = 0 \tag{2.23}$$

$$\bar{x}_2 - \bar{x}_1^2 = 0 \tag{2.24}$$

dari Persamaan (2.23) diperoleh

$$\bar{x}_1(1 - \bar{x}_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}_1 = 0 \text{ atau } \bar{x}_2 = 1.$$

Substitusikan $\bar{x}_1 = 0$ ke Persamaan (2.24) sehingga didapatkan $\bar{x}_2 = 0$. Jika $\bar{x}_2 = 1$ disubstitusikan ke Persamaan (2.24) maka diperoleh

$$\Leftrightarrow 1 - \bar{x}_1^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}_1 = -1 \text{ atau } \bar{x}_1 = 1.$$

Jadi Sistem (2.22) memiliki titik ekuilibrium yaitu $(0,0)^T, (-1,1)^T$ dan $(1,1)^T$.

H. Linearisasi

Linearisasi merupakan proses mengubah suatu sistem persamaan diferensial nonlinear menjadi sistem persamaan diferensial linear. Sebelum ditunjukkan proses linearisasi dari persamaan diferensial nonlinear menjadi persamaan diferensial linear, akan dibahas terlebih dahulu matriks Jacobian yang dijelaskan dalam Teorema 2.1.

Teorema 2.1 (Perko, 2001: 67)

Jika $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *terdiferensial di* x_0 *maka turunan parsial* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, 3, \dots, n,$ *di* x_0 *ada untuk semua* $x \in \mathbb{R}^n$ *dan*

$$Df(x_0)x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)x_j.$$

Bukti:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)x_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0)x_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0)x_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0)x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0)x_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0)x_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0)x_2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0)x_n \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0)x_n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0)x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= Df(x_0)x$$

Matriks $Df(x_0)$ disebut matriks Jacobian dari fungsi $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ yang terdiferensial di $x_0 \in \mathbb{R}^n$. $Df(x_0)$ dapat dinotasikan dengan $Jf(x_0)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan proses linearisasi dari sistem persamaan diferensial nonlinear ke dalam sistem persamaan diferensial linear.

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.25}$$

dengan $x \in E \subseteq \mathbb{R}^n, f: E \to \mathbb{R}^n$, f merupakan fungsi nonlinear dan kontinu. Misalkan $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$ adalah titik ekuilibrium dari Sistem (2.25). Deret Taylor dari fungsi *f* disekitar titik ekuilibrium $\bar{x}$ adalah sebagai berikut,

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)^T = f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, , \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1)$$

$$+ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, , \dots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots$$

$$+ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_1}$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)^T = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, , \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1)$$

$$+ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots$$

$$+ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_2}$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)^T = f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1)$$

$$+ \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots$$

$$+ \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_n}.$$

$R_{f_1}, R_{f_2}, \dots, R_{f_n}$ nilainya mendekati nol sehingga nilai $R_{f_1}, R_{f_2}, \dots, R_{f_n}$ dapat diabaikan dan karena $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, , \dots, \bar{x}_n)^T$titik ekuilibrium Sistem (2.25) maka $f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T = \cdots = f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T = 0$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, , \dots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots \\
&\quad + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) \\
\dot{x}_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots \\
&\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots \\
&\quad + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n).
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Sistem (2.26) dapat ditulis ke dalam bentuk matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \\ \vdots \\ x_n - \bar{x}_n \end{bmatrix}.$$

Misalkan $y_1 = x_1 - \bar{x}_1$, $y_2 = x_2 - \bar{x}_2, \dots, y_n = x_n - \bar{x}_n$, sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

diperoleh matriks Jacobian dari Sistem (2.27) yaitu

$$J\big(f(\bar{x})\big) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya diberikan definisi mengenai linearisasi pada sistem persamaan diferensial nonlinear yang ditunjukkan pada Definisi 2.9 berikut ini.

Definisi 2.9 (Perko, 2001: 102)

Diberikan matriks Jacobian $J\big(f(\bar{x})\big)$. Sistem linear $\dot{x} = J\big(f(\bar{x})\big)x$ disebut linearisasi dari sistem $\dot{x} = f(x)$ di $\bar{x}$.

Setelah dilakukannya linearisasi, maka dapat dilihat perilaku kestabilan dari sistem persamaan diferensial nonlinear disekitar titik ekuilibrium. Kestabilan Sistem (2.25) disekitar titik ekuilibrium $\bar{x}$ dapat dilihat dari kestabilan hasil linearisasinya jika $\bar{x}$ hiperbolik. Diberikan definisi untuk titik ekuilibrium hiperbolik yang dijelaskan pada Definisi 2.10 berikut ini,

Definisi 2.10 (Perko, 2001: 102)

Titik ekuilibrium $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium hiperbolik dari Sistem (2.25) jika tidak ada nilai eigen dari matriks $J(f(\bar{x}))$ yang mempunyai bagian real nol.

Contoh 2.10

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear

$$\dot{x}_1 = 2x_1 - 2x_1x_2$$

$$\dot{x}_1 = 2x_2 - x_1^2 + x_2^2. \tag{2.28}$$

Sistem (2.28) memiliki titik ekuilibrium $\bar{x}_1 = (0,0)^T$ dan $\bar{x}_2 = (0,-2)^T$. Akan dicari matriks Jacobian di $\bar{x}_1 = (0,0)^T$ dan $\bar{x}_2 = (0,-2)^T$ serta akan dilakukan identifikasi untuk masing-masing titik ekuilibrium.

Matriks Jacobian dari Sistem (2.28) adalah

$$J\big(f(\bar{x})\big) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(2x_1 - 2x_1x_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial(2x_1 - 2x_1x_2)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial(2x_2 - x_1^2 + x_2^2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial(2x_2 - x_1^2 + x_2^2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2x_2 & 2x_1 \\ -2x_1 & 2 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

untuk $\bar{x}_1 = (0,0)^T$

$$J(f(0,0)^T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen untuk $J(f(0,0)^T)$ yaitu

$$det(J(f(0,0)^T) - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 2 + i0 \ \vee \lambda_2 = 2 + i0.$$

Bagian real dari nilai eigen tidak nol sehingga titik ekuilibrium $\bar{x}_1 = (0,0)^T$ merupakan titik ekuilibrium hiperbolik.

Selanjutnya untuk $\bar{x}_2 = (0,-2)^T$

$$J(f(0,-2)^T) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen untuk $J(f(0,-2)^T)$ yaitu

$$det(J(f(0,-2)^T - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (6-\lambda)(-2-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 6 + 0i \ \vee \lambda_2 = -2 + 0i.$$

Bagian real dari nilai eigen tidak nol maka titik ekuilibrium $\bar{x}_2 = (0, -2)^T$ merupakan titik ekuilibrium hiperbolik.

I. Analisis Kestabilan

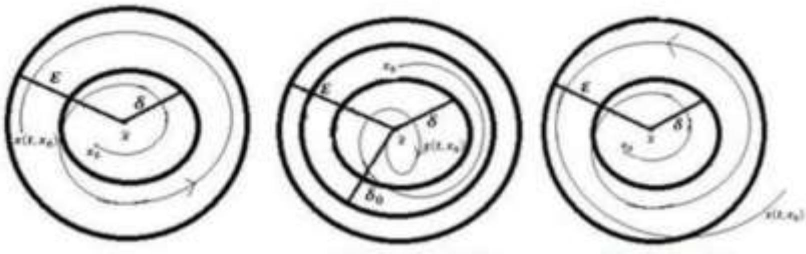
Kestabilan di titik ekuilibrium secara umum dibagi menjadi tiga jenis yaitu stabil, stabil asimtotik dan tidak stabil. Kestabilan titik ekuilibrium dari suatu sistem persamaan diferensial baik linear maupun nonlinear akan dijelaskan pada Definisi 2.11 dan Teorema 2.2.

Definisi 2.11 (Olsder, 2004: 57)

Diberikan persamaan diferensial orde satu $\dot{x} = f(\bar{x})$ *dan* $x(t, x_0)$ *adalah solusi persamaan* $\dot{x} = f(\bar{x})$ *pada saat t dengan kondisi awal* $x(0) = x_0$.

1. *Vektor* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *memenuhi* $f(\bar{x}) = 0$ *disebut sebagai titik ekuilibrium.*
2. *Titik ekuilibrium* $\bar{x}$ *dikatakan stabil jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $\delta > 0$ *sedemikian sehingga jika* $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$, *maka* $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ *untuk setiap* $t \geq 0$.
3. *Titik ekuilibrium* $\bar{x}$ *dikatakan stabil asimtotik jika titik ekuilibrium* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *stabil dan terdapat* $\delta_1 > 0$, *sedemikian sehingga jika* $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta_1$ *berlaku* $lim_{t\to\infty}\|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$
4. *Titik ekuilibrium* $\bar{x}$ *dikatakan tidak stabil jika titik ekuilibrium* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *tidak memenuhi (2).*

Ilustrasi dari Definisi 2.11 disajikan pada Gambar 2.2 berikut ini,



Stabil Stabil Asimtotik Tidak stabil

Gambar 2.2 Ilustrasi Kestabilan

Menganalisis kestabilan sistem persamaan diferensial disekitar titik ekuilibrium dengan menggunakan Definisi 2.11 terlalu sulit untuk dilakukan. Oleh karena itu, diberikan teorema mengenai sifat kestabilan suatu sistem yang ditinjau dari nilai eigen untuk mempermudah dalam menganalisis kestabilan sistem disekitar titik ekuilibrium. Teorema tersebut dijelaskan dalam Teorema 2.2 berikut ini,

Teorema 2.2 (Olsder, 2004: 58)

Diberikan persamaan diferensial $\dot{x} = Ax$, *dengan* A *adalah matriks berukuran* $n \times n$, *mempunyai* k *nilai eigen yang berbeda yaitu* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ *dengan* $k \leq n$.

1. *Titik ekuilibrium* $\bar{x} = 0$ *adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika* $\Re e(\lambda_i) < 0$ *untuk semua* $i = 1,2,3, \dots, k$
2. *Titik ekuilibrium* $\bar{x} = 0$ *adalah stabil jika dan hanya jika* $\Re e(\lambda_i) \leq 0$, *untuk semua* $i = 1,2,3, \dots, k$ *dan untuk setiap nilai eigen* λ_i *pada sumbu imajiner dengan* $\Re e(\lambda_i) = 0$ *yang multiplisitas aljabar dan multiplisitas geometri untuk nilai eigen sama.*

3. *Titik ekuilibrium* $\bar{x} = 0$ *adalah tidak stabil jika dan hanya jika* $\Re e(\lambda_i) > 0$ *untuk beberapa* $i = 1,2,3, \dots, k$ *atau terdapat nilai eigen* λ_i *pada sumbu imajiner dengan* $\Re e(\lambda_i) = 0$ *yang multiplisitas aljabar lebih besar daripada multiplisitas geometri untuk nilai eigen.*

Bukti:

1. Akan dibuktikan bahwa titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika $\Re e(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1,2,3, \dots, k$.

   (⇒)

   Jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah stabil asimtotik maka $\Re e(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1,2,3, \dots, k$.

   Menurut Definisi 2.11, titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika $lim_{t\to\infty}\|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$. Sehingga untuk $t \to \infty$, $x(t, x_0)$ menuju $\bar{x} = 0$. $x(t, x_0)$ merupakan solusi dari sistem persamaan $\dot{x} = Ax$, maka $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$. Artinya agar $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ menuju $\bar{x} = 0$ maka $\Re e(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1,2,3, \dots, k$.

   (⇐)

   Jika $\Re e(\lambda_i) < 0$, $\forall i = 1,2,3, \dots, k$ maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik.

   Solusi $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$. Jika $\Re e(\lambda_i) < 0$ maka untuk $t \to \infty$, $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ akan menuju $\bar{x} = 0$. Berdasarkan Definisi 2.11 titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik.

2. Akan dibuktikan bahwa titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah stabil jika dan hanya jika $\Re e(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1,2,3, \dots, k$ dan untuk setiap nilai

eigen λ_i pada sumbu imajiner dengan $\Re e(\lambda_i) = 0$ yang multiplisitas aljabar dan multiplisitas geometri untuk nilai eigen harus sama.

($\Rightarrow$)

Jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil maka $\Re e(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1,2,3, \ldots, k$.

Pembuktian menggunakan kontraposisi yaitu dibuktikan bahwa jika ada $\Re e(\lambda_i) > 0$ maka titik ekuilibrium$\bar{x} = 0$ tidak stabil.

$\Re e(\lambda_i) > 0$ maka solusi $x(t, x_0)$ yang selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ untuk $t \to \infty$ akan menuju ke ∞ artinya menjauhi titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$. Sehingga sistem tidak stabil. Jadi terbukti bahwa jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil maka $\Re e(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1,2,3, \ldots, k$.

($\Leftarrow$)

Jika $\Re e(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1,2,3, \ldots, k$ maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil dan jika ada $\Re e(\lambda_i) = 0$ maka multiplisitas aljabar dan multiplisitas geometri untuk nilai eigen harus sama.

$x(t, x_0)$ adalah solusi dari Persamaan (2.25) maka $x(t, x_0)$ yang selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$. Jika $\Re e(\lambda_i) < 0$ maka $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ akan menuju $\bar{x} = 0$ yang artinya stabil asimtotik. Titik ekuilibrium yang stabil asimtotik pasti stabil. Jika $\Re e(\lambda_i) = 0$ maka nilai eigen berupa bilangan kompleks murni. Menurut Luenberger (1979: 85), multiplisitas aljabar berhubungan dengan nilai eigen dan multiplisitas geometri berhubungan dengan vektor eigen. Oleh karena itu, akan dibuktikan bahwa banyak nilai eigen dan vektor eigen adalah sama. Ambil sebarang sistem di $\mathbb{R}^2$ yang mempunyai nilai eigen bilangan kompleks murni. Diambil sistem sebagai berikut

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -a\\ b & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \text{dengan } a > 0, b > 0. \quad (2.29)$$

Akan dicari nilai eigen dari Sistem (2.29)

$$det\left(\begin{bmatrix}0 & -a\\ b & 0\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow det\left(\begin{bmatrix}0 & -a\\ b & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow det\left(\begin{bmatrix}-\lambda & -a\\ b & -\lambda\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}-\lambda & -a\\ b & -\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + ab = 0 \quad (2.30)$$

akar-akar dari Persamaan (2.30) adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4ab}}{2} = \frac{\pm 2\sqrt{ab}\, i}{2} = \pm\sqrt{ab}\, i$$

sehinga $\lambda_1 = \sqrt{ab}\, i$ dan $\lambda_2 = -\sqrt{ab}\, i$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = \sqrt{ab}\, i$,

$$\begin{bmatrix}-i\sqrt{ab} & -a\\ b & -i\sqrt{ab}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

maka

$$\left[\begin{array}{cc|c}-i\sqrt{ab} & -a & 0\\ b & -i\sqrt{ab} & 0\end{array}\right] R_1 \to R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}b & -i\sqrt{ab} & 0\\ -i\sqrt{ab} & -a & 0\end{array}\right] \frac{1}{b} R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{i\sqrt{ab}}{b} & 0 \\ -i\sqrt{ab} & -a & 0 \end{array}\right] R_2 + i\sqrt{ab}\, R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{i\sqrt{ab}}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Sehingga

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{i\sqrt{ab}}{b} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

selanjutnya diperoleh

$$x_1 - \frac{i\sqrt{ab}}{b} x_2 = 0.$$

Misal $x_2 = t$ maka $x_1 = \frac{i\sqrt{ab}}{b} t$ sehingga

$$v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{ab}}{b} \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Diambil $t = 1$ maka didapatkan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = \sqrt{ab}\, i$ adalah $v_1 = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{ab}}{b} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = -\sqrt{ab}\, i$,

$$\begin{bmatrix} i\sqrt{ab} & -a \\ b & i\sqrt{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$\left[\begin{array}{cc|c} i\sqrt{ab} & -a & 0 \\ b & i\sqrt{ab} & 0 \end{array}\right] R_1 \to R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} b & i\sqrt{ab} & 0 \\ i\sqrt{ab} & -a & 0 \end{array}\right] \frac{1}{b} R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{i\sqrt{ab}}{b} & 0 \\ i\sqrt{ab} & -a & 0 \end{array}\right] R_2 - i\sqrt{ab}\, R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{i\sqrt{ab}}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Sehingga

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{i\sqrt{ab}}{b} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

selanjutnya diperoleh

$$x_1 + \frac{i\sqrt{ab}}{b} x_2 = 0.$$

Misal $x_2 = t$ maka $x_1 = -\frac{i\sqrt{ab}}{b} t$ sehingga

$$v_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\sqrt{ab}}{b} \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Diambil $t = 1$ maka didapatkan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = -\sqrt{ab}\, i$ adalah $v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{i\sqrt{ab}}{b} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Jadi terbukti banyaknya nilai eigen sama dengan banyaknya vektor eigen.

3. Akan dibuktikan bahwa titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah tidak stabil jika dan hanya jika $\Re e(\lambda_i) > 0$ untuk beberapa $i = 1,2,3, \ldots, k$ atau terdapat nilai eigen λ_i pada sumbu imajiner dengan $\Re e(\lambda_i) = 0$ yang multiplisitas aljabar lebih besar daripada multiplisitas geometri untuk nilai eigen.

($\Rightarrow$)

Jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil maka $\Re e(\lambda_i) > 0, \forall i = 1,2,3, \dots, k$. Titik ekuilibrium tidak stabil apabila $t \to \infty$, $x(t, x_0)$ menuju ∞. Hal tersebut terjadi apabila $\Re e(\lambda_i) > 0$.

($\Leftarrow$)

Jika $\Re e(\lambda_i) > 0, \forall i = 1,2,3, \dots, k$ maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil. Apabila $\Re e(\lambda_i) > 0, x(t, x_0)$ yang selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ akan selalu menuju ∞. Oleh karena itu, titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil.

Disimpulkan bahwa untuk melihat kestabilan Sistem (2.25) digunakan linearisasi agar Sistem (2.25) menjadi sistem linear $\dot{x} = Ax$ dimana $A = J(f(\bar{x}))$ adalah matriks Jacobian. Kestabilan yang dimaksud adalah kestabilan lokal. Titik ekuilibrium $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ dikatakan stabil asimtotik lokal jika semua nilai eigen matriks Jacobian mempunyai bilangan real negatif.

J. Bilangan Reproduksi Dasar (*Basic Reproduction Number*)

Bilangan reproduksi dasar merupakan bilangan yang menunjukkan jumlah individu rentan yang dapat menderita penyakit yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi. Menurut Driessche dan Watmough (2001) bilangan reproduksi dasar adalah bilangan yang menyatakan rata-rata banyaknya individu yang dapat terinfeksi akibat tertular individu terinfeksi yang berlangsung dalam populasi *Susceptible*. Bilangan reproduksi dasar dinotasikan dengan R_0. Jika $R_0 < 1$ maka penyakit tidak menyerang populasi, sedangkan jika $R_0 > 1$ maka penyakit akan menyebar.

Model kompartemen untuk penularan penyakit, suatu kompartemen (kelas) disebut kompartemen penyakit jika individu-individu didalamnya terinfeksi penyakit. Misalkan terdapat n kelas terinfeksi dan m kelas tidak terinfeksi. Dimisalkan x menyatakan subpopulasi kelas terinfeksi dan y menyatakan subpopulasi kelas tidak terinfeksi dengan $x \in \mathbb{R}^n$ dan $y \in \mathbb{R}^m$ untuk $n, m \in \mathbb{N}$. Model kompartemen (kelas) dapat dituliskan dalam bentuk berikut,

$$\dot{x} = \varphi_i(x, y) - \psi_i(x, y), i = 1,2,3, \dots, n$$

$$\dot{y} = \eta_j(x, y), j = 1,2,3, \dots, m \tag{2.31}$$

dengan φ_i merupakan matriks dari laju individu baru terinfeksi penyakit yang menambah kelas terinfeksi dan ψ_i merupakan matriks laju perkembangan penyakit, kematian dan kesembuhan yang mengurangi kelas terinfeksi.

Perhitungan bilangan reproduksi dasar (R_0) berdasarkan linearisasi dari Sistem (2.31) pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Persamaan kompartemen kelas terinfeksi yang telah dilinearisasi pada titik ekuilibrium bebas penyakit adalah sebagai berikut,

$$\dot{x} = (F - V)x$$

dengan F dan V matriks berukuran $n \times n$,

$$F = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(0, y_0) \text{ dan } V = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(0, y_0)$$

dimana $(0, y_0)$ merupakan titik ekuilibrium bebas penyakit.

Selanjutnya didefinisikan matriks K sebagai berikut,

$$K = FV^{-1} \tag{2.32}$$

K disebut sebagai *Next generation matriks*. Bilangan reproduksi dasar (R_0) dari model kompartemen adalah $R_0 = \rho K = \rho(FV^{-1})$ yaitu nilai eigen terbesar dari matriks K (Driessche dan Watmough, 2001).

Contoh 2.11

Diberikan sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu - \beta SI - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - kI - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= kI - \mu R \end{aligned} \qquad (2.33)$$

Dengan S menyatakan populasi individu sehat dan rentan terhadap penyakit pada saat t, I menyatakan populasi terinfeksi pada saat t dan R menyatakan populasi individu sembuh pada saat t. Sistem (2.33) mempunyai titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (1,0,0)$.

Pada Sistem (2.33) kelas terinfeksi adalah I. *Next generation matrix* dapat diperoleh dari kelas I sehingga kelas I dapat dituliskan sebagai berikut,

$$I = \varphi((S,R),I) - \psi((S,R),I)$$

dengan $\varphi = [\beta SI]$ dan $\psi = [kI + \mu I]$. Hasil linearisasi dari φ dan ψ masing-masing adalah

$$F = \frac{\partial\varphi}{\partial I} = \frac{\partial(\beta SI)}{\partial I} = \beta S$$

$$V = \frac{\partial\psi}{\partial I} = \frac{\partial(kI + \mu I)}{\partial I} = k + \mu.$$

Sehingga diperoleh *Next generation matrix* berikut

$$K = FV^{-1} = [\beta S]\left[\frac{1}{k+\mu}\right] = \frac{\beta S}{k+\mu}. \qquad (2.34)$$

Selanjutnya, substitusikan titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (1,0,0)$ ke Persamaan (2.34) maka diperoleh

$$K = \frac{\beta}{k+\mu}.$$

Bilangan reproduksi dasar diperoleh dari nilai eigen terbesar dari matriks *K*. Jadi, nilai bilangan reproduksi dasar dari Sistem (2.34) adalah

$$R_0 = \frac{\beta}{k+\mu}.$$

K. Kriteria Routh-Hurwitz

Kestabilan titik ekuilibrium dari Sistem (2.25) dapat dilihat berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobiannya. Permasalahan yang sering terjadi dalam menentukan tipe kestabilan sistem menggunakan nilai eigen adalah ketika mencari akar-akar persamaan yang berorde tinggi. Oleh karena itu, diperlukan suatu kriteria yang dapat menjamin akar-akar persamaan bernilai negatif atau ada akar persamaan yang bernilai positif. Tanda negatif ataupun positif digunakan untuk menentukan kestabilan dari suatu titik ekuilibrium. Analisis kestabilan titik ekuilibrium dapat menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz* sebagai alternatif menentukan tanda bagian real dari nilai-nilai eigen.

Diberikan suatu persamaan karakteristik dari matriks $A_{n\times n}$,

$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$, dengan $a_i \neq 0, i = 1,2,3,\dots,n$ (2.35)

Menurut Olsder (2004: 60), kriteria *Routh-Hurwitz* dipakai untuk mengecek kestabilan secara langsung dengan mempertimbangkan nilai koefisien a_i tanpa menghitung akar-akar dari Persamaan (2.35). Koefisien-koefisien dari Persamaan (2.35) dapat disusun ke dalam sebuah tabel *Routh-Hurwitz* berikut ini,

Tabel. 2.1 Tabel *Routh-Hurwitz*

a_0	a_2	a_4	...
a_1	a_3	a_5	...
b_1	b_2	b_3	...
c_1	c_2	c_3	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

dimana koefisien b_1 , b_2 , c_1, c_2 didefinisikan sebagai

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, \qquad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, \qquad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

perhitungan pada tabel *Routh-Hurwitz* terus dilakukan sampai kolom pertama menghasilkan perhitungan sama dengan nol. Matriks $A_{n\times n}$ dikatakan stabil jika semua bagian real dari nilai eigen bernilai negatif. Dalam kriteria *Routh-Hurwitz* hal ini ditunjukkan dengan tidak adanya perubahan tanda pada kolom pertama tabel *Routh-Hurwitz.* Sehingga berdasarkan kriteria *Routh-Hurwitz* suatu sistem persamaan diferensial dikatakan stabil jika semua elemen pada kolom pertama tabel *Routh-Hurwitz* memiliki tanda sama (semua positif atau semua negatif).

Menurut Olsder (2004: 61) akar-akar dari Polinomial (2.35) semuanya mempunyai bagian real bernilai negatif jika dan hanya jika tabel *Routh-Hurwitz* terdiri dari $n+1$ baris dan semua elemen pada kolom pertama dari tabel mempunyai tanda sama (semua elemen dari kolom pertama adalah bernilai positif atau negatif).