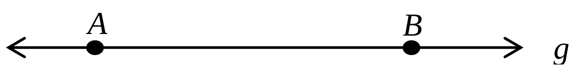
BAB II

LANDASAN TEORI

A. Titik, Garis, dan Bidang

Pada geometri, tepatnya pada sistem aksioma, terdapat istilah tak terdefinisi. Istilah tak terdefinisi adalah istilah dasar yang digunakan dalam membangun istilah lain, arti istilahnya sendiri tidak terdefinisi tetapi dideskripsikan. Menurut Rich dan Thomas (2009: 1), istilah tak terdefinisi dalam geometri adalah titik, garis, dan bidang.

Titik dilambangkan dengan dot/noktah, diberi nama dengan huruf kapital, hanya menunjukkan posisi/tempat, serta tidak memiliki panjang, lebar, dan tebal. Garis mempunyai panjang yang tak terbatas ke dua arah namun tidak mempunyai lebar dan tebal. Garis diberi nama dengan huruf kecil dan ditulis dengan mencantumkan nama dua titik yang terletak pada garis tersebut dan dilengkapi dengan garis di atas kedua huruf dengan panah di ujung dan pangkal garis tersebut. Jika terdapat titik A dan B dengan $A \neq B$, maka titik A dan B adalah titik-titik pada $\overleftrightarrow{AB}$ (Gambar 2.1).

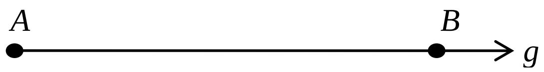


Gambar 2.1 Garis *g* yang melalui titik *A* dan *B*

Aksioma 2.1 (Keedy, dkk, 1967: 34)

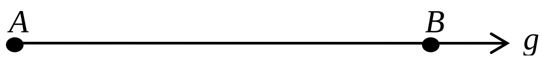
Terdapat tepat satu garis melalui dua titik berlainan

Menurut Keedy, dkk (1967: 50), suatu ruas garis yang ditentukan oleh dua titik berlainan *A* dan *B* didefinisikan sebagai himpunan titik-titik yang terdiri dari titik *A* dan *B* sebagai ujung dan semua titik di antara titik *A* dan *B*. Sebuah ruas garis dengan ujung-ujung *A* dan *B* dilambangkan dengan $\overline{AB}$ atau $\overline{BA}$.



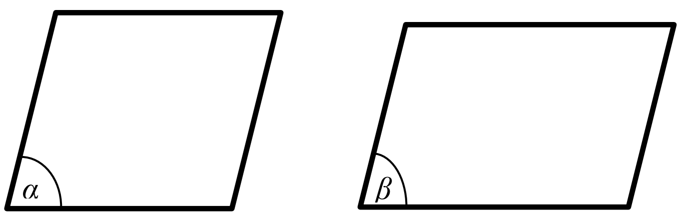
Gambar 2.2 Ruas garis $\overline{AB}$

Misalkan *A* adalah sebuah titik pada garis *g*. Sebuah sinar garis pada garis *g* didefinisikan sebagai himpunan titik-titik yang terdiri dari titik *A* sebagai pangkal dan semua titik yang segaris dengan titik *A* pada garis *g*. Sinar garis dengan pangkal *A* dan memuat titik *B* dilambangkan dengan $\overrightarrow{AB}$ (Keedy, dkk, 1967: 50).



Gambar 2.3 Sinar garis $\overrightarrow{AB}$

Bidang, divisualisasikan dengan jajargenjang, adalah suatu permukaan yang datar dan tidak terbatas. Bidang memiliki keluasan yang tak terbatas dan tidak memiliki ketebalan. Nama-nama bidang dapat ditulis dengan abjad Yunani. Bidang merupakan suatu permukaan datar seperti meja (Keedy, 1967: 32).



Gambar 2.4 Bidang α dan bidang β

Aksioma 2.2

Melalui sebarang tiga titik berbeda dapat dibuat paling sedikit satu bidang dan melalui tiga titik yang non-kolinear dapat dibuat tepat satu bidang.

Teorema 2.1 (Keedy, dkk, 1967: 40)

Dua garis yang berpotongan menentukan satu bidang.

Bukti:

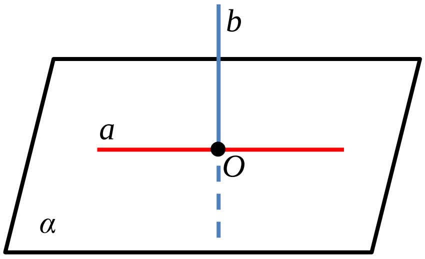
Misalkan diketahui garis g dan l berpotongan di titik P. Misalkan titik Q terletak pada garis g dengan $Q \neq P$ dan titik R terletak pada l dengan $R \neq P$. Berdasarkan Aksioma 2.1, titik-titik P, Q, dan R non-kolinear. Berdasarkan Aksioma 2.2, garis g dan garis l terletak pada satu bidang. ■

Definisi 2.1 (Keedy, dkk, 1967: 92)

Dua garis berlainan pada suatu bidang dikatakan saling tegak lurus jika dan hanya jika keduanya membentuk sudut siku-siku.

Definisi 2.1 dapat diperjelas sebagai berikut:

Dua garis berlainan yang terletak pada suatu bidang dikatakan saling tegak lurus jika dan hanya jika kedua garis tersebut berpotongan dan sinar garis-sinar garis yang berdekatan dari perpotongan kedua garis tersebut membentuk sudut siku-siku.



Gambar 2.5 Dua garis berpotongan pada bidang α

Gambar 2.5 menggambarkan perpotongan antara dua garis a dan b yang saling berpotongan tegak lurus dengan titik perpotongannya adalah titik O. Garis a berhimpit dengan bidang α, garis b berpotongan tegak lurus dengan bidang α.

Definisi 2.2 (Keedy: 106)

Dua ruas garis dikatakan kongruen jika dan hanya jika kedua garis sama panjang.

Definisi 2.3 (Keedy: 87)

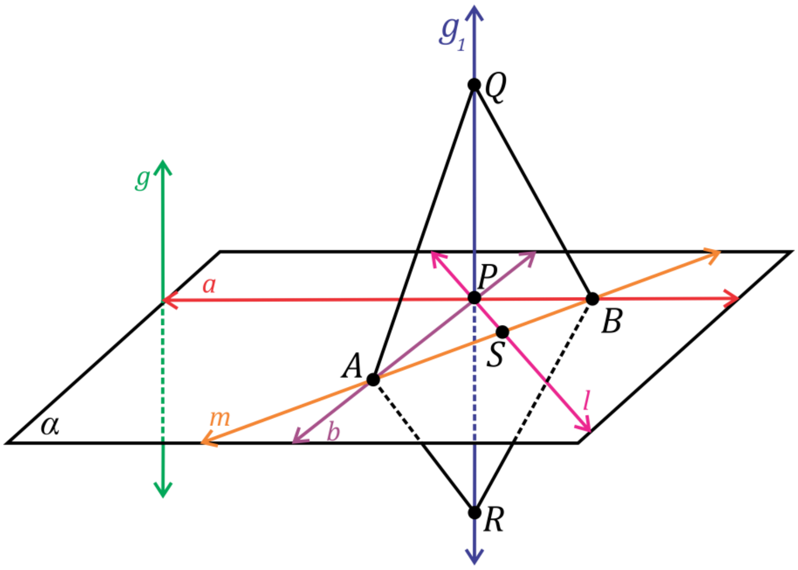
Dua sudut dikatakan kongruen jika dan hanya jika kedua sudut tersebut sama besar.

Teorema 2.2 (A. Sardjana, 2008: 1.19)

Jika sebuah garis tegak lurus terhadap dua garis yang berpotongan maka garis itu tegak lurus terhadap bidang yang memuat dua garis yang berpotongan tersebut.

Bukti:

Diberikan garis a dan garis b yang berpotongan pada titik P. Garis a dan garis b terletak pada bidang α. Diberikan suatu garis g yang tegak lurus terhadap garis a dan garis b. Akan dibuktikan garis g tegak lurus terhadap setiap garis yang terletak pada bidang α.



Gambar 2.6 Ketegaklurusan garis terhadap bidang

Perhatikan Gambar 2.6. Akan dilukis garis g_1 yang melalui titik P dan sejajar garis g. Pada garis g_1 dilukis titik Q dan titik R sehingga $Q - P - R$ dan $PR = PQ$. Karena $g \perp a$ dan $g \perp b$, maka $g_1 \perp a$ dan $g_1 \perp b$ sehingga a dan b merupakan sumbu dari ruas garis QR. Jika dibuat sebarang garis m pada bidang α dan garis m memotong garis a dan b berturut-turut pada titik A dan B maka $AR = AQ$ dan $BR = BQ$.

Perhatikan ΔABR dan ΔABQ. Perbandingan ΔABR dan ΔABQ adalah sebagai berikut.

Jika diketahui $AB = AB$, $AR = AQ$, dan $BR = BQ$ maka ΔABR kongruen dengan ΔABQ dan $\angle RAB$ kongruen terhadap $\angle QAB$. Selanjutnya dibuat sebarang garis lurus l yang melalui titik P dan terletak pada bidang α dan memotong garis m pada titik S. Akan dibuktikan garis g tegak lurus terhadap garis l. Jika diketahui $\angle RAB$ kongruen dengan $\angle QAB$ maka $\angle RAS$ kongruen dengan $\angle QAS$.

Perhatikan ΔASR dan ΔASQ. Perbandingan ΔASR dan ΔASQ adalah sebagai berikut.

Jika diketahui $AR = AQ$, $AS = AS$, dan $\angle RAS$ kongruen dengan $\angle QAS$ maka ΔASR kongruen dengan ΔASQ dan SR kongruen dengan SQ, sehingga PS merupakan sumbu dari ruas garis QS. Jika PS merupakan sumbu dari ruas garis QR maka garis g_1 tegak lurus terhadap garis l, berarti garis g tegak lurus terhadap garis l. Maka terbukti bahwa garis g juga tegak lurus terhadap setiap garis yang melalui titik P dan terletak pada bidang α. ■

B. Sudut

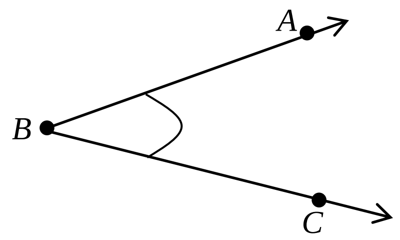
Sudut adalah gabungan dua sinar garis yang mempunyai titik pangkal yang sama (Rich dan Thomas, 2009: 4). Sinar garis-sinar garis tersebut merupakan kaki-kaki sudut, dan titik pangkalnya merupakan titik sudut. Simbol untuk sudut adalah "$\angle$".

Besar atau ukuran sudut bergantung pada seberapa besar satu kaki sudut harus dirotasi atau diputar terhadap titik sudutnya, sampai kaki sudut ini berhimpit dengan kaki sudut yang lain. Ukuran sudut adalah banyaknya derajat yang dicakup sudut tersebut. Satuan ukuran sudut yang biasa digunakan adalah derajat (°).

1. Pemberian Nama Sudut

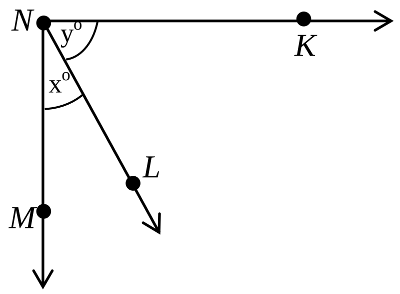
Pemberian nama sebuah sudut ada tiga cara (Rich dan Thomas, 2009: 5), yaitu:

a. Sudut dapat diberi nama dengan menulis sudut atau menggunakan simbol "∠" dan diikuti dengan nama titik sudut tersebut. Metode ini digunakan jika gambar tidak menunjukkan lebih dari dua sinar garis yang bertemu pada titik sudut.



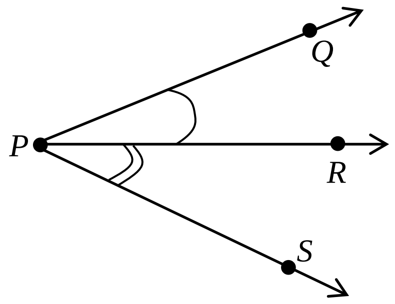
Gambar 2.7 Sudut *B* atau $\angle B$

b. Sudut dapat diberi nama dengan menulis sudut atau menggunakan simbol "∠" dan diikuti dengan sebuah simbol (huruf latin, huruf Yunani atau angka) yang berada di antara kaki-kaki sudut dan mendekati titik sudut dengan busur kecil yang menghubungkan kaki-kaki sudut.



Gambar 2.8 Sudut *x* atau $\angle x$ dan sudut *y* atau $\angle y$

c. Sudut dapat diberi nama dengan menulis sudut atau dengan simbol "∠" dan diikuti dengan nama dari tiga titik dengan urutan, yaitu sebuah titik pada sinar garis, titik sudut, dan titik pada sinar yang lainnya. Perlu diingat bahwa penulisan titik sudut harus di tengah.



Gambar 2.9 Sudut QPR atau $\angle QPR$, Sudut QPS atau $\angle QPS$, dan Sudut RPS atau $\angle RPS$

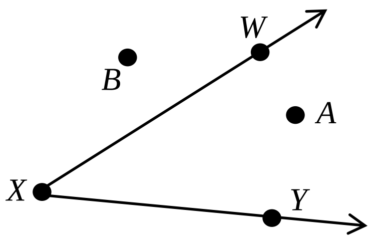
2. Titik Interior dan Eksterior

Jika terdapat sebuah $\angle WXY$ maka titik A dikatakan berada pada interior $\angle WXY$ jika dan hanya jika :

a. Titik A sepihak dengan titik W terhadap $\overrightarrow{XY}$, dan

b. Titik A sepihak dengan titik Y terhadap $\overrightarrow{XW}$

Sedangkan titik eksterior $\angle WXY$ adalah himpunan semua titik yang tidak berada pada interior sudut dan tidak terletak pada $\angle BAC$.

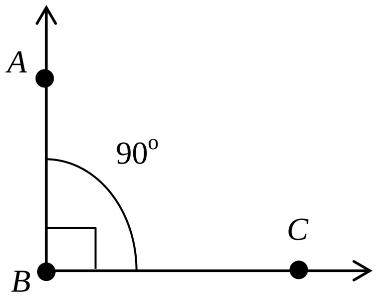


Gambar 2.10 Titik-titik yang berada di interior dan eksterior pada $\angle WXY$

Pada Gambar 2.10, titik A berada di interior $\angle WXY$ karena titik A dan W berada pada sisi yang sama terhadap $\overrightarrow{XY}$ dan titik A dan Y berada pada sisi yang sama terhadap $\overrightarrow{XW}$, sedangkan titik B berada di eksterior $\angle WXY$ karena tidak terletak pada interior $\angle WXY$ dan tidak terletak pada $\angle WXY$.

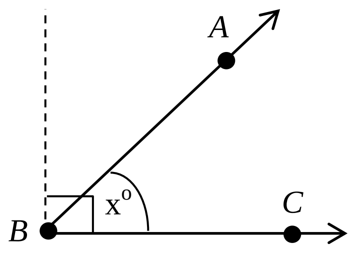
3. Jenis-jenis Sudut (Rich dan Thomas, 2009: 5-6)

a. Sudut siku-siku (*right angle*): sudut siku-siku adalah sudut dengan ukuran 90^o. Pada Gambar 2.11, $m\angle ABC$ = 90^o. Bentuk persegi pada pojok sudut menujukkan sudut tersebut adalah sudut siku-siku.



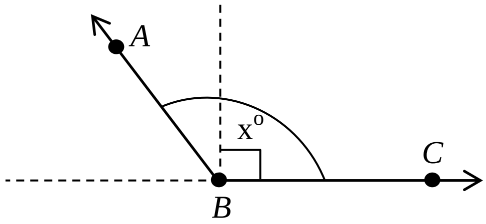
Gambar 2.11 Sudut siku-siku (*Right angle*)

b. Sudut lancip (*acute angle*): sudut lancip adalah sudut dengan ukuran sudutnya lebih besar dari 0^o dan lebih kecil dari 90^o.



Gambar 2.12 Sudut lancip (*Acute angle*)

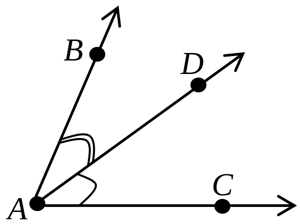
c. Sudut tumpul (*obtuse angle*): sudut tumpul adalah sudut dengan ukuran sudutnya lebih besar dari 90^o dan lebih kecil dari 180^o.



Gambar 2.13 Sudut tumpul (*Obtuse angle*)

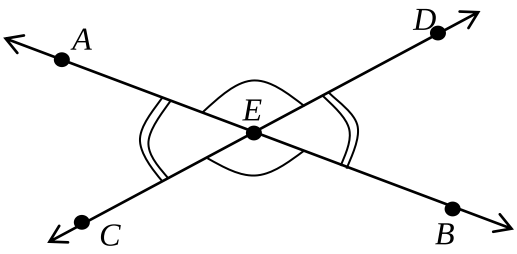
4. **Jenis-jenis Pasangan Sudut** (Rich dan Thomas, 2009: 12-13)

a. Sudut-sudut berdampingan: dua sudut yang mempunyai titik sudut yang sama dan terdapat satu kaki yang dimiliki kedua sudut tersebut. Pada Gambar 2.14 $\angle BAC$ dibagi menjadi dua sudut yang berdampingan yaitu $\angle BAD$ dan $\angle DAC$. Satu kaki sudut yang dimiliki bersama adalah $\overrightarrow{AD}$ sehingga berlaku $m\angle BAD + m\angle DAC = m\angle BAC$.



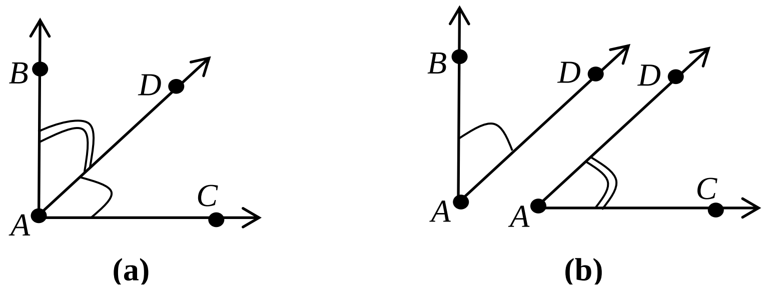
Gambar 2.14 Sudut-sudut berdampingan

b. Sudut-sudut yang saling bertolak belakang (*vertical angles*): dua sudut yang tidak berdampingan yang terbentuk oleh dua garis yang berpotongan. Pada Gambar 2.15, $\angle AEC$ dan $\angle DEB$ merupakan sudut yang saling bertolak belakang yang terbentuk dari perpotongan $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{CD}$. Selain itu, $\angle AED$ dan $\angle CEB$ juga merupakan pasangan sudut yang saling bertolak belakang yang terbentuk dari perpotongan garis-garis yang sama, sehingga berlaku $m\angle AEC = m\angle DEB$ dan $m\angle AED = m\angle CEB$.



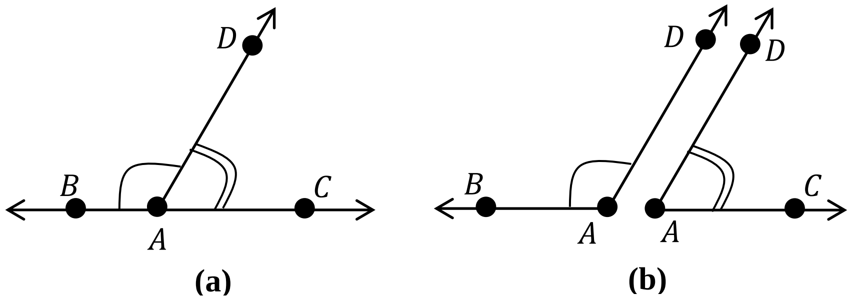
Gambar 2.15 Sudut-sudut bertolak belakang

c. Sudut-sudut berpenyiku (komplementer): dua sudut yang jika dijumlahkan besar kedua sudutnya berukuran 90^{o}. Pada Gambar 2.16(a), $\angle BAD$ dan $\angle DAC$ adalah sudut-sudut berpenyiku yang berdampingan, sedangkan pada Gambar 2.16(b), $\angle BAD$ dan $\angle DAC$ adalah sudut-sudut berpenyiku yang tidak berdampingan. Dalam setiap kasus, $m\angle BAD + m\angle DAC$ = 90^{o}. Masing-masing dari dua sudut berpenyiku yang berpasangan disebut komplemen dari sudut lainnya.



Gambar 2.16 Sudut-sudut berpenyiku

d. Sudut-sudut berpelurus (suplementer): dua sudut yang jika dijumlahkan besar kedua sudutnya berukuran 180^{o}. Pada Gambar 2.17(a), $\angle BAD$ dan $\angle DAC$ adalah dua sudut berpelurus yang berdampingan. Dalam setiap kasus, $m\angle BAD + m\angle DAC$ = 180°. Pada Gambar 2.17(b), $\angle BAD$ dan $\angle DAC$ adalah dua sudut berpelurus yang tidak berdampingan. Dalam setiap kasus, $m\angle BAD + m\angle DAC$ = 180°. Masing-masing dari dua sudut berpelurus yang berpasangan disebut suplemen dari sudut lainnya.

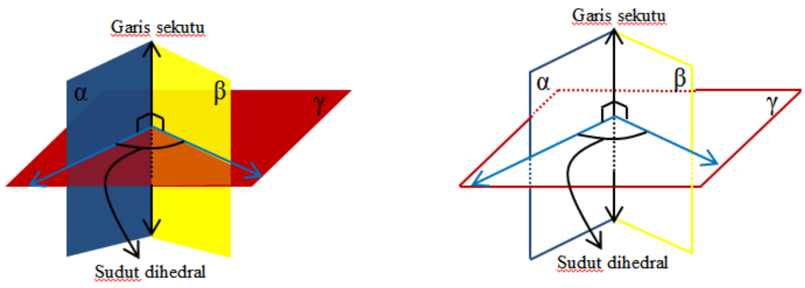


Gambar 2.17 Sudut-sudut berpelurus

C. Sudut Dihedral dan Sudut Trihedral

Dalam mencari derajat ukuran sudut yang dibatasi oleh bidang-bidang lengkung, misalnya untuk mencari derajat ukuran sudut dalam sebuah segilima-bola, digunakan prinsip sudut trihedral yang berkorespondesi dengan sudut yang bersangkutan. Oleh karena itu, berikut ini akan dibahas terlebih dahulu tentang sudut dihedral dan sudut trihedral.

Sudut dalam ruang yang dibentuk oleh dua bidang berpotongan disebut sudut dihedral. Garis yang merupakan perpotongan bidang α dan β disebut garis sekutu atau rusuk (*edge*) sudut dihedral dan setiap bidang disebut sisi (*face*). Untuk menentukan besar sudut dihedral antara bidang α dan β, pertama dibuat bidang γ tegak lurus garis sekutu, perpotongan bidang γ dengan sisi-sisi (bidang α dan β) dari sudut dihedral akan berupa garis dan hal ini akan membentuk sudut pada perpotongan bidang tersebut (Gambar 2.18). Jadi besar sudut dihedral antara bidang α dan β adalah ukuran sudut yang dibentuk oleh perpotongan kedua bidang yang tegak lurus garis sekutunya.



Gambar 2.18 Sudut dihedral bidang α dan β

Jika garis sekutu dari sudut dihedral berpotongan pada dua titik berlainan dengan bidang-bidang yang tegak lurus dengan garis sekutu tersebut, maka bidang-bidang ini sejajar satu sama lain. Garis-garis yang merupakan perpotongan antara bidang-bidang sejajar tersebut dengan sisi-sisi sudut dihedral akan sejajar. Setiap titik sepanjang garis persekutuan menentukan sudut dihedral yang sama besar. Oleh karena itu, dirumuskan Teorema 2.3 yang didahului oleh Definisi 2.4 berikut ini.

Definisi 2.4 (Rich, 2005: 32)

Dua garis berlainan dikatakan saling sejajar apabila keduanya tidak mempunyai titik sekutu.

Teorema 2.3 (Nielsen dan Vanlonkhuyzen, 1949: 105)

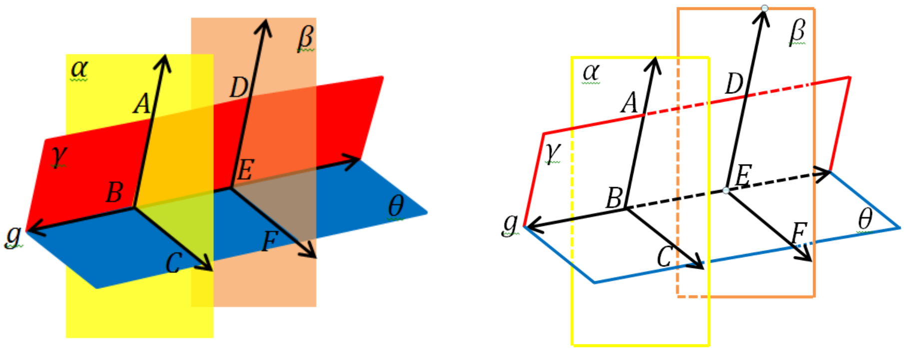
Jika dua sudut (tidak pada bidang yang sama) sepasang-sepasang kakinya sejajar dengan arah yang sama maka kedua sudut tersebut sama besar.

Bukti:

Misalkan diketahui $\angle ABC$ terletak pada bidang α dan $\angle DEF$ terletak pada bidang β (Gambar 2.19). Diketahui bahwa sepasang-sepasang kaki-kaki sudut tersebut sejajar. Dengan kata lain, $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{ED}$ dan $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{EF}$.

Akan dibuktikan bahwa $m\angle ABC = m\angle DEF$.

Karena $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{ED}$ dan $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{EF}$, serta $\angle ABC$ terletak pada bidang α dan $\angle DEF$ terletak pada bidang β, maka bidang α dan bidang β sejajar. Bidang γ dan bidang θ berpotongan pada g (g disebut juga garis sekutu antara bidang γ dan θ). Sudut ABC dan $\angle DEF$ adalah sudut dihedral dari bidang γ dan θ (sudut yang dibentuk dari dua bidang yang berpotongan), oleh karena itu $m\angle ABC = m\angle DEF$. Terbukti bahwa jika dua sudut (tidak sebidang) yang sepasang-sepasang kakinya sejajar satu sama lain maka kedua sudut tersebut sama besar. ■

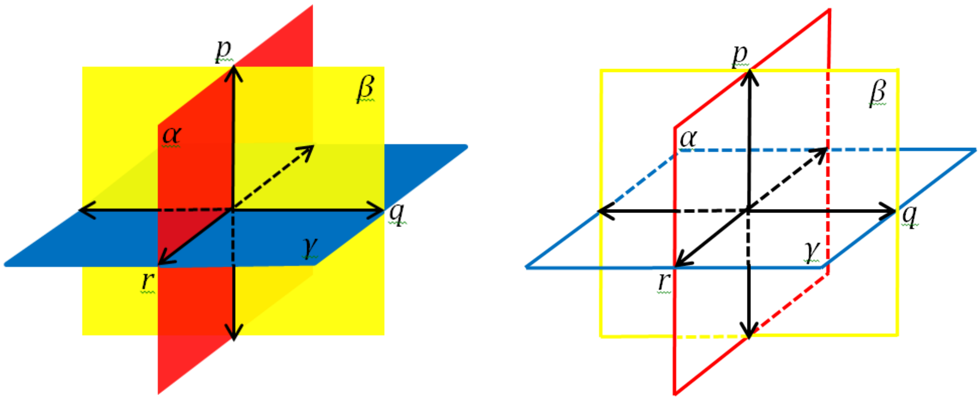


Gambar 2.19 Sudut dihedral pada bidang α dan β

Berdasarkan bukti dari Teorema 2.3, sudut dihedral dapat diukur dari sebarang bidang yang melalui suatu titik pada garis persekutuan yang sekaligus tegak lurus pada garis persekutuan tersebut.

Teorema 2.4 (Nielsen dan Vanlonkhuyzen, 1949: 106)

Suatu bidang γ tegak lurus pada dua bidang (α dan β) yang berpotongan jika dan hanya jika bidang γ tegak lurus pada garis persekutuan bidang α dan β.



Gambar 2.20 Bidang γ tegak lurus pada dua bidang (α dan β) yang berpotongan

Bukti:

Pada Gambar 2.20, p dan r adalah garis-garis yang terletak pada bidang α, p dan q adalah garis-garis yang terletak pada bidang β, q dan r adalah garis-garis yang terletak pada bidang γ, dan p adalah garis sekutu bidang α dan β.

a. Akan dibuktikan jika bidang γ tegak lurus bidang α dan β, maka bidang γ akan tegak lurus p.

   Untuk membuktikan bidang γ tegak lurus bidang α dan β, maka harus dibuktikan bahwa bidang γ tegak lurus terhadap sebarang garis pada bidang α dan β. Dengan langkah yang sama seperti dalam pembuktian Teorema 2.2, maka:

1) Jika bidang γ tegak lurus p dan r (yang terletak pada bidang α), maka bidang γ tegak lurus bidang α.
2) Jika bidang γ tegak lurus p dan q (yang terletak pada bidang β), maka bidang γ tegak lurus bidang β.

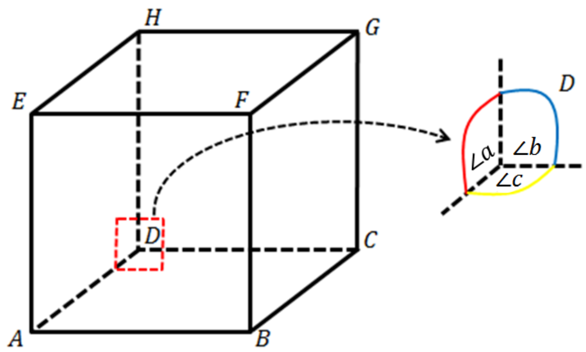
Oleh karena itu maka dapat disimpulkan bahwa bidang γ tegak lurus p yang merupakan garis sekutu bidang α dan β.

b. Akan dibuktikan jika bidang γ tegak lurus p, maka bidang γ akan tegak lurus bidang α dan β.

Garis q dan r adalah garis-garis yang terletak pada bidang γ yang keduanya tegak lurus p (yang merupakan garis pada bidang α dan β). Berdasarkan Teorema 2.2, maka q dan r tegak lurus bidang α dan β. Karena q dan r terletak pada bidang γ, maka dapat disimpulkan bahwa bidang γ tegak lurus bidang α dan β.

Berdasarkan pembuktian a dan b, maka sebuah bidang γ tegak lurus pada dua bidang (α dan β) yang berpotongan jika dan hanya jika bidang γ tegak lurus pada garis sekutu bidang α dan β. ■

Tiga bidang yang berpotongan pada satu titik membentuk sudut ruang atau sudut trihedral dan titik sekutunya disebut titik sudut. Sebuah sudut trihedral mempunyai tiga sudut sisi yang dibentuk dari masing-masing garis persekutuan bidang. Tiap dua sisi sudut trihedral membentuk sudut dihedral (Gambar 2.20). Sebagai contoh, pada Gambar 2.21, bagian dalam sebuah kubus membentuk sudut trihedral dengan setiap sudut dihedralnya 90^{o} dan setiap sudut sisinya 90^{o}. Hubungan sudut dalam ruang ini dinyatakan dalam Teorema 2.5.



Gambar 2.21 Tiga sudut sisi pada sudut trihedral *D* pada kubus *ABCD-EFGH*

Teorema 2.5 (Nielsen dan Vanlonkhuyzen, 1949: 106 – 107)

Jumlah sebarang dua sudut sisi dari sebuah sudut trihedral lebih besar dari sudut sisi ketiga.

Bukti:

Misalkan diketahui limas *O.ABC* seperti pada Gambar 2.22. Terdapat sudut trihedral *O-ABC* dengan titik sudut *O*. Terdapat $\overline{OD}$ pada bidang *OAC* sedemikian hingga $m\angle ABC = m\angle AOB$ dan $m\overline{OD} = m\overline{OB}$.

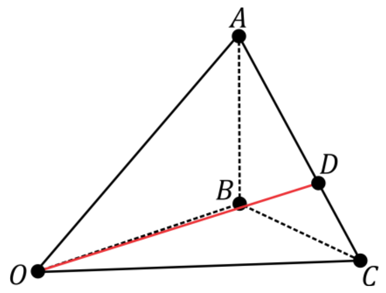
Perhatikan ΔAOD dan ΔAOB.

$$m\overline{OD} = m\overline{OB}$$

$$m\overline{OA} = m\overline{OA}$$

$$m\angle AOD = m\angle AOB$$

$\therefore\ \Delta AOD \cong \Delta AOB$ dan $m\overline{AD} = m\overline{AB}$



Gambar 2.22 Limas *O-ABC*

Perhatikan ΔABC. Berdasarkan sifat-sifat segitiga diketahui bahwa:

$m\overline{AB} + m\overline{BC} > m\overline{AC}$..(*i*)

karena $m\overline{AC} = m\overline{AD} + m\overline{DC} = m\overline{AB} + m\overline{DC}$, maka:

$m\overline{AB} + m\overline{BC} > m\overline{AB} + m\overline{DC}$..(*ii*)

Berdasarkan persamaan (*i*) dan (*ii*) maka dapat diperoleh $m\overline{BC} > m\overline{DC}$, sehingga $m\angle BOC = m\angle DOC$. Pada persamaan (*ii*) juga dapat diperoleh bahwa:

$m\angle AOB + m\angle BOC > m\angle AOB + m\angle DOC$

$m\angle AOB + m\angle BOC > m\angle AOD + m\angle DOC$

$m\angle AOB + m\angle BOC > m\angle AOC$ ....(*iii*)

Jika $\overline{OD}$ terletak pada bidang *AOB* sedemikian hingga $m\angle BOD = m\angle BOC$ dan $m\overline{OD} = m\overline{OC}$, maka akan diperoleh:

$m\angle BOC + m\angle COA > m\angle AOB$ ....(*iv*)

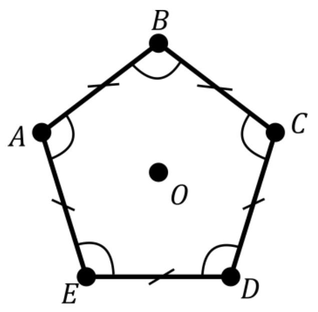
Jika $\overline{OD}$ terletak pada bidang *BOC* sedemikian hingga $m\angle COD = m\angle COA$ dan $m\overline{OD} = m\overline{OA}$, maka akan diperoleh:

$m\angle COA + m\angle AOB > m\angle BOC$ ....(*v*)

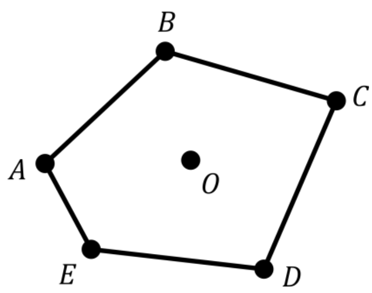
Berdasarkan persamaan (*iii*), (*iv*), dan (*v*) terbukti bahwa jumlah sebarang dua sudut sisi dari sebuah sudut trihedral lebih besar dari sudut sisi ketiga. ■

D. Segilima

Segilima adalah suatu kurva tertutup yang mempunyai lima sisi berupa garis lurus yang disebut sebagai ruas garis, mempunyai lima sudut, dan mempunyai lima titik yang terbentuk akibat perpotongan oleh dua ruas garis. Segilima merupakan poligon bersisi lima. Segilima terbagi menjadi segilima beraturan dan sembarang (Morrison, Karen, dkk, 2015: 58).



(a)

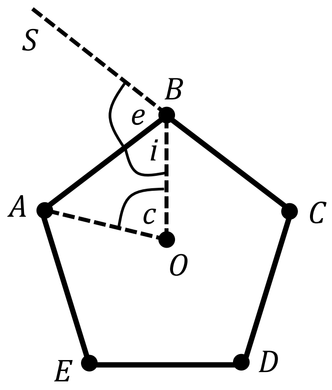


(b)

Gambar 2.23 (a) Segilima beraturan *ABCDE*
(b) Segilima sembarang *ABCDE*

Menurut Rich (2000: 242), poligon beraturan adalah poligon yang memiliki ukuran sisi dan sudut yang sama besar, sedangkan poligon sembarang adalah poligon yang memiliki ukuran sisi dan sudut yang berbeda. Gambar 2.23(a) adalah ilustrasi dari poligon beraturan bersisi lima. Titik-titik *A*, *B*, *C*, *D*, dan *E* adalah titik sudut segilima dan sudut-sudut yang terjadi disebut sudut segilima dengan $m\angle A = m\angle B = m\angle C = m\angle D = m\angle E$. Ruas garis $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, dan $\overline{EA}$ disebut sisi-sisi segilima dengan $\overline{AB}$ = $\overline{BC}$ = $\overline{CD}$ = $\overline{DE}$ = $\overline{EA}$. Jarak titik pusat

O terhadap titik-titik sudut segilima adalah sama besar, yaitu $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = \overline{OE}$. Gambar 2.23(b) adalah ilustrasi dari poligon sembarang bersisi lima dengan $m\angle A \neq m\angle B \neq m\angle C \neq m\angle D \neq m\angle E$, $\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{CD} \neq \overline{DE} \neq \overline{EA}$ dan $\overline{OA} \neq \overline{OB} \neq \overline{OC} \neq \overline{OD} \neq \overline{OE}$.



Gambar 2.24 Segilima *ABCDE* dengan sudut pusat *c*, sudut interior *i* dan sudut eksterior *e*

Sifat-sifat poligon bersisi *n* beraturan menurut Rich (2000: 243) yaitu :

1. Sudut pusat *c* berukuran $\frac{360^0}{n}$
2. Sudut interior *i* berukuran $\frac{(n-2)180^0}{n}$
3. Sudut eksterior *e* berukuran $\frac{360^0}{n}$

Berdasarkan sifat-sifat poligon beraturan tersebut, untuk poligon beraturan bersisi lima maka:

$$m\angle AOB = m\angle ABS = \frac{360^0}{n} = \frac{360^0}{5} = 72^0$$

$$m\angle ABC = \frac{(n-2)180^0}{n} = \frac{(5-2)180^0}{5} = 108^0$$

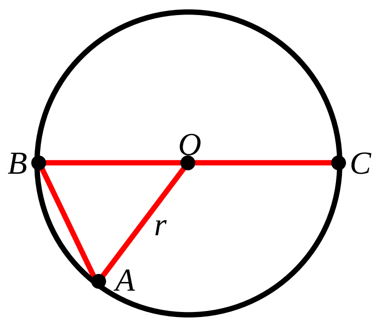
$$m\angle ABC + m\angle ABS = 180^0$$

E. Lingkaran

Lingkaran adalah himpunan titik-titik sebidang yang berjarak sama terhadap sebuah titik tertentu yang disebut titik pusat lingkaran (Keedy, dkk, 1967: 425). Jarak titik pusat lingkaran terhadap titik-titik pada lingkaran disebut jari-jari dan disimbolkan dengan huruf *r*, yang berupa suatu bilangan riil positif. Jari-jari tersebut dapat dipandang sebagai ruas garis yang menghubungkan titik pusat lingkaran dengan sebarang titik pada lingkaran.

1. Unsur-unsur lingkaran

Sebuah lingkaran dengan titik pusat O dan jari-jari r, dapat ditulis dengan simbol $\odot(O,r)$. Jika C sebarang titik pada lingkaran, maka $\overline{OC}$ adalah ruas garis yang panjangnya sama dengan jari-jari lingkaran. Jika A dan B adalah sebarang titik pada lingkaran, maka $\overline{AB}$ adalah tali busur lingkaran, yaitu ruas garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran. Sebuah tali busur yang memuat titik pusat lingkaran disebut diameter. Berikut ini adalah ilustrasi lingkaran dengan titik pusat O dan jari-jari r.

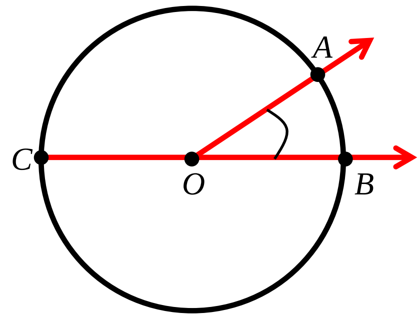


Gambar 2.25 Lingkaran dengan titik pusat *O* dan jari-jari *r*

Pada Gambar 2.25, $\overline{BC}$ adalah tali busur yang memuat titik pusat lingkaran dan memiliki panjang 2*r*.

Interior (daerah dalam) suatu lingkaran dibentuk dari gabungan titik pusat lingkaran *O* dan semua titik yang berjarak kurang dari *r* dari titik pusat *O*, sedangkan eksterior (daerah luar) suatu lingkaran adalah komplemen dari gabungan lingkaran dan interiornya, atau himpunan semua titik yang berjarak lebih besar dari *r*.

Sudut pusat sebuah lingkaran adalah sebuah sudut yang titik sudutnya berada pada titik pusat lingkaran. Dalam Cummins, dkk (2001: 403), ukuran dari suatu busur adalah ukuran dari sudut pusatnya.



Gambar 2.26   Sudut pusat lingkaran (∠*AOB*)

Juring atau sektor lingkaran didefinisikan sebagai interior lingkaran yang dibatasi oleh kaki sudut pusat dan busur yang berada di interior sudut pusat tersebut (Cummins, dkk, 2001: 484). Tembereng suatu lingkaran adalah interior lingkaran yang dibatasi oleh tali busur dan busur. Pada Gambar 2.26, busur $\overline{AB}$ dan kaki sudut *OB* dan *OA* membatasi juring *OAB*, sedangkan tali busur *AB* dan busur *AB* membatasi tembereng lingkaran *AB*.

Pada Gambar 2.26, gabungan titik A dan titik B, yang terletak pada lingkaran, dan semua titik pada lingkaran yang berada pada interior $\angle AOB$ disebut busur minor, sedangkan gabungan titik A, titik B, dan semua titik pada lingkaran yang berada pada eksterior $\angle AOB$ disebut busur mayor. Jika titik-titik O, A, dan B kolinear (pada Gambar 2.26, titik A menempati posisi titik C) maka gabungan titik A, titik B dan semua titik di antara titik A dan B disebut setengah lingkaran. Penulisan nama busur dapat menggunakan dua atau tiga huruf yang terletak pada lingkaran yang di atasnya diberi garis lengkung. Pada Gambar 2.26, $\widehat{AB}$ adalah busur minor, $\widehat{ACB}$ adalah busur mayor, dan $\widehat{BC}$ dan $\widehat{BAC}$ adalah setengah lingkaran.

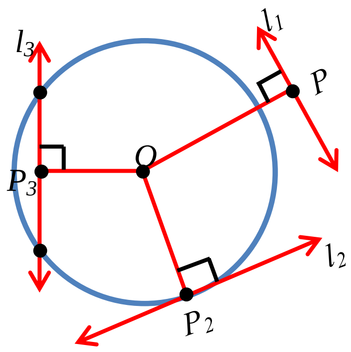
2. Garis singgung lingkaran

Dalam sebuah bidang, sebuah garis dapat memotong lingkaran di 0 titik, 1 titik, dan 2 titik. Hal tersebut bergantung pada OP, yaitu jarak antara titik pusat lingkaran O dengan titik P pada garis. Gambar 2.27 menunjukkan bahwa:

a. $OP_1 > r$ maka garis l_1 tidak memotong lingkaran,

b. $OP_2 = r$ maka garis l_2 memotong lingkaran di satu titik,

c. $OP_3 < r$ maka garis l_3 memotong lingkaran di dua titik.



Gambar 2.27 Perpotongan garis pada lingkaran

Teorema 2.7 (Keedy, dkk, 1967: 428)

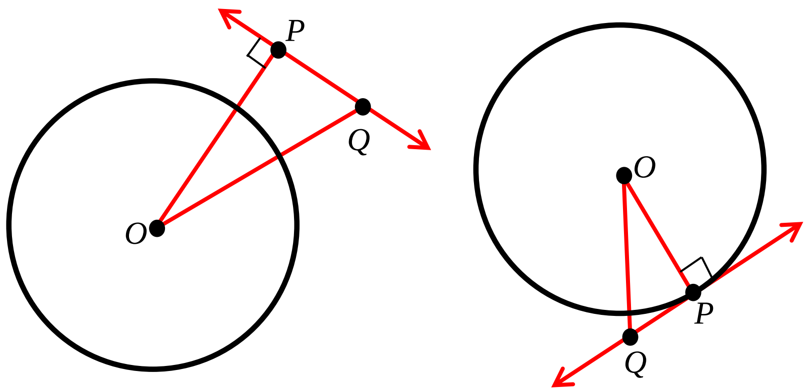
Pada sebuah garis dan lingkaran yang koplanar, diketahui jarak antara titik pusat lingkaran O dan garis adalah OP dengan jari-jari r.

a. Jika $OP > r$ maka garis dan lingkaran tidak berpotongan,

b. Jika $OP = r$ maka garis dan lingkaran berpotongan di satu titik,

c. Jika $OP < r$ maka garis dan lingkaran berpotongan di dua titik.

Bukti:



(a) **(b)**

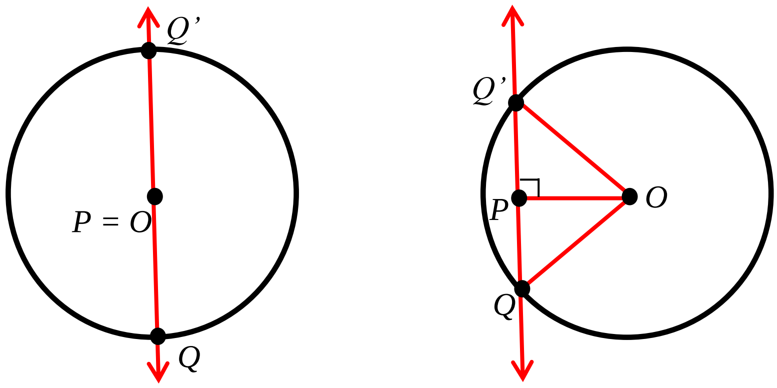
Gambar 2.28 a. Garis dan lingkaran tidak berpotongan
b. Garis dan lingkaran berpotongan di satu titik

Kasus 1:

Misalkan $OP > r$ maka P berada di eksterior lingkaran. Misalkan Q sebarang titik lain pada garis yang memuat P maka $OQ > OP$. Karena $OQ > OP$ dan $OP > r$, maka $OQ > r$, dan Q berada pada eksterior lingkaran. Oleh karena itu, garis dan lingkaran tidak berpotongan (Gambar 2.28(a)).

Kasus 2:

Misalkan $OP = r$, maka P berada pada lingkaran. Misalkan Q sebarang titik lain pada garis yang memuat P maka menurut argument pada *Kasus 1*, $OQ > OP$ dan $OQ > r$, sedemikian hingga Q berada pada eksterior lingkaran. Oleh karena itu, garis dan lingkaran berpotongan pada satu titik yaitu titik P (Gambar 2.28(b)).



(a) **(b)**

Gambar 2.29 Garis dan lingkaran berpotongan di dua titik

Kasus 3a:

Misalkan $OP < r$ dan $OP = 0$, maka garis memuat pusat lingkaran O dan $P = O$. Misalkan terdapat titik Q dan Q' pada garis yang berpangkal di titik P yang masing-masing berkoordinat r dan $-r$, maka $QP = Q'P = r$ atau $QO = Q'O = r$. Oleh karena itu, Q dan Q' berada pada lingkaran (Gambar 2.29(a)).

Kasus 3b:

Misalkan $OP < r$ dan $OP > 0$, maka $OP < r$ dan kedua bilangan adalah positif, $(OP)^2 < r^2$ dan $r^2 - (OP)^2 > 0$.

Demikian $\sqrt{r^2 - (OP)^2}$ ada dan positif. Oleh karena itu, ada dua titik Q dan Q' yang berkoordinat di $\sqrt{r^2 - (OP)^2}$ dan $-\sqrt{r^2 - (OP)^2}$. Karena P merupakan pangkal maka PQ = PQ' = $\sqrt{r^2 - (OP)^2}$. Tetapi ΔOPQ dan $\Delta OPQ'$ siku-siku. Oleh karena itu, menurut Teorema Phytagoras diperoleh:

$$(OP)^2 + (PQ)^2 = (OQ)^2 \text{ dan } (OP)^2 + (OQ')^2 = (OQ')^2$$

dan

$$(OP)^2 + [r^2 - (OP)^2] = (OQ)^2 \text{ dan } (OP)^2 + [r^2 - (OP)^2] = (OQ')^2$$

demikian

$$r^2 = (OQ)^2 = (OQ')^2,$$

dan

$$r = OQ = OQ'.$$

Dengan demikian Q dan Q' berada pada lingkaran (Gambar 2.29(b)). Untuk menunjukkan tidak ada titik lain selain Q dan Q' pada perpotongan antara garis dan lingkaran, diberikan hal berikut.

Jika titik X terdapat pada garis dan lingkaran maka

$$OX = r \text{ dan } (OP)^2 + (XP)^2 = (OX)^2.$$

Oleh karena itu,

$$(OP)^2 + (XP)^2 = r^2$$

dan

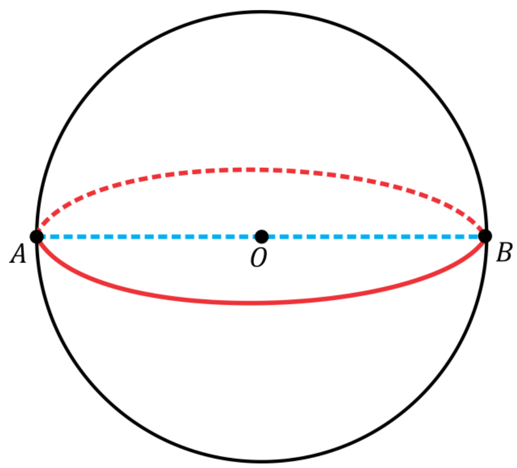
$$(XP)^2 = r^2 - (OP)^2.$$

Dengan demikian XP = $\sqrt{r^2 - (OP)^2}$. Titik P merupakan pangkal. Oleh karena itu, jika sebuah titik berada pada lingkaran sekaligus garis, titik tersebut harus memiliki koordinat $\sqrt{r^2 - (OP)^2}$ atau $-\sqrt{r^2 - (OP)^2}$. Tetapi titik dengan koordinat tersebut adalah Q dan Q'. Oleh karena itu tidak terdapat titik lain selain Q dan Q' pada perpotongan garis pada lingkaran.

Berdasarkan Teorema 2.7 dapat diberi penegasan bahwa sebuah garis dan lingkaran dapat dikatakan bersinggungan jika dan hanya jika garis dan lingkaran koplanar dan berpotongan tepat pada satu titik. Garis tersebut disebut garis singgung lingkaran (*tangent*) dan titik perpotongan garis dan lingkaran disebut titik singgung (*point of tangency*) garis potong lingkaran (*secant*). Garis singgung lingkaran adalah garis yang memotong lingkaran tepat pada satu titik dan tegaklurus dengan jari-jari lingkaran yang melalui titik singgungnya.

F. Bola (*Sphere*)

Bola adalah benda ruang yang merupakan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik yang disebut dengan titik pusat bola (Rich dan Thomas, 2009: 269). Himpunan semua titik dapat dinyatakan sebagai Q dengan jarak terhadap titik pusat bola O sebesar jari-jari bola r. Jari-jari tersebut adalah ruas garis yang menghubungkan titik pusat bola dengan sebarang titik pada bola dan dinyatakan dalam bentuk ruas garis dan bilangan.



Gambar 2.30 Bola dengan titik pusat *O* dan jari-jari *r*

1. Unsur-unsur Bola

Sebuah bola seperti tergambar pada Gambar 2.30 dengan titik pusat O dan jari-jari r dapat ditulis dengan lebih singkat, yaitu bola $\odot(O, r)$. Pada Gambar 2.30, titik A dan titik B terletak pada bola $\odot(O, r)$. Jika dibentuk sebuah ruas garis yang menghubungkan kedua titik tersebut, maka akan terbentuk sebuah tali busur. Tali busur yang melalui titik pusat bola disebut diameter. Selalu terdapat dua titik yang merupakan ujung-ujung diameter bola dan disebut sebagai titik diametral sehingga titik A dan titik B merupakan titik diameter bola $\odot(O, r)$. Seperti pada lingkaran, terdapat daerah interior dan eksterior bola. Daerah interior bola merupakan himpunan semua titik yang berjarak kurang dari jari-jari bola. Daerah eksterior bola merupakan himpunan semua titik yang berjarak lebih dari jari-jari bola.

2. Perpotongan Bidang Datar terhadap Bola

Andaikan ada sebuah bidang datar v dan sebuah bola $\odot(O, r)$. Misalkan jarak antara titik pusat O dan bidang v sama dengan d maka ada 3 kemungkinan yang terjadi yaitu sebagai berikut.

a. Bila $d < r$

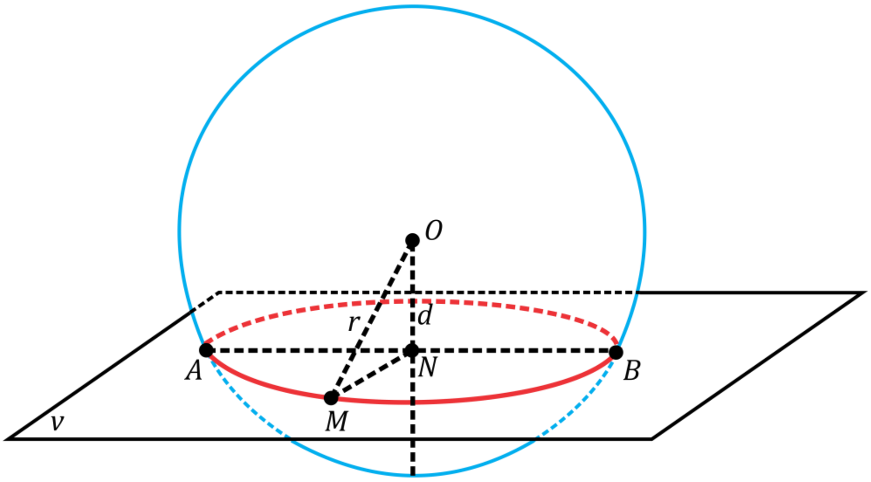
Teorema 2.8 (A. Sardjana, 2008: 9.4)

Jika jarak antara bidang v dan bola $\odot(O, r)$ kurang dari jari-jari bola maka bidang v memotong bola menurut suatu lingkaran.

Bukti:

Jika $d < r$ dan $d > 0$

Andaikan M adalah suatu titik pada perpotongan antara bidang v dan bola $\odot(O, r)$ maka $\overline{OM} = r$. Jika N adalah titik pada v sedemikian hingga $\overline{ON}$ tegak lurus v maka $\overline{ON} = d$, yaitu jarak O terhadap v. Karena $\overline{ON} \perp \overline{NM}$ maka $\overline{NM} = \sqrt{r^2 - d^2}$.



Gambar 2.31 Perpotongan bidang v dan bola $\odot(O, r)$ berupa lingkaran dengan pusat N dan berjari-jari $\sqrt{r^2 - d^2}$

Titik-titik pada perpotongan antara bidang v dan bola $\odot(O, r)$ memiliki sifat yang sama dengan M, yaitu terletak pada bidang v dan berjarak $\sqrt{r^2 - d^2}$ terhadap N. Oleh karena itu perpotongan v dan bola tersebut merupakan lingkaran dengan titik pusat N dan berjari-jari $\sqrt{r^2 - d^2}$.

Jika $d < r$ dan $d = 0$ maka bidang datar akan memotong bola melalui titik pusat bola O menurut suatu lingkaran dengan titik pusat lingkaran tersebut berhimpit dengan titik pusat bola O, sedangkan jari-jarinya sama dengan jari-jari bola. Lingkaran tersebut disebut lingkaran besar. (A. Sardjana, 2008: 9.3). ■

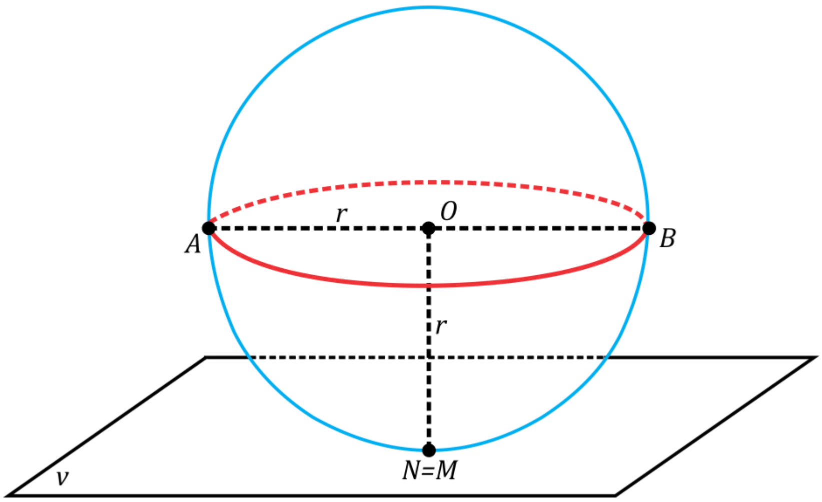
b. Bila $d = r$

Teorema 2.9 (A. Sardjana, 2008: 9.5)

Jika jarak antara bidang v dan bola ⊙(O, r) sama dengan jari-jari bola maka bidang v menyinggung bola tersebut.

Bukti:

Berdasarkan bukti dari Teorema 2.8 jika $d = r$ maka $NM = \sqrt{r^2 - d^2} = 0$. Berarti titik N dan M berhimpit sehingga bidang v dan bola ⊙(O, r) hanya bersekutu di suatu titik N. Dalam hal ini dikatakan bidang v menyinggung bola ⊙(O, r) di titik N.



Gambar 2.32 Bidang *v* menyinggung bola ⊙(*O*, *r*) di titik *N*

Definisi 2.5 (A. Sardjana, 2008: 9.5)

Sebuah bidang v yang hanya bersekutu di satu titik dengan suatu bola disebut bidang singgung bola dengan titik persekutuan disebut titik singgung bola.

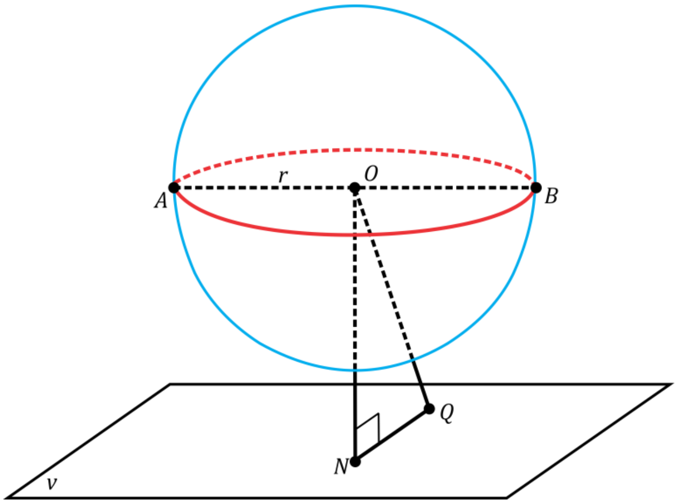
c. Bila $d > r$

Teorema 2.10 (A. Sardjana, 2008: 9.5)

Jika jarak antara bidang v dan bola $\odot(O, r)$ lebih dari jari-jari bola maka bidang v tidak memotong bola tersebut.

Bukti:

Andaikan $ON = d > r$, ambil sebarang titik Q pada v maka $OQ > d > r$. Berarti tidak ada satu titik pun pada v yang berjarak r terhadap O. Dengan kata lain, bidang v dan bola $\odot(O, r)$ tidak berpotongan.



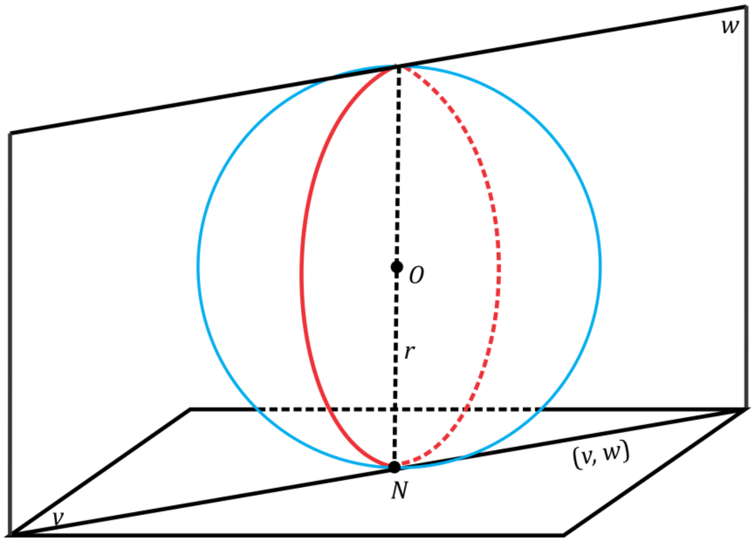
Gambar 2.33 Bidang *v* dan bola $\odot(O, r)$ tidak berpotongan

Teorema 2.11 (A. Sardjana, 2008: 9.6)

Sebuah bidang singgung pada sebuah bola, berdiri tegak lurus jari-jari bola yang melalui titik singgungnya.

Bukti:

Misalkan bidang v dan bola $\odot(O, r)$ bersinggungan di titik N. Dibuat sebarang bidang w melalui $\overline{ON}$. Bidang w memotong bola menurut lingkaran besar dan memotong v menurut garis (v, w).



Gambar 2.34 Bidang *w* memotong bola menurut lingkaran besar dan memotong *v* menurut garis (*v*,*w*)

Karena bidang v dan bola $\odot(O, r)$ hanya bersekutu satu titik, yaitu titik N maka lingkaran besar dan garis (v,w) hanya mempunyai satu titik persekutuan saja, yaitu titik N. Berarti garis (v,w) menyinggung lingkaran besar di N. Oleh karena w adalah bidang sebarang yang melalui garis (v,w) pada v berdiri tegak lurus terhadap $\overline{PN}$ dan bidang $v \perp \overline{ON}$. ■

3. Lingkaran Besar pada Bola

Lingkaran besar merupakan hasil perpotongan antara sebuah bola dan sebuah bidang yang memuat pusat bola. Karena banyaknya bidang yang dapat dibuat melalui titik pusat bola tak terhingga banyaknya maka banyak lingkaran besar juga tak berhingga. Pada setiap lingkaran besar, terdapat tak terhingga pasangan titik diametral. Titik diametral adalah titik-titik yang ada pada lingkaran besar. Jika terdapat dua lingkaran besar pada bola maka kedua lingkaran besar akan memiliki diameter yang sama dengan diameter bola dan kedua lingkaran besar tersebut akan berpotongan satu sama lain. Karena diameter keduanya sama, maka kedua lingkaran besar tersebut akan kongruen satu sama lain sehingga titik pusat bola merupakan titik pusat kedua lingkaran tersebut. Kedua lingkaran besar tersebut dapat saling tegak lurus namun tidak bisa saling sejajar.

Untuk setiap lingkaran besar pada bola, diameter bola yang tegak lurus terhadap diameter lingkaran besar disebut sumbu. Dua titik yang termuat pada sumbu dan berada pada bola merupakan titik kutub dari lingkaran besar yang diberikan. Oleh karena itu, titik pusat lingkaran besar, titik pusat bola serta kedua titik kutub lingkaran besar terdapat pada suatu garis lurus yang disebut sumbu. Jika sebuah lingkaran besar A melalui satu titik kutub suatu lingkaran besar B maka lingkaran besar A akan melalui titik kutub lingkaran besar B yang lain.

Teorema 2.12 (Cresswell, 1816: 12)

Jika dua buah lingkaran besar pada bola tegak lurus satu sama lain maka kutub dari salah satu lingkaran besar tersebut akan berada pada lingkaran besar yang lain, dan sebaliknya.

Bukti:

Jika dua lingkaran besar berpotongan tegak lurus satu sama lain maka diameter kedua lingkaran besar tersebut akan saling tegak lurus satu sama lain. Artinya, diameter lingkaran besar pertama merupakan sumbu dari lingkaran besar kedua, dan sebaliknya. Oleh karena itu, kutub dari salah satu lingkaran besar akan berada pada lingkaran besar yang lain, dan sebaliknya. ■

Teorema 2.13 (Cresswell, 1816: 15)

Jika sebarang dua lingkaran besar pada bola berpotongan tegak lurus pada suatu lingkaran besar ketiga yang diberikan, maka titik perpotongan lingkaran besar pertama dan kedua merupakan kutub dari lingkaran besar ketiga yang diberikan.

Bukti:

Dari Teorema 2.12 diperoleh bahwa kutub dari salah satu lingkaran besar akan berada pada lingkaran besar yang lain jika kedua lingkaran besar tersebut berpotongan tegak lurus. Lingkaran besar pertama dan kedua berpotongan tegak lurus dengan lingkaran besar ketiga sehingga kutub dari lingkaran besar ketiga terdapat pada lingkaran besar pertama dan kedua. Artinya, dua titik kutub lingkaran besar ketiga tersebut merupakan titik perpotongan lingkaran besar pertama dan kedua. ■

Terdapat beberapa istilah pada bola terkait jarak, antara lain *direct distance*, *spherical distance*, dan *polar distance*. Misalkan terdapat sebarang dua titik pada bola. *Direct distance* adalah panjang garis lurus yang menghubungkan kedua titik tersebut dan *spherical distance* adalah panjang busur dari lingkaran besar yang menghubungkan kedua titik tersebut. Jika kedua titik tersebut merupakan titik kutub dari sebuah lingkaran besar maka jarak salah satu titik tersebut terhadap titik-titik di lingkaran besar disebut *polar distance*.

Definisi 2.6 (Cresswell, 1816: 20)

Empat bagian dari keliling sebuah lingkaran besar pada sebuah bola disebut kuadran.

Teorema 2.14 (Cresswell, 1816: 20)

Jarak sudut dari sebuah lingkaran besar dalam bola disebut kuadran dan talibusur sama dengan sisi segiempat yang tergambar dalam sebuah lingkaran besar, dan jika jarak sudut sebuah lingkaran dalam bola disebut sebuah kuadran, maka lingkaran tersebut dinamakan lingkaran besar.

Bukti:

Pertama, jika garis tegak lurus terhadap lingkaran besar (bidang yang memotong bola melalui pusatnya), maka jelas bahwa *polar distance* akan menghadap sudut siku-siku sedemikian sehingga *polar distance* merupakan *quadrant* dan tali busurnya merupakan sisi dari suatu bangun persegi pada lingkaran besar dalam bola (Cresswell, 4 : 4).

Kedua, jika *polar distance* berupa satu *quadrant*, maka jelas bahwa sebarang diameter dari lingkaran yang diberikan akan memotong lingkaran besar, melalui *axis* dan diameter sedemikian sehingga lingkaran tersebut adalah lingkaran itu sendiri. ■

Pada bola, jika dua lingkaran besar berbeda berpotongan maka perpotongan kedua lingkaran besar tersebut akan membentuk sudut. Besar sudutnya dapat diukur dengan menggunakan garis singgung setiap lingkaran besar pada titik perpotongan kedua lingkaran besar tersebut.

Definisi 2.7 (Cresswell, 1816: 27)

Sebuah titik pusat bola merupakan perpotongan dari dua busur dalam permukaan bola yang saling bertemu tetapi tidak berada pada satu lingkaran.

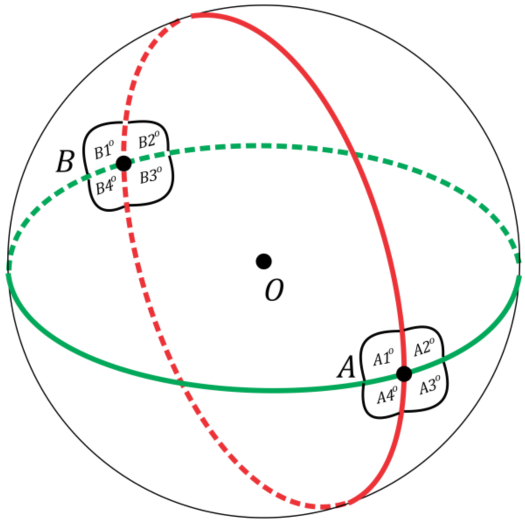
Jika terdapat dua lingkaran besar berpotongan, maka kedua busur yang berpotongan tersebut dapat membentuk dua sudut pada segidua-bola yang jumlah keduanya sama dengan dua sudut siku-siku. Selain itu, saat dua lingkaran besar berpotongan pada suatu titik, sudut yang bertolak belakang ataupun berhadapan akan sama besar sedemikian sehingga pada setiap titik terdapat kedua lingkaran besar tersebut bertemu, akan terbentuk empat sudut yang berjumlah 360^o. Gambar 2.35 menunjukkan dua lingkaran besar berpotongan di titik A dan B. Pada titik sudut A, terbentuk empat sudut yaitu $\angle A1$, $\angle A2$, $\angle A3$, dan $\angle A4$. Pada titik sudut B, terbentuk empat sudut juga yaitu $\angle B1$, $\angle B2$, $\angle B3$, dan $\angle B4$.

Berlaku:

$$\angle A1 \cong \angle B1, \angle A2 \cong \angle B2, \angle A3 \cong \angle B3, \angle A4 \cong \angle B4,$$

dan

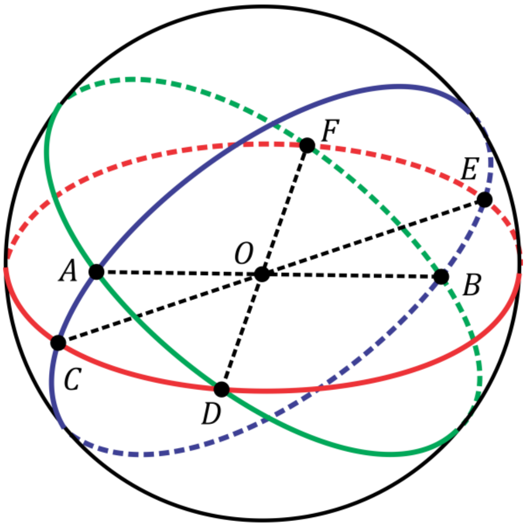
$$\angle A1 \cong \angle A3, \angle B1 \cong \angle B3, \angle A2 \cong \angle A2, \angle B4 \cong \angle B4.$$



Gambar 2.35 Sudut-sudut yang berhadapan dan bertolak belakang pada empat segidua-bola AB

4. Segitiga-Bola

Segitiga-bola adalah gabungan tiga busur lingkaran besar yang ditentukan oleh tiga titik perpotongan yang tidak terletak pada satu lingkaran besar akan membentuk suatu bangun segitiga. Segitiga tersebut disebut segitiga-bola (Lina Dwi Khusnawati, 2011: 55).



Gambar 2.36 Tiga lingkaran besar berbeda sepasang-sepasang berpotongan di dua titik yang berbeda

Definisi 2.8 (Cresswell, 1816: 48)

Segitiga-bola adalah gabungan lingkaran besar pada permukaan bola yang terbentuk dari perpotongan tiga lingkaran besar di bola.

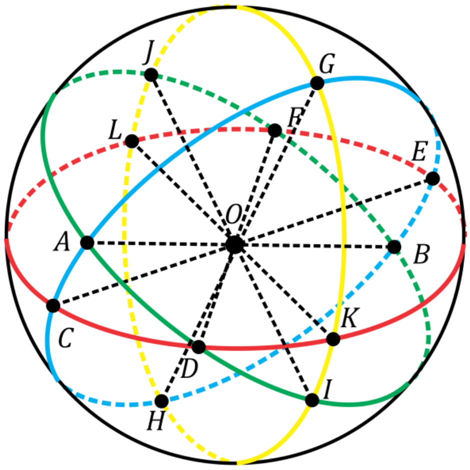
Definisi 2.8 merupakan definisi dari Gambar 2.36, di mana perpotongan dari tiga lingkaran besar berbeda yang berpotongan pada titik-titik yang lain yaitu titik A, B, C, D, E, dan F. Titik $\widehat{ADC}$ dan titik $\widehat{BEF}$ merupakan segitiga-bola. Pada Gambar 2.36 menggambarkan segitiga-bola, di mana enam buah titik yang terbentuk dari tiga lingkaran besar berbeda yang sepasang-sepasang berpotongan.

Seperti halnya segitiga pada bidang datar, segitiga-bola juga dibagi berdasarkan jenis-jenis dan sifat-sifatnya (Lina Dwi Khusnawati, 2011: 6).

Cara menentukan jenis-jenis dari segitiga-bola adalah berdasarkan jenis sudut segitiga-bola yang akan menentukan jenis segitiga-bola yang terbentuk. Selain memiliki sudut, segitiga-bola juga memiliki sisi-sisi yang merupakan busur dari lingkaran besar dan diukur dengan menggunakan satuan derajat. Derajat sisi segitiga-bola dinyatakan dalam tiga jenis yaitu kurang dari 90^o, lebih dari 90^o, dan sama dengan 90^o. Derajat sisi segitiga-bola yang diukur akan dibandingkan dengan derajat sisi yang lain dari segitiga-bola tersebut. Kesamaan derajat sisi akan menentukan jenis segitiga -bola yang terbentuk (Lina Dwi Khusnawati, 2011: 76).

5. Segiempat-bola

Segiempat-bola merupakan suatu bentuk segiempat yang terjadi akibat perpotongan empat lingkaran besar yang berpotongan pada empat titik berbeda. Segiempat tersebut disebut segiempat-bola.



Gambar 2.37 Empat lingkaran besar berbeda sepasang-sepasang berpotongan di dua titik yang berbeda

Definisi 2.9 (Elmadha Pitra Negara, 2013: 58)

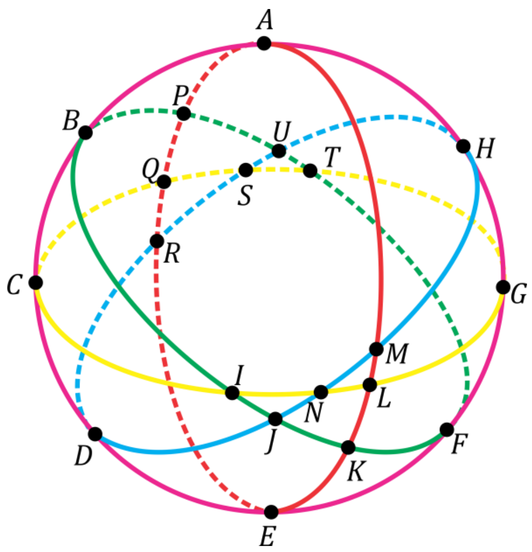
Segiempat-bola adalah suatu bentuk segiempat yang terjadi akibat perpotongan empat lingkaran besar.

Gambar 2.37 merupakan ilustrasi dari Definisi 2.9, di mana perpotongan dari empat lingkaran besar berbeda yang memotong pada titik-titik yang lain yaitu titik *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *J*, *K*, dan *L*. Titik $\widehat{ADKG}$, $\widehat{BEKI}$, $\widehat{ACLJ}$, $\widehat{BHLF}$, dan titik $\widehat{GJFE}$ merupakan segiempat-bola. Gambar 2.37 menggambarkan segiempat-bola, di mana dua belas buah titik terbentuk dari empat lingkaran besar berbeda.

Seperti halnya pada segitiga-bola, segiempat-bola juga dibagi berdasarkan jenis-jenis dan sifat-sifatnya. Jenis-jenis pada segiempat-bola dibagi menjadi tiga macam, yaitu berdasarkan jenis sudut, kesamaan panjang sisi, dan perpaduan jenis sudut dan kesamaan panjang sisinya (Elmadha Pitra Negara, 2013: 81). Sedangkan sifat pada segiempat-bola terbentuk berdasarkan jenis pada segiempat-bola. Untuk menentukan jenis pada segiempat-bola yaitu berdasarkan besar sudut pada sisi yang berdekatan (Elmadha Pitra Negara: 2013: 61).

6. Segilima-bola

Segilima-bola merupakan suatu bentuk segilima yang terjadi akibat perpotongan lima lingkaran besar. Kemungkinan-kemungkinan yang terjadi akibat perpotongan lima lingkaran besar akan membentuk dua titik potong, enam titik potong, dan seterusnya hingga tidak lebih dari duapuluh titik potong. Dalam hal ini, segilima-bola yang dimaksud adalah segilima-bola yang terbentuk akibat perpotongan lima lingkaran besar yang menghasilkan duapuluh titik potong dan dua segilima-bola pada satu bola dengan masing-masing bentuk, sifat, dan jenis yang berbeda. Lima lingkaran besar yang saling berpotongan pada titik-titik yang berlainan akan diilustrasikan pada Gambar 2.38 berikut.



Gambar 2.38 Lima lingkaran besar berbeda yang berpotongan pada titik yang berbeda-beda

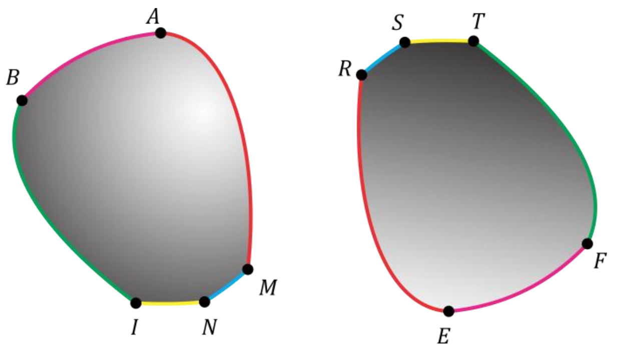
Jika terdapat lima lingkaran besar berbeda yang sepasang-sepasang saling berpotongan, maka perpotongan-perpotongan lima lingkaran besar tersebut akan membentuk segitiga, segiempat, dan segilima. Apabila kelima lingkaran besar berpotongan pada dua titik yang sama maka tidak akan membentuk segilima-bola, melainkan membentuk segidua-bola. Jika lingkaran kedua dan ketiga memotong lingkaran pertama pada titik yang berbeda dan lingkaran keempat dan kelima berhimpit pada salah satu dari tiga lingkaran besar tersebut, maka akan membentuk segitiga bola. Jika keempat lingkaran besar saling berpotongan pada titik yang berlainan, sedangkan lingkaran kelima berhimpit pada salah satu keempat lingkaran besar tersebut, maka akan membentuk segiempat-bola. Jika terdapat lima lingkaran besar yang sama-sama memotong lingkaran pertama pada titik yang berlainan maka kelima lingkaran besar tersebut akan membentuk segilima-bola. Jika terdapat lima lingkaran besar berbeda yang sepasang-sepasang berpotongan, maka perpotongan-perpotongan kelima lingkaran tersebut dapat berupa duapuluh titik, bergantung pada posisi kelima lingkaran besar tersebut.

Gambar 2.38 mengilustrasikan duapuluh titik berbeda yang terbentuk dari lima lingkaran besar berbeda yang sepasang-sepasang saling berpotongan. Pada setiap lingkaran besar, akan terdapat delapan titik potong sebagai hasil perpotongan lingkaran besar tersebut dengan empat lingkaran besar yang lain. Gabungan lima busur lingkaran besar yang ditentukan oleh lima titik perpotongan yang tidak terletak pada satu lingkaran besar akan membentuk suatu bangun segilima. Segilima tersebut disebut segilima-bola.

Pada Gambar 2.38 terbentuk dua buah bangun segilima-bola pada bola yaitu segilima-bola *ABINM* dan segilima-bola *STFER*. Kedua segilima-bola tersebut dapat saling kongruen atau berbeda, bergantung pada posisi kelima lingkaran besar berpotongan.

Busur-busur lingkaran besar merupakan sisi-sisi segilima-bola. Oleh karena itu ukuran panjang sisi-sisi pada segilima-bola diketahui sebagai ukuran derajat sisi, sebesar ukuran sudut pusat dan menggunakan satuan derajat. Pada Gambar 2.38, sisi-sisi dari salah satu segilima-bola yang terbentuk, misalnya segilima-bola *ABINM*, adalah $\widehat{AB}$, $\widehat{AB}$, $\widehat{BI}$, $\widehat{IN}$, $\widehat{NM}$, dan $\widehat{MA}$. Titik-titik perpotongan lima lingkaran besar besar merupakan titik sudut dari segilima-bola sehingga sudut yang dibentuk oleh dua busur yang mengapit titik sudut disebut sudut segilima-bola. Pada Gambar 2.38, titik-titik sudut dari segilima-bola *ABINM* adalah titik *A*, titik *B*, titik *I*, titik *N*, dan titik *M*, sedangkan sudut-sudutnya adalah $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle I$, $\sphericalangle N$, dan $\sphericalangle M$ atau $\sphericalangle MAB$, $\sphericalangle ABI$, $\sphericalangle BIN$, $\sphericalangle INM$, dan $\sphericalangle NMA$. Satuan ukuran besar sudut juga menggunakan derajat. Penamaan sisi dan titik-titik sudut pada segilima-bola sama seperti peranamaan sisi dan titik sudut pada segilima bidang (dimensi dua).

Jika setiap titik sudut suatu segilima-bola dibentuk menggunakan titik sudut segilima-bola lain yang telah diketahui sebagai pasangan titik kutubnya maka segilima-bola tersebut disebut segilima kutub dari segilima-bola yang telah diketahui.



Gambar 2.38(1) Segilima-bola *ABINM* dan *STFER*

Gambar 2.38(1) menunjukkan segilima-bola *ABINM* dan *STFER*. Titik sudut *A* pada segilima-bola *ABINM* merupakan pasangan titik kutub dengan titik sudut *E* pada segilima-bola *STFER*. Titik sudut *B* pada segilima-bola *ABINM* merupakan pasangan titik kutub dengan titik sudut *F* pada segilima-bola *STFER*. Titik sudut *I* pada segilima-bola *ABINM* merupakan pasangan titik kutub dengan titik sudut *T* pada segilima-bola *STFER*. Titik sudut *N* pada segilima-bola *ABINM* merupakan pasangan titik kutub dengan titik sudut *S* pada segilima-bola *STFER*.

Titik sudut M pada segilima-bola $ABINM$ merupakan pasangan titik kutub dengan titik sudut R pada segilima-bola $STFER$. Kedua segilima-bola tersebut disebut dua segilima-bola yang saling kutub.

Definisi 2.10

Segilima-bola adalah segilima di permukaan bola yang terbentuk dari perpotongan lima lingkaran besar di bola.

Segilima-bola dibagi berdasarkan jenis-jenis dan sifat-sifatnya. Jenis-jenis segilima-bola dibagi menjadi tiga macam, yaitu berdasarkan jenis sudut, kesamaan panjang sisi, dan perpaduan jenis sudut dan kesamaan panjang sisinya. Sifat-sifat pada segilima-bola dibagi menjadi dua jenis, yaitu sifat umum dan khusus. Sifat-sifat pada segilima-bola diperoleh dari jenis segilima-bola. Jenis-jenis dan sifat-sifat segilima-bola akan dibahas pada bab selanjutnya.