

BAB II

KAJIAN TEORI

Bab II berisi teori-teori yang digunakan dalam penelitian ini. Teori yang digunakan yaitu deskripsi kanker payudara (*breast cancer*) dan diagnosisnya, citra *mammografi*, pengolahan citra, logika *fuzzy*, dan rancangan GUI (*Graphical User Interface*).

A. Kanker Payudara

1. Pengertian Kanker payudara

Penyakit kanker adalah penyakit yang timbul akibat pertumbuhan tidak normal sel jaringan tubuh yang berubah menjadi sel kanker. Penyakit kanker merupakan salah satu penyebab kematian utama di seluruh dunia. Pada tahun 2012, sekitar 8.2 juta kematian disebabkan oleh kanker. Kanker paru, hati, perut, kolorektal, dan kanker payudara adalah penyebab terbesar kematian akibat kanker setiap tahunnya. Menurut data GLOBOCAN (IARC) tahun 2012 diketahui bahwa kanker payudara merupakan penyakit kanker dengan persentase kasus baru (setelah dikontrol oleh umur) tertinggi, yaitu sebesar 43.3%, dan persentase kematian (setelah dikontrol oleh umur) akibat kanker payudara sebesar 12.9% (Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, 2015).

Ketika sejumlah sel di dalam payudara tumbuh dan berkembang dengan tidak terkendali, inilah yang disebut kanker payudara. Sel-sel tersebut dapat menyerang jaringan sekitar dan menyebar ke seluruh tubuh. Kumpulan besar dari jaringan yang tidak terkontrol ini disebut tumor atau

benjolan. Akan tetapi, tidak semua tumor merupakan kanker karena sifatnya yang tidak menyebar atau mengancam nyawa. Tumor ini disebut tumor jinak. Tumor yang dapat menyebar ke seluruh tubuh atau menyerang jaringan sekitar disebut kanker atau tumor ganas. Teorinya, setiap jenis jaringan pada payudara dapat membentuk kanker, biasanya timbul pada saluran atau kelenjar susu (Yayasan Kanker Payudara Indonesia, 2013).

Menurut *American Cancer Society*, kanker payudara adalah tumor *malignant* yang tumbuh pada sel payudara. Tumor *malignant* adalah suatu kumpulan sel-sel kanker yang dapat tumbuh didalam jaringan sekitar dada dan akan menyebar ke seluruh tubuh. Pada umumnya kanker payudara terjadi pada perempuan tetapi tidak jarang juga dapat terjadi pada laki-laki. Kebanyakan kanker payudara mulai tumbuh pada duktus (*ductal cancers*). Beberapa dimulai pada sel-sel yang terdapat di lobulus (*lobular cancers*), dan sebagian kecil bermula pada jaringan yang lain (*American Cancer Society*, 2013).

2. Jenis Kanker Payudara

Kanker payudara digolongkan menjadi beberapa jenis. Beberapa kanker payudara merupakan suatu *carsinoma*, yakni jenis kanker yang bermula pada sel (sel epitel) yang melapisi organ dan jaringan seperti payudara. Kanker payudara termasuk dalam *carsinoma* yang sering disebut dengan *adenocarcinoma*. *Adenocarsinoma* merupakan suatu *carsinoma* yang bermula pada jaringan glandular. Jenis kanker lain yang

juga dapat terjadi pada payudara adalah *sarcoma* yang bermula pada sel-sel otot, lemak, atau jaringan penghubung (*American Cancer Society*, 2013). Jenis-jenis kanker payudara dapat digolongkan sebagai berikut:

a. DCIS (*Ductal Carcinoma In Situ*)

Jenis ini merupakan kanker payudara non-invasif atau pra-invasif. DCIS berarti sel-sel kanker berada di dalam duktus dan belum menyebar keluar dinding duktus ke jaringan payudara di sekitarnya. Hal ini lah yang membedakan antara DCIS dan kanker invasif. DCIS dianggap sebagai pra-kanker karena pada beberapa kasus DCIS dapat berkembang menjadi kanker invasif (*American Cancer Society*, 2013).

b. IDC (*Invasive or Infiltrating Ductal Carcinoma*)

Jenis ini merupakan kanker payudara yang paling umum. *Invasive Ductal Carcinoma* bermula pada duktus, menerobos dinding duktus, dan kemudian berkembang dalam jaringan lemak pada payudara. Untuk selanjutnya, kanker akan menyebar (bermetastasis) ke bagian tubuh yang lain melalui sistem getah bening (limpa) dan aliran darah. Sekitar 8 dari 10 kanker payudara invasif termasuk dalam IDC (*American Cancer Society*, 2103).

c. ILC (*Invasive or Infiltrating Lobular Carcinoma*)

Invasive or Infiltrating Lobular Carcinoma (ILC) merupakan jenis kanker payudara yang bermula pada kelenjar penghasil susu (lobulus). Seperti IDC, ILC dapat menyebar (bermetastasis) ke

bagian lain dari tubuh. Sekitar 1 dari 10 kanker payudara invasif adalah ILC. *Invasive or Infiltrating Lobular Carcinoma* lebih sulit untuk dideteksi oleh mammogram dari *Invasive Ductal Carcinoma* (*American Cancer Sosiety*, 2013).

d. IBC (*Inflammatory Breast Cancer*)

IBC merupakan jenis kanker payudara invasif yang jarang terjadi, hanya sekitar 1-3 % dari semua kasus kanker payudara. Pada umumnya, kanker jenis ini tidak menimbulkan benjolan atau tumor pada payudara. Akan tetapi, IBC akan membuat payudara terlihat merah dan terasa hangat, kulit payudara menebal dan mengkerut seperti kulit jeruk. Tidak adanya benjolan menjadikan kanker ini cukup sulit dideteksi dengan *mammogram*. IBC cenderung memiliki kesempatan yang lebih tinggi menyebar dibandingkan dengan IDC dan ILC (*American Cancer Sosiety*, 2013).

3. Faktor Risiko Kanker Payudara

Hingga saat ini penyebab utama kanker payudara belum diketahui secara pasti. Namun, terdapat beberapa faktor yang dapat mempengaruhi potensi terjadinya kanker payudara pada seseorang. Dilansir dari *American Cancer Society* faktor-faktor risiko tersebut diantaranya:

a. Jenis kelamin

Wanita memiliki risiko terkena kanker payudara lebih tinggi daripada laki-laki. Hal ini dikarenakan pertumbuhan payudara pada wanita dipengaruhi oleh hormon estrogen dan hormon progesteron

yang dapat meningkatkan pertumbuhan sel kanker payudara. Laki-laki pun juga memiliki risiko kanker payudara akan tetapi 100 kali lebih umum terjadi pada wanita (*American Cancer sosiety*, 2013).

b. Usia

Usia yang semakin tua dapat meningkatkan risiko terkena kanker payudara. Sekitar 1 dari 8 kanker payudara invasif terjadi pada wanita dengan usia kurang dari 45 tahun dan 2 dari 3 kanker payudara invasif ditemukan pada wanita berusia lebih dari 55 tahun (*American Cancer sosiety*, 2013).

c. Genetik

Banyak orang yang terkena kanker payudara invensif karena adanya faktor genetik. Sekitar 5-10 % kasus kanker payudara terjadi karena faktor bawaan gen yang diturunkan dari orang tua. Gen bawaan yang dapat meningkatkan risiko kanker payudara adalah adanya mutasi gen BRCA1 dan BRCA2 (*American Cancer sosiety*, 2013).

d. Riwayat keluarga

Wanita dengan riwayat keluarga penderita kanker payudara memiliki risiko terkena kanker payudara lebih tinggi daripada wanita dengan riwayat keluarga bukan penderita kanker payudara. Namun hal ini dapat dipastikan, seperti yang dilansir pada *American Cancer Society* bahwa kurang dari 15% wanita penderita kanker payudara dengan riwayat keluarga penderita kanker ini

juga. Hal ini berarti bahwa hampir 85% wanita penderita kanker payudara tidak memiliki riwayat kanker pada keluarganya (*American Cancer sosity*, 2013).

e. Riwayat pribadi

Seorang wanita yang memiliki kanker pada salah satu payudaranya dapat meningkatkan risiko kanker pada payudara yang lain maupun bagian lain pada payudara yang sama. Risiko ini akan lebih tinggi terjadi jika kanker payudara terdiagnosis pada wanita muda (*American Cancer sosity*, 2013).

f. Ras dan etnik

Pada dasarnya wanita berkulit putih memiliki risiko kanker payudara lebih rendah daripada wanita yang berkulit gelap. Wanita Afrika-Amerika memiliki risiko kematian akibat kanker payudara. Hal ini dikarenakan wanita Afrika-Amerika memiliki tumor yang lebih agresif. Wanita Asia, Hispanik, dan penduduk asli Amerika memiliki risiko kanker payudara yang lebih kecil (*American Cancer sosity*, 2013).

g. Jaringan densitas payudara

Payudara terdiri dari jaringan lemak, jaringan fibrous dan jaringan glandular. Seseorang dikatakan memiliki jaringan densitas payudara ketika jaringan fibrous dan glandular lebih banyak dari pada jaringan lemak. Wanita dengan jaringan densitas tinggi lebih berisiko terkena kanker payudara (*American Cancer sosity*, 2013).

h. Periode menstruasi

Wanita dengan periode menstruasi yang terlalu lama memiliki risiko kanker payudara yang lebih tinggi. Seorang wanita dikatakan memiliki periode menstruasi yang lama jika mulai mengalami menstruasi dibawah usia 12 tahun dan mendapatkan menopause pada usia lebih dari 55 tahun. Hal ini dikarenakan wanita tersebut lebih lama terpapar hormon estrogen dan progesteron (*American Cancer sosity, 2013*).

i. Radiasi pada payudara

Wanita yang pada masa mudanya pernah melakukan terapi radiasi pada daerah dada untuk perawatan kanker yang lain memiliki risiko tinggi terkena kanker payudara. Jika kemoterapi juga diberikan, akan memungkinkan produksi hormon berhenti sehingga mengurangi risiko kanker payudara. Risiko kanker payudara akan semakin tinggi jika radiasi diberikan selama masa remaja, ketika payudara masih berkembang. Sebaliknya radiasi yang diberikan pada usia lebih dari 40 tidak akan meningkatkan risiko kanker payudara (*American Cancer sosity, 2013*).

j. Memiliki anak/melahirkan

Wanita yang tidak memiliki anak atau yang melahirkan anak pertama diusia lebih dari 30 tahun memiliki risiko kanker payudara lebih tinggi. Sebaliknya, hamil dan memiliki anak pada usia muda

dapat mencegah risiko kanker payudara karena dapat menurunkan siklus menstruasi (*American Cancer sosiety*, 2013).

k. Menyusui

Beberapa penelitian menjelaskan bahwa menyusui dapat menurunkan risiko kanker payudara karena dapat mengurangi siklus menstruasi, terutama jika dilakukan secara kontinu selama $1\frac{1}{2}$ sampai 2 tahun (*American Cancer sosiety*, 2013).

l. Terapi hormon setelah menopause

Terapi hormon estrogen atau sering juga dikombinasikan dengan progesteron digunakan untuk mengurangi gejala-gejala menopause dan membantu dalam pencegahan osteoporosis. Akan tetapi jika terapi hormon ini dilakukan setelah menopause dapat meningkatkan risiko kanker payudara pada wanita (*American Cancer sosiety*, 2013).

m. Mengonsumsi alkohol

Konsumsi alkohol akan mempengaruhi peningkatan risiko kanker payudara. Risiko akan bertambah sesuai dengan banyaknya konsumsi alkohol. Wanita yang mengonsumsi 1 minuman beralkohol perhari memiliki risiko yang lebih kecil. Sebaliknya, wanita yang mengonsumsi 2 sampai 5 minuman perhari akan meningkatkan risiko $1\frac{1}{2}$ kali dibandingkan wanita yang tidak mengonsumsi minuman beralkohol (*American Cancer sosiety*, 2013).

n. Obesitas

Seorang wanita yang mengalami obesitas setelah menopause lebih berisiko terkena kanker payudara. Sebelum menopause indung telur akan banyak memproduksi hormon estrogen dan jarongan lemak akan memproduksi sedikit estrogen. Setelah menopause banyak estrogen yang dihasilkan oleh jaringan lemak. Banyaknya jaringan lemak setelah menopause dapat meningkatkan risiko kanker payudara dengan meningkatnya produksi estrogen (*American Cancer sosiety*, 2013).

o. Penggunaan kontrasepsi

Wanita yang mengonsumsi pil KB memiliki risiko kanker payudara yang lebih tinggi dibandingkan dengan wanita yang tidak pernah menggunakan alat kontrasepsi atau pil KB (*American Cancer sosiety*, 2013).

p. Aktivitas fisik

Seseorang yang rutin melakukan aktivitas fisik seperti olahraga memiliki risiko kanker payudara lebih kecil dibandingkan dengan seseorang tanpa olahraga (*American Cancer sosiety*, 2013).

4. Gejala Kanker Payudara

Pada tahap awal kanker payudara, biasanya kita tidak merasakan sakit atau tidak ada tanda-tandanya sama sekali. Gejala-gejala yang patut diwaspadai berisiko kanker payudara antara lain (Manajemen Modern dan Kesehatan Masyarakat, 2011):

- a. Benjolan atau massa di ketiak
- b. Perubahan ukuran atau bentuk payudara
- c. Keluar cairan yang abnormal dari puting susu (biasanya berdarah atau berwarna kuning sampai hijau, mungkin juga bernanah)
- d. Perubahan pada warna atau tekstur kulit pada payudara, puting susu maupun areola (daerah berwana coklat tua di sekeliling puting susu)
- e. Payudara tampak kemerahan
- f. Kulit di sekitar puting susu bersisik
- g. Puting susu tertarik ke dalam atau terasa gatal
- h. Nyeri payudara atau pembengkakan salah satu payudara .

5. Deteksi Dini Kanker Payudara

Pada umumnya, seseorang yang terdiagnosis kanker payudara tidak menyadari atau merasakan gejala-gejala awal yang timbul dari kanker payudara. Hal tersebut menyebabkan sering terjadinya keterlambatan dalam penanganan kanker payudara. Untuk menghindari keterlambatan dalam penanganan maka perlu dilakukan deteksi dini kanker payudara. Beberapa cara yang dapat dilakukan untuk mendeteksi kanker payudara pada tahap awal diantaranya:

- a. Pemeriksaan Payudara Sendiri (SADARI)

SADARI merupakan salah satu metode yang paling awal untuk mendeteksi kanker payudara. Tujuan dari SADARI adalah untuk mengamati dan merasakan perubahan-perubahan yang mungkin terjadi pada payudara. Hal yang diamati saat melakukan pemeriksaan

payudara sendiri adalah perubahan bentuk, warna, dan ada atau tidaknya benjolan pada payudara. SADARI akan lebih baik jika dilakukan secara rutin pada waktu yang sama setiap bulan. Bagi wanita yang masih mengalami menstruasi, waktu yang paling tepat untuk melakukan SADARI adalah 7-10 hari sesudah 1 hari menstruasi. Berbeda dengan wanita yang sudah menopause, SADARI dapat dilakukan kapan saja, tetapi tetap rutin setiap bulan (Manajemen Modern dan Kesehatan Masyarakat, 2011).

b. *Mammografi*

Mammografi merupakan metode pemeriksaan kanker payudara yang menggunakan sinar X dosis rendah untuk menemukan daerah yang abnormal pada payudara. Bagi wanita yang berusia lebih dari 40 tahun sangat dianjurkan untuk melakukan *mammogram* secara rutin setiap 1-2 tahun. Sedangkan untuk wanita berusia diatas 50 tahun *mammogram* dapat dilakukan satu kali dalam setahun (Manajemen Modern dan Kesehatan Masyarakat, 2011). Hingga saat ini, *mammografi* masih menjadi alat yang paling efektif dalam mendeteksi kanker payudara. *Mammogram* dapat mendeteksi adanya kelainan pada payudara sebelum terasa oleh pasien (Yayasan Kanker Payudara Indonesia, 2013).

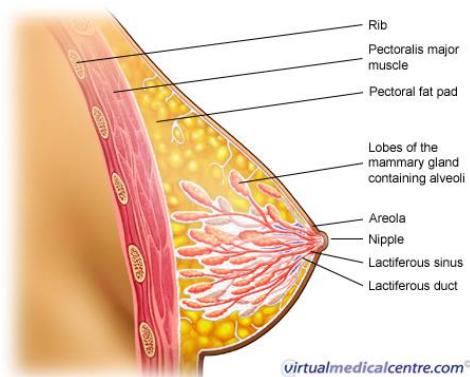
6. Klasifikasi Kanker Payudara

Diagnosis kanker payudara dapat diklasifikasikan menjadi tiga, yaitu payudara normal, tumor (*benign*), dan kanker (*malignant*). Berikut

ini adalah penjelasan dari masing-masing klasifikasi kanker payudara (Stanford Cancer Institute, 2015):

a. Diagnosis normal

Payudara dikatakan normal jika pertumbuhan sel-selnya normal, dimana sel-sel payudara yang tumbuh sama dengan sel-sel payudara yang rusak atau mati.

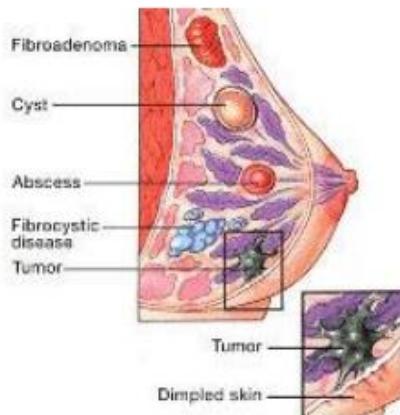


Gambar 2.1. Anatomi Payudara Normal

(<http://www.myvmc.com/anatomy/breast/>, 2016)

b. Diagnosis tumor (*benign*)

Tumor merupakan pertumbuhan sel yang abnormal dimana pembelahan sel pada payudara lebih cepat dibandingkan dengan sel yang mati atau rusak. Akan tetapi, pertumbuhan sel yang cepat ini tidak akan mempengaruhi kerja sistem yang lain dan hanya terjadi pada jaringan payudara.



Gambar 2.2. Anatomi Tumor Payudara

(<http://www.asco.com/>, 2016)

c. Diagnosis kanker (*malignant*)

Kanker merupakan pertumbuhan sel-sel payudara yang mengganas dan tidak normal. Pertumbuhan sel ini mulai merusak jaringan payudara dan mengganggu kerja sistem yang lain. Pembelahan sel kanker telah mengenai limfa dan merusak jaringan payudara.

B. Citra Mammogram

Citra merupakan media informasi yang tersusun atas kombinasi warna. Suatu informasi citra dapat dianalisis dengan cara pengelompokan berdasarkan persamaan pada bentuk dimensi citra atau warna (Herliana, 2012). Secara matematis citra adalah fungsi kontinu dari intensitas cahaya pada bidang dua dimensi $f(x,y)$. Dimana (x,y) adalah koordinat pada bidang dua dimensi dan f adalah intensitas cahaya pada titik (x,y) . Sistem koordinat yang digunakan mengacu pada sistem koordinat kartesius (Munir, 2004).

Citra *mammogram* merupakan hasil pencitraan *mamografi*. Sedangkan *mamografi* adalah hasil pemeriksaan radiologis khusus menggunakan sinar X dosis rendah untuk mengidentifikasi adanya kanker pada jaringan payudara, bahkan sebelum adanya perubahan yang terlihat pada payudara atau benjolan yang dirasakan pasien. *Mammografi* merupakan cara yang paling efektif untuk mengidentifikasi adanya kanker payudara, hal ini disebabkan tingkat akurasi yang mencapai 80%-90% dari semua kasus kanker payudara (Santoso, 2008).

C. Pengolahan Citra

Pengolahan citra merupakan proses pengolahan dan analisis citra yang banyak melibatkan presepsi visual. Proses ini mempunyai ciri data masukan dan informasi keluaran yang berbentuk citra (Santoso, 2008). Pada umumnya, pengolahan awal citra terdiri dari proses konevrsi citra dari format awal RGB ke dalam format *grayscale* (skala keabuan), proses pemotongan citra (*cropping*) dengan skala ukuran yang ditentukan, dan proses konversi citra ke dalam format biner (hitam putih) (Herliana, 2012).

Pengolahan citra merupakan salah satu teknik untuk meningkatkan kualitas citra. Tujuan peningkatan citra ini adalah untuk menonjolkan ciri tertentu dalam citra atau memperbaiki kualitas tampilan citra. Salah satu operasi dalam pengolahan citra yang dapat dilakukan adalah operasi titik. Operasi titik merupakan teknik yang dilakukan untuk memodifikasi *histogram* citra masukan agar sesuai dengan karakteristik yang diharapkan. *Histogram* dari suatu citra adalah grafik yang menggambarkan penyebaran

nilai-nilai intensitas piksel dari suatu citra atau bagian tertentu dari citra. Beberapa teknik operasi pengolahan citra melalui operasi titik adalah *intensity adjustment*, *histogram equalization*, dan *thresholding* (Munir, 2004).

1. *Intensity Adjustment*

Cara kerja *intensity adjustment* adalah dengan melakukan pemetaan linier terhadap nilai intensitas dari *histogram* citra yang lama menjadi nilai intensitas pada *histogram* citra yang baru. Perintah untuk melakukan pemetaan linier tersebut adalah:

```
J = imadjust(I, [low_in; high_in], [low_out; high_out])
```

dimana `low_in` merupakan nilai intensitas yang akan dipetakan sebagai `low_out` dan `high_in` merupakan nilai intensitas yang akan dipetakan sebagai `high_out`.

2. *Histogram Equalization*

Teknik *histogram equalization* merupakan teknik yang bertujuan untuk menghasilkan citra keluaran yang memiliki nilai *histogram* yang relatif sama. Perintah untuk melakukan *histogram equalization* adalah

```
J=imadjust(I).
```

3. *Thresholding*

Teknik *thresholding* atau pengambangan merupakan proses pemisahan piksel-piksel berdasarkan derajat keabuan yang dimilikinya. Nilai intensitas piksel dipetakan ke dua nilai saja yaitu 0 (hitam) untuk derajat keabuan yang lebih kecil dan 1 (putih) untuk derajat keabuan yang lebih besar. Dengan kata lain, proses *thresholding* merupakan

proses pengubahan citra *grayscale* ke citra biner. Perintah untuk melakukan *thresholding* adalah `J=im2bw(I,level)`. Nilai `level` berada pada interval 0 dan 1. (Matlab, *help*).

D. Ekstraksi Fitur

Ekstraksi fitur atau ekstraksi ciri citra dilakukan untuk mendapatkan vektor ciri masing-masing citra. Hasil ekstraksi ini sebagai data yang akan digunakan kemudian untuk proses klasifikasi citra menjadi beberapa kelompok atau kelas yang ditentukan (Herliana, 2012). Ekstraksi fitur berkaitan erat dengan matriks intensitas koakurensi. Usman (2005) mengatakan matriks intensitas ko-akurensi $p(i,j)$ adalah matriks yang menggambarkan frekuensi munculnya pasangan dua piksel dengan intensitas tertentu dalam jarak dan arah tertentu dalam citra. Fitur-fitur yang berkaitan dengan matriks intensitas koakurensi dan digunakan untuk analisis tekstur adalah entropi, energi, kontras, homogenitas, rata-rata, dan standar deviasi (Ahmad, 2005). Pada penelitian ini akan digunakan 10 ekstraksi fitur yang akan dijadikan *input*, dengan menambahkan 4 fitur lagi yaitu korelasi, variansi, skeunes, dan kurtosis. Formula dari masing-masing ekstraksi fitur (Munir, 2004):

1. Kontras

Kontras adalah perbedaan intensitas diantara pixel yang terang dan gelap. Rumus yang digunakan untuk mencari kontras adalah sebagai berikut (Sharma & Mukharje, 2013):

$$Kontras = \sum_i \sum_j (i - j)^2 p(i,j) \quad (2.1)$$

Dimana $p(i,j)$ merupakan pixel pada baris ke- i kolom ke- j .

2. Korelasi

Korelasi *histogram* suatu citra menunjukkan ukuran ketergantungan linier derajat keabuan (*greyscale*) citra sehingga dapat menunjukkan adanya struktur linier dalam citra (Soh & Tsatsoulis, 1999). Rumus untuk menghitung korelasi dari suatu *histogram* citra ditunjukkan pada persamaan berikut.

$$Korelasi = \sum_i \sum_j \frac{\{(ij)p(i,j) - \mu_x \mu_y\}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (2.2)$$

dengan

$p(i,j)$ = piksel baris ke- i kolom ke- j

μ_x = nilai rata-rata elemen kolom pada *histogram* citra

μ_y = nilai rata-rata elemen baris pada *histogram* citra

σ_x = standar deviasi elemen kolom pada *histogram* citra

σ_y = standar deviasi elemen baris pada *histogram* citra

3. Energi

Energi merupakan nilai yang digunakan untuk menunjukkan pixel-pixel suatu gambar homogen. Nilai dari energi bisa bernilai negatif jika minimal dan bernilai positif jika maksimal. Rumus untuk energi sebagai berikut (Pradeep, 2012):

$$Energi = \sum_i \sum_j p^2(i,j) \quad (2.3)$$

dengan $p(i,j)$ menunjukkan piksel baris ke- i kolom ke- j .

4. Homogenitas

Homogenitas merupakan fitur yang berkebalikan dengan kontras. Fitur ini digunakan untuk menghitung kehomogenan variasi intensitas dalam citra. Berikut adalah definisi dari homogenitas. (Sharma & Mukharje, 2013).

$$Homogenitas = \sum_i \sum_j \frac{p(i,j)}{1+|i-j|} \quad (2.4)$$

dengan $p(i,j)$ menunjukkan piksel baris ke- i kolom ke- j .

5. Rata-rata

Rata-rata (*mean*) merupakan ukuran dispersi dari suatu citra. (Haralick, dkk, 1973). Secara matematis rumus rata-rata ditunjukkan oleh persamaan berikut.

$$Rata - rata = \sum_i \sum_j (i,j)p(i,j) \quad (2.5)$$

dengan $p(i,j)$ menunjukkan piksel baris ke- i kolom ke- j .

6. Variansi

Variansi merupakan ukuran statistik yang digunakan untuk mengetahui tingkat keragaman suatu pixel dalam gambar. Nilai variansi pada ekstraksi gambar dengan menghitung kuadrat jarak di sekitar pusat pixel. Rumus variansi sebagai berikut (Pradeep, 2012):

$$Variansi = \sum_i \sum_j (i - \mu)^2 p(i,j) \quad (2.6)$$

dengan $p(i,j)$ menunjukkan piksel baris ke- i kolom ke- j dan μ adalah nilai rata-rata *histogram* citra.

7. Standar Deviasi

Standar Deviasi adalah perhitungan dari akar rata-rata atau *mean* dari nilai pixel keabuan . Standar Deviasi dapat dirumuskan sebagai berikut (Sharma, dkk, 2012):

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (p(i,j) - \mu)^2} \quad (2.7)$$

dengan $p(i,j)$ menunjukkan piksel baris ke- i kolom ke- j dan μ adalah nilai rata-rata *histogram* citra.

8. Skeunes

Fitur skeunes merupakan salah satu fitur ekstraksi yang menunjukkan tingkat kemencengangan relatif kurva *histogram* suatu citra dan didefinisikan sebagai berikut (Srivastava, 1984).

$$Skeunes = \frac{1}{\sigma^3} \sum_i \sum_j (i - \mu)^3 p(i,j) \quad (2.8)$$

dengan

$p(i,j)$ = piksel baris ke- i kolom ke- j

μ = nilai rata-rata *histogram* citra

σ = standar deviasi *histogram* citra

9. Kurtosis

Kurtosis menunjukkan tingkat keruncingan relatif kurva *histogram* dari suatu citra (Pradeep, 2012). Kurtosis didefinisikan sebagai.

$$Kurtosis = \frac{1}{\sigma^4} \sum_i \sum_j (i - \mu)^4 p(i,j) - 3 \quad (2.9)$$

dengan

$p(i,j)$ = piksel baris ke- i kolom ke- j

μ = nilai rata-rata *histogram* citra

σ = standar deviasi *histogram* citra

10. Entropi

Entropi merupakan fitur untuk mengukur ketidakteraturan dari distribusi intensitas dan didefinisikan sebagai berikut (Haralick, dkk, 1973):

$$Entropi = - \sum_i \sum_j p(i,j) \log_2 p(i,j) \quad (2.10)$$

dengan $p(i,j)$ menunjukkan piksel baris ke- i kolom ke- j .

E. *Pseudo-Invers (Invers Semu)*

Pada umumnya, suatu hal yang mungkin untuk mengeneralisasikan invers suatu matriks. Matriks *invertible* maupun *singular*, persegi atau persegi panjang semua memiliki invers umum (Goldberg, 1992). Suatu matriks *invertible* sudah jelas memiliki invers perkalian. Berbeda matriks *singular* yang merupakan suatu matriks yang tidak memiliki invers perkalian karena determinannya bernilai nol.

Teorema 2.1 (Goldberg, 1992):

Jika A adalah suatu matriks berukuran $m \times n$, maka terdapat suatu matriks tunggal A^+ berukuran $n \times m$ yang memenuhi syarat:

- a. $A^+ A A^+ = A^+$
- b. $A A^+ A = A$ (2.11)
- c. $(A^+ A)^T = A^+ A$
- d. $(A A^+)^T = A A^+$

Bukti :

Teorema 2.1 dapat dibuktikan dengan menunjukkan bahwa matriks A^+ adalah tunggal.

Misalkan terdapat suatu matriks A^- yang memenuhi keempat syarat diatas.

Dengan menggunakan persamaan (2.11a) :

$$AA^- = (AA^+A)A^- = (AA^+)(AA^-) \quad (2.12)$$

Karena (AA^+) dan (AA^-) merupakan suatu matriks hermitian, berdasarkan persamaan (2.11c) dan (2.11d) dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} AA^- &= ((AA^+)(AA^-))^T = (AA^-)^T(AA^+)^T = (AA^-)(AA^+) = (AA^-A)A^+ \\ AA^- &= AA^+. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$A^-A = A^+A. \quad (2.14)$$

Berdasarkan persamaan (2.13)

$$\begin{aligned} AA^- &= AA^+ \\ A^-AA^- &= A^-AA^+ \\ A^- &= A^-AA^+. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Berdasarkan persamaan (2.14)

$$\begin{aligned} A^-A &= A^+A \\ A^-AA^+ &= A^+AA^+ \\ A^-AA^+ &= A^+. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Dari persamaan (2.15) dan (2.16) akan diperoleh

$$A^- = A^-AA^+ = A^+ \quad (2.17)$$

persamaan (2.17) menunjukkan bahwa A^+ adalah tunggal.

Asumsikan bahwa terdapat suatu matriks A yang berukuran $m \times n$ dimana $m < n$ dan rank (dimensi dari ruang baris dan ruang kolom) $r < n$. Dekomposisi nilai singular akan memberikan suatu kunci yang dapat digunakan untuk menyusun suatu generalisasi dari invers matriks A . Dekomposisi nilai singular merupakan metode yang melibatkan pemfaktoran A ke dalam hasil kali $U\Sigma V^T$, dimana U adalah matriks ortogonal $m \times m$. V adalah matriks ortonormal $n \times n$, dan Σ adalah matriks $m \times n$ yang semua entri diluar diagonalnya adalah nol (Leon, 1998). Menurut Goldberg (1992) suatu matriks A dikatakan bersifat ortogonal jika memenuhi $A^T A = I$. Pada kasus dimana A adalah matriks taksingular $n \times n$ dengan dekomposisi nilai singular $U\Sigma V^T$, maka inversnya dapat dinyatakan dengan persamaan

$$A^{-1} = U\Sigma^{-1}V^T \quad (2.18)$$

Untuk matriks yang lebih umum lagi, misalkan $A = U\Sigma V^T$ adalah suatu matriks $m \times n$ berpangkat r , maka Σ merupakan matriks $m \times n$ yang berbentuk

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & \sigma_r \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Kemudian dapat didefinisikan persamaan *pseudoinvers* dari matriks A

$$A^+ = V\Sigma^+U^T. \quad (2.20)$$

Dimana Σ^+ adalah matriks $n \times m$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \frac{1}{\sigma_2} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Untuk membuktikan persamaan (2.20) maka harus ditunjukkan bahwa $V\Sigma^+U^T$ memenuhi syarat (2.11b) dan (2.11c).

Akan ditunjukkan $V\Sigma^+U^T$ memenuhi syarat (2.11b)

$$AA^+A = (U\Sigma V^T)(V\Sigma^+U^T)(U\Sigma V^T)$$

$$AA^+A = U(\Sigma\Sigma^+\Sigma)V^T$$

$$AA^+A = U\Sigma V^T = A$$

Akan ditunjukkan $V\Sigma^+U^T$ memenuhi syarat (2.11c)

$$(A^+A)^T = (V\Sigma^+U^T U\Sigma V^T)^T$$

$$(A^+A)^T = V(\Sigma^+\Sigma)^T V^T$$

$$(A^+A)^T = V(\Sigma^+\Sigma)V^T = A^+A$$

Definisi 2.2 (Goldberg, 1992):

Jika A adalah suatu matriks berukuran $m \times n$, maka A^+ merupakan invers matriks tergeneralisir dari matriks A atau yang sering disebut dengan *pseudo-inverse* (invers semu) jika memenuhi syarat:

- a. $A^+AA^+ = A^+$
- b. $AA^+A = A$
- c. $(A^+A)^T = A^+A$
- d. $(AA^+)^T = AA^+$

Adapun langkah-langkah untuk menentukan *pseudo-inverse* dari matriks A sebagai berikut:

1. Menentukan matriks $A^T A$
2. Menghitung nilai eigen dari $A^T A$
3. Menentukan nilai singular berdasarkan nilai eigen yang telah diperoleh
4. Menentukan eigen basis yang bersesuaian untuk setiap nilai eigen
5. Mengubah eigen basis ke dalam basis ortonormal untuk mendapatkan matriks V
6. Menentukan matriks ortogonal U dari eigen basis yang telah dinormalisasi
7. Menentukan pseudo-invers dengan rumus $A^+ = V \Sigma^+ U^T$

Contoh 2.1

Misalkan $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, maka *pseudo-invers* dari matriks A dapat dicari dengan langkah-langkah sebagai berikut:

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Menentukan nilai eigen dari $A^T A$

$$p(\lambda) = |\lambda I - A^T A|$$

$$p(\lambda) = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)[(\lambda - 2)(\lambda - 2) - 4]$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)[\lambda^2 - 4\lambda]$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 4)\lambda$$

$p(\lambda) = 0$ maka diperoleh nilai-nilai eigen $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$, dan $\lambda_3 = 0$.

Dengan demikian nilai singularnya:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{2}.$$

Berdasarkan nilai singular maka dapat didefinisikan matriks $\Sigma^+ =$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sehingga vektor eigen yang bersesuaian dapat ditentukan dengan

$$(\lambda I - A^T A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Berdasarkan persamaan (2.22) untuk $\lambda_1 = 4$ maka vektor eigen yang bersesuaian

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Dengan menguraikan persamaan (2.24) akan diperoleh

$$x_1 = 0$$

$$2x_2 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3, \text{ misalkan } x_3 = t$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Untuk $\lambda_2 = 2$ persamaan (2.22) menjadi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Dengan menguraikan persamaan (2.25) akan diperoleh

$x_1 = t$, $x_2 = 0$, dan $x_3 = 0$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t$$

Untuk $\lambda_3 = 0$ persamaan (2.22) menjadi

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Dengan menguraikan persamaan (2.26) akan diperoleh

$$x_1 = 0$$

$$-2x_2 - 2x_3 = 0 \rightarrow x_2 = -x_3, \text{ misalkan } x_3 = t$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

E_i didefinisikan sebagai eigen basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen. Untuk $i = 1, 2, 3$ maka E_i dapat disajikan dengan:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Kemudian dilakukan normalisasi terhadap eigen basis

$$\|E_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|E_2\| = \sqrt{1^2} = 1$$

$$\|E_3\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Sehingga dapat ditentukan vektor kolom dari matriks V

$$V_1 = \frac{E_1}{\|E_1\|} = \frac{[0 \ 1 \ 1]^T}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \frac{E_2}{\|E_2\|} = \frac{[1 \ 0 \ 0]^T}{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_3 = \frac{E_3}{\|E_3\|} = \frac{[0 \ -1 \ 1]^T}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jika vektor-vektor kolom tersebut disusun akan diperoleh matriks V

$$V = [V_1 \ V_2 \ V_3]$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dapat ditentukan vektor-vektor kolom matriks U , dengan

$$U_i = \frac{1}{\sigma_i} A V_i.$$

$$U_1 = \frac{1}{\sigma_1} A V_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U_2 = \frac{1}{\sigma_2} A V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Susunan matriks U menjadi

$$U = [U_1 \ U_2]$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh matriks Σ^+, V, U maka dapat ditentukan *pseudo-inverse* dari matriks A

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} & 0 \\ 1/2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Contoh 2.2:

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, maka *pseudo-invers* dari matriks A dapat dicari

dengan langkah-langkah sebagai berikut:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Menentukan nilai eigen dari $A^T A$

$$p(\lambda) = |\lambda I - A^T A|$$

$$p(\lambda) = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{matrix} \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 \end{matrix} \right|$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

$p(\lambda) = 0$ maka diperoleh nilai-nilai eigen $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$.

Dengan demikian nilai singularnya:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{3}$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{2}$$

Berdasarkan nilai singular maka dapat didefinisikan matriks $\Sigma^+ =$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga vektor eigen yang bersesuaian dapat ditentukan dengan

$$(\lambda I - A^T A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Berdasarkan persamaan (2.27) untuk $\lambda_1 = 3$ maka vektor eigen yang bersesuaian

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Dengan menguraikan persamaan (2.28) akan diperoleh

$$x_1 = 0 \text{ dan } x_2 = t$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Untuk $\lambda_2 = 2$ persamaan (2.27) menjadi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Dengan menguraikan persamaan (2.29) akan diperoleh

$$x_1 = t \text{ dan } x_2 = 0$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t$$

E_i didefinisikan sebagai eigen basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen. Untuk $i = 1, 2$ maka E_i dapat disajikan dengan:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian dilakukan normalisasi terhadap eigen basis

$$\|E_1\| = \sqrt{1^2} = 1$$

$$\|E_2\| = \sqrt{1^2} = 1$$

Sehingga dapat ditentukan vektor kolom dari matriks V

$$V_1 = \frac{E_1}{\|E_1\|} = \frac{[0 \ 1]^T}{1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \frac{E_2}{\|E_2\|} = \frac{[1 \ 0]^T}{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika vektor-vektor kolom tersebut disusun akan diperoleh matriks V

$$V = [V_1 \ V_2]$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dapat ditentukan vektor-vektor kolom matriks U , dengan

$$U_i = \frac{1}{\sigma_i} AV_i.$$

$$U_1 = \frac{1}{\sigma_1} AV_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U_2 = \frac{1}{\sigma_2} AV_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vektor kolom yang lain (U_3) dari matriks U harus membentuk suatu basis ortonormal dan dapat ditentukan dengan

$$\begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Sederhanakan persamaan (2.30) dengan operasi baris elementer maka akan diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_3, x_2 = -2x_3 \text{ misal } x_3 = t$$

$$U_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t, \text{ karena pada persamaan (2.29) konstanta } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ pada } U_1 \text{ dan}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ pada } U_2 \text{ diabaikan maka } U_3 \text{ harus dikalikan dengan } \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Susunan matriks U menjadi

$$U = [U_1 \ U_2 \ U_3]$$

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$U^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh matriks Σ^+, V, U maka dapat ditentukan *pseudo-inverse* dari matriks A

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Contoh 2.3:

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, maka *pseudo-invers* dari matriks A dapat dicari

dengan langkah-langkah sebagai berikut:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Menentukan nilai eigen dari $A^T A$

$$p(\lambda) = |\lambda I - A^T A|$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \left\| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 & | & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 & | & 0 & \lambda - 1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 & | & 0 & -1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 - (\lambda - 2)$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)[(\lambda - 1)^2 - 1]$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)[\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1]$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 2)\lambda$$

$p(\lambda) = 0$ maka diperoleh nilai-nilai eigen $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$. Dengan

demikian nilai singularnya:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{2}$$

Berdasarkan nilai singular maka dapat didefinisikan matriks $\Sigma^+ =$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga vektor eigen yang bersesuaian dapat ditentukan dengan

$$(\lambda I - A^T A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Berdasarkan persamaan (2.31) untuk $\lambda = 2$ maka vektor eigen yang bersesuaian

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Dengan menguraikan persamaan (2.32) akan diperoleh

$$x_1 = t$$

$$2x_2 - 2x_3 = 0 \rightarrow x_2 = x_3, \text{ misalkan } x_2 = s$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} s$$

Untuk $\lambda = 0$ maka vektor eigen yang bersesuaian

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Dengan menguraikan persamaan (2.33) akan diperoleh

$$x_1 = 0, -x_2 - x_3 = 0 \text{ misal } x_3 = t$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

E_i didefinisikan sebagai eigen basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen. Untuk $i = 1, 2, 3$ maka E_i dapat disajikan dengan:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian dilakukan normalisasi terhadap eigen basis

$$\|E_1\| = \sqrt{1^2} = 1$$

$$\|E_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|E_3\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Sehingga dapat ditentukan vektor kolom dari matriks V

$$V_1 = \frac{E_1}{\|E_1\|} = \frac{[1 \ 0 \ 0]^T}{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \frac{E_2}{\|E_2\|} = \frac{[0 \ 1 \ 1]^T}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_3 = \frac{E_3}{\|E_3\|} = \frac{[0 \ -1 \ 1]^T}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jika vektor-vektor kolom tersebut disusun akan diperoleh matriks V

$$V = [V_1 \ V_2 \ V_3]$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dapat ditentukan vektor-vektor kolom matriks U , dengan

$$U_i = \frac{1}{\sigma_i} AV_i.$$

$$U_1 = \frac{1}{\sigma_1} AV_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U_2 = \frac{1}{\sigma_2} AV_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$U_3 = \frac{1}{\sigma_3} AV_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Susunan matriks U menjadi

$$U = [U_1 \ U_2 \ U_3]$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U^T = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh matriks Σ^+, V, U maka dapat ditentukan *pseudo-inverse* dari matriks A

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 2.4.

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, maka *pseudo-invers* dari matriks A dapat dicari

dengan langkah-langkah sebagai berikut:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Menentukan nilai eigen dari $A^T A$

$$p(\lambda) = |\lambda I - A^T A|$$

$$p(\lambda) = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \lambda - 5 & -4 \\ -4 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \right|$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 5)^2 - 16$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 9$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 9)(\lambda - 1)$$

$p(\lambda) = 0$ maka diperoleh nilai-nilai eigen $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 1$.

Dengan demikian nilai singularnya:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{9} = 3$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1$$

Berdasarkan nilai singular maka dapat didefinisikan matriks $\Sigma^+ = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sehingga vektor eigen yang bersesuaian dapat ditentukan dengan

$$(\lambda I - A^T A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda - 5 & -4 \\ -4 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Berdasarkan persamaan (2.34) untuk $\lambda_1 = 9$ maka vektor eigen yang bersesuaian

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Dengan menguraikan persamaan (2.35) akan diperoleh

$$x_1 = x_2 \text{ dan misalkan } x_2 = t$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Untuk $\lambda_2 = 1$ persamaan (2.34) menjadi

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Dengan menguraikan persamaan (2.36) akan diperoleh

$$x_1 = -x_2 \text{ dan } x_2 = t$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

E_i didefinisikan sebagai eigen basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen. Untuk $i = 1, 2$ maka E_i dapat disajikan dengan:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian dilakukan normalisasi terhadap eigen basis, dapat ditentukan vektor kolom dari matriks V

$$V_1 = \frac{E_1}{\|E_1\|} = \frac{[1 \ 1]^T}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \frac{E_2}{\|E_2\|} = \frac{[-1 \ 1]^T}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Jika vektor-vektor kolom tersebut disusun akan diperoleh matriks V

$$V = [V_1 \ V_2]$$

$$V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dapat ditentukan vektor-vektor kolom matriks U , dengan

$$U_i = \frac{1}{\sigma_i} AV_i.$$

$$U_1 = \frac{1}{\sigma_1} AV_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$U_2 = \frac{1}{\sigma_2} AV_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Susunan matriks U menjadi

$$U = [U_1 \ U_2]$$

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$U^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh matriks Σ^+, V, U maka dapat ditentukan *pseudo-inverse* dari matriks A

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

F. Norma

Norma vektor digunakan untuk mengukur besarnya suatu vektor. Jika \mathbf{v} adalah sebuah vektor di dalam sebuah ruang hasil kali dalam V , maka *panjang atau norma* dari \mathbf{v} diberikan oleh

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \quad (2.37)$$

Dua vektor \mathbf{u} dan \mathbf{v} dikatakan *ortogonal* jika $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ (Leon, 1998).

Definisi 2.3 (Leon, 1998):

Sebuah ruang vektor V dikatakan ruang linear bernorma jika untuk setiap vektor $\mathbf{v} \in V$ dikaitkan dengan sebuah bilangan real $\|\mathbf{v}\|$ yang disebut norma dari \mathbf{v} yang memenuhi:

- (i) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ dengan kesamaan berlaku jika dan hanya jika $\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

- (ii) $\|\alpha v\| = \|\alpha\| \|v\|$ untuk setiap skalar α .
- (iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ untuk semua $v, w \in V$.

Norma pada R^n dapat didefinisikan sebagai

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (2.38)$$

Untuk setiap $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Secara umum norma pada R^n dapat didefinisikan dengan

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p} \quad (2.39)$$

Untuk setiap bilangan real $p \geq 1$.

Contoh 2.5. Misalkan \mathbf{x} adalah vektor $(4, -5, 3)^T$ di R^3 . Maka $\|x\|_1$ dan $\|x\|_2$ dapat dihitung dengan persamaan (2.38) dan (2.39)

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = |4| + |-5| + |3| = 12$$

$$\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2} = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 25 + 9} = 5\sqrt{2}$$

G. Teori Himpunan *Fuzzy*

1. Himpunan *Fuzzy*

Himpunan merupakan suatu kumpulan dari objek-objek yang didefinisikan dengan jelas. Hal ini berarti suatu objek dapat ditentukan dengan pasti termasuk dalam himpunan tersebut atau tidak (Sukirman, 2006). Teori himpunan *fuzzy* atau teori himpunan samar merupakan generalisasi dari teori himpunan tegas (klasik). Pada himpunan tegas, nilai keanggotaan suatu elemen x dalam suatu himpunan H , dinotasikan dengan $\mu_H(x)$ memiliki 2 kemungkinan yaitu bernilai 1 jika x merupakan elemen dari himpunan H atau dapat dinyatakan dengan $x \in H$, dan

x bernilai 0 jika x bukan elemen himpunan A atau $x \notin H$ (Kusumadewi & Hartati, 2010).

Teori himpunan *fuzzy* untuk pertama kali diperkenalkan pada tahun 1965 oleh Lotfi A. Zadeh. Menurut Zimmermann dalam Sri Kusumadewi dan Sri Hartati (2010) himpunan *fuzzy* didefinisikan sebagai:

Definisi 2.4:

Jika X adalah koleksi dari objek-objek yang dinotasikan secara generik oleh x , maka suatu himpunan *fuzzy* \tilde{H} , dalam X adalah suatu himpunan pasangan berurutan:

$$\tilde{H} = \{(x, \mu_{\tilde{H}}(x)) | x \in X\} \quad (2.40)$$

dengan $\mu_{\tilde{H}}(x)$ adalah derajat keanggotaan x di \tilde{H} yang memetakan X ke ruang keanggotaan M yang terletak pada rentang $[0,1]$.

Contoh 2.6. Misalkan suatu himpunan H dinyatakan dengan persamaan:

$$H = \{(normal; 0,9), (tumor; 0,8), (kanker; 0,7)\}$$

Definisi 2.5: (Wang, 1997)

Himpunan *fuzzy* \tilde{H} dengan himpunan semesta X yang kontinu (misal $X =$ bilangan real (R)), maka \tilde{H} dapat dinyatakan dengan

$$\tilde{H} = \int_X \mu_{\tilde{H}}(x)/x \quad (2.41)$$

Persamaan tersebut tidak diintegralkan meskipun pada persamaannya menggunakan tanda integral. Tanda tersebut merepresentasikan hubungan $x \in X$ dan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{H}}(x)$. Apabila himpunan semesta X diskret maka persamaan himpunan *fuzzynya* adalah:

$$\tilde{H} = \sum_X \mu_{\tilde{H}}(x)/x \quad (2.42)$$

Tanda sigma tidak menunjukkan operasi penjumlahan tetapi menunjukkan hubungan $x \in X$ dan fungsi keanggotaan $\mu_H(x)$. (Wang, 1997).

Contoh 2.7. Misalkan suatu himpunan H dinyatakan dengan persamaan:

$$H = \frac{0,9}{normal} + \frac{0,8}{tumor} + \frac{0,7}{kanker}$$

Jika pada himpunan tegas, nilai keanggotaan hanya ada 2, yaitu 0 dan 1, maka pada himpunan *fuzzy* nilai keanggotaan terletak pada interval 0 dan 1. Himpunan *fuzzy* memiliki 2 atribut, yaitu linguistik dan numeris. Linguistik merupakan penamaan suatu grup (variabel) yang mewakili suatu keadaan dengan bahasa sehari-hari, contohnya muda, parubaya, tua. Numeris adalah suatu nilai yang menunjukkan ukuran dari suatu variabel, contohnya 40, 50, 60 (Kusumadewi dan Purnomo, 2013).

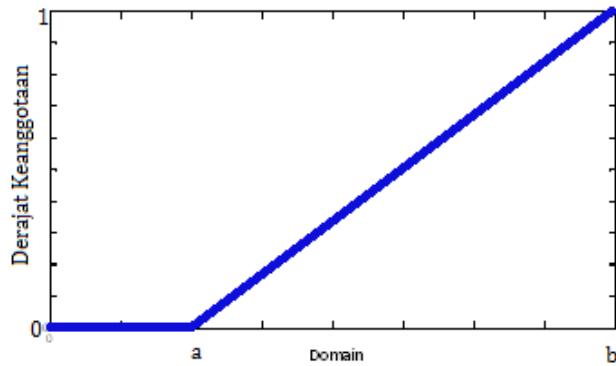
2. Fungsi keanggotaan

Fungsi keanggotaan adalah suatu kurva yang menunjukkan pemetaan titik-titik *input* data ke dalam nilai keanggotaannya atau dapat juga disebut derajat keanggotaan, dimana nilai tersebut berada pada interval 0 dan 1. Salah satu cara yang dapat digunakan untuk mendapatkan nilai keanggotaan adalah dengan pendekatan fungsi. Macam-macam fungsi yang dapat digunakan antara lain (Kusumadewi dan Purnomo, 2013):

a. Representasi linear

Representasi linear adalah bentuk yang paling sederhana dan merupakan representasi yang baik dalam pendekatan fungsi. Pemetaan *input* ke derajat keanggotaannya digambarkan dengan suatu garis

lurus. Terdapat 2 keadaan pada representasi linear. Pertama, representasi linear naik yang berarti kenaikan himpunan dimulai pada nilai domain yang memiliki derajat keanggotaan 0 bergerak ke kanan menuju nilai domain dengan derajat keanggotaan tertinggi yaitu 1.



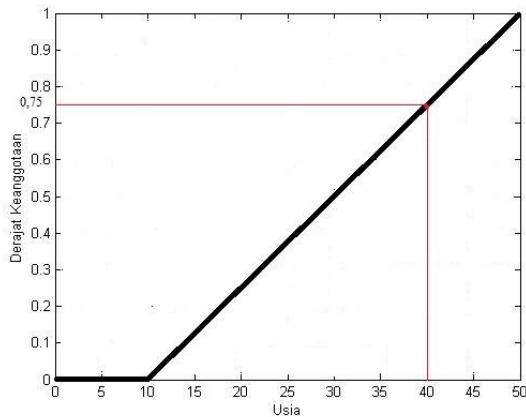
Gambar 2.3. Representasi Linear Naik

Fungsi keanggotaan:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x \geq b \end{cases} \quad (2.43)$$

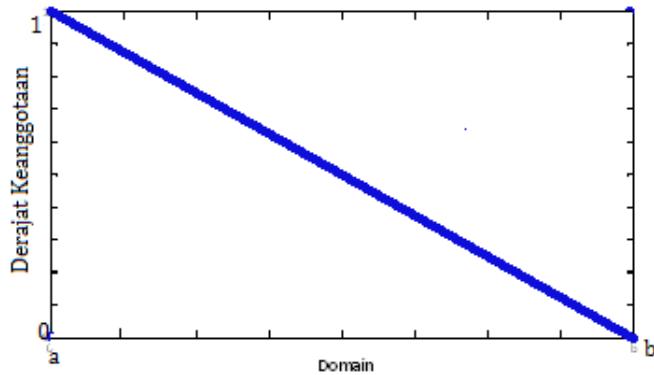
Contoh 2.8. Fungsi keanggotaan untuk himpunan risiko kanker payudara berdasarkan faktor usia terlihat pada Gambar 2.4. Seorang wanita berusia 40 tahun memiliki derajat keanggotaan 0,75 dan dapat dihitung dengan

$$\mu[40] = \frac{x-a}{b-a} = \frac{40-10}{50-10} = \frac{30}{40} = 0,75$$



Gambar 2.4. Himpunan *Fuzzy* Risiko Kanker Payudara

Representasi linear yang kedua adalah representasi turun yang berarti garis lurus dimulai dari nilai domain dengan derajat keanggotaan tertinggi dan turun ke nilai domain dengan derajat keanggotaan terendah.



Gambar 2.5. Representasi Linear Turun

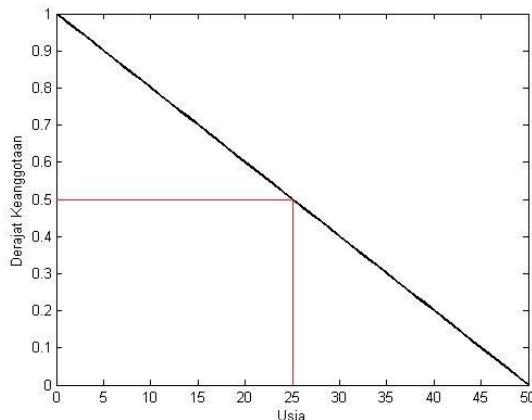
Fungsi keanggotaan:

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{b-x}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x \geq b \end{cases} \quad (2.44)$$

Contoh 2.9. Fungsi keanggotaan untuk himpunan deteksi dini kanker payudara ditunjukan pada Gambar 2.6. Seorang wanita berusia 25

tahun memiliki derajat keanggotaan pada deteksi dini kanker payudara sebesar 0,5.

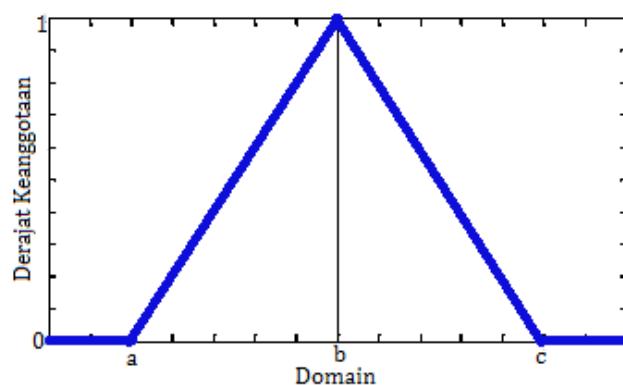
$$\mu[25] = \frac{x - a}{b - a} = \frac{25 - 0}{50 - 0} = \frac{25}{50} = 0,5$$



Gambar 2.6. Himpunan Fuzzy Deteksi Dini Kanker Payudara

b. Representasi Kurva Segitiga

Pada dasarnya kurva segitiga merupakan gabungan dari 2 garis linear, yaitu linear naik dan linear turun .



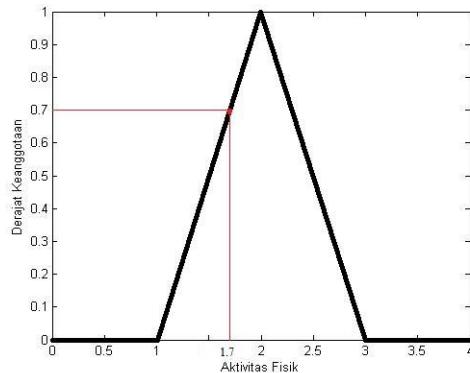
Gambar 2.7. Representasi Kurva Segitiga

Fungsi keanggotaan:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \text{ atau } x \geq c \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \frac{b-x}{c-b} & b \leq x \leq c \end{cases} \quad (2.45)$$

Contoh 2.10. Fungsi keanggotaan himpunan *fuzzy* risiko kanker payudara ditunjukkan pada Gambar 2.8. Seseorang yang tidak melakukan aktivitas fisik 1,7 jam sehari dapat meningkatkan risiko kanker payudara dengan derajat keanggotaan sebesar 0,7.

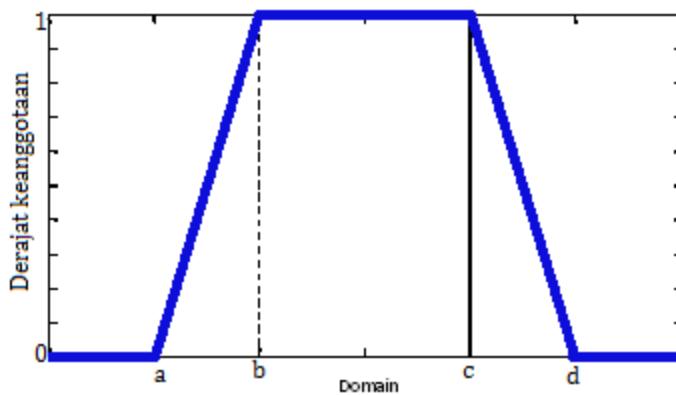
$$\mu[1,7] = \frac{x-a}{b-a} = \frac{1,7-1}{2-1} = 0,7$$



Gambar 2.8. Himpunan *Fuzzy* Risiko Kanker Payudara

c. Representasi Kurva Trapesium

Pada dasarnya kurva trapesium sama seperti kurva segitiga, hanya saja pada kurva trapesium nilai domain yang memiliki derajat keanggotaan 1 tidak hanya 1.

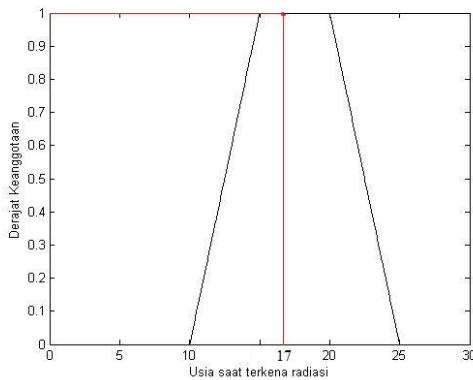


Gambar 2.9. Representasi Kurva Trapesium

Fungsi keanggotaan:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \text{ atau } x \geq d \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b \leq x \leq c \\ \frac{b-x}{c-b} & c \leq x \leq d \end{cases} \quad (2.46)$$

Contoh 2.11. Fungsi keanggotaan himpunan *fuzzy* faktor risiko kanker payudara berdasarkan radiasi pada masa remaja ditunjukan pada Gambar 2.10. Seorang wanita yang pernah mendapatkan terapi radiasi pada usia 17 tahun akan memiliki derajat keanggotaan 1 terhadap risiko kanker payudara.

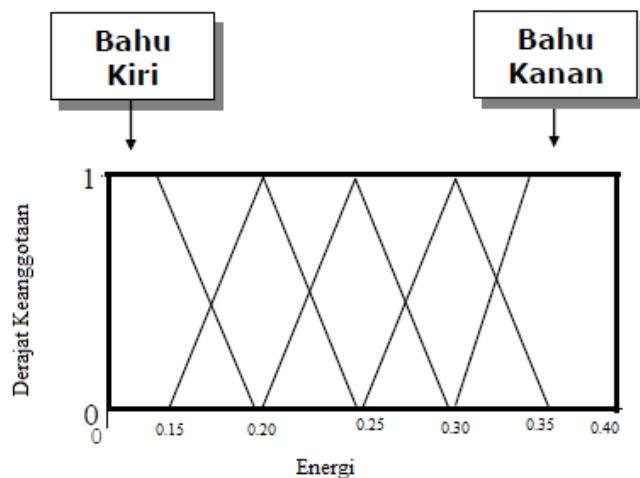


Gambar 2.10. Himpunan Fuzzy Risiko Kanker Payudara

d. Representasi Kurva Bentuk Bahu

Kurva bentuk bahu merupakan gabungan dari kurva segitiga dan kurva trapesium. Daerah yang berada di tengah-tengah suatu variabel yang direpresentasikan dalam bentuk segitiga pada sisi kiri dan kanannya akan naik dan turun. Tetapi terkadang salah satu sisi dari variabel tersebut tidak mengalami perubahan.

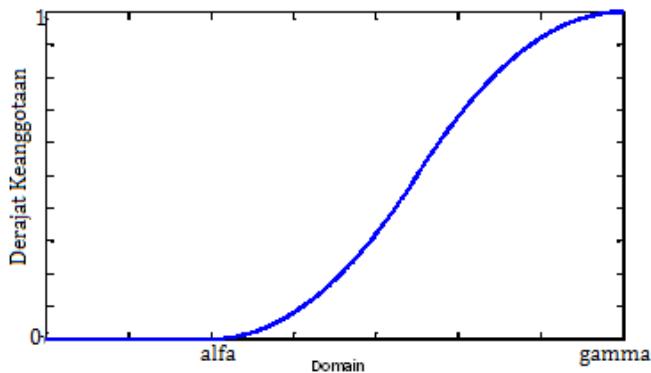
Contoh 2.12. Salah satu faktor yang mempengaruhi diagnosis kanker payudara berdasarkan data citra *mammogram* adalah energi dari citra. Gambar 2.11. menunjukkan bahwa pada interval [0 0,15] dan [0,35 0,40] nilai keanggotannya tetap dan mengalami fluktuasi nilai keanggotaan pada domain antara 0,15 dan 0,35.



Gambar 2.11. Representasi Kurva Bentuk Bahu Energi Citra

e. Representasi Kurva-S

Terdapat 2 macam kurva-S, yaitu kurva pertumbuhan dan kurva penyusutan. Sama halnya dengan kurva linear, kedua kurva tersebut berhubungan dengan kenaikan dan penurunan permukaan. Hal yang membedakan dengan kurva linear adalah pada kurva-S kenaikan dan penurunan permukaan secara tak linear. Kurva-S didefinisikan dengan 3 parameter, yaitu derajat keanggotaan 0 (α), derajat keanggotaan 1 (β), dan titik infleksi atau *crossover* (γ). Titik infleksi merupakan titik yang memiliki domain 50% benar. Kurva-S pertumbuhan bergerak dari sisi paling kiri dengan derajat keanggotaan 0 ke arah kanan dengan derajat keanggotaan 1.



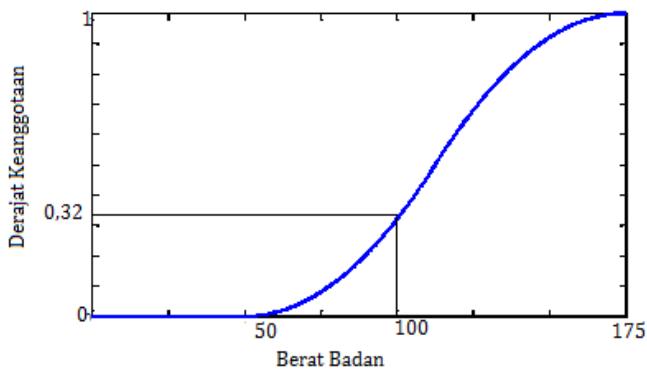
Gambar 2.12. Representasi Kurva-S Pertumbuhan

Fungsi keanggotaan:

$$S(x; \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} 0 & x \leq \alpha \\ 2 \left(\frac{x-\alpha}{\gamma-\alpha} \right)^2 & \alpha < x \leq \frac{\alpha+\gamma}{2} \\ 1 - \left(\frac{\gamma-x}{\gamma-\alpha} \right)^2 & \frac{\alpha+\gamma}{2} < x < \gamma \\ 1 & x \geq \gamma \end{cases} \quad (2.47)$$

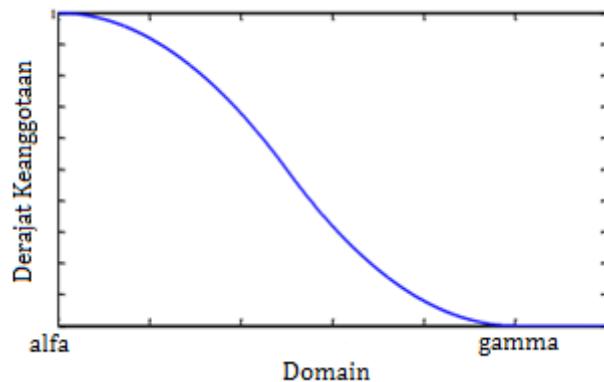
Contoh 2.13. Fungsi keanggotaan untuk himpunan risiko kanker payudara berdasarkan faktor berat badan ditunjukkan pada Gambar 2.13. Seorang wanita yang memiliki kelebihan berat badan (obesitas) hingga 100 kg dapat meningkatkan risiko kanker payudara dengan derajat keanggotaan sebesar 0,32.

$$\pi[100] = 2 \left(\frac{100 - 50}{175 - 50} \right)^2 = 0,32$$



Gambar 2.13. Himpunan Fuzzy Risiko Kanker Payudara

Kurva-S untuk penyusutan akan bergerak dari sisi paling kanan dengan derajat keanggotaan 1 ke sisi paling kiri dengan derajat keanggotaan 0.



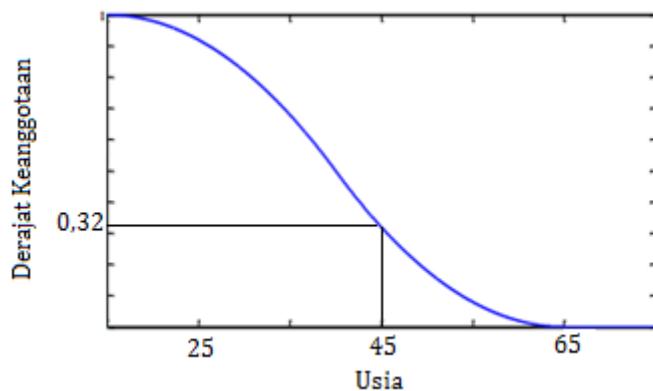
Gambar 2.14. Representasi Kurva-S Penyusutan

Fungsi keanggotaan:

$$S(x: \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} 1 & x \leq \alpha \\ 1 - \left(\frac{x-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2 & \alpha < x \leq \frac{\alpha+\gamma}{2} \\ 2 \left(\frac{\gamma-x}{\gamma-\alpha}\right)^2 & \frac{\alpha+\gamma}{2} < x < \gamma \\ 0 & x \geq \gamma \end{cases} \quad (2.48)$$

Contoh 2.14. Fungsi keanggotaan himpunan deteksi kanker payudara ditunjukkan dengan Gambar 2.15. Seorang wanita yang berusia 45

tahun terlambat melakukan deteksi dini kanker payudara dengan derajat keanggotaan 0,32.



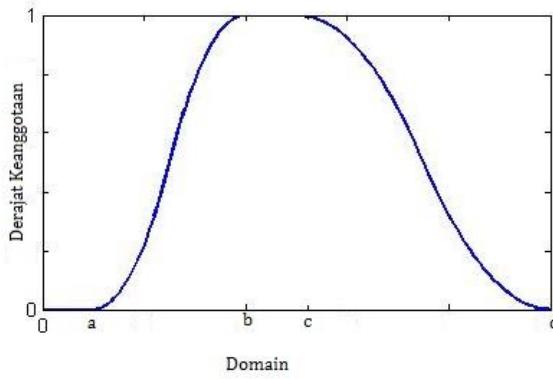
Gambar 2.15. Himpunan Fuzzy Deteksi Dini Kanker Payudara

f. Representasi Kurva Lonceng

Untuk merepresentasikan bilangan *fuzzy* biasanya digunakan kurva berbentuk lonceng. Kurva berbentuk loceng ini terbagi menjadi 3 jenis, yaitu kurva PI, kurva beta, dan kurva Gauss. Perbedaan ketiga kurva tersebut terletak pada gradiennya. Ketiga kurva tersebut adalah sebagai berikut (*Matlab Help*, 2011)

1.) Kurva PI

Kurva PI memiliki 4 parameter, yaitu parameter a dan d pada kaki-kaki kurva, parameter b dan c pada bahu kurva.



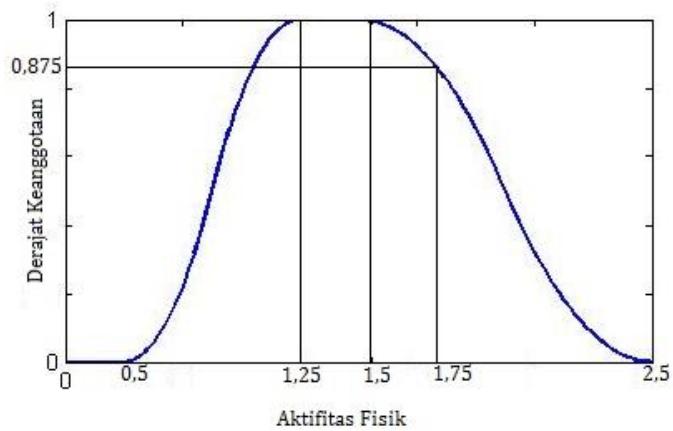
Gambar 2.16. Representasi Kurva PI

Fungsi keanggotaan:

$$\Pi(x: a, b, c, d) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 & a < x \leq \frac{a+b}{2} \\ 1 - 2\left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2 & \frac{a+b}{2} < x < b \\ 1 & b \leq x \leq c \\ 1 - 2\left(\frac{x-c}{d-c}\right)^2 & c < x < \frac{c+b}{2} \\ 2\left(\frac{x-d}{d-c}\right)^2 & \frac{c+b}{2} < x \leq d \\ 0 & x \geq d \end{cases} \quad (2.49)$$

Contoh 2.15. Fungsi keanggotaan himpunan *fuzzy* risiko kanker payudara ditunjukkan pada Gambar 2.17. Berdasarkan Gambar 2.17. tampak bahwa aktivitas fisik yang paling baik dilakukan selama 1,25-1,5 jam perhari. Seorang wanita yang tidak melakukan aktivitas fisik selama 1,75 jam perhari dapat meningkatkan risiko kanker payudara dengan derajat keanggotaan sebesar 0,875.

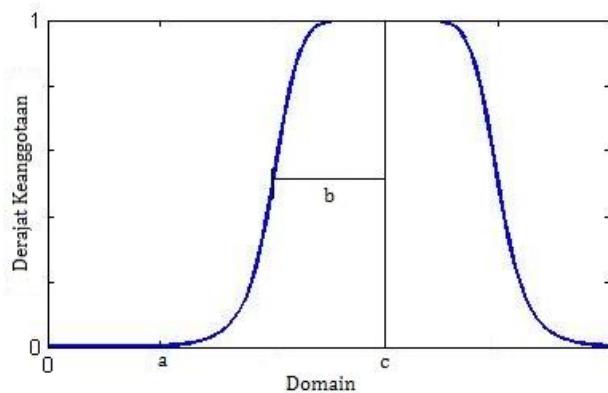
$$\mu[1,75] = 1 - 2\left(\frac{1,75 - 1,5}{2,5 - 1,5}\right)^2 = 1 - 2(0,25)^2 = 0,875$$



Gambar 2.17. Himpunan *Fuzzy* Risiko Kanker Payudara

2.) Kurva Beta

Seperti halnya kurva PI, kurva beta juga berbentuk lonceng namun lebih rapat.



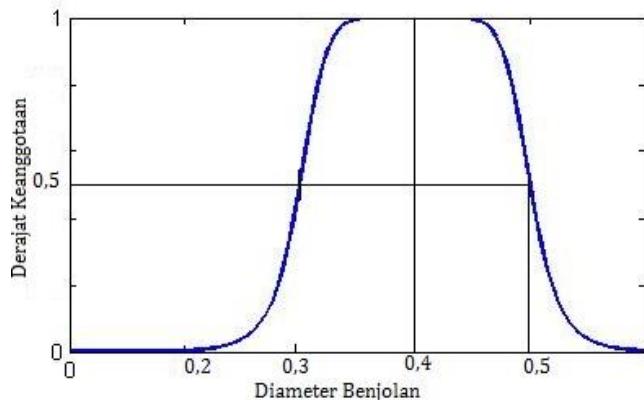
Gambar 2.18. Representasi Kuva Beta

Fungsi keanggotaan:

$$B(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b}} \quad (2.50)$$

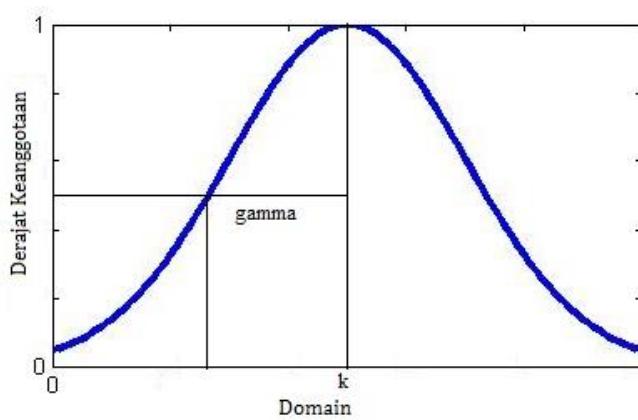
Contoh 2.16. Fungsi keanggotaan himpunan *fuzzy* diagnosis tumor payudara berdasarkan besarnya benjolan (dalam cm)

ditunjukkan pada Gambar 2.19. Seseorang yang memiliki benjolan dengan ukuran diameter 0,5 pada payudara, akan terdiagnosis tumor payudara dengan persentase sebesar 50%.



Gambar 2.19. Himpunan *Fuzzy* Risiko Kanker Payudara
3.) Kurva Gauss

Seperti kurva PI dan kurva beta, kurva gauss pun juga menggunakan 2 parameter, yaitu parameter (γ) untuk menunjukkan nilai domain pada pusat kurva, dan parameter (k) menunjukkan lebar kurva.

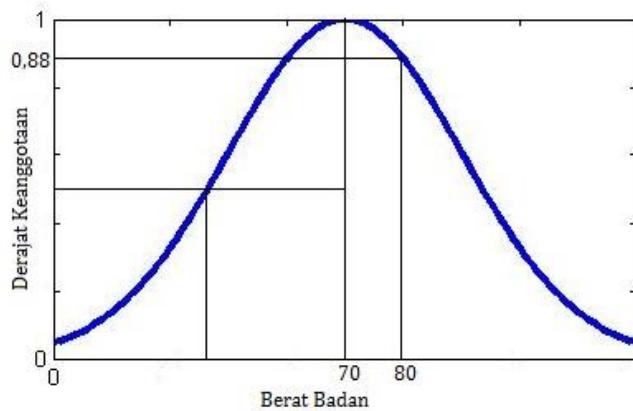


Gambar 2.20. Representasi Kurva Gauss

Fungsi keanggotaan :

$$G(x; k, \gamma) = e^{-\frac{(x-\gamma)^2}{2k^2}} \quad (2.51)$$

Contoh 2.17. Berat badan merupakan salah satu faktor risiko kanker payudara. Fungsi keanggotaan risiko kanker payudara berdasarkan berat badan seseorang ditunjukkan pada Gambar 2.21. Seseorang dengan berat badan 80 kg dapat memiliki risiko terkena kanker payudara sebesar 88%.



Gambar 2.21. Himpunan *Fuzzy* Risiko Kanker Payudara

3. Operasi Himpunan *Fuzzy*

Operasi himpunan *fuzzy* merupakan kombinasi dan modifikasi himpunan *fuzzy*. Nilai keanggotaan yang merupakan hasil dari operasi 2 himpunan sering disebut dengan α -predikat (Sri dan Hari, 2013). Operasi dasar himpunan *fuzzy* ada tiga, yaitu komplemen, gabungan, dan irisan yang masing-masing didefinisikan sebagai berikut (Klir, 1997):

- a. Operasi dasar komplemen

Definisi 2.6:

Diberikan himpunan *fuzzy* pada himpunan universal X , \bar{H} adalah komplemen dari himpunan *fuzzy* H . Untuk setiap $x \in X$, \bar{H} merepresentasikan derajat keanggotaan x yang tidak termasuk dalam H dan \bar{H} didefinisikan sebagai

$$\mu_{\bar{H}}(x) = 1 - \mu_H(x), \forall x \in X \quad (2.52)$$

Contoh 2.18. Misalkan diketahui $\mu_H(x) = 0,75$ dimana H adalah himpunan *fuzzy* seorang wanita terdiagnosis kanker payudara. Komplemen dari H adalah \bar{H} yaitu himpunan *fuzzy* seorang wanita tidak terdiagnosis kanker payudara dengan derajat keanggotaan 0,25.

$$\mu_{\bar{H}}(x) = 1 - \mu_H(x) = 1 - 0,75 = 0,25$$

- b. Operasi dasar gabungan

Definisi 2.7:

Diberikan 2 himpunan *fuzzy* H dan L pada himpunan universal X . Operasi dasar gabungan dari H dan L dinotasikan sebagai $H \cup L$ dan didefinisikan sebagai

$$(H \cup L)(x) = \max[H(x), L(x)], \forall x \in X \quad (2.53)$$

Contoh 2.19. Misalkan H adalah himpunan *fuzzy* risiko kanker payudara berdasarkan usia dan diketahui $\mu_H(x) = 0,75$. L adalah himpunan *fuzzy* risiko kanker payudara berdasarkan berat badan dan $\mu_L(x) = 0,63$. Gabungan dari H dan L adalah $H \cup L$ dengan derajat keanggotaan 0,75.

$$(H \cup L)(x) = \max[0,75,0,63] = 0,75$$

c. Operasi dasar irisan

Definisi 2.8:

Diberikan 2 himpunan *fuzzy* H dan L pada himpunan universal X .

Operasi dasar gabungan dari H dan L dinotasikan sebagai $H \cap L$ dan didefinisikan sebagai

$$(H \cap L)(x) = \min[H(x), L(x)], \forall x \in X \quad (2.54)$$

Contoh 2.20. Misalkan H adalah himpunan *fuzzy* risiko kanker payudara berdasarkan usia dan diketahui $\mu_H(x) = 0,75$. B adalah himpunan *fuzzy* risiko kanker payudara berdasarkan berat badan dan $\mu_L(x) = 0,63$. Irisan dari H dan L adalah $H \cap L$ dengan derajat keanggotaan 0,63.

$$(H \cap L)(x) = \min[0,75,0,63] = 0,63$$

H. Logika *Fuzzy*

Logika *fuzzy* pertama kali diperkenalkan oleh Lotfi A. Zadeh pada tahun 1965. Dasar pemikiran dari logika *fuzzy* adalah teori himpunan *fuzzy*. Pada teori himpunan *fuzzy*, peranan derajat keanggotaan sebagai penentu keberadaan elemen dalam suatu himpunan sangatlah penting. Nilai keanggotaan atau derajat keanggotaan menjadi ciri utama dari penalaran dengan logika *fuzzy* tersebut (Kusumadewi dan Purnomo, 2013).

Alasan digunakannya logika *fuzzy* antara lain :

1. Konsep logika *fuzzy* mudah dimengerti dengan konsep matematis sebagai dasar dari penalaran *fuzzy* yang sangat sederhana dan mudah dimengerti.

2. Logika *fuzzy* sangat fleksibel, artinya mampu beradaptasi dengan perubahan-perubahan, dan ketidakpastian yang menyertai permasalahan.
3. Logika *fuzzy* memiliki toleransi terhadap data-data yang tidak tepat. Jika diberikan sekelompok data yang cukup homogen, dan kemudian ada beberapa data yang “eksklusif”, maka logika *fuzzy* memiliki kemampuan untuk menangani data eksklusif.
4. Logika *fuzzy* mampu memodelkan fungsi-fungsi nonlinear yang sangat kompleks.
5. Logika *fuzzy* dapat mengaplikasikan pengalaman-pengalaman para ahli secara langsung tanpa harus melalui proses pelatihan. Dalam hal ini, sering dikenal dengan nama *Fuzzy Expert System* menjadi bagian terpenting.
6. Logika *fuzzy* dapat bekerjasama dengan teknik-teknik kendali secara konvensional. Hal ini umumnya terjadi pada aplikasi di bidang teknik mesin maupun teknik elektro.
7. Logika *fuzzy* didasarkan pada bahasa alami. Logika *fuzzy* menggunakan bahasa sehari-hari sehingga mudah dimengerti.

I. Sistem *Fuzzy*

Sistem *fuzzy* dapat diartikan sebagai deskripsi linguistik (aturan *fuzzy* Jika-Maka) yang lengkap tentang proses yang dapat dikombinasikan kedalam 35 sistem (Wang, 1997). Berikut adalah tahap dalam membangun suatu sistem *fuzzy*:

1. Fuzzifikasi

Fuzzifikasi didefinisikan sebagai pemetaan dari himpunan tegas ke himpunan *fuzzy*. Kriteria yang harus dipenuhi pada proses *fuzzifikasi* adalah semua anggota pada himpunan tegas harus termuat dalam himpunan *fuzzy*, tidak terdapat gangguan pada *input* sistem *fuzzy*, dan himpunan *fuzzy* yang digunakan harus bisa mempermudah perhitungan pada sistem *fuzzy* (Wang, 1997).

2. Membangun Aturan *fuzzy*

Aturan *fuzzy* merupakan otak dari suatu sistem *fuzzy*. Dengan aturan *fuzzy*, pengetahuan dan pengalaman manusia dapat direpresentasikan menggunakan bahasa alami yang dikenal dengan aturan Jika-Maka (Wang, 1997). Secara lebih sederhana Sri Kusumadewi dan Hari Punomo (2013) mendefinisikan aturan *fuzzy* sebagai

$$IF x_1 \text{ is } A_1^k \text{ and } x_2 \text{ is } A_2^k \dots \text{ THEN } y^k \text{ is } B^k \quad (2.55)$$

untuk $k = 1, 2, \dots, n$, A_1^k dan A_2^k menyatakan himpunan *fuzzy* pasangan antecedent ke- k , dan B^k adalah himpunan *fuzzy* konsekuensi ke- k .

3. Inferensi *fuzzy*

Inferensi *fuzzy* merupakan tahap evaluasi pada aturan *fuzzy*. Tahap evaluasi dilakukan berdasarkan penalaran dengan menggunakan *input fuzzy* dan aturan *fuzzy* sehingga diperoleh *output* berupa himpunan *fuzzy*.

a. Metode Tsukamoto

Metode Tsukamoto merupakan perluasan dari penalaran monoton.

Pada metode tsukamoto, setiap konsekuensi pada aturan yang berbentuk IF-Then harus direpresentasikan dengan suatu himpunan *fuzzy* dengan fungsi keanggotaan yang monoton. *Output* hasil inferensi dari masing-masing aturan diberikan secara tegas (klasik) berdasarkan α -predikat.

Hasil akhirnya diperoleh dengan menggunakan rata-rata terbobot (Kusumadewi dan Purnomo, 2013).

b. Metode Mamdani

Metode mamdani sering dikenal sebagai metode Max-Min. Metode ini diperkenalkan oleh Ebrahim Mamdani pada tahun 1975. Metode ini merupakan metode yang paling sederhana dan paling sering digunakan untuk penelitian dibandingkan metode yang lain. *Input* dan *output* pada metode mamdani berupa himpunan *fuzzy* (Kusumadewi, 2002).

c. Metode Sugeno

Metode sugeno untuk pertama kali diperkenalkan oleh Takagi-Sugeno Kang pada tahun 1985. Sistem inferensi *fuzzy* menggunakan metode sugeno memiliki karakteristik yaitu konsekuensi bukan berupa himpunan *fuzzy*, namun merupakan suatu persamaan linear dengan variabel-variabel yang sesuai dengan variabel *input*nya. Ada 2 model metode sugeno:

1.) Metode Sugeno Orde-0

Bentuk umum model *fuzzy* Sugeno order nol adalah:

$$IF (x_1 \text{ is } A_{i1}) \circ \dots \circ (x_n \text{ is } A_{in}) THEN y = k \quad (2.56)$$

dengan x_i adalah *input* data ke- i , A_i adalah himpunan *fuzzy* ke- i sebagai anteseden, \circ adalah operator *fuzzy* (seperti AND atau OR), dan k adalah suatu konstanta (tegas) sebagai konsekuensi.

2.) Metode Sugeno Orde-1

Pada penelitian ini, sistem *fuzzy* yang digunakan adalah model *fuzzy* Sugeno orde satu. Bentuk aturan *fuzzy* pada model *fuzzy* Sugeno order satu adalah:

$$IF (x_1 \text{ is } A_{i1}) \circ \dots \circ (x_n \text{ is } A_{in}) THEN y_i = b_{i0} + b_{i1}x_1 + \dots + b_{in}x_n \quad (2.57)$$

dengan x_i adalah *input* data ke- i , A_{ij} adalah himpunan *fuzzy* pada *input* ke- j , \circ adalah operator *fuzzy* (seperti AND atau OR), y_i adalah *output* aturan *fuzzy* ke- i . Variabel b_{ij} merupakan parameter real yang akan dicari, dengan $i = 1, 2, \dots, L$ dimana L adalah banyaknya aturan *fuzzy* ke- i .

4. Defuzzifikasi

Defuzzifikasi adalah proses perubahan suatu himpunan *fuzzy* yang diperoleh dari komposisi aturan-aturan *fuzzy* ke dalam suatu bilangan pada domain himpunan *fuzzy* tersebut. Sehingga jika diberikan suatu himpunan *fuzzy* dalam *range* tertentu, maka harus dapat diambil suatu nilai tegas tertentu sebagai *output* (Kusumadewi dan Purnomo, 2013). Pada metode sugeno, proses *defuzzifikasi* dilakukan dengan perhitungan *Weight*

Average. Langkah-langkah perhitungan dengan *weight average* adalah (Abadi & Wutsqa, 2013):

$$y = \frac{\sum_{i=1}^L y_i(\mu_{i1}(x_1)\mu_{i2}(x_2)\dots\mu_{in}(x_n))}{\sum_{i=1}^L \mu_{i1}(x_1)\mu_{i2}(x_2)\dots\mu_{in}(x_n)} \quad (2.58)$$

Persamaan (2.58) dapat juga dinyatakan dengan

$$y = \sum_{i=1}^L w_i(b_{i0} + b_{i1}x_1 + \dots + b_{in}x_n) \quad (2.59)$$

Dimana

$$w_i = \frac{\mu_{i1}(x_1)\mu_{i2}(x_2)\dots\mu_{in}(x_n)}{\sum_{i=1}^L \mu_{i1}(x_1)\mu_{i2}(x_2)\dots\mu_{in}(x_n)} \quad (2.60)$$

Selanjutnya akan dibentuk sebuah model dari (2.59) yang meminimumkan fungsi J

$$J = \sum_{k=1}^N (d(k) - y(k))^2 = (d - Xb)^T(d - Xb) \quad (2.61)$$

dengan $d(k)$ adalah *output* yang sebenarnya untuk pasangan data ke-k yang direpresentasikan dengan matriks $N \times 1$ (N adalah banyaknya data)

$d = \begin{bmatrix} d(1) \\ d(2) \\ \vdots \\ d(N) \end{bmatrix}$, dan $y(k)$ adalah *output* model sugeno untuk pasangan data

ke-k. X adalah matriks dengan ukuran $N \times [(n+1) \times L]$ yang dapat dilihat dalam persamaan (2.62). Sedangkan b adalah parameter real yang

akan dicari yang direpresentasikan dengan $b = \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{11} \\ \vdots \\ b_{1n} \\ \vdots \\ b_{L0} \\ b_{L1} \\ \vdots \\ b_{Ln} \end{bmatrix}$, suatu matriks berukuran $[(n+1) \times L] \times 1$.

$$X = \begin{bmatrix} w_1(1) & w_1(1)x_1(1) & \cdots & w_1(1)x_n(1) & \cdots & w_L(1) & \cdots & w_L(1)x_n(1) \\ w_1(2) & w_1(2)x_1(2) & \cdots & w_1(2)x_n(2) & \cdots & w_L(2) & \cdots & w_L(2)x_n(2) \\ \vdots & \vdots \\ w_1(N) & w_1(N)x_1(N) & \cdots & w_1(N)x_n(N) & \cdots & w_L(N) & \cdots & w_L(N)x_n(N) \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Fungsi J akan mencapai nilai minimum jika

$$d - Xb = 0 \text{ atau } Xb = d \quad (2.63)$$

Berdasarkan persamaan (2.61), $y(k) = Xb$ yang merupakan *output* dari sistem. Sedangkan d adalah *output* yang sebenarnya. Untuk dapat mengoptimalkan sistem maka *output* dari sistem harus sama dengan *output* yang sebenarnya. Dengan kata lain $d - Xb = 0$ atau $d = Xb$ seperti pada persamaan (2.63).

Persamaan (2.63) merupakan suatu sistem persamaan linear. Untuk menyelesaikan persamaan tersebut dapat dilakukan dengan *Pseudo-Invers*. Kemudian untuk mencari matriks b , ditentukan invers semu (*pseudo-invers*) dari matriks X yaitu

$$X^+ = V\Sigma^+U^T \quad (2.64)$$

Teorema 2.9 (Leon, 1998):

Jika X adalah matriks $m \times n$ dengan rank $r < n$ dan dengan dekomposisi nilai singular $U\Sigma V^T$, maka vektor

$$b = X^+d = V\Sigma^+U^T d \quad (2.65)$$

meminimalkan $\|d - Xb\|_2^2$.

Bukti:

Misalkan d adalah sebuah vektor dalam R^n dan didefiniskan

$c = U^T d = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ dan $y = V^T b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dimana c_1 dan y_1 adalah vektor-

vektor dalam R^r . Karena U^T adalah ortogonal, maka

$$\begin{aligned} \|d - Xb\|_2^2 &= \|U^T(d - Xb)\|_2^2 \\ &= \|U^T d - U^T U \Sigma V^T b\|_2^2 \\ &= \|U^T d - \Sigma(V^T b)\|_2^2 \\ &= \|c - \Sigma y\|_2^2 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|_2^2 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} c_1 - \Sigma_1 y_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\|_2^2 \\ &= \|c_1 - \Sigma_1 y_1\|_2^2 + \|c_2\|_2^2 \end{aligned}$$

Karena c_2 adalah vektor yang bebas linear terhadap b , maka $\|d - Xb\|_2^2$

akan minimal jika dan hanya jika $\|c_1 - \Sigma_1 y_1\|_2^2 = 0$.

Karena $y = V^T b$ maka b adalah penyelesaian terhadap masalah kuadrat

terkecil jika dan hanya jika $b = Vy$, di mana y adalah vektor berbentuk

$$\begin{pmatrix} \Sigma_1^{-1} c_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Sehingga dapat diperoleh

$$b = Vy$$

$$\begin{aligned}
&= V \begin{pmatrix} \Sigma_1^{-1} c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= V \begin{pmatrix} \Sigma_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\
&= V \Sigma^+ U^T d \\
b &= X^+ d
\end{aligned}$$

adalah suatu penyelesaian. Jika \mathbf{z} adalah sembarang penyelesaian lainnya,

maka \mathbf{z} harus berbentuk $Vy = V \begin{pmatrix} \Sigma_1^{-1} c_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dimana $y_2 \neq 0$. Selanjutnya ini akan menyebabkan

$$\|z\|^2 = \|y\|^2 = \|\Sigma_1^{-1} c_1\|^2 + \|y\|^2 > \|\Sigma_1^{-1} c_1\|^2 = \|b\|^2$$

Maka $b = X^+ d$ merupakan solusi terdekat yang dapat meminimalkan $\|d - Xb\|_2^2$.

Contoh 2.21. Misalkan terdapat matriks $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $d = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ dan

diketahui *pseudo-invers* matriks X adalah $X^+ = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$, maka

dapat dihitung matriks $b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ dengan persamaan (2.63)

$$Xb = d$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian dari persamaan tersebut dapat dihitung menggunakan *pseudo-invers* seperti pada persamaan (2.65)

$$b = X^+ d$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Sehingga diperoleh penyelesaian $b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, penyelesaian ini benar jika memenuhi persamaan (2.63)

$$Xb = d$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Tampak bahwa nilai d benar, sehingga penyelesaian yang diperoleh benar yaitu $b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

J. Hasil Klasifikasi

Tingkat ketepatan hasil klasifikasi suatu penelitian dapat ditentukan dengan menghitung akurasi, sensitivitas, dan spesifikasi yang merupakan ukuran statistik kinerja hasil klasifikasi. Salah satu contoh hasil klasifikasi kanker payudara seperti terlihat pada Tabel 2.1. (Sharma & Mukharje, 2013):

Tabel 2.1. Hasil Klasifikasi Kanker Payudara

Test	Disease		Total
	Present	Absent	
Positive	True Positive	False Positive	TP + FP
Negative	True Negative	False Negative	TN + FN
Total	TP + TN	FP + FN	TP + TN + FP + FN

Keterangan :

True Positive (TP) berarti pasien memiliki penyakit kanker payudara dan hasil klasifikasi tepat.

True Negative (TN) berarti pasien tidak memiliki penyakit kanker payudara tetapi hasil klasifikasi tepat.

False Negative (FN) berarti pasien memiliki kanker payudara tetapi hasil klasifikasi tidak tepat.

False Positive (FP) berarti pasien tidak memiliki kanker payudara dan hasil klasifikasi tidak tepat.

K. Pengujian Sistem

1. Akurasi

Pengujian sistem dilakukan untuk mengetahui kesesuaian diagnosis dengan hasil yang diinginkan. Pengujian sistem dapat dilakukan dengan menghitung nilai akurasi. Akurasi adalah kemampuan tes untuk mengidentifikasi hasil yang positif maupun hasil yang negatif. Rumus yang digunakan untuk menghitung akurasi adalah

$$\text{akurasi} = \frac{\text{jumlah data yang benar}}{\text{jumlah data seluruhnya}} \times 100\% \quad (2.66)$$

2. Sensitivitas

Sensitivitas adalah kemampuan tes untuk mengidentifikasi hasil positif yang tepat dari suatu penelitian (Wong dan Lim, 2011). Rumus yang digunakan untuk menghitung sensitivitas adalah (Sharma & Mukharjee, 2013):

$$\text{sensitivitas} = \frac{TP}{TP+FN} \times 100\% \quad (2.67)$$

3. Spesifikasi

Spesifikasi adalah kemampuan tes untuk mengidentifikasi hasil negatif yang tepat dari suatu penelitian (Wong dan Lim, 2011). Rumus yang

digunakan untuk menghitung spesifikasi adalah (Sharma & Mukharje, 2013):

$$\text{spesifikasi} = \frac{TN}{TN+FP} \times 100\% \quad (2.68)$$

L. Penelitian-Penelitian Terdahulu

Dewasa ini telah banyak penelitian mengenai kanker payudara yang dikaitkan dengan berbagai bidang ilmu. Salah satu bidang ilmu yang sering digunakan dalam penelitian kanker payudara adalah bidang ilmu matematika. Salah satu fokus kajian dari penelitian adalah deteksi dan diagnosis kanker payudara dengan citra *mammogram* yang diterapkan pada sistem *fuzzy*.

Gerald Schaefer, Michal Zavisek dan Tomoharu Nakashima pada tahun 2009 melakukan penelitian yang bertujuan untuk mendiagnosis kanker payudara menggunakan metode klasifikasi *fuzzy* berdasarkan data termogram. Penelitian tersebut menggunakan 146 data termogram yang terdiri dari 29 data kanker (*malignant*) dan 117 data tumor (*benign*). *Input* yang digunakan adalah hasil ekstraksi citra termogram, sedangkan *output*-nya diklasifikasikan menjadi dua yaitu kanker (*malignant*) dan tumor (*benign*). Fungsi keanggotaan yang digunakan adalah fungsi keanggotaan kurva segitiga. Hasil keakuriasan sistem ini mencapai 80%.

Pada tahun berikutnya Ali Keles dan Ayturk Keles (2013) melakukan penelitian yang bertujuan untuk mendiagnosis kanker payudara menggunakan metode klasifikasi *neuro-fuzzy* yang disebut dengan NEFCLASS. Penelitian ini menggunakan 9 aturan yang dibangun oleh 3 *input* yaitu *Breast Imaging Reporting and Data System* (BI-RADS), bentuk benjolan, dan ukuran

benjolan. Nilai prediksi positif yang diperoleh dari 9 aturan tersebut adalah 75% dan prediksi negatifnya 93%.

Hossein Ghayoumi Zadeh, Omid Pakdelazar, Javad Haddadnia, Gholamali Rezai-Rad, dan Mohammad Mohammad-Zadeh (2012) melakukan penelitian untuk mendeteksi kanker payudara dengan mengkombinasikan breast thermography dengan metode Complementary Learning *Fuzzy Neural Network* (CLFNN) dan dibangun dengan gambar *infrared*. Dalam penelitian ini digunakan 200 data pasien dimana 15 pasien terdiagnosis kanker payudara dengan *mammogram*. *Input* yang digunakan ada 8, yaitu usia, ukuran payudara, pola suhu tubuh, rata-rata, variansi, skeunes, kurtosis, dan entropi sedangkan *outputnya* adalah *benign* dan *malignant*. Penelitian ini menghasilkan sensitivitas sebesar 93% dan spesifikasi 97%.

Pada tahun 2013 Alshala A. Shleeg dan Ismail M. Ellabib melakukan penelitian yang bertujuan untuk mendiagnosis risiko kanker payudara yang dikembangkan dengan sistem inferensi *fuzzy*. Model yang digunakan dalam penelitian ini adalah sistem inferensi *fuzzy* mamdani dan sugeno. *Input* yang digunakan ada 2 yaitu usia dan ukuran tumor, sedangkan *outputnya* adalah risiko kanker payudara. Pada penelitian ini disimpulkan bahwa kedua metode tersebut memiliki cara kerja yang hampir sama, tetapi sistem inferensi *fuzzy* sugeno dapat memberikan hasil yang lebih baik dan halus. Selain itu, sistem inferensi *fuzzy* sugeno juga dapat dikombinasikan dengan *neural network* dan algoritma genetik atau teknik pengoptimalan yang lain.

Pada tahun 2014, Mei Mutlimah melakukan penelitian untuk mendiagnosis kanker payudara dengan bantuan logika *fuzzy*. Penelitian ini menggunakan citra *mammogram* yang dipotong kemudian dilakukan proses ekstraksi hingga mendapatkan 10 informasi yang digunakan sebagai *input*. Sepuluh *input* tersebut yaitu *contrast*, *correlation*, *energy*, *homogeneity*, *mean*, *variance*, *standar deviation*, *skewness*, *kurtosis* dan *entropy*. Pembentukan aturan dari penelitian ini dilakukan dengan inferensi mamdani. *Output* yang dihasilkan adalah nilai tegas yang dapat dikategorikan menjadi normal, tumor (*benign*), kanker (*malignant*). Keakurasaan yang dihasilkan pada penelitian ini adalah 96,67% untuk data latih sedangkan keakurasaan untuk data uji sebesar 85%.

Abir Alharbi dan Fairouz Tchier pada tahun 2015 melakukan penelitian tentang diagnosis kanker payudara. Penelitian tersebut bertujuan untuk menciptakan suatu sistem komputer yang akan membantu para medis dalam deteksi dini kanker payudara. Sistem tersebut merupakan gabungan dari sistem *fuzzy* dan algoritma genetik. Penelitian ini menggunakan 9 variabel yaitu ketebalan gumpalan, keseragaman ukuran sel, keseragaman bentuk sel, adhesi marginal, ukuran sel epitel tunggal, inti telanjang, kromatin hambar, kenormalan *nukleolus*, dan mitosis. Setiap variabel terdiri dari 2 *input* yaitu *low* dan *high*. *Output* dari sistem ini adalah diagnosis kanker payudara yaitu *benign* dan *malignant*.

Pada tahun yang sama, Kurrotul A'yun melakukan penelitian yang bertujuan untuk mendiagnosis kanker dengan sistem *fuzzy* mamdani yang

diimplementasikan dengan program GUI (*Graphical User Interface*). Penelitian ini merupakan penelitian lanjutan dari Mei Mutlimah (2014). Data yang digunakan adalah 120 data citra *mammogram* yang telah dioperasi titik, data tersebut terbagi menjadi 96 data latih (*training*) dan 24 data uji (*testing*). Penelitian ini menggunakan 96 aturan *fuzzy* yang dibangun oleh 10 *input* dan 3 *output*. *Inputnya* yaitu kontras, korelasi, energi, homogenitas, rata-rata, variansi, standar deviasi, skeunes, kurtosis, dan entropi. Sedangkan *outputnya* yaitu diagnosis normal, tumor (*benign*), dan kanker (*malignant*). Akurasi yang diperoleh dari penelitian ini adalah 96,875% pada data latih dan 91,67% pada data uji.

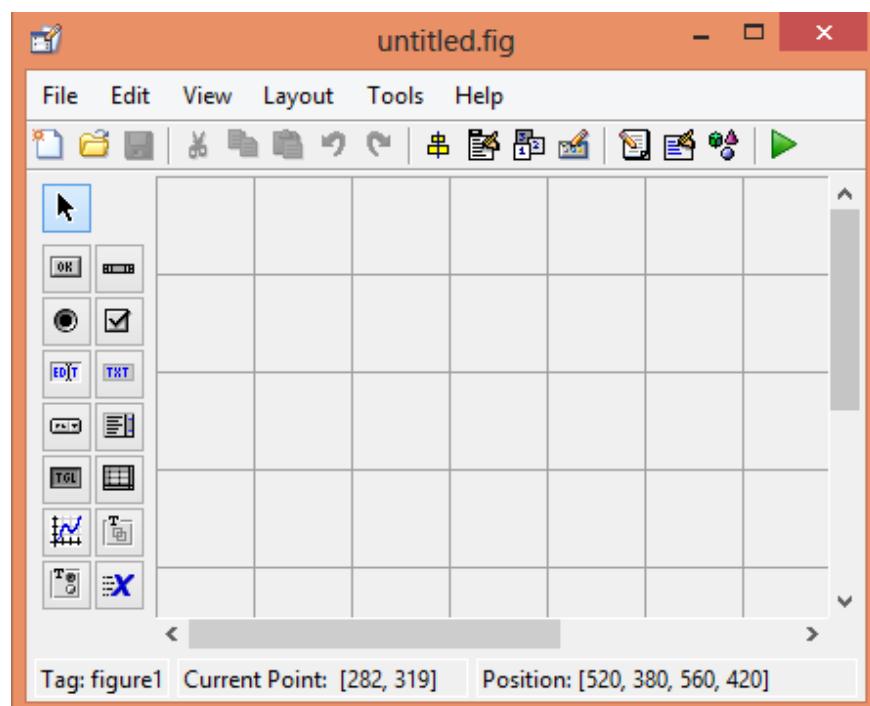
M. GUI (*Graphical User Interface*)

Matlab merupakan salah satu perangkat lunak dengan bahasa pemrograman tingkat tinggi yang dapat digunakan untuk komputasi, visualisasi, dan pemrograman. Pemrograman pada Matlab sering digunakan untuk berbagai pengembangan aplikasi (<http://mathworks.com>, 2015). Pada dasarnya terdapat 3 cara yang dapat dilakukan oleh pengguna dalam mengoperasikan Matlab, yaitu melalui *command window*, menggunakan *scripts* dan *function*, dan melalui GUI (Harley & Loftus, 2000).

GUI merupakan pengembangan aplikasi yang berbasis grafis. GUIDE merupakan perangkat dari Matlab yang dapat digunakan untuk membangun tampilan GUI menjadi lebih mudah dan cepat (The Mathworks Inc, 1996). GUI pada Matlab memiliki beberapa keunggulan dibandingkan dengan program yang lain, diantaranya (Teuinsuka, 2009):

1. Banyak digunakan dan sesuai untuk aplikasi-aplikasi berorientasi sains
2. Mempunyai fungsi *built-in* sehingga tidak mengharuskan pengguna membuat perintah sendiri
3. Ukuran file (gambar dan M-file) tidak terlalu besar
4. Kemampuan grafis cukup baik.

Untuk memulai GUI dapat dilakukan dengan mengetik perintah `>> guide` pada *command window* kemudian memilih *Blank GUI* sehingga akan muncul tampilan awal GUI



Gambar 2.22. Tampilan Awal GUI (*Blank GUI*)