T – 8

Model Biaya Garansi Satu Dimensi Polis FRW (*Non-Renewing Free Replacement Warranty)*

Studi Data Sekunder tentang Penggantian Klep Mesin

Eldaberti Greselda, Leopoldus Ricky Sasongko, Tundjung Mahatma.

Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Kristen Satya Wacana
elisabeth_greselda@yahoo.com

Abstrak—Untuk menjamin kehandalan produk, langkah yang diambil produsen produk manufaktur adalah melalui garansi. Makalah ini membahas bagaimana memperoleh model dan estimasi biaya garansi satu dimensi polis *non-renewing free replacement warranty* (polis FRW) dengan strategi penggantian. Model biaya garansi yang dibahas melibatkan distribusi kegagalan parametrik atau non-parametrik yang ditentukan melalui algoritma penentuan distribusi kegagalan pada model pembaruan (*renewal*). Metode untuk estimasi biaya garansi yang diusulkan dalam makalah ini adalah *Second Mean Value Theorem for Integrals* (SMVTI) termodifikasi dengan perubahan peubah. Data yang digunakan adalah data sekunder tentang penggantian klep mesin diesel. Melalui algoritma penentuan distribusi kegagalan, didapati data tersebut mengikuti distribusi kegagalan parametrik yaitu distribusi gamma. Selanjutnya estimasi biaya garansi diperoleh berdasarkan model pembaruan yang melibatkan distribusi gamma**.**

Kata kunci: Garansi, Model Pembaruan, Polis FRW, SMVTI, Strategi Penggantian

I. PENDAHULUAN

Perhatian konsumen saat membeli suatu produk manufaktur ada pada kehandalan produk. Produk yang dibeli diharapkan mampu berfungsi dengan baik dan tidak mengalami kegagalan untuk selang waktu tertentu. Kegagalan produk dapat terjadi akibat ketidakmampuan suatu komponen atau item pada produk untuk bekerja sesuai fungsinya. Kegagalan produk dapat menyebabkan perasaan tidak nyaman atau puas maupun kerugian (ekonomi, nyawa, dsb) pada konsumen. Langkah yang dapat diambil produsen manufaktur untuk menjamin kepuasan konsumen terhadap kehandalan produknya adalah melalui garansi.

Garansi (*Warranty*) merupakan suatu kontrak antara produsen dan konsumen, yang mewajibkan produsen untuk memberikan kompensasi (berupa perbaikan, penggantian, atau pengembalian uang) kepada konsumen terhadap kegagalan-kegagalan (satu/lebih) komponen atau item pada produk yang terjadi selama masa garansi yang ditentukan sejak transaksi jual-beli produk [1]. Garansi memberikan proteksi kepada konsumen maupun produsen. Bagi konsumen, garansi merupakan jaminan mutu dan kinerja (*performances*) produk apabila tidak sesuai dengan yang dijanjikan produsen. Sedangkan bagi produsen, garansi memberikan batasan klaim konsumen yang tidak valid, contoh : klaim kerusakan produk akibat penggunaan yang salah oleh konsumen.

Salah satu polis garansi adalah polis *non-renewing free replacement warranty* (sering disebut polis FRW). Polis FRW mewajibkan produsen melakukan perbaikan atau penggantian komponen produk yang mengalami kegagalan tanpa pungutan biaya dari konsumen. Apabila terjadi klaim akibat kegagalan komponen, setelah dilakukan pembetulan atau pemulihan (*rectification*) pada komponen yang gagal, masa garansi tidak diperbarui atau dengan kata lain masa garansi berakhir tetap seperti yang ditentukan di dalam kontrak garansi. Saat komponen produk gagal pada masa garansi, kinerja produk dapat dipulihkan melalui perbaikan atau penggantian komponen *repairable* yang gagal. Apabila kegagalan produk terjadi pada komponen *non-repairable*, kinerja produk hanya dapat dipulihkan melalui penggantian (*replacement*).

Pengadaan garansi menyebabkan tambahan biaya (disebut biaya garansi) bagi produsen, yang melekat pada harga jual produk yang ditawarkan produsen ke konsumen. Biaya garansi sangat bergantung pada jenis polis dan strategi yang diterapkan pada produk.

Dalam beberapa penelitian, model biaya garansi yang sering dibahas adalah model yang melibatkan distribusi kegagalan parametrik. Baik [2, 3] memberikan model biaya garansi polis FRW strategi perbaikan minimum dan penggantian melibatkan distribusi kegagalan Weibull. Blischke, dkk. [4, 5], juga membahas hal yang sama untuk contoh penggunaan model biaya garansi polis FRW melibatkan distribusi kegagalan Weibull dan Eksponensial.

Data garansi yang dimiliki produsen atau perusahaan manufaktur bersifat rahasia. Hal ini menyebabkan para analis data yang tidak berkepentingan langsung dengan perusahaan mengalami kesulitan untuk mendapatkan data tersebut. Terkadang para analis data hanya memperoleh sedikit data. Imbasnya, data kurang bagus dalam memberikan informasi yang cukup apabila dimodelkan menggunakan model yang melibatkan distribusi parametrik. Oleh karena itu, kajian model yang melibatkan distribusi non-parametrik sebagai distribusi kegagalan dari data perlu diperhatikan.

Biaya garansi sangat dipengaruhi oleh ekspektasi banyak kegagalan produk pada masa garansi. Beberapa penelitian membahas tentang penghitungan ekspektasi banyak kegagalan produk bergaransi polis FRW strategi penggantian yang diperoleh dari persamaan integral pembaruan (*renewal integral equations*). Beberapa metode numerik diusulkan untuk menghitung persamaan integral pembaruan satu dimensi antara lain metode Riemann-Stieljies diusulkan oleh Min Xie [2] dan *Second Mean Value Theorem for Integrals* (SMVTI) diusulkan oleh Maghsoodloo dan Helvaci [6]. Sasongko [1] memodifikasi metode pada [6] dengan melakukan perubahan peubah untuk kasus polis FRW dua dimensi strategi penggantian.

Makalah ini membahas bagaimana memperoleh model dan estimasi biaya garansi satu dimensi polis FRW dengan strategi penggantian. Model biaya garansi yang dibahas melibatkan distribusi kegagalan parametrik atau non-parametrik. Metode untuk estimasi biaya garansi yang diusulkan dalam makalah ini adalah SMVTI termodifikasi, dengan perubahan peubah.

Data yang dibahas dalam makalah ini adalah data penggantian klep mesin diesel yang diperoleh dari [5]. Klep mesin adalah cincin yang dipasang di permukaan yang bersentuhan dengan kepala seker dan selalu menerima benturan serta gas pembakaran yang sangat panas sehingga sering terjadi kegagalan atau kerusakan klep mesin. Apabila klep mesin rusak, efek kerusakannya juga berimbas pada mesin hingga dapat menyebabkan mesin tidak dapat bekerja. Hal inilah yang menyebabkan klep mesin harus sering dicek, diganti, dan membutuhkan garansi.

Asumsi pada makalah ini meliputi besar biaya per klaim yang tetap sehingga model biaya garansi hanya dipengaruhi oleh ekspektasi banyak kegagalan komponen produk bergaransi. Asumsi lain adalah persediaan komponen jumlahnya tak terbatas, komponen-komponen identik dan saling bebas, tidak ada perubahan merek/*brand* komponen, semua klaim tentang kegagalan komponen produk dilaporkan langsung dan valid, serta waktu penggantian dilakukan sangat singkat sehingga dapat diabaikan. Beberapa asumsi lainnya ada di dalam model biaya garansi yang dijelaskan pada bagian II.

Dua hal yang menjadi tujuan makalah ini adalah perolehan model biaya garansi satu dimensi polis FRW strategi penggantian yang melibatkan distribusi kegagalan parametrik atau non-parametrik dan estimasi biaya garansi dari model tersebut menggunakan metode SMVTI termodifikasi dengan perubahan peubah, berdasarkan data tentang penggantian klep mesin diesel yang diperoleh dari [5].

Diharapkan makalah ini menjadi informasi tentang model biaya garansi dan sebagai bahan pertimbangan mengenai kebijakan produsen klep mesin diesel di masa yang akan datang. Bagi teknisi (*engineer*) klep mesin diesel, penelitian ini dapat menjadi informasi tentang evaluasi kehandalan klep mesin diesel hasil desainnya. Sedangkan bagi pengamat atau analis data garansi, penelitian ini dapat memberikan informasi berupa cara menganalisis sedikit data garansi menggunakan distribusi parametrik atau non-parametrik.

II. METODE PENELITIAN

2.1. Model Umum Biaya Garansi

Terlebih dahulu diberikan notasi-notasi pada model umum biaya garansi yaitu

S : p.a. (peubah acak) total biaya kompensasi yang dikeluarkan produsen untuk suatu komponen produk bergaransi dengan polis tertentu,

N : p.a. banyak kegagalan suatu komponen produk bergaransi dalam masa garansi tertentu,

C_i : p.a. besar biaya kompensasi yang diberikan atas klaim kegagalan ke-i suatu komponen produk bergaransi.

Peubah S didefinisikan sebagai

$$S = \sum_{i=0}^{N} C_i = C_1 + C_2 + \cdots + C_N \tag{1}$$

Ekspektasi biaya garansi $E[S]$ dan variansinya $var[S]$ dapat diperoleh dengan asumsi-asumsi kebebasan yang dikenakan pada (1) menurut [7] yaitu :

a. Bersyarat di $N = n$; $C_1, C_2, \dots, C_n$ adalah p.a. identik dan saling bebas dengan suatu peubah C,
b. Bersyarat di $N = n$, distribusi peluang peubah acak $C_1, C_2, \dots, C_n$ tidak bergantung n,
c. Distribusi peluang N tidak bergantung pada sembarang nilai $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \dots, \mathrm{C}_\mathrm{n}$.

Berdasarkan [5, 7], ekspektasi biaya garansi dan variansinya adalah

$$E[S] = E[N]E[C] \tag{2}$$

$$var[S] = E[N]var[C] + var[N](E[C])^2 \tag{3}$$

Fokus model berada pada persamaan (2). Untuk kasus komponen *non-repairable* dengan asumsi-asumsi dan batasan pada bagian I serta asumsi efek inflasi diabaikan, maka $E[C]$ konstan atau $E[C] = c_s$, sehingga persamaan (2) menjadi

$$E[S] = c_s E[N] \tag{4}$$

dengan c_s adalah biaya yang dikeluarkan produsen untuk mengganti komponen yang gagal dengan komponen baru.

Hal menarik selanjutnya adalah bagaimana formulasi $E[N]$ untuk kasus komponen *non-repairable*. Peubah acak N adalah fungsi terhadap waktu atau N adalah proses hitung satu dimensi dan perolehan formulasi $E[N]$ melibatkan proses stokastik. Persamaan (4) menunjukkan bahwa model biaya garansi dipengaruhi oleh ekspektasi banyak kegagalan.

2.2. Memodelkan Kegagalan Pertama (Modelling First Failure)

Notasi peubah-peubah acak yang digunakan untuk memodelkan kegagalan komponen adalah :

X_n : p.a. kontinu tak-negatif yang menyatakan umur komponen saat terjadi kegagalan ke- n,
T_n : p.a. kontinu tak-negatif yang menyatakan antar umur komponen saat kegagalan ke- $(\mathrm{n}-1)$ hingga ke- n dimana $T_n = X_n - X_{n-1}, n = 1,2,3, \dots$ dengan $X_0 = 0$,
$N(t,s)$: proses hitung satu dimensi atau peubah acak yang menyatakan banyak kegagalan komponen pada interval umur $[t,s)$. Untuk interval $[0,t)$, penulisan $N(0,t) = N(t)$ dimaksudkan agar lebih singkat.

Peubah acak $T_1 = X_1$ memiliki fungsi distribusi kegagalan

$$F(t) = \Pr[T_1 \le t] \tag{5}$$

Fungsi *survival* atau fungsi kehandalan/realibitas yang menyatakan peluang komponen belum pernah gagal hingga umur t didefinisikan oleh

$$R(t) = \bar{F}(t) = \Pr[T_1 > t] = 1 - \Pr[T_1 \le t] = 1 - F(t) \tag{6}$$

Fungsi *hazard* menginterpretasikan laju kegagalan komponen pertama kali. Fungsi *hazard* menyatakan laju kegagalan komponen pada interval $[t, t + \Delta t)$ bersyarat belum pernah terjadi kegagalan hingga umur t. Fungsi *hazard* dinotasikan $h(t)$ dan didefinisikan oleh

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Pr[t < T_1 < t + \Delta t \mid T_1 > t]}{\Delta t} = \frac{1}{R(t)} \frac{dF(t)}{dt} \tag{7}$$

2.3. Memodelkan Kegagalan-Kegagalan dari Waktu ke Waktu (Modelling Failures Over Time) Kasus Komponen Non-Repairable [1]

Hubungan ketiga peubah acak X_n, T_n, dan $N(t)$ ada pada himpunan waktu yang saling ekuivalen yaitu

$$\{t \mid N(t) \ge n\} \equiv \{t \mid X_n \le t\} \equiv \left\{t \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} T_i \le t\right\} \tag{8}$$

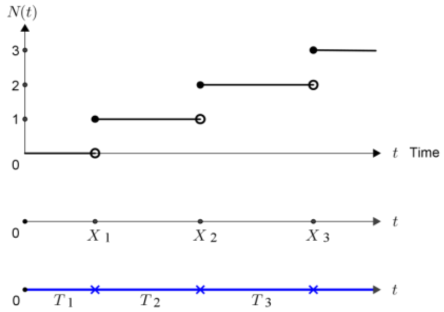
Ilustrasi persamaan (8) pada Gambar 1.

Melalui persamaan (8), peluang $N(t) = n$ diperoleh dari

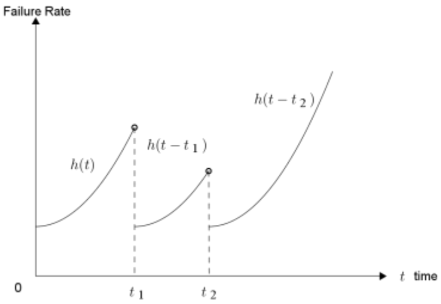
$$\Pr[N(t) = n] = \Pr[N(t) \geq n] - \Pr[N(t) \geq n + 1] \tag{9a}$$

$$\Pr[N(t) = n] = \Pr\left[\sum_{i=1}^{n} T_i \leq t\right] - \Pr\left[\sum_{i=1}^{n+1} T_i \leq t\right] \tag{9b}$$

Untuk kasus komponen *non-repairable*, laju kegagalan setelah kegagalan ke-n serupa saat laju kegagalan komponen sejak pertama kali digunakan, seperti pada ilustrasi Gambar 2.



GAMBAR 1. HUBUNGAN PEUBAH-PEUBAH PADA PROSES TITIK SATU DIMENSI



GAMBAR 2. CONTOH GRAFIK LAJU KEGAGALAN STRATEGI PENGGANTIAN

Gambar 2 menunjukkan bahwa $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ berdistribusi identik dan saling bebas atau **i.i.d** dengan $F(t)$ pada (5), sehingga $\sum_{i=1}^{n} T_i \sim F^{(n)}(t)$ dimana $F^{(n)}(t)$ adalah *n-fold convolution* "dari dan dengan" $F(t)$ sendiri. Dengan demikian (9b) menjadi

$$\Pr[N(t) = n] = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t) \tag{10}$$

Selanjutnya, ekspektasi banyak kegagalan komponen pada interval $[0, t)$ diperoleh dari

$$E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} n\Pr[N(t) = n] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t) \tag{11}$$

Berdasarkan [1], persamaan (11) dapat disederhanakan menjadi

$$E[N(t)] = M(t) \tag{12}$$

dimana $M(t)$ disebut persamaan integral pembaruan yang didefinisikan sebagai

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-u)dF(u) \tag{13a}$$

atau

$$M(t) = F(t) + \int_0^t F(t-u)dM(u) \tag{13b}$$

Ekspektasi banyak kegagalan komponen produk pada masa garansi $[0, t)$ diperoleh dari persamaan (12). Fokus makalah ini adalah menghitung $M(t)$ pada persamaan (13a) menggunakan metode SMVTI termodifikasi dengan perubahan peubah yang dijelaskan pada Lampiran A. Ekspektasi biaya garansi pada (4) diperoleh setelah menghitung ekspektasi banyak kegagalan pada persamaan (12).

2.4. Fungsi Distribusi Kegagalan pada Model Pembaruan

Persamaan $M(t)$ (juga disebut model pembaruan) pada (13a) melibatkan fungsi distribusi kegagalan $F(t)$ seperti pada (5). Fungsi distribusi kegagalan tersebut dapat menggunakan keluarga distribusi parametrik untuk peubah acak kontinu tak-negatif seperti distribusi Eksponensial, Gamma, Beta, Weibull, dan sejenisnya, (distribusi Normal, *t-student*, dan sejenisnya tidak dapat digunakan). Oleh karena berbagai macam keluarga distribusi dapat digunakan, maka perlu estimasi $F(t)$ dari data klaim garansi, dinotasikan $\hat{F}(t; \mathbf{\Omega})$ dimana $\mathbf{\Omega}$ adalah (dapat lebih dari satu) vektor parameter. Estimasi $\hat{F}(t; \mathbf{\Omega})$ dapat dilakukan melalui uji *goodness of fit* yaitu uji Kolmogorov-Smirnov (*KS test*, Lampiran C) dengan terlebih dahulu mengestimasi $\boldsymbol{\Omega}$ melalui metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE, Lampiran B).

Data klaim garansi yang sedikit sering menyebabkan estimasi $\hat{F}(t;\boldsymbol{\Omega})$ menjadi kurang bagus (*KS test* dapat menerima atau menolak semua hipotesis keluarga distribusi kegagalan parametrik, estimasi parameter melalui MLE tidak akurat). Oleh karena itu, penggunaan distribusi yang terbentuk dari sedikit data dapat menjadi solusi yaitu distribusi kegagalan non-parametrik seperti distribusi empirik atau Kernel [8] di Lampiran E.

2.5. Data

Data yang digunakan merupakan data sekunder yang diperoleh dari [5]. Data tersebut merupakan data tentang penggantian klep mesin diesel dari pengamatan 41 mesin diesel (nama produk dirahasiakan) masing-masing dalam interval waktu pengamatan tertentu. Dari 41 mesin diesel, 24 mesin mengalami satu hingga empat kali kegagalan pada klep mesin dan segera dilakukan penggantian klep mesin yang gagal saat umur mesin seperti tertampil pada Tabel 1 (asumsi lama waktu dari klep gagal hingga klep selesai diganti baru di bengkel diabaikan).

TABEL 1. DATA UMUR MESIN DIESEL SAAT PENGGANTIAN KLEP

ID Mesin	**Lama Waktu Pengamatan (hari)**	**Data Umur Mesin saat Penggantian Klep (hari)**			
		X_1	X_2	X_3	X_4
251	761				
252	759				
327	667	98			
328	667	326	653	653	
329	665				
330	667	84			
331	663	87			
389	653	646			
390	653	92			
391	651				
392	650	258	328	377	621
393	648	61	539		
394	644	254	276	298	640
395	642	76	538		
396	641	635			
397	649	349	404	561	
398	631				
399	596				
400	614	120	479		
401	582	323	449		
402	589	139	139		
403	593				
404	589	573			
405	606	165	408	604	
406	594	249			
407	613	344	497		
408	595	265	587		
409	389	166	206	348	
410	601				
411	601	410	581		
412	611				
413	608				
414	587				
415	603	367			
416	585	202	563	570	
417	587				
418	578				
419	578				
420	586				
421	585				
422	482				

TABEL 2. DATA ANTAR UMUR KEGAGALAN MESIN DIESEL SAAT PENGGANTIAN KLEP

ID Mesin	**Data Antar Umur Kegagalan Klep (Tahun)**			
	T_1	T_2	T_3	T_4
327	0.2685			
328	0.8932	0.8959	0.0000	
330	0.2301			
331	0.2384			
389	1.7699			
390	0.2521			
392	0.7068	0.1918	0.1342	0.6685
393	0.1671	1.3096		
394	0.6959	0.0603	0.0603	0.9370
395	0.2082	1.2658		
396	1.7397			
397	0.9562	0.1507	0.4301	
400	0.3288	0.9836		
401	0.8849	0.3452		
402	0.3808	0.0000		
404	1.5699			
405	0.4521	0.6658	0.5370	
406	0.6822			
407	0.9425	0.4192		
408	0.7260	0.8822		
409	0.4548	0.1096	0.3890	
411	1.1233	0.4685		

415	1.0055			
416	0.5534	0.9890	0.0192	
Banyak Data	$\boldsymbol{n_1 = 24}$	$\boldsymbol{n_2 = 15}$	$\boldsymbol{n_3 = 7}$	$\boldsymbol{n_4 = 2}$

Tampak pada Tabel 1, keseluruhan data umur mesin saat kegagalan klep ada di dalam interval waktu pengamatan, sehingga data tersebut termasuk dalam kategori *complete data*. Selanjutnya, data diolah untuk memperoleh data antar umur kegagalan $T_n = X_n - X_{n-1}, n = 1,2,3,4,$ dengan $X_0 = 0$ dalam satuan tahun (dibagi 365 hari). Data antar umur kegagalan klep tertampil pada Tabel 2.

2.6. Algoritma Penentuan Distribusi Kegagalan

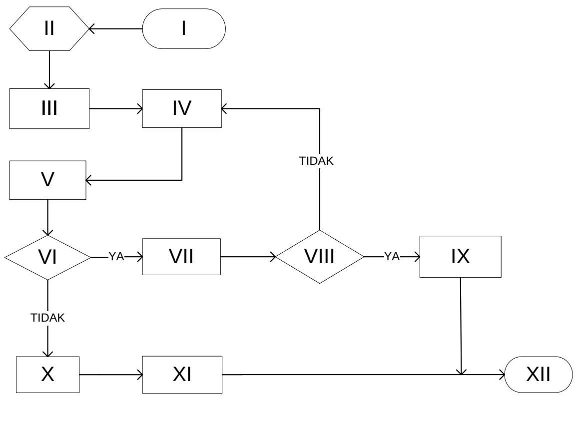
Setelah data antar umur mesin kegagalan klep diperoleh (Tabel 2), algoritma untuk menentukan distribusi kegagalan dari data perlu dirancang. Algoritma yang diusulkan adalah algoritma yang memperhatikan kemungkinan data tidak mengikuti distribusi parametrik yang dikenal sehingga, apabila hal tersebut terjadi, model yang melibatkan distribusi non-parametrik adalah solusi untuk data tersebut.

Pada Tabel 2, data antar umur kegagalan T_2 mungkin saja mengikuti distribusi kegagalan yang berbeda dengan T_1 karena kondisi mesin setelah kegagalan klep pertama kali berbeda dengan kondisi mesin saat klep mesin belum pernah gagal, begitu juga untuk T_2 dan T_3, dst. Sehingga, analisis data dilakukan secara bertahap dimana $T_1 \cup T_2$ (gabungan T_1 dan T_2) diuji apakah masih mengikuti distribusi dari T_1, begitu juga $T_1 \cup T_2 \cup T_3$ terhadap T_1 dan $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$ terhadap T_1. Oleh karena itu, diperlukan suatu statistik inferensial untuk menguji dua sampel data apakah mengikuti distribusi kegagalan yang sama. Uji yang dapat digunakan adalah uji Kolmogorov-Smirnov Dua Sampel (*Two Sample KS Test*, Lampiran D). Algoritma yang diusulkan juga perlu memperhatikan beberapa hal tersebut.

Algoritma penentuan distribusi kegagalan disajikan dalam *pseudocode* dan *flowchart* pada Gambar 3. Algoritma tersebut memuat penghitungan ekspektasi banyak kegagalan pada akhir langkah setelah model pembaruan $M(t)$ telah ditentukan apakah melibatkan distribusi kegagalan parametrik atau non-parametrik.

Pseudocode Penentuan Distribusi Kegagalan Data Garansi Strategi Penggantian

I. Mulai.
II. Insialisasi data antar umur kegagalan klep yaitu $T_1, T_2, T_3,$ dan T_4 dengan banyaknya data berurutan n_1, n_2, n_3 dan n_4. Inisialisasi $m = 4, k = 1$.
III. Estimasi distribusi parametrik $\hat{F}_1(t; \Omega)$ dari T_1 sebanyak n_1.
IV. Peroleh data baru $Y_k = T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_k$ sebanyak $p = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ dan $Y_{k+1} = T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_{k+1}$ sebanyak $q = n_1 + n_2 + \cdots + n_{k+1}$.
V. Lakukan pengujian apakah Y_{k+1} berdistribusi $\hat{F}_1(t; \Omega)$ melalui *KS test* dua sampel Y_k dan Y_{k+1}.
VI. Jika hasil uji pada langkah **V** adalah YA, maka lanjut ke langkah **VII**. Jika hasil uji pada langkah **V** adalah TIDAK, maka lanjut ke langkah **X**.
VII. $k = k + 1$.
VIII. Cek apakah $k = m$? Jika YA, lanjut ke langkah **IX**. Jika tidak, kembali ke langkah **IV**.
IX. Hitung ekspektasi banyak kegagalan $M(t)$ melibatkan $\hat{F}_1(t; \Omega)$ menggunakan metode SMVTI.
X. Estimasi distribusi non-parametrik $\hat{F}_e(t)$ dari T_1 sebanyak n_1.
XI. Hitung ekspektasi banyak kegagalan $M(t)$ melibatkan $\hat{F}_e(t)$ menggunakan metode SMVTI..
XII. Selesai.



GAMBAR 3. *FLOWCHART* PENENTUAN DISTRIBUSI KEGAGALAN DATA GARANSI STRATEGI PENGGANTIAN

2.7. *Penghitungan Ekspektasi Banyak Kegagalan menggunakan Metode SMVTI*

Penjelasan lengkap tentang metode SMVTI berada di Lampiran A. Penghitungan ekspektasi banyak kegagalan dalam masa garansi $[0, t)$ melalui metode SMVTI yaitu

$$M(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[[1 + M(x_{i-1})][F(t - x_{i-1}) - F(t - x_i)] \right] \tag{14}$$

Dengan terlebih dahulu membagi interval $[0, t)$ sama panjang, yaitu $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = t$, dimana $x_i = i\Delta t$, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan $\Delta t = t/n$, lalu inisialisasi awal $M(0) = F(0) = 0$ dan $M(x_1) = F(x_1)$, ekspektasi banyak kegagalan dalam masa garansi $[0, t)$ pada (14) diperoleh dengan terlebih dahulu memperoleh satu demi satu $M(x_i)$, untuk $i = 2, 3, \dots, n - 1$, dari persamaan berikut

$$M(x_i) = \sum_{j=1}^{i} \left[\left[1 + M(x_{j-1})\right]\left[F(x_i - x_{j-1}) - F(x_i - x_j)\right] \right] \tag{15}$$

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Estimasi distribusi parametrik $\widehat{F}_1(t; \Omega)$ dari T_1 sebanyak n_1 menggunakan bantuan program *easyfit* yang memberikan estimasi berbagai distribusi parametrik yang dikenal saat ini. *Easyfit* memberikan estimasi dari 55 jenis distribusi parametrik, termasuk distribusi parametrik dari peubah acak kontinu tak-negatif. Hasil estimasi tersebut selanjutnya dipilah berdasarkan kategori distribusi parametrik dari peubah acak kontinu tak-negatif yang beberapa diantaranya tertampil pada Tabel 3.

TABEL 3. ESTIMASI DISTRIBUSI PARAMETRIK $\widehat{F}_1(t; \Omega)$ DARI T_1 SEBANYAK n_1

Nama Distribusi	Parameter (MLE)	*KS-Test*				Keputusan
		Statistik	*P-Value*	Stat. Uji	Sig. α	
Gamma	$\hat{\alpha} = 2.291$; $\hat{\beta} = 0.3133$	0.10187	0.94307	1.358	0.05	H_0 tidak ditolak
Burr	$\hat{k} = 8.1675$; $\hat{\alpha} = 1.7434$; $\hat{\beta} = 2.5473$	0.10209	0.94218	1.358	0.05	H_0 tidak ditolak
Weibull	$\hat{\alpha} = 1.5966$; $\hat{\beta} = 0.76302$	0.10836	0.91211	1.358	0.05	H_0 tidak ditolak
Beta	Parameter bentuk : $\widehat{\alpha_1} = 0.5416$; $\widehat{\alpha_2} = 1.0345$ Parameter batas : $a = 0.1671$; $b = 1.8142$	0.12946	0.76919	1.358	0.05	H_0 tidak ditolak
Lognormal	$\hat{\sigma} = 0.6872$; $\hat{\mu} = -0.55248$	0.13939	0.68851	1.358	0.05	H_0 tidak ditolak
Log logistik	$\hat{\alpha} = 2.2613$; $\hat{\beta} = 0.54809$	0.16294	0.49627	1.358	0.05	H_0 tidak ditolak
Eksponensial	$\hat{\lambda} = 1.3929$	0.21007	0.20837	1.358	0.05	H_0 tidak ditolak
Parreto	$\hat{\alpha} = 0.80862$; $\hat{\beta} = 0.1671$	0.22105	0.16441	1.358	0.05	H_0 tidak ditolak

Berdasarkan Tabel 3, distribusi gamma yang memiliki statistik *KS-test* terkecil (*p-value* terbesar) mengartikan bahwa selisih nilai fungsi distribusi gamma terhadap fungsi distribusi dari data untuk setiap titik adalah yang terkecil dibanding distribusi parametrik lainnya (peluang data mengikuti distribusi gamma terbesar). Sehingga $T_1 \sim Gamma\left(\hat{\alpha} = 2.291, \hat{\beta} = 0.3133\right)$ adalah distribusi parametrik yang terpilih untuk model pembaruan pada (13a). Fungsi distribusi $Gamma\left(\hat{\alpha} = 2.291, \hat{\beta} = 0.3133\right)$ adalah

$$\widehat{F}_1\left(t; \left[\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right]\right) = \int_0^t \frac{x^{\hat{\alpha}-1} e^{-\frac{x}{\hat{\beta}}}}{\hat{\beta}^{\hat{\alpha}} \Gamma(\hat{\alpha})}\, dx \tag{16}$$

Setelah memperoleh estimasi distribusi parametrik $\widehat{F}_1(t; \Omega)$ yaitu $\widehat{F}_1\left(t; \left[\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right]\right)$ pada (16), langkah selanjutnya adalah langkah **IV** seperti pada *pseudocode* dan *flowchart* penentuan distribusi kegagalan melalui *KS-test* dua sampel seperti yang telah dijelaskan di bagian 2.6. Hasil langkah **IV** tersebut tertampil pada Tabel 4.

TABEL 4. HASIL UJI *KS-TEST* DUA SAMPEL

k	Data Sampel		*KS-Test* Dua Sampel				Keputusan	Ket
	I	II	Statistik	*P-Value*	Stat. Uji	Sig. α		
1	$Y_1 = T_1$	$Y_2 = T_1 \cup T_2$	0.1122	0.9921	1.36	0.05	H_0 tidak ditolak	$Y_2 \sim \widehat{F}_1(t; [\hat{\alpha}, \hat{\beta}])$
2	$Y_2 = T_1 \cup T_2$	$Y_3 = T_1 \cup T_2 \cup T_3$	0.0819	0.9989	1.36	0.05	H_0 tidak ditolak	$Y_3 \sim \widehat{F}_1(t; [\hat{\alpha}, \hat{\beta}])$
3	$Y_3 = T_1 \cup T_2 \cup T_3$	$Y_4 = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$	0.0245	0.9999	1.36	0.05	H_0 tidak ditolak	$Y_4 \sim \widehat{F}_1(t; [\hat{\alpha}, \hat{\beta}])$

Berdasarkan Tabel 4, Y_2 i.i.d. terhadap $T_1 \sim \widehat{F}_1\left(t; \left[\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right]\right)$, berarti bahwa penambahan data T_2 pada T_1 yaitu $T_1 \cup T_2$ memiliki distribusi yang sama dengan T_1 jika hanya jika T_2 berasal dari populasi yang sama dengan T_1, dengan kata lain T_2 i.i.d. terhadap T_1. Hal tersebut berlaku juga untuk Y_3 i.i.d. terhadap T_1 dan

ISBN 978-602-73403-0-5

Y_4 i.i.d. terhadap T_1. Sehingga dapat diambil kesimpulan bahwa T_1, T_2, T_3, dan T_4 i.i.d. terhadap T_1 yang memiliki fungsi distribusi $\widehat{F_1}(t;[\hat{\alpha},\hat{\beta}])$ pada (16).

Setelah didapati bahwa data antar umur kegagalan T_1, T_2, T_3, dan T_4 i.i.d. terhadap T_1, maka model pembaruan pada (13.a) dapat diperoleh yaitu

$$\widehat{M}_g(t) = \widehat{F_1}(t;[\hat{\alpha},\hat{\beta}]) + \int_0^t \widehat{M}_g(t-u)d\widehat{F_1}(t;[\hat{\alpha},\hat{\beta}]) \quad (17)$$

Dengan ini berarti (12) menjadi $E[N(t)] = \widehat{M}_g(t)$ sehingga model biaya garansi seperti pada (4) menjadi $[S] = c_s \widehat{M}_g(t)$. Selanjutnya, estimasi $\widehat{M}_g(t)$ pada (17) dilakukan dengan menggunakan metode SMVTI.

Melalui SMVTI, $\widehat{M}_g(t)$ pada (17) diestimasi. Lalu, diperoleh ekspektasi banyak kegagalan dan estimasi biaya garansi dengan masa garansi 0.5; 1; 1.5; 2; dan 2.5 tahun adalah seperti tertampil pada Tabel 5.

TABEL 5. EKSPEKTASI BANYAK KEGAGALAN DAN ESTIMASI BIAYA GARANSI UNTUK MASA GARANSI TERTENTU

Masa Garansi (Tahun)	Ekspektasi Banyak Kegagalan	Estimasi Biaya Garansi
0.5	0.4262	0.4262 c_s
1	1.1055	1.1055 c_s
1.5	1.7970	1.7970 c_s
2	2.4887	2.4887 c_s
2.5	3.1803	3.1803 c_s

Tampak pada Tabel 5, estimasi biaya garansi meningkat sebanding dengan lama masa garansi. Peningkatan estimasi biaya garansi terhadap masa garansi hampir linier.

IV. SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan data tentang penggantian klep mesin diesel yang telah diolah, melalui algoritma penentuan distribusi kegagalan, didapati data tersebut mengikuti distribusi kegagalan parametrik yaitu distribusi $Gamma(\hat{\alpha} = 2.291, \hat{\beta} = 0.3133)$. Selanjutnya, estimasi biaya garansi dengan masa garansi tertentu diperoleh dari model pembaruan yang melibatkan distribusi gamma tersebut melalui metode SMVTI pada Tabel 5. Estimasi biaya garansi meningkat sebanding dengan lama masa garansi.

Didapati data mengikuti distribusi parametrik melalui algoritma penentuan distribusi kegagalan. Hal tersebut menyebabkan perlu adanya kajian atau penelitian lebih lanjut untuk data garansi yang tidak mengikuti distribusi parametrik sehingga model dan estimasi biaya garansi nantinya melibatkan distribusi non-parametrik.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Sasongko, L.R., (2014). *Copula untuk Memodelkan Kegagalan Dua Dimensi pada Produk Bergaransi dengan Strategi Penggantian*. Tesis Pascasarjana Magister Aktuaria-ITB. Bandung.

[2] Baik, J., Murthy, D. N. P. dan Jack, N. (2004). Two-Dimensional Failure Modelling with Minimal Repair. *Naval Research Logistics*. **51**. 345–362.

[3] Baik, J., Murthy, D. N. P. and Jack, N. (2006). Erratum:Two-Dimensional Failure Modeling with Minimal Repair, *Naval Research Logistics*, **53**, 115-116.

[4] Blischke, W. R., Murthy, D. N. P. (1994). *Warranty Cost Analysis*. Marcel Dekker, Inc. New York.

[5] Blischke, W. R., Karim, R., Murthy, D. N. P. (2011). *Warranty Data Collection and Analysis.* Springer Series in Reliablity Engineering, London.

[6] Maghsoodloo, S. dan Helvaci, D. (2014). Renewal and Renewal-Intensity Function with Minimal Repair. *Journal of Quality and Reliablity Engineering*. 2014. ID : 857437.

[7] Klugman, S.A., Panjer, H.H., and Wilmott, G.E. (2004). *Loss Models : from Data to Decision 2nd Edition*. Wiley Interscience. A John Wiley & Sons, Inc. New Jersey. USA.

[8] Tse, Y. K. (2009). *Nonlife Actuarial Models : Theory, Methods, and Evaluation*. Cambridge University Press.

[9] Panchenko, P. 2005. *Statistics for Application*. MIT Course Number.

LAMPIRAN A. METODE SMVTI UNTUK MENGHITUNG PERSAMAAN INTEGRAL PEMBARUAN, $M(t)$.

Diketahui $f(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi kontinu pada $[a,b]$ dan $g(x)$ dapat diintegralkan di setiap $x \in [a,b]$. Menurut *Second Mean Value Theorem for Integrals*, nilai pendekatan $\int_a^b f(x)g(x)dx$ dapat diperoleh melalui

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \approx f(c) \int_a^b g(x)dx$$

untuk suatu $c \in [a,b]$.
Diketahui persamaan integral pembaruan (*renewal integral equation*), $M(t)$, didefinisikan oleh

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-u)dF(u) = \int_0^t dF(u) + \int_0^t M(t-u)dF(u) = \int_0^t [1 + M(t-u)]dF(u)$$

Dengan melakukan perubahan peubah yaitu $v = t - u \Rightarrow u = t - v$; $du = -dv \Rightarrow dv = -du$, saat $u = 0 \Rightarrow v = t$ dan saat $u = t \Rightarrow v = 0$, maka $M(t)$ menjadi

$$M(t) = -\int_0^t [1 + M(v)]dF(t-v)$$

Dengan membagi interval $[0,t)$ sama panjang, yaitu $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = t$, dimana $x_i = i\Delta t$ untuk $i = 1,2,\dots,n$ dan $\Delta t = t/n$, diperoleh

$$M(t) = -\left[\int_0^{x_1} [1 + M(v)]dF(t-v) + \int_{x_1}^{x_2} [1 + M(v)]dF(t-v) + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} [1 + M(v)]dF(t-v)\right]$$

$$M(t) = \sum_{i=1}^{n}\left[-\int_{x_{i-1}}^{x_i} [1 + M(v)]dF(t-v)\right]$$

Dengan menerapkan SMVTI di ujung kiri, diperoleh

$$M(t) = \sum_{i=1}^{n}\left[[1 + M(x_{i-1})]\left(-\int_{x_{i-1}}^{x_i} dF(t-v)\right)\right]$$

$$M(t) = \sum_{i=1}^{n}\big[[1 + M(x_{i-1})][F(t - x_{i-1}) - F(t - x_i)]\big]$$

dengan inisial awal $M(0) = F(0) = 0$ dan $M(x_1) = F(x_1)$. Persamaan di atas digunakan untuk memperoleh ekspektasi banyak kegagalan komponen produk pada masa garansi $[0,t)$ dengan terlebih dahulu memperoleh satu demi satu $M(x_i)$, $i = 2,3,\dots,n-1$, yaitu dari persamaan

$$M(x_i) = \sum_{j=1}^{i}\Big[[1 + M(x_{j-1})]\big[F(x_i - x_{j-1}) - F(x_i - x_j)\big]\Big]$$

LAMPIRAN B. *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION* (MLE) [5]

Estimator maksimum *likelihood* (MLE) diperoleh dari memaksimalkan fungsi *likelihood*, yang didefinisikan sebagai distribusi gabungan dari masing-masing sampel acak. Fungsi *likelihood* untuk *complete data* didefinisikan oleh

$$L(Y_1, Y_2, \dots, Y_n; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(Y_i; \boldsymbol{\theta})$$

Untuk memudahkan perhitungan, yang dapat dilakukan adalah memaksimumkan logaritma natural dari fungsi *likelihood*, $\log L$. Untuk memaksimumkan $\log L$, dengan vektor parameter $\boldsymbol{\theta}$ dan asumsi *differentiability*, dilakukan dengan menyamakan turunan fungsi $\log L$ ke nol lalu memperoleh solusi persamaannya. Jika perlu, persamaan tersebut diselesaikan dengan metode numerik.

LAMPIRAN C. UJI KOLMOGOROV-SMIRNOV SATU SAMPEL [5]

Uji Kolmogorov-Smirnov Satu Sampel merupakan salah satu uji *goodness of fit* yang menguji hipotesis H_0 : data mengikuti distribusi parametrik $\hat{F}(t; \boldsymbol{\Omega})$, sedangkan hipotesis H_1 : data tidak mengikuti distribusi parametrik $\hat{F}(t; \boldsymbol{\Omega})$ dimana $\boldsymbol{\Omega}$ telah terlebih dahulu diestimasi. Statistik uji Kolmogorov-Smirnov dinotasikan D_n yang menyatakan perbedaan terbesar antara fungsi distribusi empirik lampiran E dan $\hat{F}(t; \boldsymbol{\Omega})$ yaitu

$$D_n = \max\{D_n^-, D_n^+\}$$

dimana

$$D_n^- = \max_{i=1,\dots,n}\left[\frac{i}{n} - \hat{F}(y_i;\mathbf{\Omega})\right] \text{ dan } D_n^+ = \max_{i=1,\dots,n}\left[\hat{F}(y_i;\mathbf{\Omega}) - \frac{i-1}{n}\right]$$

dengan $y_i, i = 1,2,\dots n$ (*ordered statistic*) adalah data yang telah diurutkan dari yang terkecil hingga yang terbesar. Pengambilan kesimpulan uji ini adalah H_0 ditolak jika D_n melebihi batas $D = d_\alpha\left(n^{-1/2} + 0.11n^{-1/2} + 0.12\right)^{-1}$, dimana $d_\alpha = 1.224;\ 1.358;$ atau 1.628 untuk α berurutan $\alpha = 0.10;\ 0.05;$ atau 0.01. Atau, H_0 ditolak jika $\Pr[D_n \le D] < \alpha$.

LAMPIRAN D. UJI KOLMOGOROV-SMIRNOV DUA SAMPEL

Misal sampel pertama $X_1,\dots,X_m$ memiliki distribusi dengan fungsi distribusi $F(x)$ dan sampel kedua $Y_1,\dots,Y_n$ memiliki distribusi dengan fungsi distribusi $G(x)$ dan kita akan menguji

$$\mathrm{H}_0 : F = G$$

Jika $F_m(x)$ dan $G_n(x)$ adalah fungsi distribusi empirik yang bersesuaian dengan sampel $X_1,\dots,X_m$ dan $Y_1,\dots,Y_n$, maka statistik uji Kolmogorov-Smirnov dua sampel diperoleh dari

$$D_{mn} = \left(\frac{mn}{m+n}\right)^{1/2} \sup_x |F_m(x) - G_n(x)|$$

Pengambilan kesimpulan hasil uji ini adalah H_0 ditolak jika D_{mn} melebihi batas $c(\alpha)$, dimana $c(\alpha) = 1.224;\ 1.358;$ atau 1.628 untuk α berurutan $\alpha = 0.10;\ 0.05;$ atau 0.01. Atau, H_0 ditolak jika $\Pr[D_{mn} \le c(\alpha)] < \alpha$.

LAMPIRAN E. FUNGSI DISTRIBUSI EMPIRIK [8]

Fungsi distribusi empirik dikonstruksi dari data y_j (*ordered statistic*), data berbeda yang telah diurutkan dari yang terkecil hingga yang terbesar. Dengan w_j menyatakan banyak y_j yang sama, dan $g_j = \sum_{k=1}^{j} w_k$. Fungsi distribusi empirik dinyatakan oleh

$$F_e(y) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } y < y_1 \\ \dfrac{g_j}{n} & \text{untuk } y_j \le y < y_{j+1}, j = 1,\dots,m-1 \\ 1 & \text{untuk } y_m \le y \end{cases}$$

Untuk menghitung $F_e(y)$ di y yang tidak berada dalam $y_1, y_2, \dots, y_m$, kita perlu menghaluskan $F_e(y)$ atau disebut fungsi distribusi empirik halus (*smoothed empirical distribution function*), yaitu

$$\hat{F}_e(y) = \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} F_e(y_{j+1}) + \frac{y_{j+1} - y}{y_{j+1} - y_j} F_e(y_j)$$

dimana $y_j \le y < y_{j+1}$ untuk $j = 1,\dots,m-1$. Jadi $\hat{F}_e(y)$, fungsi distribusi empirik halus, adalah interpolasi linear dari $F_e(y_{j+1})$ dan $F_e(y_j)$ untuk $j = 1,2,\dots,m-1$.

LAMPIRAN F. FUNGSI DISTRIBUSI KERNEL (TSE, 2009)

Sama halnya dengan fungsi distribusi empirik, fungsi distribusi Kernel juga dikonstruksi dari data x_i (*ordered statistic*). Fungsi distribusi Kernel didefinisikan oleh

$$\hat{F}_K(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \int_{-x_i/b}^{(x-x_i)/b} K(\psi)d\psi$$

dimana *b* menyatakan lebar langkah (*bandwitch*) dan $K(\psi)$ disebut fungsi kernel yang terdiri dari berbagai macam jenis, tiga di antaranya adalah fungsi kernel persegi panjang, segitiga, dan Gaussian, yang masing-masing didefinisikan oleh

Fungsi kernel persegi panjang

$$K_R(\psi) = \begin{cases} 0.5 & -1 \le \psi \le 1 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Fungsi kernel segitiga

$$K_T(\psi) = \begin{cases} 1 - |\psi| & -1 \le \psi \le 1 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Fungsi kernel gausian

$$K_G(\psi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{\psi^2}{2}\right), \text{untuk } -\infty < \psi < \infty\,.$$