S - 11

Transformasi Wavelet Diskret Untuk Data Time Series

Vemmie Nastiti Lestari, Subanar
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Gadjah Mada
vemmie.lestari@gmail.com

***Abstrak*—**Untuk mengolah atau menganalisis data yang mempunyai dimensi tinggi sangat sulit bahkan dengan sistem komputer modern sekalipun. Suatu pendekatan yang digunakan adalah mengurangi dimensi data yang disebut dengan reduksi dimensi. Transformasi wavelet diskret (TWD) merupakan salah satu teknik reduksi dimensi, yaitu teknik dekomposisi multi resolusi untuk mengatasi masalah pemodelan yang menghasilkan sinyal representasi lokal yang baik pada domain waktu dan domain frekuensi. Jenis wavelet yang digunakan adalah *wavelet* Haar. Pada penelitian ini, peneliti akan membahas penanganan data time series berdimensi tinggi menggunakan TWD dan mengaplikasikannya dalam data time series.

Kata Kunci : reduksi dimensi, wavelet Haar, transformasi wavelet diskret.

I. PENDAHULUAN

Data time series merupakan nilai-nilai suatu variabel yang berurutan menurut waktu, misalkan harian, mingguan, bulanan, tahunan. Data time series ini sering ditemukan di berbagai bidang, salah satunya dalam bidang keuangan/finansial sebagai contoh data saham harian dan volume transaksi. Dalam penelitian meteorologi, data time series dapat digunakan untuk prediksi cuaca atau iklim. Selain itu dalam bidang *business intelligence*, penyedia layanan internet mungkin dapat mengoptimalkan pengoperasian *backbone* internet yang besar. Bahkan, nilai-nilai yang tercatat dalam urutan waktu dapat diwakili oleh data time series. Data time series sering disajikan dalam bentuk vektor bilangan real.

Untuk mengolah atau menganalisis data yang mempunyai dimensi tinggi sangat sulit bahkan dengan sistem komputer modern sekalipun. Untuk itu, suatu pendekatan terkait dengan dimensi yang tinggi adalah mengurangi dimensi data tersebut yang sering disebut dengan reduksi dimensi. Beberapa metode reduksi dimensi diantaranya transformasi fourier, transformasi ini merupakan teknik reduksi data klasik. Berdasarkan transformasi fourier tersebut para ahli mengembangkan suatu teknik reduksi dimensi yang dikenal dengan transformasi wavelet.

Wavelet merupakan fungsi transformasi yang secara otomatis memotong data ke dalam komponen berbeda dan mempelajari masing-masing komponen dengan resolusi yang sesuai dengan skalanya [3]. Transformasi wavelet merupakan teknik dekomposisi multi resolusi untuk mengatasi masalah pemodelan yang menghasilkan sinyal representasi lokal yang baik pada domain waktu dan domain frekuensi.

Transformasi wavelet menggunakan sebuah jendela modulasi yang fleksibel artinya memiliki penyesuaian atas frekuensi dan waktu, ini yang paling membedakan dengan transformasi Fourier waktu-singkat (STFT), yang merupakan pengembangan dari transformasi Fourier yaitu tidak bisa menganalisis frekuensi dan waktu secara bersamaan. Transformasi Fourier tersebut hanya terbatas menggunakan derert Fourier saja. Transformasi Wavelet terbagi menjadi dua yaitu transformasi Wavelet Kontinu (TWK) dan transformasi Wavelet Diskret (TWD). Penelitian sebelumnya dilakukan oleh Yunyue, 2004 [9] mengenai data mining time series, yang membahas beberapa metode reduksi dimensi pada data time series

Pada penelitian ini, peneliti akan membahas transformasi Wavelet Diskret (TWD) karena mampu mengatasi data berdimensi tinggi dan dianggap relatif lebih mudah pengimplementasiannya dan sederhana. Jenis wavelet yang digunakan adalah *wavelet* yang paling tua yaitu *wavelet* Haar. Sampai saat ini, TWD yang menggunakan wavelet Haar dan di aplikasikan pada data time series belum begitu banyak dikaji. Sehingga hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan metode alternatif penanganan data time series berdimensi tinggi menggunakan TWD dan mengaplikasikannya dalam data time series.

II. TRANSFORMASI WAVELET DISKRET

A. *Haar Wavelet*

Haar wavelet merupakan wavelet sederhana yang berdasarkan pada fungsi tangga. Fungsi tangga tersebut didefinisikan sebagai berikut :

$$\chi_{[a,b)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{jika } a \le t \le b \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases} \tag{1}$$

Selanjutnya

$$\phi(t) = \chi_{[0,1)}(t)$$

dan

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\phi\left(2^j t - k\right) \quad j,k \in \mathbf{Z} \tag{2}$$

dimana $\left\{\phi_{j,k}(t)\right\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ merupakan fungsi skala Haar pada $\mathbb{R}$.

Kemudian diberikan fungsi Haar wavelet $\psi(t)$, merupakan *mother* wavelet:

$$\psi(t) = \chi_{[0,1/2)}(t) - \chi_{[1/2,1)}(t)$$

Dan

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi\left(2^j t - k\right) \quad j,k \in \mathbf{Z} \tag{3}$$

Himpunan $\left\{\psi_{j,k}(t)\right\}$ $j,k \in \mathbf{Z}$ disebut dengan fungsi keluarga Haar wavelet.

B. *Analisis Multiresolusi*

Esensi dari basis ortonormal yang dibangun oleh sebuah wavelet adalah sifat multiresolusi-nya, sehingga dapat menganalisis suatu signal pada berbagai frekuensi di suatu lokasi tertentu.

Keluarga subruang tertutup $\left\{V_j : j \in \mathbf{Z}\right\}$ dari $L^2(\mathbf{R})$ yang memenuhi :

a. $V_j \subset V_{j+1}$ untuk setiap $j \in \mathbf{Z}$
b. $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$ untuk setiap $j \in \mathbf{Z}$
c. $\cap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}$
d. untuk fungsi kontinu
   $f(t)$ pada $\mathbf{R}$, $f(t) \in \cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j$
e. terdapat $\phi \in V_0$ sedemikian sehingga $\left\{\phi(t-k)\right\}_{k\in\mathbf{Z}}$ merupakan basis orthonormal untuk V_0,

disebut analisis multiresolusi (AMR) pada $L^2(\mathbf{R})$. Fungsi ϕ pada (e) disebut fungsi skala dalam AMR tersebut.

C. *Transformasi Wavelet*

Transformasi wavelet adalah teknik dekomposisi untuk time series yang menghasilkan suatu multiresolusi di dalam domain waktu dan frekuensi yang sangat baik, serta algoritma perhitungan yang efisien. Dekomposisi multiresolusi memisahkan tren dari time series. Misalkan kita mempunyai *father* wavelet ϕ dan *mother* wavelet ψ dengan sifat :

1. $\int \phi(t)\,dt = 1$
2. $\int \psi(t)\,dt = 0$

Father wavelet mewakili pemulusan sinyal, dan *mother* wavelet mewakili detail sinyal. Berdasarkan analisis multiresolusi, fungsi skala secara umum merupakan fungsi basis orthonormal untuk V_0, dan juga merupakan fungsi basis orthonormal untuk V_j.

Dari persamaan (2), dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\phi(t) = 2^{1/2} \sum_k h_k\, \phi(2t-k)$$

Koefisien dari $\{h_k\}$ disebut filter skala (*scaling filter*).

Definisi *: filter* h_k didefinisikan sebagai

$$h_k = h_k^0 = \begin{cases} h_l & ,0 \le k \le L-1 \\ 0 & ,L \le k \le N-1 \end{cases}$$

Dengan

$$\mathcal{W}_{0.}^T = \left[h_1^0, h_0^0, h_{N-1}^0, h_{N-2}^0, \cdots, h_2^0\right]$$
$$= \left[h_1, h_0, \underbrace{0,0,\cdots,0}_{N-L_0}, h_{L-1}, h_2 \right]$$
$$\mathcal{W}_{t.}^T = [\mathcal{T}^{2t}\, \mathcal{W}_{0.}]^T$$

Selanjutnya untuk mother wavelet $\psi(t)$, dari persamaan (3) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\psi(t) = 2^{1/2} \sum_k g_k\, \phi(2t-k)$$

Selanjutnya, diperoleh persamaan :

a. $\phi_{j-1,k}(t) = \sum_l h_{l-2k} \phi_{jl}(t)$

b. $\psi_{j-1,k}(t) = \sum_l g_{l-2k} \phi_{jl}(t)$

Selanjutnya dipunyai persamaan :

$$\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k\epsilon\mathbb{Z}} \quad \text{merupakan basis orthonormal wavelet pada } \mathbb{R}. \qquad (4)$$

Diberikan $J \in \mathbb{Z}$,

$$\{\phi_{J,k}(t)\}_{k\epsilon\mathbb{Z}} \cup \{\psi_{j,k}(t)\}_{j>J,k\epsilon\mathbb{Z}} \tag{5}$$

juga merupakan basis orthonormal pada $\mathbb{R}$.
Dari persamaan (4), dipunyai fungsi $f(t)\epsilon L^2(\mathbb{R})$ dengan persamaan :

$$f(t) = \sum_{j,k\epsilon\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k}\rangle \psi_{j,k}(t) \tag{6}$$

Fungsi $f(t)$ ini disebut fungsi transformasi wavelet.

D. Transformasi Wavelet Diskret

Transformasi Wavelet Diskrit (TWD) pada level J dari X adalah transformasi ortonormal yang diberikan oleh $W = \mathcal{W}X$, dengan W merupakan koefisien TWD adalah vektor berdimensi N, vektor X berdimensi N diartikan sebagai elemen analisis runtun waktu bernilai riil $\{X_t, t = 0,1,2,\cdots, N-1\}$, dan $\mathcal{W}$ adalah matriks bernilai riil dengan ukuran N x N yang mendefinisikan DWT dan memenuhi $\mathcal{W}^T\mathcal{W} = I_N$. Dengan N $\equiv 2^J$, dengan J merupakan integer positif.

Transformasi wavelet diskret dioperasikan pada fungsi dengan domain diskrit atau runtun waktu $x(t)$, biasanya menggunakan domain waktu $t = 0, 1, \ldots, N-1$. Wavelet menganalisa data runtun waktu untuk dilatasi dan translasi data diskrit dengan menggunakan mother wavelet $\psi(t)$. Dasar proses dilatasi menggunakan interval 2^{j-1}, $j = 1, 2, 3, \ldots$ J. Translasi nilai t menggunakan interval 2^j.

Dari analisis multi resolusi, diketahui fungsi $f(t)$ dapat didekati dengan resolusi multi level. Diberikan $f_j(t)$ merupakan pendekatan pada level *j*, sehingga diperoleh :

$$f_j(t) = \sum_k f_{jk}\phi_{jk}(t) \tag{7}$$

Dimana

$$f_{jk} = \langle \phi_{jk}, f \rangle = \langle \phi_{jk}, f_j \rangle \tag{8}$$

Selanjutnya pendekatan f_j pada level $j-1$, dapat dituliskan sebagai berikut :

$$f_j(t) = f_{j-1}(t) + d_{j-1}(t) = \sum_k f_{jk}\phi_{jk}(t) + \sum_k d_{jk}\psi_{jk}(t) \tag{9}$$

Fungsi transformasi wavelet $f(t)$ diperoleh dengan menghitung f_{jk} dan d_{jk}. Dimana :

$$f_{j-1,k} = \sum_l h_{t-2k} f_{jl} \tag{10}$$

$$d_{j-1,k} = \sum_l g_{t-2k} f_{jl} \tag{11}$$

Hampiran deret wavelet orthogonal pada sinyal $f(t)$ diberikan oleh :

$$f_j(t) \approx \sum_k f_{j,k}\,\phi_{j,k}(t) + \sum_k d_{j,k}\,\psi_{j,k}(t) + \sum_k d_{j-1,k}\,\psi_{j-1,k}(t) + \cdots + \sum_k d_{1,k}\,\psi_{1,k}(t) \qquad (12)$$

Dimana j adalah banyaknya komponen dalam multiresolusi, nilai k dari 1 sampai banyaknya koefisien dalam komponen spesifik.
dengan :

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\phi\left(\frac{t-2^j k}{2^j}\right)$$
$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\psi\left(\frac{t-2^j k}{2^j}\right)$$

Transformasi wavelet diskret (TWD) menghitung koefisien hampiran pada persamaan (12) untuk time series $f_0, f_1, \cdots, f_{N-1}$. TWD memetakan vektor $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \cdots, f_{N-1})'$ untuk vektor koefisien wavelet *W*.

Vektor *W* terdiri dari koefisien f_{jk} dan d_{jk}, j = 1, 2, ..., J pada hampiran pada persamaan (12). $f_j(t)$ disebut koefisien pemulusan (*smooth coefficients*) dan $d_{j,k}$ disebut *detail* koefisien.

Koefisien Wavelet dan Skala TWD didefinisikan sebagai

$$W_{1,t} = \sum_{l=0}^{L-1} h_k X_{(2t-k)\ modulo\ N}$$
$$V_{1,t} = \sum_{l=0}^{L-1} g_k X_{(2t-k)\ modulo\ N,} \qquad \text{dengan } t = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1$$

$W_{1,t}$ dinyatakan sebagai koefisien wavelet TWD pada level 1 dan pada waktu ke t, sedangkan $V_{1,t}$ merupakan koefisien skala TWD level 1 dan pada waktu ke t.

1) *Algoritma Level 1*
   Transformasi Wavelet Diskrit level 1 dari X

$$W = \mathcal{W}X$$
$$\begin{bmatrix} W_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 \\ \mathcal{V}_1 \end{bmatrix} X$$

dan karena $\mathcal{W}$ ortonormal yaitu $\mathcal{W}^{\mathrm{T}}\mathcal{W} = 1$,maka

$$X = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 \\ \mathcal{V}_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

$X = [\mathcal{W}_1{}^T \quad \mathcal{V}_1{}^T]\begin{bmatrix}W_1\\V_1\end{bmatrix}$

$X = \mathcal{W}_1{}^T W_1 + \mathcal{V}_1{}^T V_1$

$X = d_1 + f_1$

Di mana d_1 dan f_1 masing-masing merupakan detail dan smooth pada level 1.

2) *Algoritma Level j*

Algoritma piramida dimulai dengan j = 1 dan selanjutnya diulang dengan j =2,3,…J_0, kemudian diperoleh semua vector dari koefisien yang diperlukan utuk membentuk $\boldsymbol{W}$, yaitu $\boldsymbol{W}_1$, $\boldsymbol{W}_{2,...,}$ $\boldsymbol{W}_{\mathbf{jo}}$ dan koefisien skala $\boldsymbol{V}_{jo}$

Sama halnya dengan transformasi $\boldsymbol{V}_2$ ke $\boldsymbol{W}_1$ dan $\boldsymbol{V}_1$, transformasi $\boldsymbol{V}_{j\text{-}1}$ ke $\boldsymbol{W}_{\mathrm{j}}$ dan $\boldsymbol{V}_{\mathrm{j}}$ dinyatakan sebagai

$\begin{bmatrix}W_j\\V_j\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathcal{A}_j\\\mathcal{B}_j\end{bmatrix} V_{j-1} = \mathcal{P}_j V_{j-1}$

Dimana $\mathcal{A}_j$ dan $\mathcal{B}_j$ matriks berukuran N_j x N_{j-1}, karena matriks $\mathcal{P}_j$ ortonormal, maka $\mathcal{P}_j\mathcal{P}_j{}^T = \mathcal{P}_j{}^T\mathcal{P}_j = I$, kemudian karena $\boldsymbol{V}_1 = \mathcal{A}_1 X$ secara rekursif menghasilkan

$W_j = \mathcal{B}_j\mathcal{A}_{j-1}\mathcal{A}_{j-2} \dots \mathcal{A}_1 X = \mathcal{W}_j X$ dan
$V_j = \mathcal{A}_{j-1}\mathcal{A}_{j-2} \dots \mathcal{A}_1 X = \mathcal{V}_j X$

Karena $\mathcal{P}_j$ ortonormal, V_{j-1} dapat diperoleh dengan

$$V_{j-1} = \mathcal{P}_j{}^T \begin{bmatrix}W_j\\V_j\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathcal{A}_j^T & \mathcal{B}_j^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W_j\\V_j\end{bmatrix} = \mathcal{A}_j^T W_j + \mathcal{B}_j^T V_j \quad (13)$$

Dari persamaan (13), V_{j-1} dapat dikonstruksi dari W_j dan V_j melalui invers algoritma piramida tingkat j, sehingga

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix}\mathcal{W}_1\\\mathcal{W}_2\\\vdots\\\mathcal{W}_j\\V_j\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathcal{A}_1\\\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2\\\vdots\\\mathcal{A}_j\mathcal{B}_{j-1}\dots\mathcal{B}_1\\\mathcal{A}_j\mathcal{A}_{j-1}\dots\mathcal{A}_1\end{bmatrix}$$

Dengan *detail* dan *smooth* diberikan oleh $d_j = \mathcal{B}_1{}^T \dots \mathcal{B}_{j-1}{}^T\mathcal{A}_j{}^T W_j$ dan $f_j = \mathcal{A}_1{}^T \dots \mathcal{A}_{j-1}{}^T\mathcal{B}_j{}^T V_j$.

E. Multiskala Autoregresi (MAR)

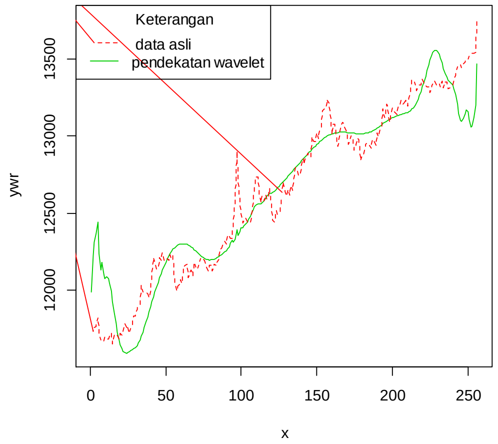
Dalam renaud dkk (2002), penggunaan dekomposisi, proses AR menjadi proses Multiscale Autoregressive (MAR) yang diberikan menggunakan

$$\hat{X}_{t+1} = \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{A_j}\hat{\alpha}_{j,k}\widehat{W}_{j,t-2^j(k-1)} + \sum_{k=1}^{A_j}\hat{\alpha}_{J+1,k}\hat{V}_{J,t-2^J(k-1)} \quad (14)$$

dengan j adalah level wavelet (j = 1, 2, ..., J)
A_j adalah orde MAR (k = 1, 2, ..., A_j)
$\widehat{W}_{j,t}$ adalah koefisien wavelet
$\hat{V}_{j,t}$ adalah koefisien skala
$\hat{\alpha}_{j,k}$ adalah koefisen MAR
t adalah waktu.

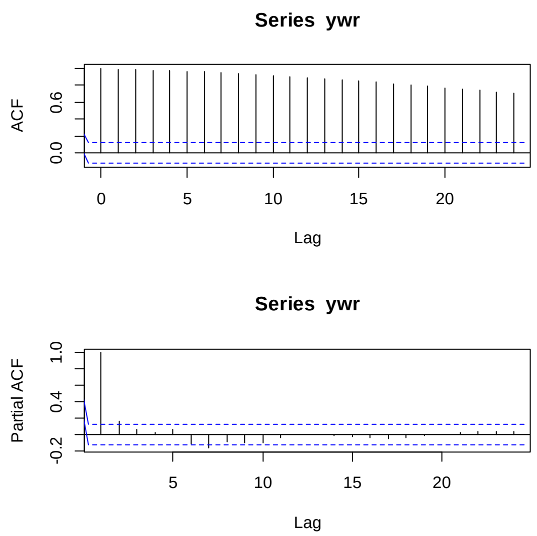
III. HASIL PENELITIAN

Pada penelitian ini digunakan data kurs IDR/USD 4 agustus 2014 - 12 Agustus 2015 yang diambil dari web www.bi.go.id. Selanjutnya data tersebut dilakukan transformasi wavelet diskret menggunakan software R dimana level yang digunakan adalah level 2. Selanjutnya dari output software R diperoleh matriks $\boldsymbol{W}_1$, $\boldsymbol{W}_2$ dan $\boldsymbol{V}_2$. Dari matriks yang telah diperoleh akan dicari hampiran deret wavelet orthogonal pada data berdasarkan persamaan (12). Diperoleh plot hasil dekomposisi pada gambar 1 sebagai berikut :



GAMBAR 1. PLOT DATA ASLI DAN PENDEKATAN WAVELET DISKRET

Selanjutnya mengidentifikasi model dengan plot ACF dan PACF sebagai berikut:



GAMBAR 2. PLOT ACF DAN PACF DARI DATA PENDEKATAN WAVELET

ISBN. 978-602-73403-0-5

Berdasarkan gambar 2, terlihat bahwa fungsi ACF meluruh menuju nol secara eksponensial sedangkan fungsi PACF signifikan hanya pada *lag-1*. Untuk keperluan prediksi digunakan metode ARIMA model yang mungkin menggambarkan sifat data pendekatan wavelet adalah model AR(1).

Selanjutnya dilakukan prediksi untuk sepuluh periode ke depan, diperoleh hasil :

TABEL 1. HASIL PERAMALAN

t	Forecast
257	13660,92
258	13803,99
259	13908,98
260	13986,02
261	14042,56
262	14084,05
263	14114,49
264	14136,83
265	14153,22
266	14165,25

Dari tabel 1 diperoleh hasil bahwa prediksi kurs IDR/USD untuk sepuluh periode kedepan atau tanggal 13 - 22 Agustus 2015 dimana dari prediksi tersebut terlihat bahwa semakin lama harga dolar semakin merangkak naik.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bruce, Andrew., Ye Gao, Hong., 1996, *Applied Wavelet Analysis with S-PLUS*, hal 13, Springer-Verlag New York Inc, USA.

[2] Burrus, C.Sidney., dkk., 1998, *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms A Primer*, hal 17, Prentice-hall Inc, New Jersey.

[3] Chui, Charles K., 1992, *An Introduction to Wavelets*, hal 49, Elsevier Science, USA

[4] Frazier, Michael W., 1999, *An Introduction to Wavelets through Linear Algebra*, hal 380, Springer-Verlag New York Inc, USA.

[5] Nason, G.P., 2008, *Wavelet Methods in Statistics with R*, hal 28, Springer, New York USA.

[6] Renaud, o., Starck, J.L., dan Murtagh, F., (2002), *Wavelet Based Forecasting of Short and Long Memory Time Series*, paper.

[7] Veitch, David., 2005, Wavelet Neural Network, Dissertation, University of York, UK

[8] Walker, James S., 2008, *A Primer on WAVELETS and their Scientific Applications* Second Edition, hal 5, Chapman & Hall/CRC, U.S.

[9] Zhu, Yunyue., 2004, *High Performance Data Mining in Time Series: Techniques and Case Studies*, Dissertation, Department of Computer Science, New York University, hal 4-60.