S - 10

Analisis Waktu Tunggu pada Proses Renewal

Suyono, Ibnu Hadi

Fakultas MIPA Universitas Negeri Jakarta
synjkt@yahoo.com

Abstrak**—**Dalammakalahinidibahashal-hal yang terkait dengan waktutunggupada proses renewal. Waktutunggudidefinisikansebagaiwaktusampaiterjadinyakejadianke*n*dihitungsejakwaktu 0 dandinotasikandenganS_n. Dalam makalah ini disajikan hasil-hasil penelitian berupa (1) mean, variansi, fungsi distribusi kumulatif, dan fungsi kepadatan probabilitas distribusidari$S_{N(t)}$dimana($N(t)$, $t\ \geq 0$)adalahproses renewal dan proses Poisson (sebagai kasus khusus dari proses renewal); (2) mean, variansi, fungsi pembangkit momen, limit mean, limit variansi dari jumlah parsial $S_1 + S_2 + ... + S_n$ pada proses renewal; dan (3) mean, variansi, transformasi Laplace, dan sifat limit dari $S_1 + S_2 + ... + S_{N(t)}$ baik pada proses Poisson maupun proses renewal

Kata kunci:Proses Poisson, proses renewal, transformasi Laplace, waktu tunggu

I. PENDAHULUAN

Banyaksituasidalamkehidupansehari-haridimanabanyaknyakejadianpadasuatu interval waktumenjadiperhatian yang menarikuntukdianalisis. Beberapacontohsituasitersebutadalahbanyaknyanasabah yang datangkesebuah bank selamasehari, banyaknyaklaimpadasuatuperusahaanasuransiselamasetahun, banyaknyakecelakaan yang terjadi di suaturuasjalantolselamasebulan, dan lain-lain. Situasi-situasiinidapatdimodelkandengan proses renewal.

Secaramatematis proses renewal dapatdideskripsikansebagaiberikut. Dimulaidarititikwaktu$t = 0$, misalkanX_1menyatakanwaktukejadianpertama, X_2adalahwaktuantarakejadianpertamadankedua, X_3adalahwaktuantarakejadiankeduadanketiga, danseterusnya. Notasikan

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

dan$S_0 = 0$. Definisikanuntuk$t \geq 0$,

$$N(t) = \sup\{n : S_n \leq t\}.$$

Kuantitasbahwa$N(t)$ menyatakanbanyaknyakejadian yang terjadipada interval waktu $[0,t]$ dan $S_n$adalahwaktutunggu (*waiting time*) sampaiterjadinyakejadianke*n*.Jikawaktu-waktuantarkejadianX_1, X_2, X_3, … dianggapsalingindependendanberdistribusiidentikdengansebarangdistribusi, maka proses stokastik ($N(t)$, $t \geq 0$) dinamakan*proses renewal*.Sebagaikasuskhususdari proses renewal,jikawaktu-waktuantarkejadian$X_i$berdistribusieksponensial maka proses ($N(t)$, $t \geq 0$) dinamakan proses Poisson homogen.

Proses renewal, danjuga proses Poisson, telahbanyakdibahasdalamliteraturdanmendapatperhatiandaribanyakpeneliti. Dalam Ross [1] telahdibahasdistribusidari proses Poisson, hargaharapan proses Poisson, variansi proses Poisson, distribusiwaktutungguS_n, distribusi proses renewal dansifat-sifatasimtotik proses renewal. Suyonodan van der Weide[2]membahas*alternating* proses renewal sebagaigeneralisasidari proses renewal. Suyonodan van der Weide[3]membahassuperposisidari proses renewal.

Terkaitdenganwaktutunggusampaikejadianke*n*, untuk proses Poisson telahdibuktikanbahwa$S_n$berdistribusi gamma, sedangkanuntuk proses renewal distribusi$S_n$hanyadapatdirumuskanbentukumumnya, lihat Ross [1]. Terdapathal yang menarikterkaitdenganwaktutunggu. Jikapada interval waktu $[0, t]$ terjadisebanyak$N(t)$ kejadian, makawaktutunggusampaiterjadinyakejadianterakhirpada interval $[0, t]$ adalah$S_{N(t)}$. Terdapatperbedaanantara$S_n$dan$S_{N(t)}$, yakniindeksdari$S_n$adalahbilangancacahdandistribusinyahanyatergantungpadadistribusiwaktuantarkejadiantetapitidaktergantungpada interval waktu $[0, t]$, sedangkanindeksdari$S_{N(t)}$adalah variable acakdandistribusinyatergantungpadawaktuantarkejadiandanjugapada interval waktu $[0, t]$. Dalam makalah ini akan dibahas sifat-sifat distribusi dari $S_{N(t)}$.SelainitudaribarisanwaktutungguS_1, S_2, …dapatdibentukjumlahparsial$J_m = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$, maupun$J_{N(t)} = S_1 + S_2 + \ldots + S_{N(t)}$. Secaramatematiskeduaderetinimenarikuntukdianalisis dan akan dibahas sifat-sifatnya pada makalah ini.

ISBN. 978-602-73403-0-5

II. PEMBAHASAN

A. Distribusi $S_{N(t)}$ pada ProsesPoisson

Pikirkan proses Poisson ($N(t)$, $t \geq 0$) dengan waktu-waktu antar kedatangan X_1, X_2, … yang berdistribusieksponensial dengan parameter $\lambda > 0$. Definisikan untuk $t \geq 0$,

$$S_{N(t)} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{N(t)}.$$

Variabel acak $S_{N(t)}$ menyatakan waktu tunggu sampai terjadinya kejadian terakhir pada interval waktu $[0,t]$. Teorema berikut menyajikan sifat-sifat dari $S_{N(t)}$.

Teorema 1.
Pada proses Poisson waktu tunggu $S_{N(t)}$ mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

a. Fungsi distribusi kumulatif dari $S_{N(t)}$ adalah

$$F_{S_{N(t)}}(x) = e^{-\lambda(t-x)}, \quad 0 < x < t.$$

b. Fungsi kepadatan probabilitas dari $S_{N(t)}$ adalah

$$f_{S_{N(t)}}(x) = \lambda e^{-\lambda(t-x)}, \quad 0 < x < t \text{ dan } P(S_{N(t)} = 0) = e^{-\lambda t}.$$

c. Mean dari $S_{N(t)}$ adalah

$$E[S_{N(t)}] = t - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$$

d. Variansi dari $S_{N(t)}$ adalah

$$Var[S_{N(t)}] = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2t}{\lambda^2} e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-2\lambda t}$$

Bukti:

a. Dengan mengkondisikan pada kejadian $N(t) = n$ diperoleh

$$F_{S_{N(t)}}(x) = P\left(S_{N(t)} \leq x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \leq x \mid N(t) = n\right) P(N(t) = n)$$

Jika $N(t) = 0$ maka $S_{N(t)} = S_0 = 0$ dan untuk $x \geq 0$, $P(S_0 \leq x \mid N(t) = 0) = 1$, sehingga

$$F_{S_{N(t)}}(x) = P(N(t) = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \leq x \mid N(t) = n\right) P(N(t) = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(S_n \leq x \mid N(t) = n\right) P(N(t) = n)$$

Jika diberikan $N(t) = n$, maka distribusi bersama dari S_1, S_2, ..., S_n sama dengan distribusi bersama order statistik dari n variabel acak yang saling independen dan berdistribusi identik uniform pada interval $(0,t)$, lihat Ross [1]. Teorema ini mengimplikasikan bahwa fungsi kepadatan probabilitas bersyarat dari S_1, S_2, ..., S_n jika diberikan $N(t) = n$ adalah

$$f(s_1, s_2, \ldots, s_n \mid n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n < t.$$

Sebagai akibat dari teorema di atas, distribusi bersyarat marginal dari S_n jika diberikan $N(t) = n$ adalah

$$f_{S_n}(s_n \mid n) = \int_{0<s_1<s_2<\ldots<s_n} f(s_1, s_2, \ldots, s_n \mid n) ds_1 ds_2 \ldots ds_{n-1} = \frac{n s_n^{n-1}}{t^n}, \quad 0 < s_n < t.$$

Dengan demikian fungsi distribusi kumulatif bersyarat dari S_n jika diberikan $N(t) = n$ adalah

$$F_{S_n}(s_n \mid n) = \int_0^{s_n} f_{S_n}(x \mid n) dx = \int_0^{s_n} \frac{n x^{n-1}}{t^n} dx = \left(\frac{s_n}{t}\right)^n$$

Jadi

$$F_{S_{N(t)}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{S_n}(x \mid n) P(N(t) = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{t} \right)^n \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!!} = e^{-\lambda(t-x)}, \quad 0 < x < t.$$

b. Fungsi kepadatan probabilitas dari $S_{N(t)}$ adalah

$$f_{S_{N(t)}}(x) = \frac{d}{dx} F_{S_{N(t)}}(x) = \lambda e^{-\lambda(t-x)}, \quad 0 < x < t.$$

Waktu tunggu $S_{N(t)}$ mempunyai massa pada titik 0. Jelas bahwa $S_{N(t)} = 0$ jika dan hanya jika $N(t) = 0$, dan $N(t) = 0$ jika dan hanya jika $X_1 > t$. Jadi

$$P(S_{N(t)} = 0) = P(X_1 > t) = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t}.$$

c. Mean dari $S_{N(t)}$ adalah

$$E[S_{N(t)}] = 0 \times P(N(t) = 0) + \int_0^t x f_{S_{N(t)}}(x) dx = \int_0^t \lambda x e^{-\lambda(t-x)} dx = t - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$$

d. Momen kedua dari $S_{N(t)}$ adalah

$$E[S_{N(t)}^2] = 0 \times P(N(t) = 0) + \int_0^t x^2 f_{S_{N(t)}}(x) dx = t^2 - \frac{2t}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^2} e^{-\lambda t}$$

Sebagai akibatnya

$$Var[S_{N(t)}] = E[S_{N(t)}^2] - (E[S_{N(t)}])^2 = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2t}{\lambda^2} e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-2\lambda t}$$

B. Distribusi $S_{N(t)}$ pada ProsesRenewal

Pikirkan proses renewal ($N(t)$, $t \geq 0$) dengan waktu-waktu antar kedatangan X_1, X_2, … yang berdistribusi sebarang dengan fungsi distribusi kumulati F. Sifat-sifat dari $S_{N(t)}$ disajikan dalam bentuk transformasi Laplace yang dapat diinversi secara numerik, lihat [4].

Teorema 2.
Pada proses renewal waktu tunggu $S_{N(t)}$ mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

a. Transformasi Laplace dari $S_{N(t)}$ adalah

$$\int_0^{\infty} E\left[\exp\left(-\alpha S_{N(t)}\right)\right] e^{-\beta t} dt = \frac{1 - F^*(\beta)}{\beta[1 - F^*(\alpha + \beta)]}$$

dimana F^* adalah transformasi Laplace-Stieltjes dari F.

ISBN. 978-602-73403-0-5

b. Transformasi Laplace dari mean dan momen kedua dari $S_{N(t)}$ adalah

$$\int_0^\infty E\left[S_{N(t)}\right]e^{-\beta t}dt = \frac{\int_0^\infty xe^{-\beta x}dF(x)}{\beta[1-F^*(\beta)]}$$

dan

$$\int_0^\infty E\left[S_{N(t)}^2\right] = \frac{[1-F^*(\beta)]\int_0^\infty x^2e^{-\beta x}dF(x)+2\left[\int_0^\infty xe^{-(\alpha+\beta)x}dF(x)\right]^2}{\beta[1-F^*(\alpha+\beta)]}$$

Bukti:

a. Untuk fungsi terukur ϕ dan α, β> 0,

$$\int_0^\infty E\left[\exp\left(-\alpha\sum_{i=1}^{N(t)}\phi(X_i)\right)\right]e^{-\beta t}dt = \frac{1-F^*(\beta)}{\beta[1-\int_0^\infty e^{-\beta t-\alpha\phi(t)}dF(t)]}$$

lihat [5]. Ambil $\phi(t) = t$, maka

$$\int_0^\infty E\left[\exp\left(-\alpha S_{N(t)}\right)\right]e^{-\beta t}dt = \frac{1-F^*(\beta)}{\beta[1-F^*(\alpha+\beta)]}.$$

b. Transformasi Laplace dari mean dan momen kedua dari$S_{N(t)}$masing-masing dapat diperoleh dengan mencari turunan pertama dan kedua dari transformasi Laplace dari $S_{N(t)}$ terhadap α lalu mengganti α dengan 0.

C. Sifat-sifat dari$J_m$pada proses renewal

Teorema berikut tentang sifat-sifat dari $J_m = \sum_{n=1}^{m} S_n$ dimana $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ pada proses renewal.

Teorema 3.

Jumlah parsial J_m pada proses renewal memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

a. Mean dari J_m adalah

$$E[J_m] = \frac{1}{2}m(m+1)\mu.$$

b. Variansi dari J_m adalah

$$Var[J_m] = \frac{m(m+1)(2m+1)\sigma^2}{6}.$$

c. Fungsi pembangkit momen dari J_m adalah

$$M_{J_m}(t) = \prod_{i=1}^{m} M_X(t(m+1-i)).$$

d. Limit mean dari J_m adalah

$$\lim_{m\to\infty} \frac{E[J_m]}{m^2} = \frac{\mu}{2}.$$

e. Limit variansi dari J_m adalah

$$\lim_{m\to\infty} \frac{Var[J_m]}{m^3} = \frac{\sigma^2}{3}.$$

Bukti:

a. Mean dari J_m adalah

$$E[J_m] = E\left[\sum_{i=1}^{m}(m+1-i)X_i\right] = \sum_{i=1}^{m}(m+1-i)\mu = \frac{1}{2}m(m+1)\mu$$

b. Variansi dari J_m adalah

c.

$$Var[J_m] = Var\left[\sum_{i=1}^{m}(m+1-i)X_i\right] = \sum_{i=1}^{m}(m+1-i)^2\sigma^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)\sigma^2}{6}$$

d. Fungsi pembangkit momen dari J_m adalah

$$M_{J_m}(t) = E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{m} t(m+1-i)X_i\right)\right] = \prod_{i=1}^{m} M_X(t(m+1-i))$$

e. Limit mean dari J_m adalah

$$\lim_{m\to\infty} \frac{E[J_m]}{m^2} = \lim_{m\to\infty} \frac{m(m+1)\mu}{2m^2} = \frac{\mu}{2}$$

f. Limit variansi dari J_m adalah

$$\lim_{m\to\infty} \frac{Var[J_m]}{m^3} = \lim_{m\to\infty} \frac{m(m+1)(2m+1)\sigma^2}{6m^3} = \frac{\sigma^2}{3}$$

D. Sifat-sifat dari $J_{N(t)}$ *pada proses Poisson*

Teorema berikut tentang sifat-sifat dari $J_{N(t)} = \sum_{n=1}^{N(t)} S_n$ dimana $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ pada proses Poisson.

Teorema 4.
Jumlah parsial $J_{N(t)}$ pada proses Poisson memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

a. Transformasi Laplace dari $J_{N(t)}$ adalah

$$E\left[\exp\left(-\alpha J_{N(t)}\right)\right] = \exp\left(\frac{\lambda(1-\alpha t - e^{-\alpha t})}{\alpha}\right)$$

b. Mean dari $J_{N(t)}$ adalah

$$E\left[J_{N(t)}\right] = \frac{\lambda t^2}{2}$$

c. Variansi dari $J_{N(t)}$ adalah

$$Var\left[J_{N(t)}\right] = \frac{\lambda t^3}{3}$$

d. Limit distribusi dari $J_{N(t)}$ adalah normal dengan mean $\lambda t^2/2$ dan variansi $\lambda t^3/3$ untuk $t\to\infty$.

Bukti:

a. Transformasi Laplace dari $J_{N(t)}$

$$E\left[\exp\left(-\alpha J_{N(t)}\right)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\exp\left(-\alpha\sum_{i=1}^{n} S_i \mid N(t)=n\right)\right] P(N(t)=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\exp\left(-\alpha\sum_{i=1}^{n} U_i\right)\right] P(N(t)=n)$$

dimana U_i saling independen dan berdistribusi identik uniform pada interval $(0,t)$. Karena

$$E\left[\exp\left(-\alpha U_i\right)\right] = \frac{1}{\alpha t}\left(1-e^{-\alpha t}\right)$$

maka

$$E\left[\exp\left(-\alpha J_{N(t)}\right)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha t}\left(1-e^{-\alpha t}\right)\right]^n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = \exp\left(\frac{\lambda(1-\alpha t - e^{-\alpha t})}{\alpha}\right)$$

b. Mean dari $J_{N(t)}$

$$E\left[J_{N(t)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i \mid N(t)=n\right] P(N(t)=n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} E[U_i]\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

Karena U_i berdistribusi uniform pada interval $(0,t)$ maka

$$E\left[J_{N(t)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{nt}{2}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} = \frac{\lambda t^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t} = \frac{\lambda t^2}{2}$$

c. Momen kedua dari $J_{N(t)}$

Momen kedua dari $J_{N(t)}$ dapat dibuktikan secara serupa dengan bukti untuk mean dari $J_{N(t)}$, yakni dengan menggunakan teknik ekspektasi bersyarat dan menggunakan sifat statistik urutan dari distribusi eksponensial. Dapat diperiksabahwa

$$E\left[J^2_{N(t)}\right] = \frac{\lambda t^3}{3} + \frac{\lambda^2 t^4}{4}$$

Sebagai akibatnya, variansi dari $J_{N(t)}$ adalah

$$Var\left[J_{N(t)}\right] = E\left[J^2_{N(t)}\right] - E\left[J_{N(t)}\right]^2 = \frac{\lambda t^3}{3}$$

d. Limit distribusi dari $J_{N(t)}$

$$E\left[\exp\left(-i\alpha\frac{J_{N(t)}-\frac{1}{2}\lambda t^2}{\sqrt{\frac{1}{3}\lambda t^3}}\right)\right]=\exp\left(\tfrac{1}{2}i\alpha\sqrt{3\lambda t}\right)E\left[\exp\left(-\frac{i\alpha\sqrt{3}}{t\sqrt{\lambda t}}J_{N(t)}\right)\right]$$

Menggunakan hasil bagian a diperoleh

$$E\left[\exp\left(-\frac{i\alpha\sqrt{3}}{t\sqrt{\lambda t}}J_{N(t)}\right)\right]=\exp\left(-\frac{1}{2}i\alpha\sqrt{3\lambda t}-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{\lambda t\sqrt{\lambda t}}{i\alpha\sqrt{3}}o(t^{-3/2})\right)$$

untuk $t\to\infty$. Sebagai akibatnya

$$E\left[\exp\left(-i\alpha\frac{J_{N(t)}-\frac{1}{2}\lambda t^2}{\sqrt{\frac{1}{3}\lambda t^3}}\right)\right]\to\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2\right)\text{ untuk } t\to\infty$$

yang merupakan fungsi karakteristik dari distribusi normal standar. Jadi dapat disimpulkan bahwa $J_{N(t)}$ mendekati distribusi normal dengan mean $\lambda t^2/2$ dan variansi $\lambda t^3/3$ untuk $t\to\infty$.

E. Sifat-sifat dari $J_{N(t)}$ pada proses renewal

Untuk membahas sifat-sifat dari $J_{N(t)}$ akan digunakan teori tentang proses titik, lihat [6], [7] dan [8]. Misalkan (Ω,F,P) adalah ruang probabilitas di mana barisan variabel acak non-negative $X_1, X_2, \ldots$ yang saling independen dan berdistribusi identik didefinisikan, dan juga barisan variabel acak $U_1, U_2, \ldots$, yaitu barisan variabel acak yang saling independen dan berdistribusi eksponensial dengan parameter 1 didefinisikan, sedemikian hingga barisan (X_i) dan (U_i) saling independen. Misalkan $T_1, T_2, \ldots$ adalah barisan jumlah parsial dari $U_1, U_2, \ldots$, yakni

$$T_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n.$$

Maka pemetaan

$$\Phi:\omega\to\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{(T_n(\omega),X_n(\omega))}$$

di mana $\delta_{(x,y)}$ adalah ukuran Dirac pada titik (x,y) merupakan proses Poisson pada $E = [0,\infty)\times[0,\infty)$ dengan ukuran intensitas $\nu(dtdx) = dt\, dF(x)$. Misalkan M adalah himpunan semua ukuran titik pada E. Distribusi dari Φ akan dinotasikan dengan P_ν, yakni $P_\nu = P \circ \Phi^{-1}$.

Definisikan untuk $t\geq 0$, fungsional A(t) pada M dengan

$$A(t,\mu)=\int_E 1_{[0,t)}(s)x\mu(dsdx).$$

Definisikan juga

$$J(t,\mu)=\int_E\int_E 1_{[0,x)}(t-A(t,\mu))\mu([r,s)\times[0,\infty))u1_{[0,s)}(r)\mu(drdu)\mu(dsdx)$$

Maka dapat ditunjukkan dengan mudah bahwa dengan probabilitas 1,

$$J_{N(t)}=J(t,\Phi)$$

Teorema 5.

Misalkan $X_1, X_2, \ldots$ adalahbarisanvariabelacak non-negatif yang salingindependendanberdistribusiidentikdengansebarangfungsidistribusi$F$. Definisikan

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$S_0 = 0$, dan $(N(t), t\geq 0)$ adalah proses renewal dengan waktu tunggu S_n. Definisikan untuk $t\geq 0$,

$$J_{N(t)}=\sum_{n=1}^{N(t)}S_n.$$

Maka untuk $a, b > 0$,

$$\int_0^{\infty}E(\exp\{-aJ_{N(t)}\}e^{-bt}dt=\frac{1-F^*(b)}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}F^*(a(n-+1-i)+b).$$

ISBN. 978-602-73403-0-5

Bukti:

$$E(e^{-aJ_{N(t)}}) = \int_M \exp\{-a\int_E\int_E 1_{[0,x)}(t-A(s,\mu))\mu([r,s)\times[0,\infty))u1_{[0,s)}(r)\mu(drdu)\mu(dsdx)\}P_\nu(d\mu)$$

$$= \int_M\int_E 1_{[0,x)}(t-A(s,\mu)\exp\{-a\int_E \mu([r,s)\times[0,\infty))u1_{[0,s)}(r)\mu(drdu)\}\mu(dsdx)P_\nu(d\mu)$$

Dengan menerapkan rumus Palm diperoleh

$$E(e^{-aJ_{N(t)}}) = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_M 1_{[0,x)}(t-A(s,\mu+\delta_{(s,x)}))$$

$$\exp\{-\int_E a\mu([r,s)\times[0,\infty))u1_{[0,s)}(r)\mu(drdu)\}P_\nu(d\mu)dF(x)ds$$

Dengan menggunakan teorema Fubini diperoleh

$$\int_0^\infty E(e^{-aJ_{N(t)}})e^{-bt}dt = \frac{1-F*(b)}{b}\int_0^\infty\int_M \exp\{-\int_E [a\mu([r,s)\times[0,\infty)+b]u1_{[0,s)}(r)\mu(drdu)\}P_\nu(d\mu)ds$$

Integral terhadap P_ν dapat ditulis sebagai jumlah integral atas himpunan $B_n = \{\mu\in M : \mu([0,s)\times[0,\infty)) = n\}$, n = 0, 1, 2, ... Tetapkan sebuah nilai n dan ambil $\mu\in M$ sedemiian hingga $\mu([0,s)\times[0,\infty)) = n$ dan $\mathrm{supp}(\mu) = ((t_i,x_i))$, i = 1, 2, ... Maka $t_n< s \le t_{n+1}$. Untuk ukuran μ tersebut, integral terhadap $P_\nu$dapat dituliskan sebagai

$$\int_E [a\mu([r,s)\times[0,\infty)+b]u1_{[0,s)}(r)\mu(drdu) = \sum_{i=1}^\infty (a[N+1-i]+b)x_i$$

Karena ukuran $P_\nu$adalah bayangan dari ukuran P di bawah pemetaan Φ, maka dengan menyajikan integral terhadap $P_\nu$atas B_n sebagai integral terhadap P atas himpunan $A_n = \{\omega\in\Omega\text{: } T_n(\omega) < s \le T_{n+1}(\omega)\}$ dan dengan mengunakan asumsi bahwa barisan (T_n) dan (X_n) saling independen, diperoleh

$$\int_{B_n} \exp\{-\int_E [a\mu([r,s)\times[0,\infty)+b]u1_{[0,s)}(r)\mu(drdu)P_\nu(d\mu)$$

$$= \int_{A_n} \exp\left\{-\sum_{i=1}^n (a[n+1-i]+b)X_i(\omega)\right\}P(d\omega)$$

$$= \prod_{i=1}^n F*(a[n+1-i]+b)\frac{s^n e^{-s}}{n!}$$

Jadi

$$\int_M \exp\left\{-\int_E [a\mu([r,s)\times[0,\infty)+b]u1_{[0,s)}(r)\mu(drdu)\right\}P_\nu(d\mu) = \sum_{n=0}^\infty\prod_{i=1}^n F*(a[n+1-i]+b)\frac{s^n e^{-s}}{n!}$$

Karena untuk setiap *n*, $\int_0^\infty \frac{s^n e^{-s}}{n!}ds = 1$ maka teorema terbukti.

Teorema 6.

Dengan asumsi sebagaimana pada Teorema 5, jika $E[X_1 e^{-bX_1}] < \infty$, maka untuk *b*>0

$$\int_0^\infty E[J_{N(t)}]e^{-bt}dt = \frac{E[X_1 e^{-bX_1}]}{b[1-F*(b)]^2}.$$

dan jika $E[X_1^2 e^{-bX_1}] < \infty$, maka untuk b>0

$$\int_0^\infty E[J^2_{N(t)}]e^{-bt}dt = \frac{[1+F^*(b)]E[X_1^2 e^{-bX_1}]}{b[1-F^*(b)]^3} + \frac{2[2+F^*(b)]E[X_1 e^{-bX_1}]^2}{b[1-F^*(b)]^4}.$$

Bukti:
Transformasi Laplace dari mean dan momen kedua dari $J_{N(t)}$ masing-masing dapat diperoleh dengan mencari turunan pertama dan kedua dari transformasi Laplace dari $S_{N(t)}$ terhadap α lalu mengganti α dengan 0.

Teorema 7.
Jika $\mu = E[X_1] < \infty$ maka untuk t menuju tak hingga

$$E[J_{N(t)}] \sim \frac{t^2}{2\mu}.$$

Bukti:
Jelas bahwa

$$\int_0^\infty e^{-bt}dE[J_{N(t)}] = \lim_{t\to\infty} E[J_{N(t)}]e^{-bt} + b\int_0^\infty E[J_{N(t)}]e^{-bt}dt.$$

Karena $0 \le J_{N(t)} \le tN(t)$ maka

$$0 \le \lim_{t\to\infty} E[J_{N(t)}]e^{-bt} \le \lim_{t\to\infty} tN(t)e^{-bt} = \lim_{t\to\infty} t\left[\frac{t}{\mu} + o(1)\right]e^{-bt} = 0$$

Sebagai akibatnya

$$\int_0^\infty e^{-bt}dE[J_{N(t)}] = b\int_0^\infty E[J_{N(t)}]e^{-bt}dt = \frac{E[X_1 e^{-bX_1}]}{[1-F^*(b)]^2}$$

Dengan menggunakan teorema konvergensi terdominasi disimpulkan $E[X_1 e^{-bX_1}] = \mu + o(1)$ dan

$$F^*(b) = 1 - \mu b + o(b) \text{ untuk } b \to 0.$$

Jadi

$$\int_0^\infty e^{-bt}dE[J_{N(t)}] \sim \frac{1}{\mu^2} \text{ untuk } b \to 0.$$

Karena $E[J_{N(t)}]$ tidak turun, maka dengan menggunakan teorema Tauber (dengan $\gamma = 2$) teorema terbukti.

III. SIMPULAN DAN SARAN

Waktutunggu $S_{N(t)}$ dan waktu tunggu S_n mempunyai sifat-sifat yang berbeda baik pada proses Poisson maupun pada proses renewal. Pada proses Poisson $S_{N(t)}$ bukan berdistribusi gamma, bahkan memiliki massa pada titik $t = 0$. Mean, variansi, fungsi pembangkit momen, dan sifat-sifat limit dari jumlah parsial $J_n = S_1 + S_2 + ... + S_n$ dan jumlah parsial $J_{N(t)} = S_1 + S_2 + ... + S_{N(t)}$ juga berbeda baik pada proses Poisson maupun pada proses renewal. Sifat-sifat dari $S_{N(t)}$ dan $J_{N(t)}$ pada proses renewal disajikan dalam bentuk transformasi Laplace yang harus diinversi secara numerik. Distribusi probabilitas dari $J_{N(t)}$ disajikan dalam bentuk transformasi Laplace ganda yang berbentuk deret tak hingga dengan suku-suku yang sangat kompleks. Oleh karena itu disarankan untuk dikembangkan suatu prosedur untuk menginversi transformasi Laplace ganda dari $J_{N(t)}$ yang cepat dan akurat.

DAFTAR PUSTAKA

[1] S. M. Ross, Introduction to Probability Models, Seventh Edition, Academic Press, San Diego, 2000.

[2] Suyono and J. A. M. Van der Weide., "A Method for Computing Total Downtime Distributions in Repairable Systems", Journal of Applied Probability vol. 40 no. 3, pp. 343-353, 2003.

[3] Suyono and J. A. M. Van der Weide, “Note on Superposition of Renewal Processes”, Jurnal Matematika dan Sains vol. 15 no. 2 tahun 2010 pp. 93-100, 2010.

[4] P. W. IsegerandM. A. J. Smith, “A new method for inverting Laplace transforms”, Econometric Institute, EUR Rotterdam,pp. 1 – 14, 1998.

[5] Suyono, Renewal Processes and Repairable Systems, Delft University Press, Delft, 2002.

[6] R. D. Reiss, A Course on Point Processes, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[7] S. I. Resnick, Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[8] S. I. Resnick, Adventures in Stochastic Processes, Birkauser, Boston, 1992.