A - 7

Pasangan Baku Dalam Polinomial Monik

Zulfia Memi Mayasari
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu
zulfiamemimaysari@yahoo.com

Abstrak— Tulisan ini membahas karakteristik pasangan baku dalam polinomial monik. Polinomial matriks didefinisikan sebagai polinomial dari variabel-variabel kompleks dengan koefisien matriks. Polinomial matriks juga dikenal sebagai $\boldsymbol{\lambda}$-matriks yang biasa ditulis dalam bentuk $\boldsymbol{L(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} A_i \lambda^i}$ dengan $\boldsymbol{A_0, A_1, \dots, A_l}$ adalah matriks-matriks berukuran $\boldsymbol{nxn}$ yang entri-entrinya bilangan kompleks. Jika $\boldsymbol{A_l = I}$ yaitu matriks identitas maka polinomial matriks $\boldsymbol{L(\lambda)}$ dikatakan polinomial monik. Pada suatu polinomial monik $\boldsymbol{L(\lambda)}$ dapat dibentuk pasangan matriks $(\boldsymbol{X, T})$ yang disebut pasangan baku untuk $\boldsymbol{L(\lambda)}$ jika memenuhi dua kondisi berikut: (1). $\boldsymbol{Col(XT^i)_{i=0}^{l-1}\ nonsingular}$ (2). $\boldsymbol{\sum_{i=0}^{l-1} A_i X T^i + XT^l = 0}$. Pemahaman akan pasangan baku ini merupakan dasar dalam memahami tripel baku yang memegang peranan penting dalam menentukan invers polinomial matriks dan teorema representasi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pasangan baku dapat terbentuk dari linierisasi polinomial monik $\boldsymbol{L(\lambda)}$ atau setiap polinomial monik selalu mempunyai pasangan baku, pasangan baku untuk polinomial monik tidak tunggal dan setiap pasangan baku untuk $\boldsymbol{L(\lambda)}$ similar dengan pasangan baku $(\boldsymbol{P_1, C_1})$ dengan $\boldsymbol{C_1}$ merupakan matriks companion pertama.

Kata kunci: ***pasangan baku, polinomial matriks, polinomial monik.***

I. PENDAHULUAN

Teori spektral polinomial matriks memegang peranan yang sangat penting dalam matematika karena banyak persoalan-persoalan dalam matematika yang berkaitan dengan dengan teori ini seperti persamaan differensial, analisa numerik, dan masalah nilai awal. Salah satu dasar dalam teori spektral polinomial matriks adalah masalah linierisasi [1]. Persoalan linierisasi polinomial matriks telah banyak dibahas dalam beberapa literatur diantaranya [1], [4] dan [5]. Linierisasi polinomial matriks dapat diungkapkan dalam bentuk pasangan matriks. Pasangan matriks ini dengan beberapa sifat yang harus dimilikinya disebut pasangan baku untuk polinomial matriks tersebut [1] dan [4]. Pemahaman akan pasangan baku merupakan dasar dalam memahami tripel baku yang memegang peranan penting dalam menentukan invers polinomial matriks dan teorema representasi.

Polinomial matriks didefinisikan sebagai polinomial dari variabel-variabel kompleks dengan koefisien matriks. Polinomial matriks juga dikenal sebagai λ-matriks yang biasa ditulis dalam bentuk $L(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} A_i \lambda^i$ dengan $A_0, A_1, \dots, A_l$ adalah matriks-matriks berukuran nxn yang entri-entrinya bilangan kompleks. Jika $A_l \neq 0$ yaitu matriks nol maka polinomial matriks $L(\lambda)$ tersebut dikatakan berderajat l dan jika $A_l = I$ yaitu matriks identitas maka polinomial matriks ini dikatakan monik (polinomial monik) [1], [4] dan [6]. Polinomial monik biasa ditulis dalam bentuk $L(\lambda) = I\lambda^l + \sum_{i=0}^{l-1} A_i \lambda^i$, dengan $L(\lambda)$ berderajat l dan berukuran nxn [1] dan [3]. Pada suatu polinomial monik $L(\lambda)$ dapat dibentuk pasangan matriks (X, T) yang disebut pasangan baku untuk $L(\lambda)$ jika memenuhi dua kondisi berikut: (1). $Col\ (XT^i)_{i=0}^{l-1}\ non\ singular$ (2). $\sum_{i=0}^{l-1} A_i X T^i + XT^l = 0$. Dalam tulisan ini akan dibahas karakteristik pasangan baku dalam polinomial monik. Sebelum dibahas karakteristik pasangan baku dalam polinomial monik akan diuraikan terlebih dahulu beberapa konsep dasar yang mendukung dalam pembahasan.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini akan diberikan definisi-definisi dan teorema-teorema yang mendukung hasil dan pembahasan.

Definisi II.1. [1], [3], [4], [5].

Suatu polinomial matriks linier $\lambda I - A$ berukuran $nlxnl$ disebut linierisasi polinomial monik $L(\lambda)$ jika $\lambda I - A$ ekuivalen dengan $\begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ dan ditulis $\lambda I - A \sim \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$. Selanjutnya matriks A ini disebut sebagai linierisasi untuk $L(\lambda)$.

Berdasarkan Definisi II.1, persoalan linierisasi matriks polinomial monik $L(\lambda)$ adalah mencari matriks polinomial linier yang ekuivalen dengan suatu matriks polinomial [5]. Hal ini dapat ditunjukkan dalam ilustrasi berikut:

Misalkan polinomial monik $L(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \lambda^3$ atas bilangan kompleks. Kemudian dibentuk matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \text{ sehingga:}$$

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \lambda + a_2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dengan melakukan operasi baris elementer pada matriks $\lambda I - A$ sampai diperoleh matriks:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \lambda^3 & a_1 + a_2\lambda + \lambda^2 & \lambda + a_2 \end{bmatrix}$$

Maka $\lambda I - A \sim B$, sehingga: det $(\lambda I - A) =$ det $(B) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \lambda^3 = L(\lambda)$ yang artinya A merupakan linierisasi untuk $L(\lambda)$.

Definisi II.2. [1], [2], [3], [5] dan [6].
Diberikan polinomial monik $L(\lambda) = I\lambda^l + \sum_{i=0}^{l-1} A_i\lambda^i$ yang berukuran nxn maka dapat dibentuk matriks

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & \cdot & -A_{l-1} \end{bmatrix}$$

dengan C_1 berukuran $nlxnl$ dinamakan matriks companion pertama dari $L(\lambda)$.

Definisi II.3. [1], [5] dan[6].
Diberikan polinomial monik $L(\lambda) = I\lambda^l + \sum_{i=0}^{l-1} A_i\lambda^i$ yang berukuran nxn maka dapat dibentuk matriks

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -A_0 \\ I & 0 & 0 & \cdots & -A_1 \\ 0 & I & 0 & & -A_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -A_{l-1} \end{bmatrix}$$

dengan C_2 berukuran $nlxnl$ dinamakan matriks companion kedua dari $L(\lambda)$.

Teorema II.4. [1], [4] dan [5].

(i) Jika X_1 dan X_2 adalah linierisasi dari polinomial monik $L(\lambda)$ maka X_1 similar dengan X_2 dan ditulis $X_1 \sim X_2$

(ii) Jika T merupakan linierisasi dari $L(\lambda)$ dan $S \sim T$ maka S juga merupakan linierisasi dari $L(\lambda)$.

Teorema II.5. [1],[4],[5] dan [6].

Diberikan $I\lambda - S$ dan $I\lambda - T$ berukuran nxn maka $I\lambda - S \sim I\lambda - T$ jika dan hanya jika S dan T similar.

Definisi II.6. [1] dan [4].

Misalkan $L(\lambda) = I\lambda^l + \sum_{i=0}^{l-1} A_i\lambda^i$ merupakan polinomial monik berderajat l dan berukuran $n\,x\,n$. Pasangan matriks (X,T) dengan X berukuran $nxnl$ dan T berukuran $nlxnl$ disebut pasangan baku untuk$L(\lambda)$ jika memenuhi kondisi berikut:

1. $Col\ (XT^i)_{i=0}^{l-1}\ non\ singular$
2. $\sum_{i=0}^{l-1} A_iXT^i + XT^l = 0.$

Berdasarkan Definisi II.6, $Col\ (XT^i)_{i=0}^{l-1}$ non singular sehingga transpose dari $Col\ (XT^i)_{i=0}^{l-1}$ yaitu $(Col\ (XT^i)_{i=0}^{l-1})^t$ = $Row\ ((T^t)^iX^t)_{i=0}^{l-1}$ juga non singular. Pada bagian 2 Definisi II.6, misalkan diambil pasangan baku untuk$L(\lambda)$ yaitu(P_1, C_1), dan (T_0, Y_0) dengan $T_0 = C_1^t$ dan $Y_0 = P_1^t$, sehingga dapat ditulis sebagai $\sum_{i=0}^{l-1} A_iP_1C_1^i + P_1C_1^l = 0. (P_1C_1^i)^t = ((C_1^t)^iP_1^t) = (T_0^iY_0)$. Dari operasi pergandaan matriks $T_0^iY_0$ untuk $i = 0,1,2,\dots,l$ diperoleh:

$$T_0^iY_0 = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & untuk\ i = 1,2,\dots,l-1\ dan\ I\ pada\ baris\ ke - i + 1 \\ \begin{bmatrix} -A_0 \\ -A_1 \\ \vdots \\ -A_{l-1} \end{bmatrix} & untuk\ i = l \end{cases}$$

Sehingga $\sum_{i=0}^{l-1} A_i\left(T_0^iY_0\right) + (T_0^lY_0) = \sum_{i=0}^{l-1} A_i((C_1^t)^iP_1^t) + (C_1^t)^lP_1^t = 0.$

Berdasarkan uraian ini maka Definisi II.6 juga dapat dituliskan sebagai berikut:

Definisi II.7.[5].

Misalkan $L(\lambda) = I\lambda^l + \sum_{i=0}^{l-1} A_i\lambda^i$ merupakan polinomial monik berderajat l dan berukuran $n\,x\,n$. Pasangan matriks (T^t, X^t) dengan T^t berukuran $nlxnl$ dan X^t berukuran $nlxn$ disebut pasangan baku untuk $L(\lambda)$ jika memenuhi kondisi berikut:

1. $Row\ ((T^t)^iX^t)_{i=0}^{l-1}\ non\ singular$
2. $\sum_{i=0}^{l-1} A_i(T^t)^iX^t + (T^t)^lX^t = 0.$

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan diberikan hasil dan pembahasan mengenai karakteristik pasangan baku dalam polinomial monik.

Teorema III.1.

Jika$P_1 = [I\ \ 0\ \ 0\ \ \dots\ \ 0]$ berukuran $nxnl$ dan C_1 matriks companion pertama dari $L(\lambda) = I\lambda^l + \sum_{i=0}^{l-1} A_i\lambda^i$ maka (P_1, C_1) pasangan baku $L(\lambda)$.

Bukti:
Untuk membuktikan (P_1, C_1) pasangan baku $L(\lambda)$ harus dipenuhi dua kondisi berikut:
1. $Col\ (P_1 C_1^i)_{i=0}^{l-1}\ non\ singular$
2. $\sum_{i=0}^{l-1} A_i P_1 C_1^i + P_1 C_1^l = 0$.
- Untuk $i = 0$

$$P_1 C_1^0 = [I\ \ 0\ \ 0\ \dots\ \ 0] \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & I \end{bmatrix} = [I\ \ 0\ \ 0\ \dots\ \ 0]$$

- Untuk $i = 1$

$$P_1 C_1^1 = [I\ \ 0\ \ 0\ \dots\ \ 0] \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & \cdot & -A_{l-1} \end{bmatrix} = [0\ \ I\ \ 0\ \dots\ \ 0]$$ dan seterusnya sampai $i = l - 1$

Dari pergandaan matriks $P_1 C_1^i$ diperoleh:

$P_1 C_1^i = [0\ \ 0\ \ \dots\ \ 0\ \ I\ \ 0\ \ \dots\ \ 0]\ untuk\ i = 0, 1, \dots, l - 1$ dan I terletak pada kolom ke- $i + 1$ serta
$P_1 C_1^l = [-A_0\ \ -A_1\ \ \dots\ \ -A_l]\ untuk\ i = l$

Diperoleh $col\ \left(P_1 C_1^i\right)_{i=0}^{l-1} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_1 C_1 \\ \vdots \\ P_1 C_1^{l-1} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & I \end{bmatrix} = I \qquad \dots\dots\dots\dots\dots \qquad (1)$$

Matriks I merupakan matriks non singular sehingga $Col(P_1 C_1^i)_{i=0}^{l-1}$ non singular. Jadi kondisi (1) untuk membuktikan (P_1, C_1) pasangan baku $L(\lambda)$ dipenuhi.

Selanjutnya akan ditunjukkan kondisi (2) untuk membuktikan (P_1, C_1) pasangan baku $L(\lambda)$ yaitu

$\sum_{i=0}^{l-1} A_i P_1 C_1^i + P_1 C_1^l = 0$ dipenuhi.

$$\sum_{i=0}^{l-1} A_i P_1 C_1^i + P_1 C_1^l = A_0 P_1 C_1^0 + A_1 P_1 C_1^1 + \dots + A_{l-1} P_1 C_1^{l-1} + \dots + P_1 C_1^l$$

$$\sum_{i=0}^{l-1} A_i P_1 C_1^i + P_1 C_1^l = A_0\,(I\ \ 0\ \dots\ \ 0) + A_1(0\ \ I\ \dots\ \ 0) + \dots + A_{l-1}(0\ \ 0\ \dots\ \ I) + (-A_0 - A_1 \dots - A_{l-1})$$

$$= (A_0\ \ A_1\ \ \dots\ \ A_{l-1}) + (-A_0\ \ - A_1\ \ \dots\ \ - A_{l-1})$$

$$= (0\ \ 0\ \ 0\ \ \dots\ \ 0) = 0 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots \qquad (2)$$

Jadi kondisi (2) untuk membuktikan (P_1, C_1) pasangan baku $L(\lambda)$ dipenuhi. Dari (1) dan (2) terbukti bahwa (P_1, C_1) pasangan baku untuk $L(\lambda)$.■

Untuk menunjukkan hal ini dapat dilihat pada contoh berikut:

Diberikan matriks $L(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3 & \sqrt{2}\lambda^2 - \lambda \\ \sqrt{2}\lambda^2 + \lambda & \lambda^3 \end{bmatrix}$

Dari matriks $L(\lambda)$ akan ditentukan pasangan baku (P_1, C_1) untuk $L(\lambda)$.

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3 & \sqrt{2}\lambda^2 - \lambda \\ \sqrt{2}\lambda^2 + \lambda & \lambda^3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari $L(\lambda)$ ini diperoleh $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$ sehingga matriks C_1 yang dihasilkan adalah:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & -A_1 & -A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$ dan matriks P_1 yang

dihasilkan adalah: $P_1 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Diperoleh pasangan baku (P_1, C_1) untuk $L(\lambda)$ adalah:

$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & -A_1 & -A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema III.2.

Diberikan (X_1, T_1) pasangan baku untuk $L(\lambda) = I\lambda^l + \sum_{i=0}^{l-1} A_i\lambda^i$. Suatu pasangan matriks (X_2, T_2) dengan X_2 berukuran $nxnl$ dan T_2 berukuran $nlxnl$ merupakan pasangan baku untuk $L(\lambda)$ jika dan hanya jika (X_2, T_2) similar dengan (X_1, T_1) yaitu ada matriks invertibel S berukuran $nlxnl$ yang terdefinisi secara tunggal sebagai berikut: $S = [Col(X_1T_1^i)_{i=0}^{l-1}]^{-1}.Col(X_2T_2^i)_{i=0}^{l-1}$ sehingga $X_2 = X_1S\ dan\ T_2 = S^{-1}T_1S$

Bukti:

($\Longrightarrow$) Diberikan pasangan baku untuk $L(\lambda)$ yaitu (X_1, T_1) dan (X_2, T_2)

Akan ditunjukkan bahwa (X_1, T_1) dan (X_2, T_2) similar.

Berdasarkan Teorema III.1, pasangan (P_1, C_1) merupakan pasangan baku untuk $L(\lambda)$ sehingga

$$C_1Col(X_1T_1^i)_{i=0}^{l-1} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & I \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & \cdot & -A_{l-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_1T_1 \\ \vdots \\ X_1T_1^{l-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X_1T_1 \\ X_1T_1^2 \\ \vdots \\ X_1T_1^l \\ -A_0X_1 - A_1X_1T_1 - \cdots - A_{l-1}X_1T_1^{l-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X_1T_1 \\ X_1T_1^2 \\ \vdots \\ X_1T_1^{l-1} \\ X_1T_1^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_1T_1 \\ \vdots \\ X_1T_1^{l-2} \\ X_1T_1^{l-1} \end{bmatrix} T_1 = Col\ (X_1T_1^i)_{i=0}^{l-1}\, T_1$$

Diperoleh $C_1Col\big(X_1T_1^i\big)_{i=0}^{l-1} = Col\big(X_1T_1^i\big)_{i=0}^{l-1}\, T_1$ atau

$C_1 = Col\big(X_1T_1^i\big)_{i=0}^{l-1}\, T_1[\ Col\big(X_1T_1^i\big)_{i=0}^{l-1}]^{-1}$ .... (1)

Jadi T_1 similar dengan C_1

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa C_1 similar dengan T_2.

$$C_1Col\big(X_2T_2^i\big)_{i=0}^{l-1} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & I \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & \cdot & -A_{l-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ X_2T_2 \\ \vdots \\ X_2T_2^{l-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X_2T_2 \\ X_2T_2^2 \\ \vdots \\ X_2T_2^l \\ -A_0X_2 - A_1X_2T_2 - \cdots - A_{l-1}X_2T_2^{l-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2T_2 \\ X_2T_2^2 \\ \vdots \\ X_2T_2^{l-1} \\ X_2T_2^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_2T_2 \\ \vdots \\ X_2T_2^{l-2} \\ X_2T_2^{l-1} \end{bmatrix} T_2$$

$$= Col\ (X_2T_2^i)_{i=0}^{l-1}T_2$$

Diperoleh $C_1Col\big(X_2T_2^i\big)_{i=0}^{l-1} = Col\big(X_2T_2^i\big)_{i=0}^{l-1}\, T_2$ atau

$T_2 = \Big[Col\big(X_2T_2^i\big)_{i=0}^{l-1}\Big]^{-1}\ C_1\ \Big[Col\big(X_2T_2^i\big)_{i=0}^{l-1}\Big]$ .... (2)

Jadi C_1 similar dengan T_2

Berdasarkan Teorema II.5, bahwa T_1 similar dengan C_1 jika dan hanya jika $I\lambda - T_1 \sim I\lambda - C_1$ dan C_1 similar dengan T_2 jika dan hanya jika $I\lambda - C_1 \sim I\lambda - T_2$. Karena relasi ekuivalen diperoleh: $I\lambda - T_1 \sim I\lambda - T_2$ yang artinya T_1 similar dengan T_2.

Hal ini dapat ditunjukkan dengan substitusi (1) ke (2) sebagai berikut:

$T_2 = [Col\big(X_2T_2^i\big)_{i=0}^{l-1}]^{-1}C_1Col\big(X_2T_2^i\big)_{i=0}^{l-1}$

$T_2 = \Big[Col\big(X_2T_2^i\big)_{i=0}^{l-1}\Big]^{-1}\ Col\big(X_1T_1^i\big)_{i=0}^{l-1}\, T_1\ \Big[\ Col\big(X_1T_1^i\big)_{i=0}^{l-1}\Big]^{-1}\ Col\big(X_2T_2^i\big)_{i=0}^{l-1}$ ..... (3)

Didefinisikan matriks $S = [\ Col\big(X_1T_1^i\big)_{i=0}^{l-1}]^{-1}Col\big(X_2T_2^i\big)_{i=0}^{l-1}$ sehingga (3) menjadi $T_2 = S^{-1}T_1S$.

Selanjutnya $P_1 Col(X_1 T_1^i)_{i=0}^{l-1} = [I \ \ 0 \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_1 T_1 \\ \vdots \\ X_1 T_1^{l-1} \end{bmatrix} = X_1$

$$P_1 Col(X_1 T_1^i)_{i=0}^{l-1} \left[Col(X_1 T_1^i)_{i=0}^{l-1}\right]^{-1} = X_1 \left[Col(X_1 T_1^i)_{i=0}^{l-1}\right]^{-1}$$

$$P_1 I = X_1 \left[Col(X_1 T_1^i)_{i=0}^{l-1}\right]^{-1} \text{ atau}$$

$$X_1 \left[Col(X_1 T_1^i)_{i=0}^{l-1}\right]^{-1} = [I \ \ 0 \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0]$$

Sehingga $X_1 S = X_1 [\, Col(X_1 T_1^i)_{i=0}^{l-1}]^{-1} Col(X_2 T_2^i)_{i=0}^{l-1} = [I \ \ 0 \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0] Col(X_2 T_2^i)_{i=0}^{l-1}$

$$= [I \ \ 0 \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0] \begin{bmatrix} X_2 \\ X_2 T_2 \\ \vdots \\ X_2 T_2^{l-1} \end{bmatrix} = X_2$$

Jadi $X_1 S = X_2$

Ketunggalan S dapat dilihat dari relasi:
$S = [\, Col(X_1 T_1^i)_{i=0}^{l-1}]^{-1} Col(X_2 T_2^i)_{i=0}^{l-1}$ sehingga $\left[Col(X_1 T_1^i)_{i=0}^{l-1}\right] S = Col(X_2 T_2^i)_{i=0}^{l-1}$
Terbukti bahwa (X_1, T_1) dan (X_2, T_2) adalah similar.

($\Leftarrow$) Diketahui (X_1, T_1) adalah pasangan baku dari $L(\lambda)$. Diberikan suatu pasangan matriks (X_2, T_2) yang similar dengan (X_1, T_1) yaitu memenuhi persamaan $X_2 = X_1 S$ dan $T_2 = S^{-1} T_1 S$ dengan S adalah matriks invertibel.
Akan ditunjukkan bahwa (X_2, T_2) adalah pasangan baku dari $L(\lambda)$.

Diketahui $Col(X_2 T_2^i)_{i=0}^{l-1} = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_2 T_2 \\ X_2 T_2^2 \\ \vdots \\ X_2 T_2^{l-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 S \\ X_1 S S^{-1} T_1 S \\ X_1 S S^{-1} T_1 S S^{-1} T_1 S \\ \vdots \\ X_1 S (S^{-1} T_1 S)^{l-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 S \\ X_1 T_1 S \\ X_1 T_1^2 S \\ \vdots \\ X_1 T_1^{l-1} S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_1 T_1 \\ X_1 T_1^2 \\ \vdots \\ X_1 T_1^{l-1} \end{bmatrix} S$

Matriks S invertibel sehingga $Col(X_2 T_2^i)_{i=0}^{l-1}$ adalah non singular.
Diketahui (P_1, C_1) pasangan baku untuk $L(\lambda)$. Berdasarkan Teorema III.1 maka C_1 similar dengan T_2 yang artinya T_2 dapat ditulis sebagai $T_2 = [Col(X_2 T_2^i)_{i=0}^{l-1}]^{-1} C_1 Col(X_2 T_2^i)_{i=0}^{l-1}$ atau $C_1 Col(X_2 T_2^i)_{i=0}^{l-1} = Col\ (X_2 T_2^i)_{i=0}^{l-1} T_2$

$$C_1 Col(X_2 T_2^i)_{i=0}^{l-1} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & I \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & \cdot & -A_{l-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ X_2 T_2 \\ \vdots \\ X_2 T_2^{l-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X_2 T_2 \\ X_2 T_2^2 \\ \vdots \\ X_2 T_2^l \\ -A_0 X_2 - A_1 X_2 T_2 - \cdots - A_{l-1} X_2 T_2^{l-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_2 T_2 \\ \vdots \\ X_2 T_2^{l-2} \\ X_2 T_2^{l-1} \end{bmatrix} T_2 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (4)$$

Dari baris terakhir (4) dapat dilihat bahwa $-A_0 X_2 - A_1 X_2 T_2 - \cdots - A_{l-1} X_2 T_2^{l-1} = X_2 T_2^l$, atau

$$X_2T_2^l + A_0X_2 + A_1X_2T_2 + \cdots + A_{l-1}X_2T_2^{l-1} = 0 \quad atau \quad \sum_{i=0}^{l-1} A_iX_2T_2^i + X_2T_2^l = 0$$

Terbukti bahwa (X_2, T_2) adalah pasangan baku dari $L(\lambda)$.■

Berdasarkan Teorema III.1 dan Teorema III.2 didapat:

Akibat III.3:
Diketahui (X, T) pasangan baku untuk $L(\lambda)$, maka (P_1, C_1) dengan $P_1 = [I \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0]$ dan C_1 matriks kompanion pertama $L(\lambda)$ similar dengan (X, T).

Bukti:
Karena (X, T) pasangan baku untuk $L(\lambda)$ dan berdasarkan Teorema III.1 (P_1, C_1) merupakan pasangan baku untuk $L(\lambda)$ maka berdasarkan Teorema III.2 dapat disimpulkan bahwa (P_1, C_1) similar dengan (X, T).■

IV. SIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa:

1. Pasangan baku dapat terbentuk dari linierisasi polinomial monik $L(\lambda)$. Dengan kata lain setiap polinomial monik selalu mempunyai pasangan baku.
2. Pasangan baku untuk polinomial monik tidak tunggal.
3. Setiap pasangan baku untuk $L(\lambda)$ similar dengan pasangan baku (P_1, C_1) dengan C_1 merupakan matriks companion pertama.

DAFTAR PUSTAKA

[1] I. Gohberg, P. Lancester and L. Rodman, Matrix polynomials, New York: Academic Press, 1982, pp. 9-49.

[2] P. Lancaster, Linearization of regular matrix polynomials, Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810, Vol.17, pp.21-27, January 2008.

[3] S. Chen and C. Xia, Extending an almost complete pair of matrices to a complete triple, The Scientific World Journal , Vol.2014, Article ID 493606, April 2014.

[4] Setiadji, Matriks suku banyak, Yogyakarta: Program Pasca Sarjana Universitas Gadjah Mada, 2000, pp. 29-58.

[5] Z.M. Mayasari, Analisis linierisasi matriks polynomial monik dan aplikasinya pada persamaan differensial, laporan penelitian PPD Heds, Jakarta, 2005.

[6] Z.M. Mayasari, Linierisasi matriks polinomial, Jurnal Gradien, Vol. 2, pp. 192-195, Juli 2006.