A - 2

Pengaruh Waktu Tunda Yang Kecil Terhadap Stabilitas Eksponensial Seragam Suatu Sistem Persamaan Diferensial

Aloysius Joakim Fernandez

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Widya Mandira Kupang
fndz1586@gmail.com

Abstrak— Tesis ini membahas pengaruh waktu tunda yang kecil terhadap kestabilan eksponensial seragam suatu sistem persamaan diferensial. Pembahasan perilaku solusi persamaan diferensial waktu tunda pada tesis ini dilakukan dengan pendekatan semigrup. Terdapat korespondensi antara solusi persamaan diferensial waktu tunda dengan solusi masalah Cauchy abstrak yang terkait. Di samping itu, terdapat syarat-syarat bagi operator yang terkait sehingga masalah Cauchy abstrak dari persamaan diferensial waktu tunda tersebut *well-posed*. Untuk meninjau kestabilan eksponensial seragam dari sistem persamaan diferensial tersebut, digunakan konsep perturbasi, terutama Teorema Gearhart. Syarat *norm continuity* dan operator kompak merupakan kondisi-kondisi cukup agar sistem persamaan diferensial tetap stabil eksponensial seragam.

Kata kunci: tunda, semigrup , norm continuity, perturbasi, stabil eksponensial seragam

I. PENDAHULUAN

Pada umumnya, persamaan diferensial biasa yang sudah dikenal dalam matematika berbentuk sebagai berikut

$$\frac{du}{dt} = f\big(t, u(t)\big). \qquad (1)$$

Persamaan diferensial (1) bergantung pada suatu variabel bebas t (pada umumnya variabel yang menotasikan waktu). Variabel bebas waktu t menunjukkan suatu waktu tertentu. Sebagai contoh, persamaan logistik berikut ini

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \qquad (2)$$

dengan r dan K masing-masing menyatakan rata-rata pertumbuhan dan kapasitas populasi. Persamaan logistik (2) ini hanya melibatkan keadaan pada saat t, dan mengabaikan keadaan sebelumnya.

Pada kenyataannya banyak fenomena, yang keadaannya pada setiap waktu t bergantung kepada keadaan yang terjadi dalam selang waktu sebelumnya. Oleh karena itu, muncul suatu konsep baru pada persamaan diferensial, yakni persamaan diferensial waktu tunda.

Persamaan diferensial waktu tunda mempunyai peranan penting dalam keakuratan pemodelan matematika. Sebagai contoh, pada pemodelan dinamika populasi dengan menggunakan persamaan logistik seperti pada contoh di atas, jumlah populasi pada (selang) waktu tertentu sebelum waktu t, juga mempengaruhi jumlah populasi pada saat t. Persamaan logistik (2) berubah menjadi persamaan logistik waktu tunda berikut ini

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right) \qquad (3)$$

dimana τ menyatakan waktu tunda.

Persamaan diferensial waktu tunda bergantung pada waktu tertentu t dan juga selang waktu sebelum waktu t. Bentuk umum dari persamaan waktu tunda adalah sebagai berikut

$$\frac{du}{dt} = f(t, u(t), u_t). \qquad (4)$$

Berdasarkan bentuk umum persamaan waktu tunda (4), terdapat perbedaan dengan persamaan diferensial biasa (1). Terdapat penambahan fungsi yakni u_t, yang merepresentasikan keadaan fungsi u pada selang waktu tertentu sebelum t. Fungsi u_t disebut *history function*.

Misalkan X merupakan ruang Banach dan fungsi $u: [-\tau, \infty] \longrightarrow X$. Untuk setiap $t \geq 0$, fungsi

$$u_t: \sigma\epsilon\, [-\tau, 0] \mapsto u(t + \sigma)\epsilon X$$

merupakan *history segment* terhadap $t \geq 0$. Selanjutnya bahwa *history function* dari u didefinisikan sebagai berikut

$$h_u: t \mapsto u_t$$

pada $\mathbb{R}_+$.

Tujuan penyelesaian persamaan diferensial waktu tunda antara lain untuk menentukan keberadaan, ketunggalan, dan juga perilaku solusi. Perilaku solusi yang dimaksud dalam tesis ini adalah kestabilan eksponensial seragam. Untuk mengetahui tujuan tersebut digunakan pendekatan semigrup. Asumsikan bahwa suatu sistem persamaan diferensial stabil eksponensial seragam, namun demikian bagaimana perilaku solusi sistem yang stabil eksponensial seragam tersebut jika diberikan waktu tunda yang kecil? Apakah waktu tunda yang kecil itu mempengaruhi kestabilan eksponensial seragam dari masalah Cauchy?

Manfaat dari kajian ini adalah agar mengetahui konsep-konsep analisis matematika yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial waktu tunda dengan pendekatan semigrup, menentukan kondisi kestabilan eksponensial seragam, dan meninjau pengaruh waktu tunda yang kecil terhadap kestabilan eksponensial seragam.

II. PEMBAHASAN

Semigrup dan Masalah Cauchy Abstrak

Berikut ini diberikan konsep-konsep dari semigrup, yang akan digunakan sebagai landasan teori dalam pembahasan selanjutnya.

Definisi

Sebuah keluarga $(T(t))_{t\geq 0}$ dari operator linear terbatas pada ruang Banach X disebut semigrup kontinu kuat (semigrup C_0) jika sifat-sifat berikut berlaku

a. $T(0) = I$
b. $T(t + s) = T(t)T(s)$ untuk setiap $t, s \geq 0$
c. Pemetaan $t \mapsto T(t)x$ adalah fungsi kontinu dari $\mathbb{R}_+$ ke X untuk setiap $x\epsilon X$.

Definisi

Misalkan $(T(t))_{t\geq 0}$ merupakan semigrup kontinu kuat pada ruang Banach X dan misalkan $D(A)$ merupakan subruang dari X yang didefinisikan sebagai berikut

$$D(A) := \left\{ x\epsilon X : \lim_{h \searrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} \text{ ada} \right\}.$$

Untuk setiap $x\epsilon D(A)$, didefinisikan

$$Ax := \lim_{h \searrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} = \frac{d^+T(h)x}{dh}\bigg|_{h=0}.$$

Operator $A: D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ disebut pembangkit *infinitesimal* dari semigrup kontinu kuat $(T(t))_{t\geq 0}$. Dalam pembahasan selanjutnya, pembangkit *infinitesimal* akan disebut pembangkit.

Teorema berikut ini merupakan teorema yang berisis tentang karakteristik daripada pembangkit semigrup kontinu kuat.

Teorema (Hille-Yosida)

Operator linear A adalah pembangkit *infinitesimal* dari semigrup kontraksi C_0 $(T(t))_{t\geq 0}$ jika dan hanya jika

a. A tutup dan $\overline{D(A)} = X$
b. $(0,\infty) \subseteq \rho(A)$ dan untuk setiap $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Masalah Cauchy abstrak merupakan salah satu langkah dalam penyelesaiaan sistem persamaan diferensial dengan pendekatan semigrup.

Definisi

Misalkan X adalah ruang Banach, $A: D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ sebuah operator linear dan $x\epsilon X$

a. Masalah Nilai Awal

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) & \text{untuk } t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases} \qquad (5)$$

disebut Masalah Cauchy Abstrak yang terkait dengan operator $(A, D(A))$ dengan nilai awal x.

b. Sebuah fungsi $u: \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ disebut solusi klasik dari Masalah Cauchy Abstrak di atas, jika u terdiferensialkan secara kontinu, $u(t)\epsilon D(A)$ untuk setiap $t \geq 0$ dan memenuhi persamaan (5) untuk $t \geq 0$.

Definisi

Masalah Cauchy Abstrak (1) disebut *well-posed* jika memenuhi ketiga hal berikut:

a. domain $D(A)$ padat di X,
b. untuk setiap $x\epsilon D(A)$ terdapat solusi klasik tunggal u_x dari Masalah Cauchy Abstrak tersebut,
c. untuk setiap barisan $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ di $D(A)$ yang memenuhi $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, berlaku $\lim_{n\to\infty} u_{x_n}(t) = 0$ seragam untuk setiap t di interval-interval kompak $[0, T]$.

Teorema

Misalkan operator tutup $A: D(A) \subseteq X \longrightarrow X$, Masalah Cauchy Abstrak yang terkait dikatakan *well-posed* jika dan hanya jika $(A, D(A))$ membangkitkan semigrup kontinu kuat pada X.

Pendekatan Semigrup Persamaan Diferensial Waktu Tunda

Tinjau persamaan diferensial abstrak waktu tunda berikut ini

$$\begin{cases} u'(t) = Bu(t) + \Phi u_t, & t \geq 0 \\ u(0) = x \\ u_0 \;\; = f. \end{cases} \qquad (6)$$

dimana

a. $x\epsilon X, X$ merupakan ruang Banach
b. $B: D(B) \subseteq X \longrightarrow X$ merupakan operator linear, tertutup dan padat
c. $f\epsilon L^p([-1,0], X), p \geq 1$
d. $\Phi: W^{1,p}([-1,0], X) \longrightarrow X$ operator linear dan terbatas
e. u: $[-1,\infty) \longrightarrow$ X dan $u_t: s\epsilon[-1,0] \longrightarrow X$ didefinisikan oleh $u_t(s) = u(t+s)$.

Definisi

Suatu fungsi $u: [-1,\infty) \longrightarrow$ X adalah solusi klasik persamaan diferensial waktu tunda (2) jika

a. $u \in C([-1,\infty),\mathrm{X}) \cap C^1([0,\infty),X)$
b. $u(t)\in D(B)$ dan $u_t \in W^{1,p}([-1,0],X)$ untuk setiap $t \geq 0$
c. u memenuhi persamaan diferensial waktu tunda (6) untuk setiap $t \geq 0$.

Definiskan suatu ruang yang baru, yakni

$$\varepsilon_p := X \times L^P([-1,0],X).$$

Hal ini dikarenakan adanya penambahan *history function* yang telah didefinisikan sebelumnya.

Masalah Cauchy abstrak yang terkait persamaan diferensial waktu tunda (6) sebagai berikut

$$\begin{cases} \dot{\mathfrak{U}}(t) = \mathcal{A}\mathfrak{U}(t) & t \geq 0 \\ \mathfrak{U}(0) = \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} & \end{cases} \qquad (7)$$

dimana

$$\mathfrak{U}: t \mapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ u_t \end{pmatrix} \in \varepsilon_p.$$

Operator $\mathcal{A}$ didefinisikan sebagai berikut

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} B & \Phi \\ 0 & \frac{d}{d\sigma} \end{pmatrix}$$

dimana $\frac{d}{d\sigma}$ merupakan turunan distribusi dan domain didefinisikan sebagai berikut

$$D(\mathcal{A}) := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \in D(B) \times W^{1,p}([-1,0],X): f(0) = x \right\}.$$

Teorema

a. Jika $u: [-1,\infty) \longrightarrow X$ merupakan solusi dari persamaan diferensial waktu tunda maka,

$$\mathfrak{U}: t \mapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ u_t \end{pmatrix} \in \varepsilon_p$$

merupakan solusi dari Masalah Cauchy Abstrak yang terkait operator $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ dan nilai awal $\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix}$.

b. Misalkan $\mathfrak{U}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ merupakan solusi dari Masalah Cauchy abstrak terkait operator $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ dan nilai awal $\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix}$ maka $u_t = v(t)$ untuk setiap $t \geq 0$ dan u merupakan solusi persamaan diferensial waktu tunda.

Teorema

Pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen:

a. Persamaan Diferensial Waktu Tunda *well-posed*
b. Setiap $\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$
   i. Terdapat solusi klasik tunggal $u(x, f, .)$ dari persamaan diferensial waktu tunda dan

ii. Solusi bergantung secara kontinu pada nilai awal, yakni jika suatu barisan $\binom{x_n}{f_n} \epsilon\, D(\mathcal{A})$ konvergen ke $\binom{x}{f} \epsilon\, D(\mathcal{A})$ dalam ruang ε_p maka $u(x_n,\ f_n,\ t\ )$ konvergen seragam ke $u(x,\ f, t)$ untuk t dalam interval kompak.

Definisi

Misalkan persamaan diferensial waktu tunda *well-posed*. Maka semigrup $(\mathcal{T}(t))_{t\geq 0}$ yang dibangkitkan oleh operator $\big(\mathcal{A}, D(\mathcal{A})\big)$ pada ε_p merupakan semigrup waktu tunda yang terkait persamaan diferensial waktu tunda.

Teori Spektral Semigrup Waktu Tunda

Misalkan $1 \leq p < \infty$ dan $\big(A_0, D(A_0)\big)$ pembangkit dari *nilpotent left shift semigroups* $\big(T_0(t)\big)_{t\geq 0}$ pada $L^p([-1,0], X)$ [2].

Definisikan untuk $\lambda\epsilon\mathbb{C}$, $e_\lambda(s) \coloneqq e^{\lambda s}$ untuk $s\epsilon[-1,0]$ dan $\Phi_\lambda \epsilon \mathcal{L}(X)$ dengan $\Phi_\lambda x \coloneqq \Phi\big(e^{\lambda} x\big)$ untuk setiap $x\epsilon X$.

Proposisi

Misalkan $\lambda\epsilon\mathbb{C}$ dan untuk setiap $1 \leq p < \infty$, diperoleh

$$\lambda\epsilon\rho(\mathcal{A}) \text{ jika dan hanya jika } \lambda\epsilon\rho(B + \Phi_\lambda).$$

Komplemen dari pernyataan pada proposisi di atas sebagai berikut

$$\lambda\epsilon\sigma(\mathcal{A}) \text{ jika dan hanya jika } \lambda\epsilon\sigma(B + \Phi_\lambda).$$

Dalam ruang dimensi X berhingga, pernyataan ini dapat ditulis sebagai berikut

$$\lambda\epsilon\sigma(\mathcal{A}) \text{ jika dan hanya jika } \det(\lambda - B - \Phi_\lambda) = 0.$$

Regularitas Semigrup Waktu Tunda

Misalkan $(T(t))_{t\geq 0}$ merupakan suatu semigrup kontinu kuat pada ruang Banach X dan terdapat $t_0 > 0$ sedemikain sehingga

$$\lim_{t\searrow t_0} \|T(t) - T(t_0)\| = 0$$

maka semigrup $(T(t))_{t\geq 0}$ merupakan *norm continuous* pada selang $[t_0, \infty)$.

Definsi

Misalkan $(A, D(A))$ pembangkit dari semigrup kontinu kuat $(T(t))_{t\geq 0}$ pada ruang Banach. Semigrup kontinu kuat $(T(t))_{t\geq 0}$ dikatakan *eventually norm continuous* atau *norm continuous* untuk $t \geq t_0$ jika terdapat $t_0 \geq 0$ sedemikian sehingga pemetaan $t \longmapsto T(t)$ *norm continuous* dari (t_0, ∞) ke $\mathcal{L}(X)$. Jika $t_0 = 0$ maka semigrup kontinu kuat $(T(t))_{t\geq 0}$ dikatakan *immediatelly norm continuous.*

Kestabilan Eksponensial Seragam dengan Perturbasi

Misalkan $(T(t))_{t\geq 0}$ semigrup kontinu kuat pada ruang Banach X dengan pembangkit $(A, D(A))$. Definsi dari *growth bound*, *spectral bound*, dan *Abscissa of uniform boundedness* dari pembangkit $(A, D(A))$, masing-masing diberikan sebagai berikut

$$\omega_0 \coloneqq \inf\{\omega\ \epsilon\ \mathbb{R}\colon \exists M > 0 \text{ sedemikian sehingga } \|T(t)\| \leq Me^{\omega t}\ \forall t \geq 0\ \}$$

,

$$s(A) \coloneqq \sup\{Re\,\lambda : \lambda\,\epsilon\,\sigma(A)\},$$

dan

$$s_o(A) \coloneqq \inf\left\{\omega\epsilon\mathbb{R} : \{Re\,\lambda > \omega\} \subset \rho(A) \text{ dan } \sup_{Re\,\lambda>\omega} \|R(\lambda, A)\| < \infty\right\}.$$

Semigrup kontinu kuat $(T(t))_{t\geq 0}$ stabil eksponensial seragam jika $\omega_0(A) < 0$.

Terkait dengan persamaan diferensial waktu tunda, maka misalkan operator $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ merupakan pembangkit dari semigrup kontinu kuat $(\mathcal{T}(t))_{t\geq 0}$ pada ruang ε_p. Maka *Abscissa of uniform boundedness* dari resolven $\mathcal{A}$ didefiniskan sebagai berikut

$$s_o(\mathcal{A}) \coloneqq \inf\left\{\omega\epsilon\mathbb{R} : \{Re\,\lambda > \omega\} \subset \rho(\mathcal{A}) \text{ dan } \sup_{\Re\lambda>\omega} \|R(\lambda, \mathcal{A})\| < \infty\right\}.$$

Untuk meninjau kestabilan eksponensial seragam semigrup waktu tunda dengan perturbasi didasarkan dari Teorema Gearhart [2].

Di samping itu juga akan diberikan sifat-sifat yang lainnnya yang harus dipenuhi oleh operator waktu tunda Φ sedemikian sehingga persaman waktu tunda ini stabil eksponensial seragam.

Definisi

Operator waktu tunda $\Phi\epsilon\ \mathcal{L}(W^{1,p}([-1,0], X), X)$ *admissible* jika

a. Operator matriks $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ membangkitkan semigrup kontinu kuat untuk setiap pembangkit $(B, D(B))$ pada asumsi
b. Fungsi $\lambda \longmapsto \Phi R(\lambda, A_0)$ merupakan fungsi analitik yang terbatas pada setengah bidang $\{\lambda\epsilon\mathbb{C} : Re\,\lambda > \omega\}$ untuk setiap $\omega\epsilon\mathbb{R}$.

Teorema

Asumsikan Φ *admissible* dan $\alpha\epsilon\ \mathbb{R}$ sedemikian sehingga fungsi $\lambda \longmapsto R(\lambda, B + \Phi_\lambda)$ merupakan fungsi terbatas analitik pada setengah bidang kanan $\{Re > \alpha\}$ maka $s_o(\mathcal{A}) < \alpha$.

Teorema berikutnya akan memberikan kondisi-kondisi untuk mengestimasi *Abscissa of uniform boundedness* dari pembangkit $\mathcal{A}$.

Teorema

Asumsikan Φ *admissible*, $s_0(B) < 0$ dan misalkan $\alpha\epsilon(s_0(B), 0]$ sedemikian sehingga

$$a_{\alpha,n} \coloneqq \sup_{\omega\epsilon\mathbb{R}} \left\|\Phi_{\alpha+i\omega}\big(R(\alpha + i\omega)\big)^n\right\| < \infty.$$

Jika $a_\alpha \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} a_{\alpha,n} < \infty$, maka $s_0(\mathcal{A}) < \alpha \leq 0$.

Akibat berikut ini merupakan suatu kasus khusus dari teorema di atas, dimana $\Phi = C\delta_{-1}$ untuk suatu $C\epsilon\mathcal{L}(X)$ terkait dengan $\big(B, D(B)\big)$.

Berikut diberikan akan dibahas kondisi-kondisi untuk mengestimasi *Abscissa of uniform boundedness* semigrup waktu tunda jika X merupakan ruang Hilbert.

Akibat

Asumsikan Φ *admissible*, $s_0(B) < 0$ dan misalkan $\alpha\epsilon(s_0(B), 0]$. Jika

$$\sup_{\omega\epsilon\mathbb{R}} \|\Phi_{\alpha+i\omega} R(\alpha + i\omega, B)\| < 1.$$

Jika

$$\sup_{\omega\epsilon\mathbb{R}}\|\Phi_{\alpha+i\omega}\| < \frac{1}{\sup_{\omega\epsilon\mathbb{R}}\|R(\alpha+i\omega,B)\|}$$

maka $s_0(\mathcal{A}) < \alpha \leq 0$.

Untuk meninjau kestabilan eksponensial seragam pada ruang Hilbert, digunakan Teorema Gearhart [2] dan diperoleh akibat berikut.

Akibat

Asumsikan bahwa X merupakan ruang Hilbert. Jika Φ *admissible*, $\alpha\epsilon\ (\omega_0(B),0]$, dan

$$\sup_{\omega\epsilon\mathbb{R}}\|\Phi_{\alpha+i\omega}\| < \frac{1}{\sup_{\omega\epsilon\mathbb{R}}\|R(\alpha+i\omega,B)\|}$$

maka $\omega_0(\mathcal{A}) < \alpha \leq 0$.

Pengaruh Waktu Tunda yang Kecil Terhadap Kestabilan Eksponensial Seragam Suatu Sistem Persamaan Diferensial

Misalkan X merupakan ruang Banach dan operator B merupakan pembangkit dari semigrup kontinu kuat $(S(t))_{t\geq 0}$ dan $C\epsilon\mathcal{L}(X)$.

Tinjau sistem persamaan diferensial abstrak berikut

$$\begin{cases} u'(t) = (B+C)u(t) \quad t \geq 0 \\ u(0) = x \\ u_0 = f \end{cases} \tag{8}$$

Asumsikan bahwa solusi dari sistem persamaan diferensial abstrak di atas stabil eksponensial seragam, yakni bahwa $\omega_0(B+C) < 0$.

Tinjau sistem persamaan diferensial abstrak waktu tunda berikut ini

$$\begin{cases} u'(t) = Bu(t) + Cu(t-\tau) \quad t \geq 0 \\ u(0) = x \\ u_0 = f \end{cases} \tag{9}$$

dimana $\tau > 0$ “waktu tunda yang kecil”.

Muncul pertanyaan bahwa Apakah waktu tunda yang kecil itu mempengaruhi kestabilan eksponensial seragam dari sistem persamaan diferensial abstark (8)? Kondisi apa saja agar supaya sistem persamaan diferensial yang stabil eksponensial seragam (8) tidak sensitif terhadap waktu tunda τ yang kecil?

Teorema

Misalkan X merupakan ruang Hilbert dan asumsikan $(B,D(B))$ pembangkit semigrup kontinu kuat sedemikian sehingga $\sigma(B)$ tidak terbatas sepanjang garis imajiner. Terdapat $C\epsilon\mathcal{L}(X)$ dan barisan $(\tau_k) \subset \mathbb{R}^+, \tau_k \searrow 0$ sedemikian sehingga $\omega_0(B+C) < 0$ untuk setiap $k\epsilon\mathbb{N}$ sedemikian sehingga terdapat solusi sistem persamaan waktu tunda tidak konvergen ke 0.

Bukti

Asumsikan $\sigma(B)$ tidak terbatas sepanjang $-\rho + i\mathbb{R}$ dan ambil $C := -\mu \cdot Id, \mu > 0,$ dan $\mu > -\rho$ untuk $\rho > 0$ kecil. Definisikan

$$\tau_k := \frac{\pi}{|\mu_k|}$$

untuk setiap $k\epsilon\mathbb{N}$. Dalam kasus ini $(\mu_k)\epsilon\sigma(B)$, dan $Re\,\mu_k = -\rho$ merupakan barisan dengan sifat $|\mu_k| \longrightarrow \infty$. Disamping itu diperoleh bahwa $\Phi^k = -\mu \cdot id\delta_{-\tau_k}$ dan $\Phi_z^k = -\mu e^{-z\tau_k} \cdot id$.

Persamaan karakteristik diberikan sebagai berikut

$$z - \lambda - \Phi_z^k = 0 \qquad \lambda\epsilon\,\sigma(B)$$

Pilih $\lambda \coloneqq \rho + \mu_k i$ dan $z \coloneqq \varepsilon + \mu_k i$ untuk $\varepsilon > 0$, maka persamaan karakteristik menjadi

$$\varepsilon + \mu_k i - \rho - \mu_k i + \mu e^{-z\tau_k} = 0$$
$$\varepsilon - \rho + \mu e^{-(\varepsilon + \mu_k i)\tau_k} = 0$$
$$\varepsilon - \rho + \mu e^{-\mu_k i \tau_k} e^{-\varepsilon\tau_k} = 0$$
$$\varepsilon - \rho + \mu e^{-\mu_k i \frac{\pi}{|\mu_k|}} e^{-\varepsilon\tau_k} = 0$$
$$\varepsilon - \rho + \mu e^{-i\pi} e^{-\varepsilon\tau_k} = 0$$
$$\varepsilon - \rho - \mu e^{-\varepsilon\tau_k} = 0$$

sehingga

$$\varepsilon = \mu e^{-\varepsilon\tau_k} + \rho$$

Karena $\mu > -\rho$, maka terdapat solusi real positif ε. Dengan demikian $s(\mathcal{A}_k) \geq \varepsilon > 0$, yang berarti bahwa $\left(\mathcal{A}_k, D(\mathcal{A}_k)\right)$ tidak membangkitkan semigrup stabil eksponensial seragam.

Berdasarkan teorema di atas, dapat dilihat bahwa kestabilan eksponensial seragam dapat dihancurkan oleh suatu spektrum yang tidak terbatas sepanjang garis imajiner dari operator$(B, D(B))$. Oleh karena itu dibutuhkan kondisi tambahan bagi operator $(B, D(B))$ sedemikian sehingga terbatas sepanjang garis imajiner dan diformulasikan dalam teorema berikut ini.

Teorema

Asumsikan bahwa $(B, D(B))$ membangkitkan suatu semigrup *immediately norm continuous* dan semigrup yang dibangkitkan oleh $(B + C, D(B))$ stabil eksponensial seragam pada ruang Hilbert X. Maka terdapat $\kappa > 0$ sedemikian sehingga solusi semigrup dari sistem persamaan diferensial waktu tunda stabil eksponensial seragam untuk setiap $\tau\epsilon\,(0, \kappa)$. Dalam kondisi ini kestabilan eksponensial seragam tidak sensitif terhadap waktu tunda yang kecil.

Teorema di atas memberikan kondisi tambahan bagi operator $(B, D(B))$ sehingga terbatas sepanjang garis imajiner. Teorema berikut akan memberikan kondisi cukup bagi operator C.

Proposisi

Misalkan $(B, D(B))$ pembangkit dari semigrup kontinu kuat $(S(t))_{t\geq 0}$ dalam ruang Hilbert X dan $C\epsilon\mathcal{L}(X)$ merupakan operator kompak yang terkait dengan $(S(t))_{t\geq 0}$. Asumsikan bahwa semigrup yang dibangkitkan $(B + C, D(B))$ stabil eksponensial seragam. Maka terdapat $\kappa > 0$ sedemiakian sehingga solusi semigrup dari sistem persamaan diferensial stabil eksponensial seragam untk setiap $\tau\epsilon(0, \kappa)$. Kondisi ini kestabilan eksponensial seragam tidak sensitif terhadap waktu tunda yang kecil.

III. SIMPULAN

Tesis ini membahas pengaruh dari waktu tunda yang kecil terhadap kestabilan eksponensial seragam dari sistem persamaan diferensial. Perilaku asimptotik persamaan diferensial waktu tunda ditinjau dengan pendekatan semigrup. Pembahasan diawali dengan Masalah Cauchy Abstrak yang terkait dengan persamaan diferensial waktu tunda, *wellposedness*, dan Teori Spektral. Regularitas semigrup waktu tunda merupakan konsep penting dalam pembahasan stabil eksponensial seragam, yakni *eventually norm continuous* dan *immediatelly norm continuous*. Regularitas ini yang merupakan kondisi cukup untuk meninjau kestabilan eksponensial seragam melalui Teorema Pemetaan Spektral dan juga memberikan kondisi cukup bagi operator yang tidak terbatas untuk mempertahankan kestabilan eksponensial seragam dari solusi suatu sistem persamaan diferensial. Kestabilan eksponensial seragam juga ditinjau dengan konsep perturbasi, khususnya estimasi *Abscissa of uniform boundedness* dan Teorema Gearhart.

Syarat *norm continuity* dan operator kompak itu memberikan kondisi cukup bagi operator dari suatu semigrup yang tak terbatas sepanjang garis imajiner agar solusinya tetap stabil eksponensial seragam.

DAFTAR PUSTAKA

[1] A. Pazy,"*Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations"*.Springer-Verlag.New York.1983.

[2] A. Batkai, and S. Piazzera, "*Semigroups for Delay Equation". Canada: A K Peters Ltd,2005.*

[3] K-,J. Engel , and R. Nagel,"*One-Parameter Semigroup for Linear Evolution Equations"*, New York: Springer –Verlag. vol.194, Graduate Text in Mathematics. 2000.