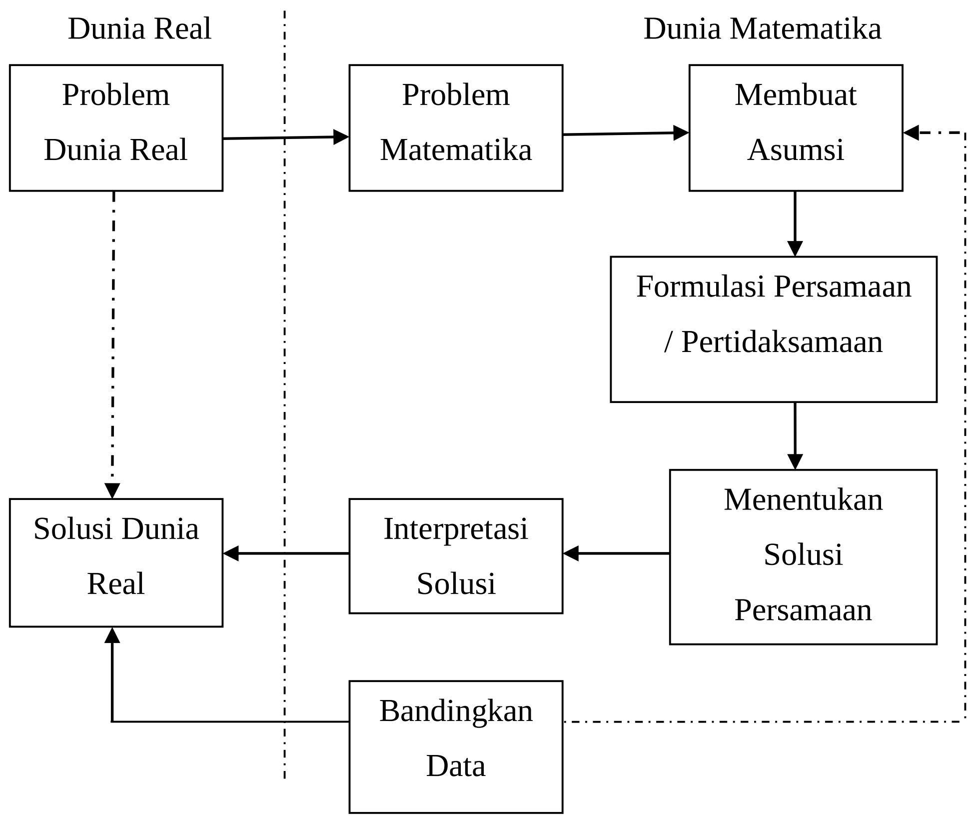
BAB II

KAJIAN TEORI

A. Model Matematika

Pemodelan matematika adalah proses representasi dan penjelasan dari permasalahan dunia real yang dinyatakan dalam pernyataan matematika (Widowati dan Sutimin, 2007: 1). Hasil dari representasi pemodelan matematika disebut sebagai model matematika.

Menurut Widowati dan Sutimin (2007: 3) proses pemodelan matematika dapat dinyatakan dalam diagram alur berikut ini.



Gambar 2.1. Proses Pemodelan

Proses pemodelan telah digambarkan dalam diagram alir di atas. Langkah pertama dalam pemodelan matematika adalah menyatakan permasalahan kehidupan nyata ke dalam pengertian matematika. Langkah ini meliputi identifikasi variabel dan sistem kemudian menjabarkannya menjadi model. Langkah selanjutnya adalah menyusun kerangka model dengan membuat asumsi. Setelah membuat asumsi dan memahami variabel-variabel, langkah selanjutnya adalah formulasi persamaan (model). Formulasi model merupakan langkah paling penting, sehingga kadang diperlukan adanya pengujian kembali asumsi-asumsi agar langkah formulasi persamaan dapat sesuai sehingga dapat diselesaikan dan realistik. Jika pada proses pengujian kembali model yang terbentuk tidak sesuai maka perlu dilakukan pengkajian ulang asumsi dan membentuk asumsi yang baru. Setelah menyusun persamaan, langkah selanjutnya adalah menyelesaikan persamaan tersebut secara matematis.

Interpretasi hasil adalah langkah yang akan menghubungkan formulasi matematika dengan permasalahan nyata. Setelah membandingkan solusi dengan data, mungkin akan didapatkan hasil yang kurang baik sehingga langkah yang perlu dilakukan adalah dengan memperbaiki model.

B. Sistem Dinamik

1. Pengertian Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah sistem yang dibentuk oleh persamaan-persamaan diferensial baik sistem diferensial biasa maupun sistem diferensial parsial.

Definisi 2.1 (Ross, 1984: 3)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas. Persamaan diferensial yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas dinamakan persamaan diferensial biasa, sedangkan persamaan diferensial yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas dinamakan persamaan diferensial parsial (Ross, 1984: 4).

Contoh 2.1

Persamaan diferensial biasa

$\frac{dy}{dx} + x^2y = xe^x$

Persamaan diferensial parsial

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Sistem dinamik dipengaruhi variabel-variabel yang saling berkaitan dan berubah berdasarkan waktu (Spiegelman, 1997:2). Jika sistem dinamik secara eksplisit bergantung terhadap waktu, maka sistem dinamik tersebut dinamakan sistem dinamik non autonomous, sedangkan apabila sistem dinamik secara implisit bergantung terhadap waktu maka dinamakan sistem dinamik autonomous (Wiggins, 2003: 2).

Sistem dinamik autonomous dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\dot{x} = f(x) \quad ,\forall x \in \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

2. Titik Ekuilibrium dan Kestabilan

Definisi 2.2

a) **(Hale dan Kocak, 1991: 11).** Titik $x \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium dari $\dot{x} = f(x)$, jika $f(\bar{x}) = 0$.

b) **(Perko, 2000: 102)**. Titik ekuilibrium $\bar{x}$ disebut titik ekuilibrium hiperbolik jika tidak ada nilai eigen dari matriks $Df(\bar{x})$ yang bagian realnya 0.

c) **(Wiggins, 1990: 254)**. Titik ekuilibrium $\bar{x}$ disebut titik ekuilibrium non hiperbolik jika ada nilai eigen dari matriks $Df(\bar{x})$ yang bagian realnya 0.

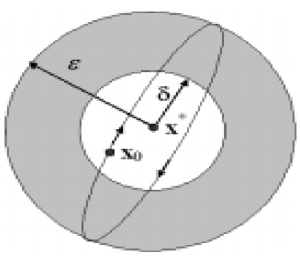
Definisi 2.3 (Olsder dan Woude, 2004: 67)

Diberikan sistem dinamik $\dot{x} = f(x)$ dengan $x \in \mathbb{R}^n$. Penyelesaian dengan kondisi awal $x(0) = x_0$ pada saat t dinotasikan dengan $x_{x_0}(t)$, maka

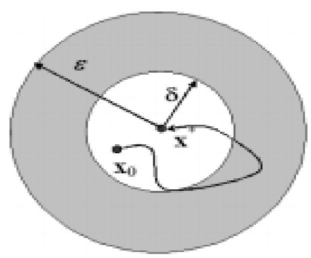
a) Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$ maka $\|x_{x_0}(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$.

b) Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan stabil asimtotis jika titik $\bar{x}$ stabil dan jika ada $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{t \to \infty} \|x_{x_0}(t) - \bar{x}\| = 0$ apabila $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta_1$.

c) Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan tidak stabil jika tidak memenuhi kedua kondisi di atas.



Gambar 2.2 Titik ekuilibrium stabil



Gambar 2.3. Titik ekuilibrium stabil asimtotik

Apabila terdapat sistem $\dot{x} = A(x)$ dengan titik ekuilibrium $\bar{x}$, sistem tersebut stabil jika titik ekuilibriumnya stabil. Namun, jika titik ekuilibriumnya tidak stabil maka sistem dikatakan tidak stabil.

C. Sistem Dinamik Linear

Menurut Perko (2001: 1), sistem linear dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n \qquad \textbf{(2.2)}$$

dimana A adalah matriks persegi berukuran $n \times n$ dan x adalah matriks berukuran $n \times 1$.

Sebelum melanjutkan pembahasan mengenai sistem linear, terlebih dahulu akan dibahas mengenai nilai eigen dan vektor eigen.

Definisi 2.5 (Howard Anton, 1998, 277)

Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$ dan sistem persamaan diferensial biasa homogen $\dot{x} = Ax$, $x(0) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n$, maka vektor taknol $x \in \mathbb{R}^n$ disebut *vektor eigen (eigenvector)* dari A jika terdapat suatu skalar $\lambda \in \mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga

$$Ax = \lambda x \qquad \textbf{(2.3)}$$

Nilai skalar λ dinamakan *nilai eigen (eigenvalue)* dari A.

Nilai eigen dari matriks A yang berukuran $n \times n$ dapat dicari dengan menuliskan Persamaan (2.3) ke dalam bentuk lain sebagai

$$(A - \lambda I)x = 0 \qquad \textbf{(2.4)}$$

dengan I adalah matriks identitas. Persamaan (2.4) mempunyai pemecahan tak nol jika dan hanya jika

$$det(\lambda I - A) = 0 \qquad \textbf{(2.5)}$$

Persamaan (2.5) dinamakan persamaan karakteristik dari matriks A.

Contoh 2.3

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A berikut ini.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & -2 & \lambda \end{bmatrix},$$

maka persamaan karakteristik dari A adalah

$$det(\lambda I - A) = det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & -2 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda), \qquad \textbf{(2.6)}$$

sehingga berdasarkan persamaan (2.6) diperoleh nilai eigen dari matriks A yaitu $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, dan $\lambda_3 = 0$.

Berdasarkan Definisi 2.5,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

adalah vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan λ jika dan hanya jika x adalah pemecahan tak nol dari $(\lambda I - A)x = 0$, yaitu dari

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & -2 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.7)}$$

Untuk $\lambda = 1$, maka Persamaan (2.7) menjadi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.8)}$$

Sistem (2.8) ekuivalen dengan persamaan berikut

$$-x_1 - x_2 = 0 \qquad \textbf{(2.9a)}$$

$$-2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \qquad \textbf{(2.9b)}$$

Berdasarkan Persamaan (2.9) didapatkan pemecahan dari sistem (2.8) adalah $x_1 = -x_2$ dan $x_3 = 0$. Misal $x_1 = t_1$, maka vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} t_1$$

Untuk $\lambda = 2$, maka persamaan (2.7) menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Sistem (2.10) ekuivalen dengan persamaan berikut

$$x_1 = 0 \tag{2.11a}$$

$$-x_1 = 0 \tag{2.11b}$$

$$-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \tag{2.11c}$$

Berdasarkan Persamaan (2.11) didapatkan pemecahan dari sistem (2.10) adalah $x_1 = 0$. Misal $x_2 = t_2$, maka vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$ adalah

$$x \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t_2$$

Untuk $\lambda = 0$, maka persamaan (2.7) menjadi

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Sistem (2.12) ekuivalen dengan persamaan berikut

$$-x_1 = 0 \quad \textbf{(2.13a)}$$

$$-x_1 - x_2 = 0 \quad \textbf{(2.13b)}$$

$$-2x_1 - 2x_2 = 0 \quad \textbf{(2.13c)}$$

Berdasarkan Persamaan (2.13) didapatkan pemecahan dari sistem (2.12) adalah $x_1 = 0$ dan $x_2 = 0$. Misal $x_3 = t_3$, maka vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$ adalah

$$x \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t_3$$

Maka, vektor eigen yang bersesuaian dengan matriks A adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Definisi 2.6 (Anton, 1991: 284)

Matriks bujur sangkar A dikatakan terdiagonalisasi jika terdapat matriks P yang mempunyai invers sehingga $P^{-1}AP$ diagonal sehingga matriks P dikatakan mendiagonalisasi matriks A. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Contoh 2.4

Tunjukkan bahwa matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dapat didiagonalisasi.

Berdasarakan contoh 2.2 matriks tersebut mempunyai 3 vektor eigen, yaitu $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, dan $p_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Maka

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, dengan $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Sistem (2.2) dengan kondisi awal $x(0) = x_0$ mempunyai solusi

$$x(t) = e^{At}x_0 \qquad \textbf{(2.14)}$$

dengan e^{At} adalah fungsi matriks berukuran $n \times n$ yang didefinisikan sebagai deret Taylor.

Definisi 2.7 (Perko, 2001: 1)

Bentuk e^{At}adalah fungsi matriks berukuran $n \times n$ yang dinyatakan

$$e^{At} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} \qquad \textbf{(2.15)}$$

Jika deret (2.15) didiferensialkan suku demi suku maka diperoleh

$$\frac{d}{dt}[\, e^{At}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^{n-1}}{(n-1)!} = A\left[I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}\right] = Ae^{At}$$

sehingga turunan pertama dari e^{At} adalah

$$\frac{d}{dt}\, e^{At} = \, Ae^{At}$$

Sebagai hasil dari interpretasi fungsi matrikss eksponensial e^{At}, dapat dituliskan solusi dari masalah nilai awal

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

dalam bentuk

$$x(t) = e^{At}x_0$$

Dalam hal ini terdapat tiga kemungkinan bentuk e^{At}, yaitu :

1. Jika matriks A memiliki nilai eigen real dan berbeda maka bentuk e^{At} menjadi

$$e^{At} = Pdiag\left[e^{\lambda_i t}\right]P^{-1}$$

   dengan $P = [v_1 v_2 .. v_n]$ adalah matriks invertibel, dan λ adalah nilai eigen dari matriks A, dengan $1 \leq j \leq n, \quad j \in \mathbb{N}$ dan $diag\left[e^{\lambda_i t}\right] = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$.

   Sehingga Persamaan (2.14) menjadi

$$x(t) = Pdiag\left[e^{\lambda_i t}\right]P^{-1}x_0 \qquad \textbf{(2.16)}$$

2. Jika matriks A berukuran $2n \times 2n$ dengan blok 2×2 sepanjang diagonal, memiliki sebanyak $2n$ nilai eigen kompleks yang berbeda maka bentuk e^{At} menjadi

$$e^{At} = Pdiag\ e^{\lambda_i t}\begin{bmatrix} \cos(b_i t) & -sin(b_i t) \\ \sin(b_i t) & \cos(b_i t) \end{bmatrix}P^{-1}$$

   dengan $P = [v_1 u_1 v_2 u_2 .. v_n v_n]$ adalah matriks invertibel, dan $\lambda_j = a_j \pm ib_j$ adalah nilai eigen dari matriks A, dengan $1 \leq j \leq \frac{n}{2}, \quad j \in \mathbb{N}$.

   Sehingga Persamaan (2.14) menjadi

$$x(t) = Pdiag\ e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} \cos(b_i t) & -sin(b_i t) \\ \sin(b_i t) & \cos(b_i t) \end{bmatrix} P^{-1} x_0 \qquad \textbf{(2.17)}$$

3. Jika matriks A berukuran $n\ \times n$, mempunyai sebanyak k nilai eigen kembar maka bentuk e^{At} menjadi

$$e^{At} = Pdiag\left[\ e^{\lambda_i t}\right] P^{-1} \left[I + Nt + \cdots + \frac{N^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} \right]$$

dengan $P = [v_1 v_2 .. v_n]$ adalah matriks invertibel, dan λ adalah nilai eigen dari matriks A, dan N adalah matriks nilpotent $N = A - S$, $S = diag\left[e^{\lambda j}\right]$, dengan syarat $N^{k-1} \neq 0$ dan $N^k = 0$ untuk $k < N$.

Sehingga Persamaan (2.14) menjadi

$$x(t) = Pdiag\left[\ e^{\lambda_i t}\right] P^{-1} \left[I + Nt + \cdots + \tfrac{N^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} \right] x_0 \qquad \textbf{(2.18)}$$

D. Sistem Dinamik Non Linear

Menurut Brannan dan Boyce (2011: 488), diberikan sistem non linear

$$\dot{x} = f(x)\ , \qquad \textbf{(2.19)}$$

Jika sistem (2.19) memiliki titik ekuilibrium, maka sistem tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$\dot{x} = Df(\bar{x})x + \varphi(x)$$

Bentuk $Df(\bar{x})x$ disebut sebagai bagian linier dari sistem (2.19) dengan $Df(\bar{x})$ adalah matriks Jacobian dari sistem pada titik ekuilibrium $\bar{x}$ yang didefinisikan sebagai

$$Df(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

sedangkan bentuk $\varphi(x)$ merupakan bagian non linear dari sistem (2.19).

Teorema 2.1 (Olsder dan Woude, 2004: 68)

Diberikan sistem linear $\dot{x} = Ax$, dengan matriks A berukuran $n \times n$ dan memiliki k nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k$ $(k \leq n)$.

a) Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil jika $Re\lambda_i < 0$ untuk semua $i = 1, 2, \dots, k$.

b) Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil jika $Re\lambda_i > 0$ untuk beberapa $i = 1, 2, \dots, k$ dengan kata lain paling sedikit ada satu $Re\lambda_i > 0$.

Bukti

a) Jika $Re\{\lambda_j\} < 0, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ maka saat $t \to \infty$ akan mengakibatkan $e^{Re\{\lambda_j\}t} \to 0$, sehingga solusi sistem $(x_1, x_2, \dots, x_n) \to (0, 0, \dots, 0)$ dengan kata lain solusinya akan menuju ke titik ekuilibriumnya, dengan demikian sistem dikatakan stabil.

b) Jika ada j sehingga $Re\{\lambda_j\} > 0$, maka saat $t \to \infty$ akan mengakibatkan $e^{Re\{\lambda_j\}t} \to \infty$, yang mengakibatkan ada i sehingga $x_1 \to \infty$, dengan kata lain solusinya akan menjauhi titik ekuilibriumnya, dengan demikian sistem dikatakan tidak stabil.

Contoh 2.5

Tentukan kestabilan dari sistem non linear berikut ini.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -4x_2 + 2x_1x_2 - 8 \\ 4{x_2}^2 - {x_1}^2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.20)}$$

Berdasarkan Definisi (2.1), maka sistem (2.20) memiliki titik ekuilibrium pada saat

$$f(x) = 0$$

sehingga didapat satu titik ekuilibrium yaitu $E = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (-2, -1)$

Matriks Jacobian untuk sistem (2.20) adalah

$$Df(x) = \begin{bmatrix} 2x_2 & -4 + 2x_1 \\ -2x_1 & 8x_2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.21)}$$

Matriks Jacobian pada titik ekuilibrium $E = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (-2, -1)$ pada (2.21) adalah

$$Df(E) = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.22)}$$

Karena nilai eigen pada Persamaan (2.22) $Re\{\lambda_j\} < 0$, maka berdasarkan Teorema (2.1) titik ekuilibrium $E = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (-2, -1)$ bersifat stabil.

E. Kriteria Routh-Hurwitz

Menurut Olsder dan Woude (2004: 60), nilai-nilai eigen matriks A dapat ditentukan dari persaaan karakteristik, yaitu $\det(\lambda I - A) = 0$. Namun, terkadang untuk menentukan akar-akar persamaan karakteristiknya tidak selalu mudah sehingga diperlukan kriteria yang menjamin bahwa akar-akar persamaan karakteristiknya bernilai negatif atau ada nilai akar yang bernilai positif.

Diberikan persamaan karakteristik nilai eigen λ dari matriks A yang berukuran $n \times n$, yaitu

$$\det(\lambda I - A) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda\lambda + a_n$$

dengan $a_0 \neq 0$, sehingga disusun tabel Routh-Hurwitz sebagai berikut

Tabel 2.1 Tabel Routh-Hurwitz

a_0	a_2	a_4	$\cdots$
a_1	a_3	a_5	$\cdots$
b_1	b_2	b_3	$\cdots$
c_1	c_2	c_3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

dengan

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}$$

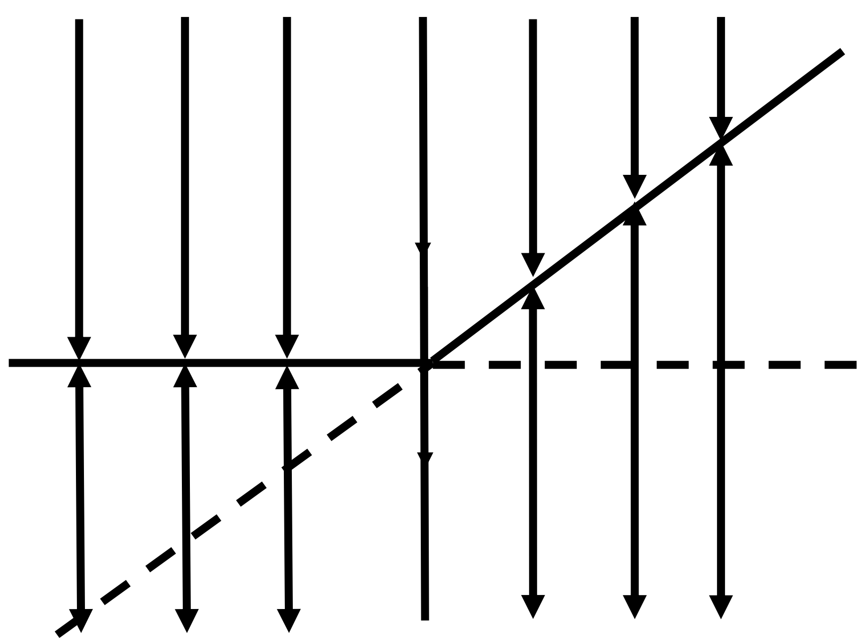
sehingga matriks A berukuran $n \times n$ hanya mempunyai nilai eigen dengan bagian real negatif jika dan hanya jika setiap elemen di kolom pertama pada tabel memiliki tanda yang sama.

F. Bifurkasi

Pada sistem dinamik, suatu sistem akan rentan terhadap gangguan ketika sistem tersebut memiliki nilai eigen nol. Sedikit saja sistem mengalami gangguan maka nilai eigen dari sistem dapat berpindah ke daerah negatif (stabil) atau sebaliknya. Keadaan pada sistem yang demikian disebut sebagai bifurkasi. Bifurkasi adalah perubahan kestabilan suatu sistem yang diakibatkan oleh berubahnya nilai parameter (Guckenheimer dan Holmes, 1985: 117).

Salah satu contoh bifurkasi adalah bifurkasi transkritikal. Bifurkasi transkritikal adalah bifurkasi yang ditandai dengan pertukaran kestabilan titik ekuilibrium. Bentuk sistem yang dapat mengalami bifurkasi transkritikal adalah sistem yang memuat $\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^2$. Dalam hal ini, μ adalah sebuah parameter. Titik ekuilibrium dari sistem tersebut adalah $x = 0$ dan $x = \mu$. Terdapat tiga kondisi yang memenuhi persamaan sistem , yaitu saat $\mu = 0$, $\mu < 0$, dan $\mu > 0$.

Saat $\mu = 0$ hanya ada satu titik ekuilibrium yaitu $x = 0$ yang bersifat semi stabil (stabil jika didekati dari kanan dan tidak stabil saat didekati dari kiri). Untuk $\mu \neq 0$, terdapat dua titik ekuilibrium yaitu $x = 0$ dan $x = \mu$, sehingga jelas $x = 0$ adalah titik ekuilibrium yang selalu ada untuk setiap μ. Saat $\mu < 0$ titik ekuilibrium $x = \mu$ bersifat tidak stabil tetapi saat $\mu > 0$ titik ekuilibrium bersifat stabil.



Gambar 2.3. Diagram bifurkasi transkritikal

Dalam analisis kestabilan dinamik, umumnya digunakan analisa nilai eigen dari bagian linearnya apabila nilai eigennya tidak ada yang bernilai nol. Sedangkan untuk sistem yang memiliki nilai eigen nol, dapat menggunakan *centre manifold theory* untuk menganalisa sistem.

G. Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar *(basic reproduction number)* adalah bilangan yang menyatakan rata-rata infeksi sekunder yang muncul akibat adanya satu orang yang terinfeksi primer masuk ke dalam populasi *susceptible* (Heffernan, 2005). Bilangan ini merupakan parameter penentu kestabilan dari titik-titik ekuilibrium model, dan dinotasikan dengan lambang R_0. Titik kritis R_0 berkisar 1, jika $R_0 > 1$ maka infeksi akan membesar namun jika $R_0 < 1$ infeksi akan mengecil dan menghilang dari populasi. Bilangan reproduksi dasar diperoleh dengan cara linearisasi matriks Jacobian yang dihitung pada titik keseimbangan bebas penyakit.

Definisi 2.8 (Heffernan, 2005: 283)

$$\dot{x} = \psi_i(x, y) - \phi_i(x, y), \quad i = 1,2,3, \dots, m \qquad \textbf{(2.23)}$$

$$\dot{y} = \varphi_i(x, y), \quad i = 1,2,3, \dots, n$$

Misalkan terdapat m kelas terinfeksi dan n kelas tidak terinfeksi, dengan x dinyatakan sebagai kelas yang terinfeksi penyakit dan y dinyatakan sebagai kelas yang tidak terinfeksi penyakit, dimana $x \in \mathbb{R}^m$ dan $y \in \mathbb{R}^n$ untuk $m, n \in N, \psi_i$ menyatakan matriks dari banyaknya individu yang masuk dan menambah banyaknya individu dalam kelas terinfeksi, sedangkan ϕ_i adalah banyaknya individu yang keluar dari kelas terinfeksi yang mengakibatkan berkurangnya jumlah individu dari kelas tersebut.

Berdasarkan sistem (2.23), didefinisikan matriks sebagai berikut

$$H = PR^{-1}$$

Dengan H disebut sebagai matriks *Next Generation*, dimana

$$P = [P_{ij}]$$

dengan $\left[P_{ij}\right] = \left[\frac{\partial P_i}{\partial x_j}\right], i, j = 1, 2, 3, \ldots, m$

dan

$$R = [R_{ij}]$$

dengan $\left[R_{ij}\right] = \left[\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\right], i, j = 1, 2, 3, \ldots, m$

Contoh 2.5

Diberikan model matematika epidemi sebagai berikut

$$\frac{ds}{dt} = \mu - \beta si - \mu s,$$

$$\frac{di}{dt} = \beta si - \gamma i - \mu i, \qquad \textbf{(2.24)}$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i - \mu r,$$

Tentukan R_0 untuk sistem (2.24)

Sistem (2.24) memiliki titik ekuilibrium non endemik $\overline{Te} = (1,0,0)$

Pada model ini kelas yang terinfeksi adalah kelas i, maka berdasarkan Definisi 2.8

$$P = [\beta s],$$

dan

$$R = [\gamma + \mu]$$

maka

$$H = [\beta s][\gamma + \mu]^{-1}$$

$$H = [\beta s]\left[\frac{1}{[\gamma + \mu]}\right]^{-1}$$

$$H = \left[\frac{\beta s}{\gamma+\mu}\right] \quad \textbf{(2.25)}$$

Substitusi titik ekuilibrium $\overline{Te}$ ke persamaan (2.25) sehingga diperoleh

$$H = \left[\frac{\beta}{\gamma + \mu}\right]$$

R_0 dari sistem (2.24) adalah

$$R_0 = \left[\frac{\beta}{\gamma + \mu}\right]$$