

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

A. Rancangan Percobaan

Rancangan percobaan dapat diartikan sebagai serangkaian uji dimana perubahan yang berarti dilakukan pada variabel dari suatu proses atau sistem sehingga dapat diamati dan diidentifikasi alasan-alasan perubahan yang terjadi pada respon output dari percobaan tersebut (Montgomery, 2001:1). Rancangan percobaan banyak dimanfaatkan dalam bidang industri atau penelitian yang berkaitan dengan rancangan produk, perbaikan produk dan lain sebagainya. Tidak hanya dalam bidang industri, rancangan percobaan juga banyak dimanfaatkan dalam bidang pertanian, bidang kesehatan dan lain sebagainya.

Menurut Montgomery (2001) menjelaskan Beberapa istilah dalam rancangan percobaan yang perlu diketahui antara lain :

1. Perlakuan (*Treatment*)

Perlakuan ialah prosedur atau metode yang diharapkan pada unit percobaan, misalnya bahan pembuatan mesin yang berbeda dan lain sebagainya.

2. Faktor

Faktor ialah variabel yang dapat berupa variabel kualitatif maupun variabel kuantitatif yang dicobakan dalam percobaan sebagai penyusun struktur

3. Taraf atau Level

Taraf ialah nilai-nilai dari faktor yang dicobakan dalam percobaan, misalkan tingkatan temperatur yang berbeda, jenis bahan cetakan yang berbeda dan lain sebagainya.

4. Pengamatan berulang

Pengamatan berulang ialah pengamatan yang dilakukan berulang kali dalam waktu yang berbeda pada suatu objek atau satuan amatan yang sama untuk mengetahui keragaman yang muncul pada respon.

B. Percobaan Faktorial

Percobaan faktorial adalah suatu percobaan mengenai sekumpulan perlakuan yang terdiri atas semua kombinasi yang mungkin dari taraf beberapa faktor. Sekumpulan kombinasi perlakuan tersebut yang dinyatakan dengan kata faktorial (Gasperz, 1991:181). Secara umum, dapat dikatakan percobaan faktorial adalah suatu percobaan untuk meneliti suatu hal yang dipengaruhi oleh beberapa faktor.

Menurut Montgomery (2001), keuntungan percobaan faktorial yaitu percobaan ini lebih efisien dibandingkan percobaan faktor tunggal. Keuntungan lainnya yaitu dapat mendeteksi respon dari taraf masing-masing pengaruh utama serta interaksi antar 2 faktor atau lebih. Ada tidaknya interaksi 2 faktor dapat diketahui dari perilaku respon suatu faktor pada berbagai kondisi faktor yang lain. Jika hasil respon suatu faktor berubah pola dari kondisi tertentu ke kondisi

lainnya untuk faktor yang lain, maka kedua faktor dikatakan berinteraksi. Jika pola respon dari suatu faktor tidak berubah pada berbagai kondisi faktor lain, maka dapat dikatakan kedua faktor tersebut tidak berinteraksi.

Berdasarkan adanya banyak taraf dalam setiap faktor, percobaan ini sering dilakukan dengan menambah perkalian antara banyak taraf faktor yang satu dengan yang lainnya. Misal, ada a level dari faktor A dan b level dari faktor B, maka terdapat ab kombinasi perlakuan. Sebagai contoh, dalam suatu percobaan dengan 4 faktor yaitu A,B,C dan D yang masing-masing terdiri atas 3 taraf, a level dari faktor A, b level dari faktor B, c level dari faktor C dan d level dari faktor D, maka diperoleh percobaan faktorial $a \times b \times c \times d = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ kombinasi perlakuan..

C. Percobaan faktorial 3^k

Percobaan dengan $k = 2$ atau $k = 3$ dapat ditingkatkan untuk k yang lebih tinggi, misalnya $k = 4$ atau $k = 5$ dan seterusnya. Percobaan faktorial 3^5 adalah percobaan yang menggunakan 5 faktor katakanlah faktor A,B,C,D dan E yang masing-masing bertaraf 3 maka akan ada 243 kombinasi perlakuan. Dengan demikian semakin banyak banyak faktor yang digunakan dalam suatu rancangan percobaan faktorial maka semakin banyak pula unit percobaan yang ada, dan akan semakin banyak lagi jika dalam percobaan itu dilakukan pengulangan dalam tiap unit percobaan. Rancangan percobaan faktorial 3 level adalah suatu rancangan yang terdiri dari k faktor dengan setiap faktornya diberikan 3 kategori level, yaitu level tinggi, level sedang dan level rendah. Level-level tersebut

biasanya dinotasikan dengan angka. Misalnya, untuk level tinggi yaitu 2, untuk level menengah yaitu 1, dan untuk level rendah yaitu 0.

Percobaan yang dilakukan dengan menggunakan 3 faktor misalnya A,B dan C yang masing-masing bertaraf 3 maka dalam percobaan tersebut dengan tanpa pengulangan terdapat $3^3 = 27$ kombinasi perlakuan. Kombinasi perlakuan tersebut, ketiga taraf faktornya dikodekan dengan 0, 1, dan 2. Untuk 0 merupakan taraf rendah, 1 untuk taraf sedang dan 2 untuk taraf tertinggi.

Tabel 2.1. Kombinasi Perlakuan dari Rancangan Faktorial 3^3

Faktor A	Faktor B	Faktor C		
		0	1	2
0	0	$a_0 b_0 c_0$	$a_0 b_0 c_1$	$a_0 b_0 c_2$
	1	$a_0 b_1 c_0$	$a_0 b_1 c_1$	$a_0 b_1 c_2$
	2	$a_0 b_2 c_0$	$a_0 b_2 c_1$	$a_0 b_2 c_2$
1	0	$a_1 b_0 c_0$	$a_1 b_0 c_1$	$a_1 b_0 c_2$
	1	$a_1 b_1 c_0$	$a_1 b_1 c_1$	$a_1 b_1 c_2$
	2	$a_1 b_2 c_0$	$a_1 b_2 c_1$	$a_1 b_2 c_2$
2	0	$a_2 b_0 c_0$	$a_2 b_0 c_1$	$a_2 b_0 c_2$
	1	$a_2 b_1 c_0$	$a_2 b_1 c_1$	$a_2 b_1 c_2$
	2	$a_2 b_2 c_0$	$a_2 b_2 c_1$	$a_2 b_2 c_2$

pada Tabel 2.1, misalnya untuk $a_2 b_1 c_0$ menyatakan interaksi antara taraf tertinggi faktor A dengan taraf menengah faktor B dan taraf terendah faktor C. Pada rancangan faktorial 3^k terdapat kombinasi perlakuan dengan total derajat bebas $3^k - 1$ untuk menaksir efek faktor, terdapat $\binom{3}{1}$ pengaruh utama masing-masing db = $(3 - 1)$, $\binom{3}{2}$ pengaruh utama masing-masing db = $(3 - 1)(3 - 1)$ dan seterusnya. Sudjana (1989) menyatakan jika ada n ulangan, maka ada $n3^k - 1$ banyak derajat bebas total $3^k (n - 1)$ derajat kebebasan untuk *error*. Pengertian derajat bebas (db) adalah jumlah amatan pada percobaan (*n*) dikurangi banyaknya

pembatasan dari jumlah amatan, yang sering digunakan nilai batas yaitu 1 sehingga di notasikan $n - 1$.

Menurut Montgomery (2005), interaksi k faktor memiliki 2^{k-1} ortogonal komponen 2 derajat kebebasan. Sebagai contoh, empat faktor interaksi ABCD memiliki $2^{4-1} = 8$ ortogonal komponen dua derajat kebebasan dilambangkan $ABCD, AB^2C^2D, ABC^2D^2, AB^2C^2D^2, AB^2CD^2, ABCD^2, ABC^2D, AB^2CD$. Untuk komponen ini, dapat dilihat bahwa satu-satunya eksponen yang diperbolehkan pada huruf pertama adalah 1. Jika eksponen pada huruf pertama bukan 1, maka seluruh komponen harus kuadrat dengan menggunakan modulus 3, terlihat pada komponen interaksi berikut

$$A^2B^2CD = (A^2B^2CD)^2 = A^4B^4C^2D^2 = ABC^2D^2$$

D. Rancangan *FF*

Rancangan *FF* dilakukan peneliti dengan asumsi interaksi orde tinggi (interaksi yang memuat lebih dari dua faktor) tertentu diabaikan, kemudian efek utama dan interaksi orde rendah (interaksi yang memuat dua atau tiga faktor) dapat diperoleh dengan mengerjakan hanya sebagian dari rancangan faktorial lengkap, akibatnya akan ada faktor-faktor yang mempunyai sifat yang sama dengan faktor lainnya (Montgomery, 2001). Misalkan, untuk suatu percobaan katakanlah dengan menggunakan taraf 3. Jumlah dari k faktor ini cukup banyak, maka dari rancangan percobaan ini terdapat 3^k kombinasi perlakuan. Dengan bertambahnya faktor maka jumlah kombinasi perlakuan senantiasa bertambah.

Rancangan yang sering digunakan untuk menyelesaikan masalah tersebut yaitu rancangan *FF*.

Struktur rancangan *FF* ditentukan dari banyak faktor dan fraksi yang digunakan. Dengan banyaknya faktor dan fraksi tertentu dapat dibentuk struktur rancangan *FF* yang berbeda bergantung pada pemilihan generator terbaik, *defining relation* (dilambangkan dengan huruf *D*), alias yaitu dua atau lebih pengaruh yang memiliki sifat yang sama diperoleh dari perkalian faktor-faktor utama dengan *defining relation* dan berdasarkan resolusi yang didapat dari panjang *defining relation*. Jika ada faktor utama yang terpaut di dalam alias, untuk rancangan yang hanya memiliki 1 *defining relation* maka *defining relation* dikuadratkan setelah itu dikalikan dengan faktor utama (Sudjana, 1989). Hal tersebut dilakukan untuk memperoleh alias lain yang mungkin diduga tidak terpaut.

Pengertian terpaut atau terbaaur sendiri ialah pengaruh utama satu dengan yang lain tidak dapat dibedakan atau diduga (Sartono, 2008). Hal tersebut dapat dilihat dari struktur alias yang dibentuk dari rancangan *FF*. Pada rancangan *FF*, karena hanya sebagian perlakuan yang dicoba tidak seluruh kombinasi, maka ada sesuatu yang harus dikorbankan. Sesuatu tersebut adalah pembauran (*confounding*) antar pengaruh karena hal ini membuat faktor utama sulit untuk diduga.

E. Model Linear Rancangan *FF*

Diberikan variabel respon y dari rancangan *FF* yang pengamatanya hanya sekali dilakukan tanpa pengulangan untuk tiap kombinasi perlakuan dan x_1, x_2, \dots, x_k variabel input yang berkaitan dengan faktor independen. Hubungan antara variabel-variabel tersebut dapat digambarkan dalam persamaan berikut :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + \epsilon \quad (1)$$

jika dilakukan pengamatan sebanyak n kali maka persamaan (1) menjadi :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i \quad (2)$$

model kedua dapat ditulis dalam model linear, sebagai berikut :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (3)$$

dengan :

x_1, x_2, \dots, x_k = Variabel bebas

y = Variabel terikat

β_0 = Konstanta

$\beta_1, \beta_1, \dots, \beta_k$ = Parameter

ϵ = *error*

\mathbf{y} = $[y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]^T$ adalah vektor pengamatan berukuran $n \times 1$

$\boldsymbol{\beta}$ = $[\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_k]^T$ adalah vektor parameter

\mathbf{X} = Matriks berukuran $n \times (k + 1)$

$\boldsymbol{\epsilon}$ = Vektor *error* berukuran $n \times 1$

Persamaan 2 dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

F. Rancangan *FF* Tiga-Level

Rancangan *FF* dengan 3 taraf atau level dinotasikan dengan 3^{k-p} , yang artinya rancangan ini mencobakan 3^{k-p} (dimana k adalah banyaknya faktor dan p adalah banyaknya fraksi) kombinasi perlakuan dari seluruhnya yaitu 3^k kombinasi perlakuan lengkap (*full-factorial design*). Fraksi percobaan dapat diartikan sebagai seberapa besar proporsi total atau jumlah perlakuan yang akan dicobakan dalam rancangan *FF*. struktur rancangan *FF* ditentukan banyaknya faktor yang dicobakan dan fraksi percobaan yang digunakan. Dengan jumlah faktor dan fraksi tertentu, dapat dibentuk beberapa struktur rancangan *FF* yang berbeda.

Percobaan dengan tiga taraf, fraksi yang bisa digunakan adalah :

1. Fraksi $p = 1$ dari kombinasi perlakuan lengkap. Bentuknya 3^{k-1} . Misalkan percobaan dengan 4 faktor maka rancangan *FF* dinotasikan 3^{4-1} , rancangan ini melakukan 27 kombinasi perlakuan dari 81 kombinasi perlakuan lengkap. Untuk 3 faktor maka rancangan *FF* 3^{3-1} , rancangan ini melakukan 9 kombinasi perlakuan dari 27 kombinasi lengkap.
2. Fraksi $p = 1$ dari kombinasi perlakuan lengkapnya. Bentuknya 3^{k-2} . Misalkan percobaan 3^{4-2} , rancangan ini melakukan 9 kombinasi perlakuan

dari 81 kombinasi perlakuan lengkap. Untuk percobaan 3^{3-2} , rancangan ini melakukan 3 kombinasi perlakuan dari 27 kombinasi perlakuan lengkap.

Pembentukan struktur rancangan $FF\ 3^{k-p}$ juga dipengaruhi oleh pemilihan fraksi yang digunakan (Sartono, 2008). Hal tersebut akan dijelaskan sebagai berikut:

1. Fraksi $p = 1$ untuk $k = 3$ atau $k = 4$. Pertama, Struktur rancangan FF untuk $k = 3$ maka $(3 - 1) = A$ dan B sebagai rancangan dasar untuk faktor terakhir dihilangkan karena menjadi generator yaitu faktor C . Kedua, struktur rancangan FF untuk $k = 4$ maka $(4 - 1) = A, B$ dan C sebagai rancangan dasar untuk faktor terakhir dihilangkan karena menjadi generator yaitu faktor D .
2. Fraksi $p = 2$ untuk $k = 3$ atau $k = 4$. Pertama, Struktur rancangan FF untuk $k = 3$ maka $(3 - 2) = A$ sebagai rancangan dasar untuk 2 faktor terakhir dihilangkan karena menjadi generator yaitu faktor B dan C . Kedua, struktur rancangan FF untuk $k = 4$ maka $(4 - 2) = A$ dan B sebagai rancangan dasar untuk 2 faktor terakhir dihilangkan karena menjadi generator yaitu faktor C dan D .

G. Tabel Rancangan FF Tiga Level

Menurut Wahyuni (1998), ada beberapa efek atau pengaruh faktor dalam faktorial yang didefinisikan sebagai perubahan nilai variabel respon akibat taraf faktor. Macam-macam efek faktor tersebut yaitu :

1. Efek sederhana (*simple effect*)

Efek sederhana adalah Pengaruh suatu faktor terhadap taraf tertentu dari faktor lain.

2. Pengaruh utama (*main effect*)

Pengaruh utama adalah Rata-rata dari pengaruh sederhana atau rata-rata terhadap taraf dari faktor lain.

3. Efek interaksi (*interaction*)

Efek interaksi adalah jika pengaruh dari suatu faktor berbeda pada tiap taraf untuk faktor lainnya maka antara faktor tersebut dikatakan terjadi interaksi dimana nilai efek interaksi adalah nilai rata-rata dari selisih efek sederhana suatu faktor.

Perhitungan efek masing-masing faktor dapat menggunakan tabel respon atau sering disebut tabel *Orthogonal Array (OA)* dan disimbolkan dengan L_q dengan q merupakan jumlah percobaan yang akan dilakukan (Hidayat, 2012). *OA* dikembangkan oleh Taguchi dalam keluarga matriks *Fractional Factorial Experiment (FFE)*. *OA* diciptakan oleh Jaques Hardmand pada tahun 1897 dan mulai diterapkan pada perang dunia II oleh Plackett Burman.

Misalkan ada tabel *OA* dengan 9 kombinasi perlakuan yang terdiri dari 3 faktor yaitu A,B dan C. Nilai efek dari faktor A terhadap respon y yaitu rata-rata perubahan dalam respon yang dihasilkan saat faktor A menuju taraf

rendah, sedang dan tinggi. Permisalan pembuatan tabel *OA* dapat dilihat pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2. Matriks L_9 *OA* dengan faktor *A, B dan C*

Run	Faktor			Respon (y)
	A	B	C	
1	0	0	0	y_1
2	1	0	1	y_2
3	2	0	2	y_3
4	0	1	1	y_4
5	1	1	2	y_5
6	2	1	0	y_6
7	0	2	2	y_7
8	1	2	0	y_8
9	2	2	1	y_9

Efek dari masing-masing faktor dapat diperoleh dengan mengurangkan nilai terbesar dengan nilai terkecil di antara nilai masing-masing faktor untuk taraf rendah, sedang dan tinggi dengan nilai dari masing-masing faktor untuk setiap taraf diberikan sebagai berikut :

$$\overline{A_0} = \frac{y_1+y_4+y_7}{3} ; \overline{A_1} = \frac{y_2+y_5+y_8}{3} ; \overline{A_2} = \frac{y_3+y_6+y_9}{3}$$

$$\overline{B_0} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} ; \overline{B_1} = \frac{y_4+y_5+y_6}{3} ; \overline{B_2} = \frac{y_7+y_8+y_9}{3}$$

$$\overline{C_0} = \frac{y_1+y_6+y_8}{3} ; \overline{C_1} = \frac{y_2+y_4+y_9}{3} ; \overline{C_2} = \frac{y_3+y_5+y_7}{3}$$

Secara umum, tabel respon untuk 3 faktor A,B dan C di atas ditampilkan pada Tabel 2.3.

Tabel 2.3. Matriks umum L_9 OA dengan 3 faktor A,B dan C

Run	Response	A			B			C		
		0	1	2	0	1	2	0	1	2
1	y_1	y_{10}	-	-	y_{10}	-	-	y_{10}	-	-
2	y_2	-	y_{21}	-	y_{20}	-	-	-	y_{21}	-
3	y_3	-	-	y_{32}	y_{30}	-	-	-	-	y_{32}
4	y_4	y_{40}	-	-	-	y_{41}	-	-	y_{41}	-
5	y_5	-	y_{51}	-	-	y_{51}	-	-	-	y_{52}
6	y_6	-	-	y_{62}	-	y_{61}	-	y_{60}	-	-
7	y_7	y_{70}	-	-	-	-	y_{72}	-	-	y_{72}
8	y_8	-	y_{81}	-	-	-	y_{82}	y_{80}	-	-
9	y_9	-	-	y_{92}	-	-	y_{92}	-	y_{91}	-
Average (\bar{y})		\bar{A}_0	\bar{A}_1	\bar{A}_2	\bar{B}_0	\bar{B}_1	\bar{B}_2	\bar{C}_0	\bar{C}_1	\bar{C}_2
Estimated main effect		Terbesar- Terkecil			Terbesar- Terkecil			Terbesar- Terkecil		

H. Metode Bissell

Diberikan rancangan FF berjumlah k faktor dengan $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k$ sebagai efek faktor dan $R_1, R_2, R_3, \dots, R_k$ rata-rata kuadrat yang saling bebas masing-masing mempunyai derajat bebas ν .

Hipotesis yang akan diuji adalah

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_i = 0 ; i = 1,2,\dots, k$ (semua faktor tidak berpengaruh terhadap *output*)

$H_1 : \exists \beta_i \neq 0 ; i = 1, 2, \dots, k$ (ada faktor yang berpengaruh terhadap *output*)

Untuk rata-rata kuadrat dari masing-masing faktor diberikan sebagai berikut

$$R = \frac{\sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y})^2}{v} ; v = k - 1$$

Jika mengalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{\sigma^2}$, diperoleh

$$\frac{vR}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y})^2}{\sigma^2}$$

Karena $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y})^2$ berdistribusi khi kuadrat, akibatnya $\frac{vR}{\sigma^2}$ berdistribusi khi kuadrat dengan derajat bebas v . Dengan demikian untuk R_i , $i = 1, 2, \dots, k$, yaitu

$$\frac{vR_1}{\sigma^2} \sim \chi_v^2 ; db = v$$

⋮ ⋮

$$\frac{vR_k}{\sigma^2} \sim \chi_v^2 ; db = v$$

Karena $\frac{vR}{\sigma^2}$ berdistribusi khi kuadrat, maka dapat dinyatakan ekspektasi dan varian $\frac{vR}{\sigma^2}$ yaitu

$$E\left(\frac{vR}{\sigma^2}\right) = v \rightarrow \frac{v}{\sigma^2} E(R) = v$$

$$E(R) = v$$

$$\text{Var}\left(\frac{vR}{\sigma^2}\right) = 2v \rightarrow \frac{v^2}{(\sigma^2)^2} \text{Var}(R) = 2v$$

$$\text{Var}(R) = \frac{2(\sigma^2)^2}{v}$$

Selanjutnya m merupakan faktor skala dari distribusi khi kuadrat,

$$\text{Var}(R) = \frac{2m^2}{v} \quad (1)$$

jika s^2 merupakan variansi sampel,

$$\frac{(k-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi_{k-1}^2 \quad (2)$$

dari persamaan 1 dan 2 diperoleh

$$\widehat{\text{Var}}(R) = \hat{\sigma}^2 = \frac{2m^2}{v}$$

maka

$$\begin{aligned} \frac{(k-1)s^2}{\hat{\sigma}^2} &= \frac{(k-1)s^2}{\frac{2m^2}{v}} \\ &= \frac{(k-1)v}{2} \left(\frac{s}{m}\right)^2 \end{aligned}$$

Selanjutnya didapatkan nilai statistik Bissel yang dinyatakan sebagai berikut,

yaitu :

$$B_k = \frac{(k-1)v}{2} \left(\frac{s}{m}\right)^2$$

Karena persamaan 2 berdistribusi khi kuadrat, nilai Bissell dikonstruksikan dari persamaan tersebut, diperoleh

$$B_k = \frac{(k-1)v}{2} \left(\frac{s}{m}\right)^2 \sim \chi^2_{k-1}$$

Untuk menentukan apakah ada pengaruh dar faktor-faktor atau tidak, diuji hipotesis H_0 untuk setiap nilai B_k yang diperoleh, dengan kriteria jika $B_k < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}, k-1}$ maka H_0 ditolak atau $B_k > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, k-1}$ maka H_0 ditolak. Untuk menentukan faktor yang signifikan dapat dilihat nilai rata-rata kuadrat (*Mean Square/ MS*) terbesar dari hasil perhitungan.