

BAB II KAJIAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas mengenai kajian teori yang digunakan sebagai dasar penulisan tugas akhir ini berdasarkan literatur yang relevan. Berikut ini merupakan pembahasan kajian-kajian tersebut.

A. Program Linear

Program Linear (PL) adalah model matematika untuk mencari suatu nilai optimum dari suatu fungsi tujuan yang berbentuk linear dengan dibatasi satu atau beberapa fungsi kendala yang berbentuk linear juga. Nilai optimum dapat berupa nilai minimum maupun nilai maksimum dari suatu fungsi tujuan. Pada PL terdapat tiga unsur utama yaitu variabel keputusan, fungsi tujuan, dan fungsi kendala. Variabel keputusan adalah variabel yang akan memberikan nilai fungsi tujuan yang paling menguntungkan. Variabel keputusan harus ditentukan terlebih dahulu sebelum menentukan fungsi tujuan dan fungsi kendala. Berikut diberikan definisi fungsi, fungsi linear, fungsi tujuan dan fungsi kendala.

Definisi 2.1. Fungsi (Edwin J. Purcell, 1987:57)

Sebuah fungsi f adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan setiap obyek x dalam satu himpunan yang disebut daerah asal, dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ dari himpunan kedua yang disebut daerah hasil fungsi.

Definisi 2.2. Fungsi Linear (Winston, 2004)

Fungsi $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ merupakan fungsi linear jika dan hanya jika fungsi f dapat dituliskan $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$, dengan $c_1, c_2, \dots, c_n$ merupakan koefisien.

Contoh 2.1

Diberikan fungsi sebagai berikut:

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 \quad (2.1)$$

$$f(x_1, x_2) = 4x_1x_2^2 \quad (2.2)$$

Fungsi (2.1) merupakan fungsi linear dan fungsi (2.2) merupakan fungsi nonlinear.

Definisi 2.3. Fungsi Kendala (Siswanto, 2007:39)

Fungsi kendala adalah fungsi yang mengendalikan nilai variabel keputusan.

Definisi 2.4. Fungsi Tujuan (Siswanto, 2007:39)

Fungsi tujuan adalah fungsi matematika yang akan dimaksimalkan atau diminimalkan terhadap fungsi kendala.

Langkah pertama di dalam perumusan model matematis untuk masalah pemrograman linear adalah perumusan model. Model merupakan tiruan suatu realitas, sedangkan perumusan model merupakan langkah untuk membuat peralihan dari realita ke model kualitatif. Menurut Siswanto (2007:27), pada pemrograman linear hal pokok yang harus ditemukan adalah pemaksimalan atau meminimalan fungsi tujuan terhadap kendala-kendala dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menyatakan tujuan ke dalam sebuah kalimat

Dalam hal perumusan fungsi tujuan harus memperhatikan apakah fungsi tujuan hendak diminimalkan/dimaksimalkan.

2. Menyatakan kendala ke dalam sebuah kalimat

Dalam hal perumusan kendala harus memperhatikan bentuk dari kendala, apakah berupa pembatas, yaitu tidak boleh lebih dari suatu nilai tertentu, berupa syarat, yaitu tidak boleh kurang dari nilai tertentu, atau berupa keharusan, yaitu sama dengan nilai tertentu.

3. Menemukan variabel keputusan

Pedoman yang sering digunakan untuk menemukan variabel keputusan adalah pembuatan pertanyaan kepada diri sendiri yaitu:

“Keputusan apa yang harus dibuat agar nilai fungsi tujuan menjadi maksimal/minimal?”

4. Merumuskan Model Matematis

Setelah tiga langkah pertama itu dilakukan maka sebagai langkah berikutnya secara berurutan adalah:

a. Menyatakan variabel keputusan ke dalam simbol matematika misal

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

b. Menyatakan fungsi tujuan ke dalam model matematika.

c. Menyatakan fungsi kendala ke dalam model matematika.

d. Karakteristik linear, yang mengisyaratkan bahwa seluruh fungsi matematika adalah linear.

Berikut ini bentuk baku model PL (B. Susanta, 1994:5).

Mencari $x_1, x_2, \dots, x_n$ yang memaksimalkan/meminimalkan

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (2.3)$$

dengan kendala

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{pmatrix} b_1 \quad (2.4a)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{pmatrix} b_2 \quad (2.4b)$$

$\vdots$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{pmatrix} b_m \quad (2.4c)$$

dan

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4d)$$

Atau dapat ditulis secara singkat seperti berikut.

Mencari $x_1, x_2, \dots, x_n$ yang memaksimalkan/meminimalkan

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (2.5)$$

dengan kendala

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{pmatrix} b_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (2.6a)$$

dan

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.6b)$$

dengan

x_j : variabel keputusan ke-j,

c_j : koefisien variabel keputusan ke-j,

b_i : kapasitas kendala ke-i,

a_{ij} : koefisien fungsi kendala ke-i untuk variabel keputusan ke-j,

i : 1, 2, ..., m,

j : 1, 2, ..., n.

Contoh 2.2

Memaksimalkan $f = 2x + 4y$ (2.7)

dengan kendala

$$x + y = 34 \quad (2.8a)$$

$$2x \geq 15 \quad (2.8b)$$

$$4y \geq 9 \quad (2.8c)$$

$$x, y \geq 0. \quad (2.8d)$$

Menurut B. Susanta (1994:6), formula (2.3) - (2.4d) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut.

Mencari X yang memaksimalkan/meminimalkan

$$f = CX \quad (2.9)$$

dengan kendala

$$AX(\leq, =, \geq)B \quad (2.10a)$$

$$x \geq 0 \quad (2.10b)$$

dengan A adalah matriks $m \times n$, X adalah vektor kolom $n \times 1$, B adalah vektor kolom $m \times 1$, dan C adalah vektor baris $n \times 1$.

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$X_{n \times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$B_{m \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$C_{1 \times n} = (c_1, c_2, \dots, c_n). \quad (2.14)$$

Penyelesaian masalah PL diantaranya dapat menggunakan metode aljabar, geometri/grafik, dan metode simpleks. Selain itu dapat juga dibantu menggunakan *software* tertentu. Agar dapat melihat kejadian penyelesaiannya, sebelumnya perlu memahami mengenai rank suatu matriks. Rank suatu matriks $A_{m \times n}$ adalah ukuran terbesar dari matriks bagian dari A yang determinannya tidak nol (B. Susanta, 1994:36). Rank matriks A dilambangkan dengan $r(A)$. Jelas bahwa

$$r(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\} \quad (2.15)$$

Suatu matriks bujursangkar A disebut singular bila $\det(A) = 0$ dan disebut tidak singular bila $\det(A) \neq 0$. Jadi bila $A_{n \times n}$ tidak singular maka $r(A) = n$. Rank matriks juga dapat diketahui dengan melakukan *eliminasi Gauss* sampai diperoleh *bentuk eselon*. Berikut diberikan definisi *bentuk eselon* dan definisi *eliminasi Gauss*.

Definisi 2.5 Bentuk Eselon (Howard Anton, 2010:40)

Sebuah matriks dikatakan dalam bentuk eselon baris jika mempunyai sifat:

1. *Baris tidak terdiri seluruhnya dari nol, maka bilangan tak nol pertama dalam baris tersebut adalah 1 (selanjutnya disebut 1 utama).*

2. Terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka semua baris seperti itu dikelompokkan bersama-sama di bawah matriks.
3. Dalam sebarang dua baris yang berurutan yang seluruhnya tidak terdiri dari nol, maka 1 utama dalam baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh ke kanan dari 1 utama dalam baris yang lebih tinggi.

Definisi 2.6 Eselon Baris Tereduksi (Howard Anton, 2010:42)

Eselon baris tereduksi adalah matriks yang memiliki sifat seperti eselon baris dengan syarat tambahan yaitu masing-masing kolom yang mengandung 1 utama mempunyai nol di tempat lain.

Definisi 2.7 Eliminasi Gauss (Howard Anton, 2010:15)

Eliminasi Gauss adalah prosedur untuk menghasilkan bentuk eselon baris.

Definisi 2.8 Eliminasi Gauss-Jordan (Howard Anton, 2010:16)

Eliminasi Gauss-Jordan adalah prosedur untuk menghasilkan bentuk eselon baris tereduksi.

Secara umum, kejadian penyelesaian persamaan linear dapat ditandai dengan rank matriks sebagai berikut (B. Susanta, 1994: 38):

Berdasarkan formula (2.10a) dengan cara tulis matriks $AX = B$, disusun

matriks $AB = (A, B) = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$ ialah matriks A yang

dilengkapi dengan suku tetap di ruas kanan.

Jika $r(A) \neq r(A_B)$ maka tidak ada penyelesaian.

Jika $r(A) = r(A_B) = p$ maka ada solusi yaitu, untuk $p < n$ maka terdapat banyak solusi, untuk $p = n$ maka hanya ada satu solusi.

Selanjutnya, solusi untuk masalah pemrograman linear yang memenuhi persamaan (2.6a) dan (2.6b) disebut penyelesaian layak (p.l.) dan penyelesaian layak yang mengoptimalkan persamaan (2.5) disebut penyelesaian optimum (p.o.) (B. Susanta, 1994: 113).

Berikut ini dua cara yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah PL (Siswanto, 2009:47) yaitu dengan analisis geometri dan algoritma simpleks.

1. Analisis Geometri

Khusus untuk soal program linear dengan dua variabel tersedia metode penyelesaian dengan grafik (B. Susanta, 1994:45). Metode grafik ini berlaku untuk masalah program linear solusi banyak. Sebelumnya perlu dibahas mengenai daerah layak/daerah *feasible* (DF). Pada setiap kasus pemrograman linear, susunan dari kendala-kendala akan membentuk suatu bidang yang menjadi tempat kedudukan bagi variabel-variabel yang memenuhi seluruh kendala.

Contoh 2.3

Berikut ini adalah fungsi-fungsi kendala dari suatu masalah program linear.

$$a - b \leq 1 \quad (i)$$

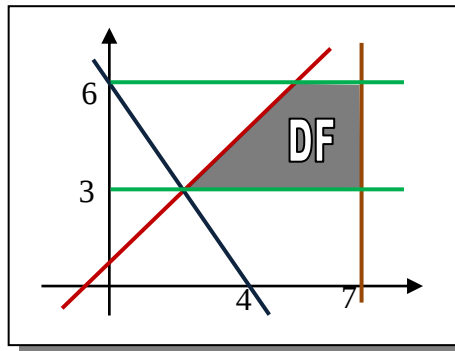
$$3a + 2b \geq 12 \quad (ii)$$

$$a \leq 7 \quad (iii)$$

$$b \leq 6 \quad (iv)$$

$$b \leq 3. \quad (v)$$

Jika kelima fungsi kendala tersebut digambarkan pada satu bidang kemudian dicari irisannya, maka diperoleh Gambar 1.

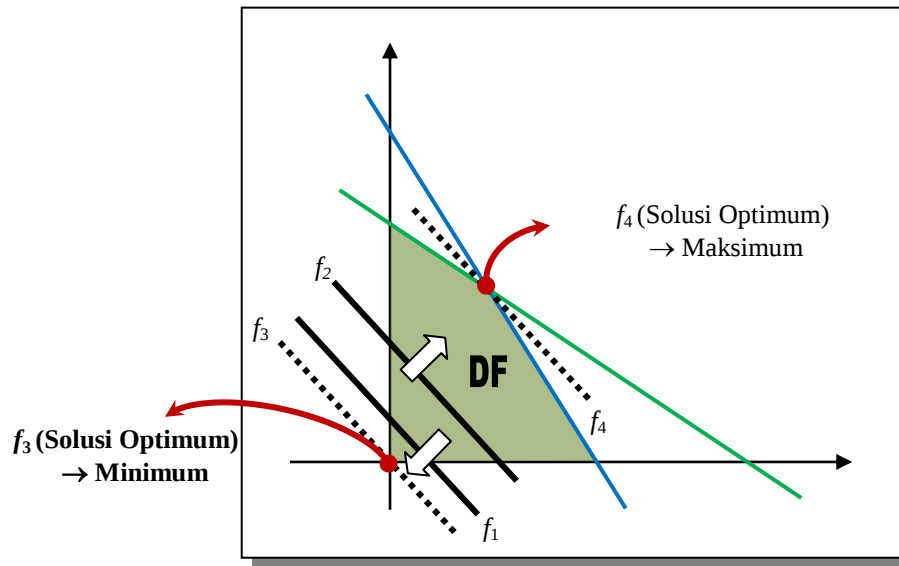


Gambar 1. Grafik Irisan dari Setiap Fungsi Kendala

Perpotongan antara bidang penyelesaian dari masing-masing kendala membentuk suatu bidang baru yang dinamakan daerah layak/*feasible region*/daerah feasible (DF). Penyelesaian optimum yang memenuhi seluruh kendala dan mengakibatkan fungsi tujuan berada pada titik-titik ekstrim pada daerah layak. Ada dua cara untuk menentukan solusi optimum pada daerah layak (*feasible region*) dengan metode grafik yaitu sebagai berikut.

a. Menggunakan garis selidik

Menurut B. Susanta, (1997:47) grafik fungsi tujuan PL dengan dua variabel berupa garis lurus yang disebut garis senilai karena menggambarkan pasangan-pasangan (x,y) yang memberikan nilai f yang sama.



Gambar 2. Penjelasan Garis Isoline

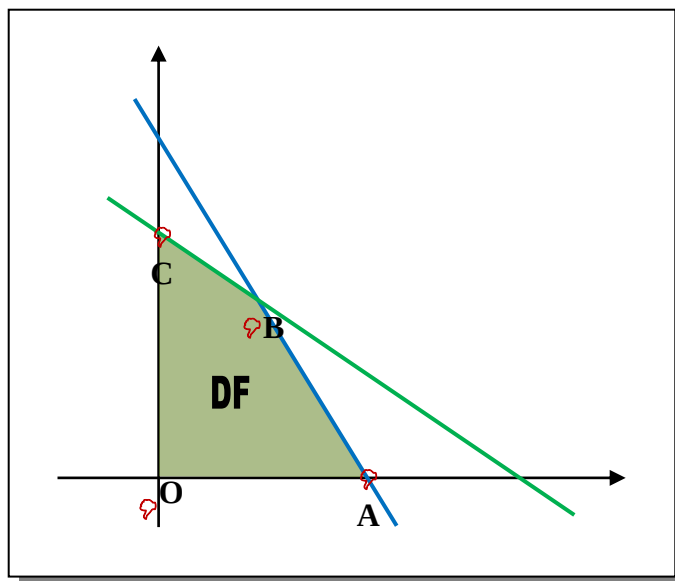
Pada Gambar 2 terlukis empat garis senilai yaitu f_1 , f_2 , f_3 , dan f_4 . Jelas bahwa keempat garis tersebut saling sejajar dengan gradien yang sama, di mana semakin ke kanan garis senilai digeser semakin besar nilai f yang diberikan. Penyelesaian optimum yang memaksimalkan nilai f secara gambar berarti mencari titik anggota f yang membuat f sebesar mungkin. Hal ini terjadi dengan cara menggambar dua garis senilai misalnya f_1 dan f_2 , melihat arah membesarnya f lalu menggeser garis senilai ke arah itu sampai ke titik irisannya dengan f yang terakhir misalkan f_4 . Titik itulah yang disebut dengan titik optimum. Garis senilai f_1 dan f_2 yang dilukis di atas diperlukan untuk menyelidiki gradien garis senilai dan arah penggeserannya maka kedua garis tersebut disebut sebagai garis selidik.

b. Menggunakan titik ekstrim

Menurut Erika Laras, (2015:6) Titik ekstrim merupakan titik-titik sudut pada daerah layak. Langkah-langkah menentukan solusi optimum dengan teknik titik ekstrim adalah:

- 1) Menentukan irisan daerah penyelesaian dari semua fungsi kendala sehingga diperoleh daerah layak.
- 2) Menentukan titik ekstrim dari daerah layak.
- 3) Mengevaluasi nilai fungsi tujuan pada setiap titik ekstrim daerah layak.
- 4) Nilai optimum adalah nilai terbesar dari evaluasi pada langkah 3 untuk fungsi tujuan memaksimumkan atau nilai terkecilnya untuk fungsi tujuan meminimumkan.

Akan lebih jelasnya bila memperhatikan Gambar 3 berikut ini.



Gambar 3. Titik-titik Ekstrim

Jika fungsi tujuan dari permasalahan di atas adalah f , setelah ditentukan koordinat titik O, A, B , dan C , maka selanjutnya evaluasi nilai f di setiap titik tersebut. Tentukan f_O, f_A, f_B , dan f_C .

- Nilai maksimum = $\max (f_O, f_A, f_B, f_C)$
- Nilai minimum = $\min (f_O, f_A, f_B, f_C)$

2. Algoritma Simpleks

Metode simpleks digunakan untuk mencari solusi permasalahan PL yang memuat tiga variabel atau lebih. Pada tulisan tugas akhir ini perhitungan menggunakan software LINGO yang pada dasarnya cara kerjanya menggunakan Algoritma Simplex.

Definisi 2.9 Algoritma Simpleks (Siswanto, 2007:73)

Algoritma simpleks adalah sebuah prosedur matematis berulang untuk menemukan penyelesaian optimal soal pemrograman linear dengan cara menguji titik-titik sudutnya.

Pada penyelesaian permasalahan PL menggunakan algoritma simpleks, semua fungsi kendala harus berbentuk persamaan/sudah tereduksi/kanonik karena bekerja dengan susunan persamaan jauh lebih mudah dari pada dengan susunan pertidaksamaan.

Definisi 2.10 Bentuk Kanonik (B. Susanta, 1997:70)

Bentuk kanonik adalah model program linear dengan semua fungsi kendala utama berbentuk persamaan.

Fungsi kendala yang berbentuk pertidaksamaan diubah terlebih dahulu menjadi persamaan dengan menambah ruas kiri dengan variabel *slack*

ataupun mengurangi ruas kiri dengan variabel *surplus* (S_j). Variabel *slack* adalah variabel yang berfungsi untuk menampung sisa kapasitas pada kendala yang berupa pembatas. Sedangkan variabel *surplus* adalah variabel yang berfungsi untuk menampung kelebihan nilai ruas kiri pada kendala yang berupa syarat. Variabel *slack* ditambahkan pada ruas kiri jika pertidaksamaan $\leq$, variabel *surplus* ditambahkan pada ruas kiri dengan koefisien “-1” jika pertidaksamaan $\geq$ sehingga bentuk fungsi kendala menjadi seperti berikut.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \text{ menjadi } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + S_j = b_i \quad (2.16)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \text{ menjadi } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - S_j = b_i. \quad (2.17)$$

Secara umum terdapat dua jenis relasi pada fungsi kendala. Pertama jika relasi dalam semua kendala utama berbentuk $\leq$, maka disebut berbentuk maksimum baku. Kedua jika relasi dalam semua kendala utama berbentuk $\geq$, maka disebut berbentuk minimum baku. Namun apabila tidak semua kendala utama berpola sama maka disebut maksimum tidak baku/minimum tidak baku. Selanjutnya dalam pembentukan bentuk kanonik untuk kasus maksimum tidak baku/minimum tidak baku diperlukan variabel semu (a). Koefisien a dalam fungsi sasaran baru adalah +M untuk soal berpola minimum. Koefisien a dalam fungsi sasaran baru adalah -M untuk soal berpola maksimum, dengan M adalah bilangan yang sangat besar. Untuk mempermudah langkah-langkah penyelesaian masalah PL menggunakan algoritma simpleks, berikut ini bentuk umum tabel simpleks.

Tabel 1. Tabel Simpleks dalam Bentuk Simbol

	c_j		c_1	c_2	...	c_n		
$\bar{c}_i$	$\bar{x}_i$	x_j	x_1	x_2	...	x_n	b_i	R_i
$\bar{c}_1$	$\bar{x}_1$		a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1	R_1
$\bar{c}_2$	$\bar{x}_2$		a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2	R_2
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\bar{c}_m$	$\bar{x}_m$		a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m	R_m
	z_j		z_1	z_2	...	z_n	Z	
	$z_j - c_j$		$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	...	$z_n - c_n$	Z	

Keterangan.

x_j : variabel-variabel lengkap,

a_{ij} : koefisien teknis,

b_i : suku tetap (tak negatif),

c_j : koefisien ongkos,

$\bar{x}_i$: variabel yang menjadi basis dalam tabel yang ditinjau,

$\bar{c}_j$: koefisien ongkos milik perubah basis $\bar{x}_i$,

z_j : hasil kali dari $\bar{c}_i$ dengan kolom a_{ij} ,

Z : hasil kali dari $\bar{c}_i$ dengan kolom b_i ,

$z_j - c_j$: selisih z_j dengan c_j .

Setelah mengetahui penyusunan bentuk umum tabel simpleks seperti di atas, maka langkah-langkah penyelesaian masalah PL menggunakan tabel simpleks adalah sebagai berikut.

1. Mengubah soal ke bentuk kanonik.
2. Menyusun tabel awal seperti pada Tabel 1.
3. Menguji keoptimuman.

a. Kasus memaksimumkan, tabel sudah maksimum jika $z_j - c_j \geq 0$ untuk semua j.

b. Kasus meminimalkan, tabel sudah minimal jika $z_j - c_j \leq 0$ untuk semua j.
Jika tabel belum optimum maka tabel harus diperbaiki dengan melanjutkan ke langkah no.4.

4. Memilih kolom dan baris kunci.

a. Kasus memaksimumkan. Memilih kolom kunci yaitu k dengan $z_k - c_k < 0$ yang paling kecil, maka x_k terpilih untuk masuk menjadi basis. Memilih baris kunci yaitu p dengan R_p terkecil, maka $\bar{x}_p$ terpilih untuk keluar dari basis.

b. Kasus meminimalkan. Memilih kolom kunci k dengan $z_k - c_k > 0$ yang paling besar, maka x_k terpilih untuk masuk menjadi basis. Memilih baris kunci yaitu p dengan R_p terbesar, maka $\bar{x}_p$ terpilih untuk keluar dari basis.

c. Selanjutnya pertemuan antara kolom kunci dan baris kunci disebut unsur kunci.

5. Memperbaiki tabel.

Agar lebih jelas, berikut ini contoh langkah-langkah perbaikan tabel simpleks.

Contoh 2.4

Mencari x dan y dengan tujuan

$$\text{meminimalkan } f = 4y + 10z \quad (2.18)$$

dengan kendala

$$-4x + y + z \geq 12 \quad (2.19a)$$

$$x + y - z \leq 15 \quad (2.19b)$$

$$x, y, z \geq 0 \quad (2.19c)$$

Penyelesaian:

Bentuk kanonik dari soal di atas adalah mencari x, y, z, s_1, s_2 , dan a yang meminimalkan

$$f = 4y + 10z + 0s_1 + 0s_2 + Ma \quad (2.20)$$

dan memenuhi

$$-4x + y + z - s_1 + a = 12 \quad (2.21a)$$

$$x + y - z + s_2 = 15 \quad (2.21b)$$

$$x, y, z, s_1, s_2, a \geq 0 \quad (2.21c)$$

Tabel 2. Tabel I Simpleks Contoh 2.4

	c_j		0	4	10	0	0	M		
$\bar{c}_i$	$\bar{x}_i$	x_j	x	Y	Z	s_1	s_2	a	b_i	R_i
M	a		-4	1	1	-1	0	1	12	12
0	s_2		-1	1	-1	0	1	0	15	15
	z_j		-4M	M	M	-M	0	M	12M	
	$z_j - c_j$		-4M	M-4	M-10	-M	0	0	12M	

Pada tabel I masih ada dua $z_j - c_j$ yang bernilai positif yaitu pada kolom 2 dan kolom 3, jadi tabel belum optimum. Sesuai dengan langkah 4.b, dipilih kolom 2 sebagai kolom kunci dan disusun R_i . Kemudian R_i terkecil terdapat pada baris 1, berarti a (basis ke-1) harus keluar digantikan oleh y . Maka tabel perlu diperbaiki lagi seperti berikut.

Tabel 3. Tabel II Simpleks Contoh 2.4

	c_j		0	4	10	0	0	M		
$\bar{c}_i$	$\bar{x}_i$	x_j	x	Y	Z	s_1	s_2	a	b_i	R_i
4	y		-4	1	1	-1	0	1	12	
0	s_2		3	0	-2	1	1	-1	3	
	z_j		-16	4	4	-4	0	4	48	
	$z_j - c_j$		-16	0	-6	-4	0	4-M	48	

Pada tabel II tersebut seluruh $z_j - c_j \leq 0$, sehingga tabel sudah optimum dengan a bernilai nol (karena bukan basis), $f = 48$ dan $(x, y, z) = (0, 12, 0)$.

B. Program Linear Tujuan Ganda

Program Linear Tujuan Ganda atau PLTG merupakan pengembangan dari masalah PL di mana fungsi tujuan dari PLTG lebih dari satu yang dibatasi oleh beberapa fungsi kendala. Terlebih dahulu akan dibahas mengenai cara-cara memformulasikan PLTG yang hampir sama dengan PL.

1. Memilih model yang sesuai dengan permasalahan.
2. Merumuskan faktor-faktor yang mempengaruhi.
3. Menetapkan variabel keputusan.
4. Menetapkan fungsi tujuan dan fungsi kendala.

Berikut ini bentuk umum dari PLTG menurut Estefania Yap (2013: 2).

Mencari x yang meminimalkan/memaksimalkan

$$f_i(x) = cx, \quad (2.22)$$

dengan kendala

$$\begin{aligned} Ax &\leq B \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

dengan,

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T,$$

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.5

Mencari x yang meminimalkan

$$f_1 = x_1 + 2x_2 \quad (2.24a)$$

$$f_2 = 3x_1 - x_2 \quad (2.24b)$$

dengan kendala

$$2x_1 + 6x_2 \leq 27 \quad (2.25a)$$

$$8x_1 + 6x_2 \leq 45 \quad (2.25b)$$

$$3x_1 + x_2 \leq 15 \quad (2.25c)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (2.25d)$$

Pada program linear fungsi tujuan tunggal solusi utama merupakan solusi optimum, sedangkan dalam program linear tujuan Ganda solusi optimum dari masing-masing fungsi tujuan disebut titik ideal.

Definisi 2.11 Titik Ideal (W. F. Abd El-Wahed, 2006)

Titik ideal adalah solusi optimum masing-masing fungsi tujuan pada masalah PLTG.

Setelah diketahui titik idealnya, kemudian akan dicari solusi optimum dari masalah PLTG dengan metode yang telah dipilih. Selanjutnya akan dibandingkan efektivitas metode yang digunakan berdasarkan jarak antara

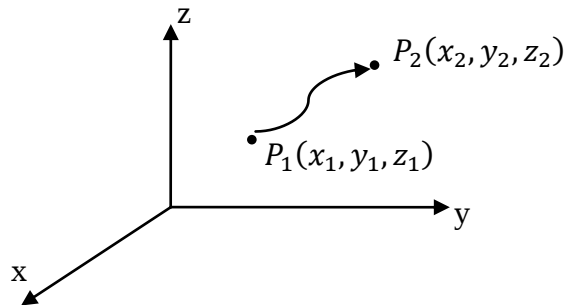
titik ideal dengan solusi dari kedua metode. Penjelasan mengenai jarak antara dua titik adalah sebagai berikut (Howard Anton:2010,130).

Panjang suatu vektor atau norma vektor dinotasikan dengan $\| \cdot \|$. Misalkan pada R^2 terdapat suatu titik u dan v didefinisikan $u = (x_1, y_1)$ dan $v = (x_2, y_2)$. Jarak antara dua titik tersebut dinotasikan $d(u, v)$ merupakan ruang hasil kali dalam dan didefinisikan dengan:

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \|u - v\| \\ &= \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle^{1/2} \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$d(u, v) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2.27)$$

Jika $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ adalah dua titik di R^3 , maka jarak antara dua titik tersebut adalah norma vektor P_1P_2 seperti pada gambar 4 berikut.



Gambar 4 Jarak Dua Titik Di Ruang-3

Karena $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ maka dari persamaan (2.27) jelas bahwa

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2.28)$$

C. Himpunan Fuzzy

1. Pengertian Himpunan Fuzzy

Himpunan fuzzy pertama kali diperkenalkan oleh Lotfi A. Zadeh pada tahun 1965. Nilai keanggotaan menjadi ciri utama dari penalaran dalam

himpunan *fuzzy*. Pada himpunan tegas (*crisp*) A , nilai keanggotaan x dalam suatu himpunan A memiliki dua kemungkinan. Pertama adalah satu (1) yang berarti bahwa x menjadi anggota dalam suatu himpunan. Kedua adalah nol (0) yang berarti bahwa x tidak menjadi anggota dalam suatu himpunan. Nilai keanggotaan pada himpunan *fuzzy* berada di selang $[0, 1]$. Himpunan *fuzzy* merupakan perkembangan dari himpunan tegas. Misalkan A himpunan tegas yang tidak kosong dan x merupakan elemen dalam himpunan A , maka nilai keanggotaan x pada himpunan A adalah

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } x \in A \\ 0, & \text{jika } x \notin A \end{cases} \quad (2.29)$$

Selanjutnya, akan dijelaskan konsep dasar dalam himpunan *fuzzy*.

Definisi 2.12 Himpunan Fuzzy (Zimmermann, 1996:11-12)

Jika X adalah himpunan yang secara umum dinotasikan oleh x , maka himpunan fuzzy $\tilde{A}$ di X adalah himpunan dari pasangan berurutan:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\} \quad (2.30)$$

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ disebut fungsi keanggotaan atau derajat keanggotaan dari x di $\tilde{A}$.

Contoh 2.6

Seorang makelar akan mengklasifikasikan sebuah rumah untuk ditawarkan kepada pelanggannya. Salah satu indikator dari kenyamanan suatu rumah adalah jumlah kamar tidurnya. Misalkan $X = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ adalah himpunan dari tipe rumah yang tersedia dideskripsikan oleh x = jumlah kamar tidur pada rumah. Maka himpunan *fuzzy* dari tipe rumah yang nyaman untuk empat anggota keluarga dideskripsikan sebagai

$$\tilde{A} = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 0.1), (5, 0.7), (6, 0.3)\}$$

2. Operasi Antar Himpunan Fuzzy

Berikut ini penjelasan mengenai operasi himpunan fuzzy yang berupa irisan dan gabungan.

Definisi 2.13 Irisan Himpunan Fuzzy (Bellman & Zadeh, 1970:144).

Irisan dari dua himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dinotasikan sebagai $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ dan didefinisikan sebagai himpunan fuzzy terbesar yang terdapat pada $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$.

Fungsi keanggotaan $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ diberikan oleh

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, x \in X \quad (2.31)$$

Contoh 2.7

Berdasarkan Contoh 2.6 himpunan fuzzy $\tilde{B}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\tilde{B} = \{(1,0.3), (2,0.1), (3,0.6), (4,0.2), (5,0.5), (6,0.8)\}$$

untuk mencari $\tilde{A} \cap \tilde{B}$, terlebih dahulu menghitung $\min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$ untuk setiap $x \in E$.

Nilai keanggotaan untuk 1 pada $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah

$$\min\{\mu_{\tilde{A}}(1), \mu_{\tilde{B}}(1)\} = \min\{0.2, 0.3\} = 0.2.$$

Nilai keanggotaan untuk 2 pada $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah

$$\min\{\mu_{\tilde{A}}(2), \mu_{\tilde{B}}(2)\} = \min\{0.5, 0.1\} = 0.1.$$

Nilai keanggotaan untuk 3 pada $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah

$$\min\{\mu_{\tilde{A}}(3), \mu_{\tilde{B}}(3)\} = \min\{0.8, 0.6\} = 0.6.$$

Nilai keanggotaan untuk 4 pada $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah

$$\min\{\mu_{\tilde{A}}(4), \mu_{\tilde{B}}(4)\} = \min\{0.1, 0.2\} = 0.1.$$

Nilai keanggotaan untuk 5 pada $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah

$$\min\{\mu_{\tilde{A}}(5), \mu_{\tilde{B}}(5)\} = \min\{0.7, 0.5\} = 0.5.$$

Nilai keanggotaan untuk 6 pada $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah

$$\min\{\mu_{\tilde{A}}(6), \mu_{\tilde{B}}(6)\} = \min\{0.3, 0.8\} = 0.3.$$

Jadi, $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(1, 0.2), (2, 0.1), (3, 0.8), (4, 0.1), (5, 0.7), (6, 0.3)\}$

Definisi 2.14 Gabungan Himpunan Fuzzy (Bellman & Zadeh, 1970:145)

Irisan dari dua himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dinotasikan sebagai $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ dan didefinisikan sebagai himpunan fuzzy terkecil yang terdapat pada $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$.

Fungsi keanggotaan $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ diberikan oleh

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \quad (2.32)$$

Contoh 2.8

Berdasarkan Contoh 2.7, untuk mencari $\tilde{A} \cup \tilde{B}$, terlebih dahulu menghitung $\max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$.

Nilai keanggotaan untuk gabungan $1 \in \tilde{A}$ dengan $1 \in \tilde{B}$ adalah

$$\max\{\mu_{\tilde{A}}(1), \mu_{\tilde{B}}(1)\} = \max\{0.2, 0.3\} = 0.3.$$

Nilai keanggotaan untuk gabungan $2 \in \tilde{A}$ dengan $2 \in \tilde{B}$ adalah

$$\max\{\mu_{\tilde{A}}(2), \mu_{\tilde{B}}(2)\} = \max\{0.5, 0.1\} = 0.5.$$

Nilai keanggotaan untuk gabungan $3 \in \tilde{A}$ dengan $3 \in \tilde{B}$ adalah

$$\max\{\mu_{\tilde{A}}(3), \mu_{\tilde{B}}(3)\} = \max\{0.8, 0.6\} = 0.8.$$

Nilai keanggotaan untuk gabungan $4 \in \tilde{A}$ dengan $4 \in \tilde{B}$ adalah

$$\max\{\mu_{\tilde{A}}(4), \mu_{\tilde{B}}(4)\} = \max\{0.1, 0.2\} = 0.2.$$

Nilai keanggotaan untuk gabungan $5 \in \tilde{A}$ dengan $5 \in \tilde{B}$ adalah

$$\max\{\mu_{\tilde{A}}(5), \mu_{\tilde{B}}(5)\} = \max\{0.7, 0.5\} = 0.7.$$

Nilai keanggotaan untuk gabungan $6 \in \tilde{A}$ dengan $6 \in \tilde{B}$ adalah

$$\max\{\mu_{\tilde{A}}(6), \mu_{\tilde{B}}(6)\} = \max\{0.3, 0.8\} = 0.8.$$

Jadi, $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(1,0.3), (2,0.5), (3,0.8), (4,0.2), (5,0.7), (6,0.8)\}$

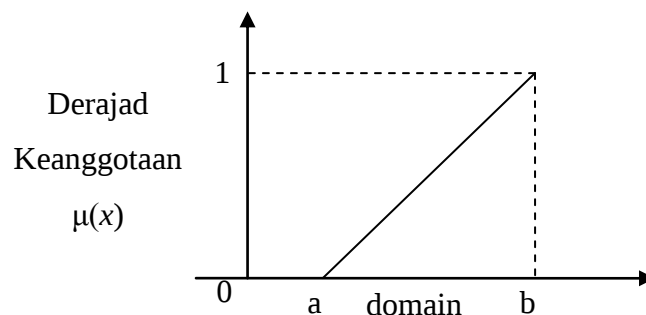
3. Representasi Fungsi Keanggotaan

Fungsi keanggotaan merupakan komponen terpenting dalam logika *fuzzy* karena fungsi keanggotaanlah yang membedakan antara logika klasik dengan logika *fuzzy*. Fungsi keanggotaan dapat direpresentasikan dengan berbagai cara seperti *Graphical representastion*, *tabular and list representation*, *geometric representation*, dan *analytical representation*. Pada tulisan ini menggunakan *analytical representation* untuk menunjukkan fungsi keanggotaan.

Ada beberapa jenis representasi fungsi keanggotaan menurut Sri Kusumadewi (2010: 9) diantaranya:

a. Fungsi Keanggotaan Linier

Bentuk ini paling sederhana untuk mendekati suatu konsep yang kurang jelas. Ada 2 keadaan himpunan *fuzzy* yang linear. Pertama himpunan dimulai pada anggota himpunan *fuzzy* yang memiliki derajat keanggotaan 0 bergerak ke kanan menuju ke anggota himpunan *fuzzy* yang memiliki derajat keanggotaan lebih tinggi (Gambar 5).

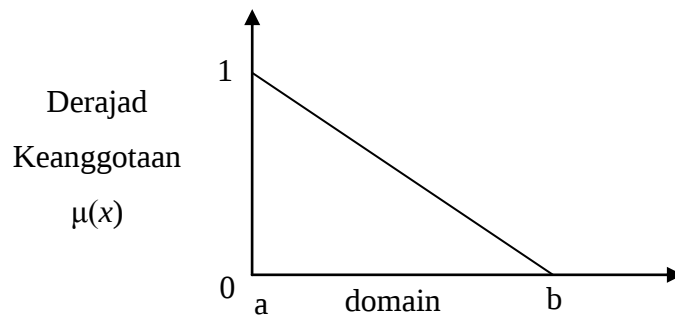


Gambar 5 Representasi Linear Naik

Fungsi keanggotaan:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x \geq b \end{cases} \quad (2.33)$$

Kedua, merupakan kebalikan yang pertama.



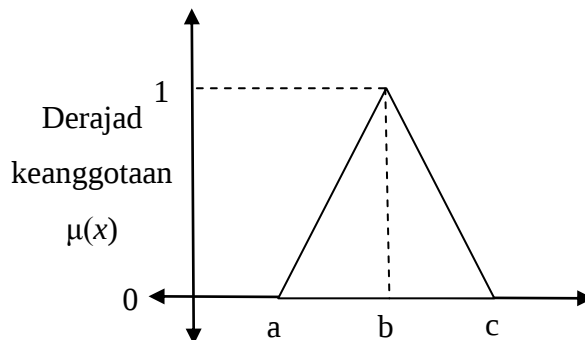
Gambar 6. Representasi Linear Turun

Fungsi keanggotaan:

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{b-x}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0 & x \geq b \end{cases} \quad (2.34)$$

b. Fungsi Keanggotaan Kurva Segitiga

Kurva segitiga pada dasarnya adalah gabungan dari dua garis (linear) seperti pada Gambar 7 berikut.



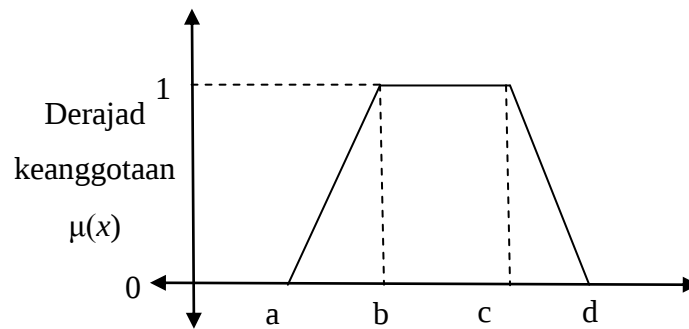
Gambar 7 Kurva Segitiga

Fungsi keanggotaan segitiga diidentifikasi dengan tiga parameter a, b, dan c yang dirumuskan dengan fungsi:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \text{ atau } x \geq c \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{b-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \end{cases} \quad (2.35)$$

c. Representasi Kurva Trapesium

Kurva trapesium pada dasarnya seperti bentuk segitiga, hanya saja ada beberapa titik yang memiliki nilai keanggotaan 1 (Gambar 8).



Gambar 8 Kurva Trapesium

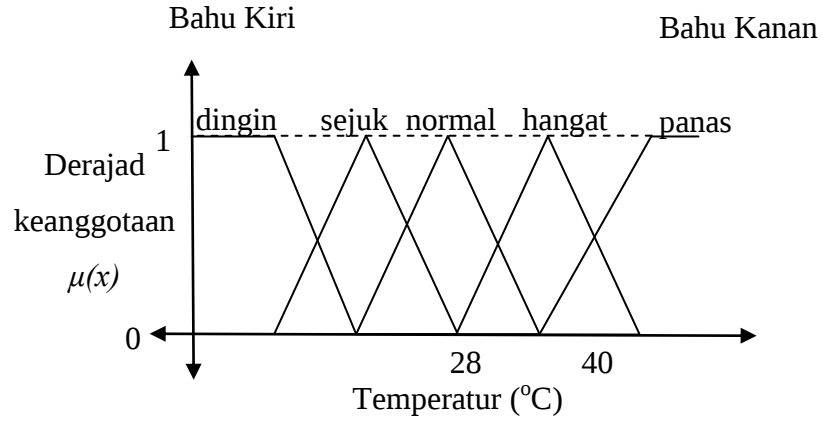
Fungsi keanggotaan:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \text{ dan } x \geq d \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & x \geq d \end{cases} \quad (2.36)$$

d. Representasi Kurva Bentuk Bahu

Daerah yang terletak di tengah-tengah variabel yang direpresentasikan dalam bentuk segitiga, pada sisi kanan dan kirinya akan naik dan turun (misalkan: dingin bergerak ke sejuk bergerak ke hangat dan bergerak ke panas). Tetapi terkadang salah satu sisi dari variabel tersebut tidak mengalami perubahan. Sebagai contoh, apabila telah mencapai kondisi panas, kenaikan temperatur akan tetap berada pada kondisi panas. Himpunan *fuzzy* ‘bahu’, bukan segitiga, digunakan untuk mengakhiri variabel suatu daerah *fuzzy*.

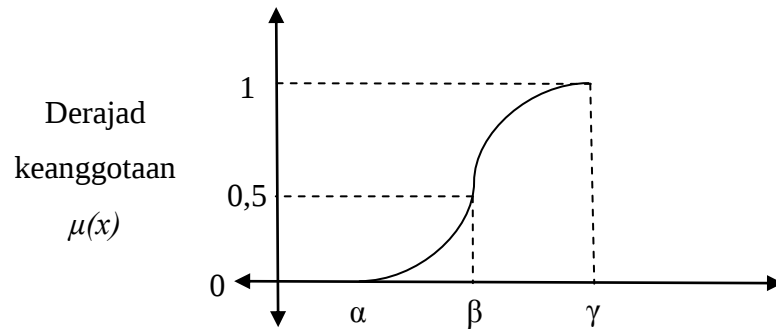
Bahu kiri bergerak dari benar ke salah, demikian juga bahu kanan bergerak dari salah ke benar (Gambar 9).



Gambar 9. Daerah Bahu pada Variabel temperatur

e. Representasi Kurva S

Kurva S atau *sigmoid* merupakan kurva yang berhubungan dengan kenaikan dan penurunan permukaan secara tidak linear. Ada dua macam kurva S yaitu kurva pertumbuhan dan penyusutan.



Gambar 10. Kurva Pertumbuhan

Fungsi keanggotaan kurva pertumbuhan:

$$S(x, \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} 0, & x \leq \alpha \\ 2 \left(\frac{x-\alpha}{\gamma-\alpha} \right)^2, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 - 2 \left(\frac{\gamma-x}{\gamma-\alpha} \right)^2, & \beta \leq x \leq \gamma \\ 1, & x \geq \gamma \end{cases} \quad (2.37)$$

Fungsi keanggotaan kurva penyusutan:

$$S(x, \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} 0, & x \leq \alpha \\ 1 - 2 \left(\frac{x-\alpha}{\gamma-\alpha} \right)^2, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 2 \left(\frac{\gamma-x}{\gamma-\alpha} \right)^2, & \beta \leq x \leq \gamma \\ 1, & x \geq \gamma \end{cases} \quad (2.38)$$

f. Representasi Kurva Bentuk Lonceng

Kurva berbentuk lonceng terbagi atas 3 kelas, yaitu himpunan *fuzzy* PI, BETA, dan GAUSS.

Fungsi keanggotaan kurva PI dinotasikan sebagai berikut.

$$\pi(x, \beta, \gamma) = \begin{cases} S\left(x, \gamma - \beta, \gamma - \frac{\beta}{2}, \gamma\right), & x \leq \gamma \\ 1 - S\left(x, \gamma, \gamma + \frac{\beta}{2}, \gamma + \beta\right) & x > \gamma \end{cases} \quad (2.39)$$

Fungsi keanggotaan kurva BETA dinotasikan sebagai berikut.

$$B(x, \gamma, \beta) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-\gamma}{\beta} \right)^2}, \quad (2.40)$$

Fungsi keanggotaan kurva GAUSS dinotasikan sebagai berikut

$$G(x, k, \gamma) = e^{-k(\gamma-x)^2} \quad (2.41)$$

Dalam skripsi ini digunakan representasi fungsi keanggotaan linear.

D. Managemen Rantai Pasok

Rantai pasok merupakan rangkaian kegiatan pemasokan, pemrosesan, persediaan, dan pengiriman kepada pelanggan, sedangkan manajemen rantai pasok merupakan metode pengelolaan siklus mulai dari memasok bahan mentah dari para supplier, memproduksi barang, sampai pada kegiatan pengiriman kepada konsumen (Hendra Poerwanto, 2013). Untuk membangun

suatu sistem manajemen rantai pasokan yang optimal, harus memperhatikan lima hal dasar sebagai berikut.

1. Perencanaan

merupakan proses awal bagaimana membuat tolok ukur untuk menentukan tingkat efisiensi, harga, kualitas, dan nilai pada pelanggan.

2. Pemasokan

hal terpenting yaitu memilih pemasok-pemasok terbaik dan menentukan tolok ukur untuk menjaga kualitas, komitmen, penerimaan barang, pemeriksaan, pemindahan ke pabrik, serta pembayaran.

3. Pembuatan

mencakup kegiatan pembuatan, pemeriksaan, pemaketan, dan persiapan pengiriman barang.

4. Pengantaran

disebut juga logistik, mencakup pengaturan penerimaan pesanan dari pelanggan, membuat jaringan pergudangan, memilih jalur pengiriman barang ke pelanggan, dan pembayaran.

5. Pengembalian

merupakan penanganan masalah pengembalian barang cacat atau produksi berlebih dari pelanggan.

Pada dasarnya, rantai pasok mencakup semua aktivitas yang berkaitan dengan aliran dan transformasi barang dari bentuk bahan baku hingga sampai ke pengguna akhir. Salah satu hal penting yang harus diperhatikan dalam rantai pasok adalah mengenai pasokan, mengingat setiap perusahaan tidak

selalu bisa memenuhi pemesanan barang dengan memproduksi sendiri. Maka dari itu, adanya pemasok barang dari luar perusahaan sangat diperlukan. Dengan tercapainya koordinasi dari rantai pasok perusahaan maka, perusahaan tidak akan mengalami kekurangan barang juga tidak sampai kelebihan barang terlalu banyak. Disamping itu, perlu juga diketahui berbagai sifat pergerakan rantai pasok untuk berbagai persediaan. Persediaan adalah beberapa jenis barang yang disimpan di gudang yang mempunyai sifat pergerakan yang agak berbeda satu sama lain sehingga panjang pendeknya rantai pasok juga berbeda tergantung dari metode pemenuhan bahan baku yang dipilih oleh pelaku bisnisnya. Menurut Hendra Poerwanto (2013), terdapat beberapa jenis persediaan, yaitu sebagai berikut.

1. Bahan baku (*raw materials*)

Bahan baku ini, di pabrik pembuat produk akhir, digabung dengan bahan penolong dan dengan teknologi tertentu diolah menjadi bahan setengah jadi dan bahan jadi.

2. Barang setengah jadi (*work in process product*)

Bahan setengah jadi adalah hasil dari proses bahan baku. Bahan setengah jadi dapat langsung diproses di pabrik yang sama menjadi bahan jadi, tetapi dapat juga dijual kepada konsumen sebagai komoditas.

3. Barang komoditas (*commodity*)

Persediaan jenis ini adalah barang yang dibeli oleh perusahaan tertentu sudah dalam bentuk barang jadi dan diperdagangkan/dijual kembali kepada konsumen baik diubah kemasannya maupun tidak.

4. Barang proyek

Persediaan jenis ini adalah material dan suku cadang yang digunakan untuk membangun proyek tertentu, misalnya membuat pabrik baru.

Biaya produksi dan biaya material juga dapat dikurangi melalui manajemen rantai pasok. Biaya material ditentukan melalui pengaturan perjanjian keuangan dengan pemasok dan biaya produksi merupakan hasil dari desain rantai pasok internal. Di lain pihak, persentase kerusakan juga memiliki dampak terhadap margin kontribusi, yaitu adanya perbedaan antara harga dan biaya variabel. Pengurangan produksi, material, dan biaya kerusakan akan meningkatkan margin kontribusi yang berarti akan meningkatkan keuntungan.