

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini dibahas tentang matriks, metode pengganda Lagrange, regresi linear, metode kuadrat terkecil, restriksi linear, multikolinearitas, regresi *ridge*, uang primer, dan koefisien korelasi ganda.

A. Matriks

1. Pengertian Matriks

Menurut G. Hadley (1992), matriks adalah suatu susunan persegi panjang dari bilangan-bilangan yang diatur dalam baris dan kolom. Matriks **A** yang memiliki m baris dan n kolom dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

dimana a_{ij} menyatakan elemen matriks **A** yang berada pada baris ke- i dan kolom ke- j .

Contoh matriks **C** berukuran 4×3 adalah:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

2. Jenis-jenis Matriks

Terdapat beberapa jenis matriks, yaitu:

a. Matriks Persegi

Matriks persegi adalah matriks yang memiliki baris dan kolom sama banyak. Matriks persegi **B** berordo m dapat dituliskan sebagai:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Dalam matriks persegi di atas, elemen $b_{11}, b_{22}, b_{33}, \dots, b_{mm}$ merupakan elemen diagonal utama.

b. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks persegi dimana semua elemen selain elemen diagonal utamanya bernilai nol. Bentuk umum dari matriks diagonal adalah:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{mm} \end{bmatrix}, \quad d_{11}, d_{22}, \dots, d_{mm} \neq 0 \quad (2.3)$$

c. Matriks Segitiga

Matriks segitiga atas (*upper triangular*) adalah matriks persegi dimana semua elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol.

Bentuk umum matriks segitiga atas berukuran 4×4 adalah:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Matriks segitiga bawah (*lower triangular*) adalah matriks persegi dimana semua elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol.

Bentuk umum matriks segitiga bawah berukuran 4×4 adalah:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Sebuah matriks baik yang merupakan segitiga atas maupun yang merupakan segitiga bawah dinamakan matriks segitiga (*triangular*).

d. Matriks Identitas

Matriks identitas ordo n yang ditulis dengan $\mathbf{I}$ atau $\mathbf{I}_n$ adalah matriks persegi yang elemen-elemennya bernilai satu sepanjang diagonal utama (diagonal dari kiri atas menuju kanan bawah) dan elemen-elemen selain diagonal utamanya bernilai nol. Bentuk matriks identitas adalah:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Contoh matriks identitas dengan ukuran 4×4 :

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika matriks $\mathbf{A}$ adalah suatu matriks berukuran $n \times n$, maka

$$\mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A} \text{ dan } \mathbf{I}_n\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad (2.7)$$

e. Matriks Simetris

Matriks simetris adalah matriks persegi yang elemennya simetris secara diagonal. Matriks $\mathbf{C}$ dikatakan simetris jika $c_{ij} = c_{ji}$ untuk semua i dan j , dengan c_{ij} menyatakan unsur pada baris ke i dan kolom ke j . Matriks yang simetris dapat dikatakan pula sebagai matriks yang transposenya sama dengan dirinya sendiri. Contoh matriks simetris yaitu:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Operasi matriks

a. Jumlah Unsur Diagonal Suatu Matriks

R.K. Sembiring (1995) menjelaskan bahwa bila $\mathbf{A}$ adalah suatu matriks persegi dengan ukuran $n \times n$, maka jumlah unsur diagonal matriks $\mathbf{A}$ dilambangkan $tr(\mathbf{A})$, adalah

$$tr(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (2.8)$$

Lambang tr adalah singkatan dari *trace* dalam bahasa Inggris.

b. Penjumlahan Matriks

Steven J. Leon (2001) menjelaskan bahwa jika $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ dan $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ keduanya adalah matriks $m \times n$, maka jumlah $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ adalah matriks $m \times n$ yang elemen ke- ij adalah $a_{ij} + b_{ij}$ untuk setiap pasang (i,j) . Maka penjumlahan matriks dapat dituliskan sebagai:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \quad (2.9)$$

Contoh penjumlahan matriks adalah:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -3 & 9 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 6 & 14 & 6 \\ -2 & 12 & -1 \end{bmatrix}$$

c. **Pengurangan Matriks**

Steven J. Leon (2001) juga menjelaskan bahwa jika $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ didefinisikan sebagai $\mathbf{A} + (-1)\mathbf{B}$, maka ternyata bahwa $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ didapat dari mengurangi entri pada $\mathbf{B}$ dari setiap entri dari $\mathbf{A}$ yang seletak. Jika $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ dan $\mathbf{B} = [b_{ij}]$, maka pengurangan matriks dapat dituliskan sebagai:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})_{ij} = [a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}] \quad (2.10)$$

Contoh pengurangan matriks adalah:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -3 & 9 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -9 \\ 2 & -4 & -2 \\ -4 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

d. **Perkalian Skalar**

Howard Anton (2000) menjelaskan jika $\mathbf{A}$ adalah suatu matriks dan c adalah suatu skalar, maka hasil kali $c\mathbf{A}$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap anggota dari $\mathbf{A}$ dan c . Perkalian matriks dengan skalar menghasilkan sebuah matriks baru yang elemennya adalah hasil perkalian setiap elemen matriks aslinya dengan skalar. Dalam notasi matriks jika $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, maka

$$c\mathbf{A} = c[a_{ij}] \quad (2.11)$$

e. **Perkalian Matriks**

Charles G. Cullen (1993) mendefinisikan bahwa jika **A** adalah matriks berukuran $m \times r$ dan **B** adalah matriks berukuran $r \times n$, maka hasil kali **AB** adalah matriks **C** berukuran $m \times n$ yang unsur-unsurnya adalah:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \text{Baris}_i(\mathbf{A}) \text{ Kolom}_j(\mathbf{B}) \\ &= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Perkalian matriks hanya bisa dilakukan jika banyaknya kolom matriks yang pertama sama dengan banyaknya baris matriks yang kedua. Contoh perkalian matriks:

Matriks **A** berukuran 2×4 dikalikan matriks **B** berukuran 4×1 maka hasil perkalian matriks **AB** berukuran 2×1 .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 65 \\ 3 & 4 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 14 \end{bmatrix}$$

f. **Transpose Matriks**

Steven J. Leon (2001) mendefinisikan transpose dari suatu matriks **A** berorde $m \times n$ adalah matriks **B** berorde $n \times m$ yang didefinisikan oleh:

$$b_{ji} = a_{ij} \quad (2.13)$$

untuk $j = 1, 2, \dots, n$ dan $i = 1, 2, \dots, m$. Transpose dari matriks **A** dinyatakan oleh **A'**.

Akibat dari (2.13) terlihat bahwa baris ke- j dari $\mathbf{A}'$ memiliki entri-entri yang sama dengan entri-entri dari kolom ke- j dari $\mathbf{A}$, dan kolom ke- i dari $\mathbf{A}'$ memiliki entri-entri yang sama dengan entri-entri dari baris ke- i dari $\mathbf{A}$.

Contoh matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 9 & 7 \end{bmatrix}$, maka $\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

Beberapa sifat transpose matriks:

- a) $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$
- b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$
- c) $(k\mathbf{A})' = k\mathbf{A}'$, dengan k sembarang skalar
- d) $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$

g. Determinan Matriks

Jika $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ adalah matriks berukuran $n \times n$, fungsi determinan matriks $\mathbf{A}$ dapat ditulis dengan $\det(\mathbf{A})$ atau $|\mathbf{A}|$. Secara matematisnya ditentukan dengan:

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \quad (2.14)$$

dengan $j_1, j_2, \dots, j_n$ merupakan himpunan $S = \{1, 2, \dots, n\}$.

Jika $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ adalah matriks berukuran $n \times n$ yang mengandung sebaris bilangan nol, maka $|\mathbf{A}| = 0$.

Contoh:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ maka } |\mathbf{A}| = 0$$

Jika $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ adalah matriks segitiga, maka $|\mathbf{A}|$ adalah hasil kali elemen-elemen diagonal utama, yaitu $\mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{mm}$.

Contoh:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ maka } |\mathbf{A}| = (2)(5)(1) = 10$$

Jika $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ adalah sebarang matriks persegi, maka $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}'|$, dimana $\mathbf{A}'$ adalah transpose dari $\mathbf{A}$.

Contoh:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}, \text{ maka } |\mathbf{A}| = (2)(1) - (7)(5) = -33.$$

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \text{ maka } |\mathbf{A}'| = (2)(1) - (5)(7) = -33.$$

$$\text{Jadi, } |\mathbf{A}| = |\mathbf{A}'| = 33.$$

Jika $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ dan $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ adalah matriks persegi yang ordonya sama, maka $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$.

h. Invers Matriks

Howard Anton (2000) menjelaskan bahwa jika $\mathbf{A}$ adalah suatu matriks persegi berukuran $n \times n$ dan jika suatu matriks $\mathbf{B}$ yang berukuran sama $n \times n$ disebut invers (balikan) dari $\mathbf{A}$ jika dipenuhi $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$, maka $\mathbf{A}$ bisa dibalik dan $\mathbf{B}$ disebut invers dari $\mathbf{A}$. Invers dari $\mathbf{A}$ dilambangkan dengan $\mathbf{A}^{-1}$. Contoh suatu matriks $\mathbf{A}$ yaitu:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Diperoleh } \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika **A** dan **B** adalah matriks-matriks yang dapat dibalik yang ukurannya sama, maka

a) **AB** dapat dibalik

b) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

Jika **A** adalah sebuah matriks yang dapat dibalik, maka

a) $\mathbf{A}^{-1}$ dapat dibalik dan $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$

b) $(\mathbf{A}^n)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^n$ untuk $n = 0, 1, 2, \dots$

c) Untuk skalar k , dimana $k \neq 0$, maka $k\mathbf{A}$ dapat dibalik dan

$$(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}$$

i. Matriks Ortogonal

Menurut Dumairy (2012), matriks ortogonal ialah matriks yang apabila dikalikan dengan matriks transposenya menghasilkan matriks satuan (identitas).

Matriks ortogonal dapat dituliskan sebagai:

$$\mathbf{T}'\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{T}' = \mathbf{I} \quad (2.15)$$

karena persamaan (2.15), maka

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}' \quad (2.16)$$

Sifat matriks ortogonal:

- 1) Invers matriks ortogonal juga matriks ortogonal
- 2) Hasil kali matriks-matriks ortogonal juga matriks ortogonal
- 3) Jika **T** matriks ortogonal, maka $\det(\mathbf{T}) = 1$ atau $\det(\mathbf{T}) = -1$

Contoh matriks ortogonal $\mathbf{T}$ berukuran 3×3 yaitu:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

j. Matriks Definit Positif

Menurut Steven J. Leon (2001), suatu matriks simetris $\mathbf{A}$ berorder $n \times n$ disebut matriks definit positif apabila $\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X} > 0$ untuk semua vektor tak nol $\mathbf{X}$.

Menurut Searle (1971), suatu matriks $\mathbf{A}$ yang berukuran $n \times n$ dikatakan definit positif jika dan hanya jika $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ dan $\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X} > 0$ untuk setiap vektor $\mathbf{X}$ tidak nol.

k. Matriks Definit Semi Positif

Searle (1971) mendefinisikan suatu matriks $\mathbf{A}$ yang berukuran $n \times n$ dikatakan definit semi positif jika dan hanya jika kondisi-kondisi berikut dipenuhi:

1. $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ ($\mathbf{A}$ matriks simetris)
2. $\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X} \geq 0$ untuk setiap vektor $\mathbf{X}$ tidak nol.
3. $\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$ untuk paling sedikit satu vektor tidak nol.

l. Matriks definit negatif

Menurut Steven J. Leon (2001), suatu matriks simetris $\mathbf{A}$ berorder $n \times n$ disebut matriks definit negatif apabila $\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X} < 0$ untuk semua vektor tak nol $\mathbf{X}$.

4. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Howard Anton (2001) menjelaskan bahwa jika $\mathbf{A}$ adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol $\mathbf{X}$ dinamakan vektor eigen (*eigenvector*) dari $\mathbf{A}$ jika $\mathbf{AX}$ adalah kelipatan skalar dari $\mathbf{X}$, yakni:

$$\mathbf{AX} = \lambda \mathbf{X}$$

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = 0 \quad (2.17)$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ dinamakan nilai eigen (*eigenvalue*) dari $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{X}$ dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

5. Turunan Matriks (Greene, 2012)

Turunan matriks sangat diperlukan dalam pembahasan *Restricted Ridge Regression (RRR)*. Misalkan terdapat dua vektor $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{X}$, dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \text{ maka } \mathbf{A}' = [a_1 a_2 a_3 \cdots a_n] \quad (2.18)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ maka } \mathbf{X}' = [x_1 x_2 x_3 \cdots x_n] \quad (2.19)$$

dan

$\mathbf{X}'\mathbf{A} = \mathbf{A}'\mathbf{X}$, maka

$$\frac{\partial(\mathbf{X}'\mathbf{A})}{\partial x} = \frac{\partial(\mathbf{A}'\mathbf{X})}{\partial x} = \mathbf{A} \quad (2.20)$$

Bukti:

$$\begin{aligned}
 1. \quad \frac{\partial(\mathbf{X}'\mathbf{A})}{\partial x} &= \frac{\partial(x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \dots + x_n a_n)}{\partial x} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial(x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \dots + x_n a_n)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \dots + x_n a_n)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial(x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \dots + x_n a_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \mathbf{A} \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \frac{\partial(\mathbf{A}'\mathbf{X})}{\partial x} &= \frac{\partial(x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \dots + x_n a_n)}{\partial x} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial(x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \dots + x_n a_n)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \dots + x_n a_n)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial(x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \dots + x_n a_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \mathbf{A} \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, terbukti } \frac{\partial(\mathbf{X}'\mathbf{A})}{\partial x} = \frac{\partial(\mathbf{A}'\mathbf{X})}{\partial x} = \mathbf{A}$$

$$\text{Misalkan fungsi linier } \mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (2.23)$$

$$\text{dengan } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Setiap elemen y_t dari y adalah

$$y_t = a_t x \quad (2.24)$$

Di mana a_t adalah elemen-elemen baris ke- i dari $\mathbf{A}$, maka

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$\text{Sehingga } \frac{\partial \mathbf{AX}}{\partial x} = \mathbf{A} \quad (2.26)$$

Suatu persamaan

$$\mathbf{X}'\mathbf{AX} = [x_1 x_2 x_3 \cdots x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}x_{11}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_{22}^2 + \\ &2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Jika diambil turunan parsial terhadap elemen-elemen $\mathbf{X}$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{X}'\mathbf{AX})}{\partial x_1} &= 2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n) \\ \frac{\partial(\mathbf{X}'\mathbf{AX})}{\partial x_2} &= 2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n) \\ &\vdots \\ \frac{\partial(\mathbf{X}'\mathbf{AX})}{\partial x_n} &= 2(a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + a_{3n}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Jika diperhatikan hasil di atas, $a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + a_{3n}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n$ merupakan elemen-elemen dari hasil matiks $\mathbf{A}$ dan vektor $\mathbf{X}$, yaitu $\mathbf{AX}$ dan

memberikan suatu vektor kolom dengan n elemen. Jadi hasil di atas dapat diringkas sebagai berikut:

$$\frac{\partial(\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{X} \quad (2.30)$$

B. Metode Pengganda Lagrange

Metode Pengganda Lagrange (*Lagrange Multipliers*) adalah metode yang digunakan untuk menentukan nilai maksimum atau minimum dari suatu fungsi yang dibatasi oleh suatu kendala/hambatan/pembatas tertentu. Misalkan yang akan dicari adalah nilai maksimum atau minimum dari fungsi $F = f(x, y, z)$ dengan kendala $g(x, y, z) = c$. Maka langkah yang dilakukan adalah menyusun fungsi Lagrange yang dinyatakan sebagai berikut:

$$L = f(x, y, z) + \lambda(c - g(x, y, z)) \quad (2.31)$$

dimana λ adalah pengganda Lagrange. Selanjutnya, menerapkan syarat adanya nilai maksimum atau minimum, yaitu:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Permasalahan di atas dapat diperluas untuk n -variabel. Misalkan fungsi objektifnya mempunyai bentuk $z = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ dan kendala $g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = c$, maka fungsi Lagrange-nya menjadi:

$$H = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + \lambda(c - g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)) \quad (2.32)$$

Sehingga syarat adanya nilai maksimum atau minimum adalah:

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial H}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial H}{\partial x_3} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial H}{\partial x_n} = 0$$

C. Regresi Linear

Regresi linier adalah metode statistika yang digunakan untuk mengetahui hubungan antara variabel dependen (Y) dengan satu atau lebih variabel independen (X). Berdasarkan banyaknya variabel bebas, regresi linear dapat dibagi menjadi dua yaitu regresi linear sederhana dan regresi linear berganda. Regresi linear sederhana digunakan untuk mengetahui hubungan linier antara variabel dependen (Y) dengan satu variabel independen (X), sedangkan regresi linear berganda digunakan untuk mengetahui hubungan linier antara variabel dependen (Y) dengan dua atau lebih variabel independen ($X_1, X_2, \dots, X_n$).

Bentuk umum dari regresi linier ganda dengan h variabel adalah

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_h X_{ih} + \varepsilon_i \quad (2.33)$$

dengan $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_h$ adalah parameter.

Model regresi ganda untuk n pengamatan, dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{12} + \dots + \beta_h X_{1h} + \varepsilon_1 \\ Y_2 &= \beta_0 + \beta_1 X_{21} + \beta_2 X_{22} + \dots + \beta_h X_{2h} + \varepsilon_2 \\ Y_3 &= \beta_0 + \beta_1 X_{31} + \beta_2 X_{32} + \dots + \beta_h X_{3h} + \varepsilon_3 \\ &\vdots \\ Y_n &= \beta_0 + \beta_1 X_{n1} + \beta_2 X_{n2} + \dots + \beta_h X_{nh} + \varepsilon_n \end{aligned} \quad (2.34)$$

dengan

Y_n adalah variabel dependen

$X_{11}, X_{12}, \dots, X_{nh}$ adalah variabel independen

β adalah parameter atau koefisien regresi

ε_n adalah galat yang saling bebas dan menyebar normal $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

Jika persamaan (2.33) ditulis dalam bentuk matriks, maka akan menjadi:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1h} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$$Y_{n \times 1} = X_{n \times (h+1)} \beta_{(h+1) \times 1} + \varepsilon_{n \times 1}$$

Maka penjabaran persamaan (2.33) dapat ditulis sebagai:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.35)$$

dengan

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1h} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nh} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_h \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Keterangan:

$\mathbf{Y}$ menyatakan vektor respon berukuran $n \times 1$

$\boldsymbol{\beta}$ menyatakan vektor parameter berukuran $(h + 1) \times 1$

$\mathbf{X}$ menyatakan matriks variabel bebas berukuran $n \times (h + 1)$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ menyatakan vektor galat berukuran $n \times 1$

Terdapat asumsi-asumsi yang harus dipenuhi dalam analisis regresi linier ganda, antara lain:

1. Nilai ekspektasi dari vektor residualnya adalah 0, yaitu

$$E(\varepsilon_i) = 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Atau dapat dituliskan sebagai

$$E \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1) \\ E(\varepsilon_2) \\ \vdots \\ E(\varepsilon_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Variansinya konstan untuk semua residual

$$Var(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2, i = 1, 2, 3, \dots, n$$

3. Tidak ada autokorelasi antar residual

$$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j.$$

4. Tidak terjadi multikolinearitas, yaitu adanya hubungan linier antara variabel independen satu dengan yang lainnya.

D. Metode Kuadrat Terkecil

Metode Kuadrat Terkecil (*least square method*) merupakan metode yang digunakan untuk melakukan estimasi dalam model statistik linear. Teknik estimasi *least square* yang menggunakan informasi sampel disebut juga dengan *Ordinary Least Square (OLS)*. *OLS* diperkenalkan pertama kali oleh Carl Friedrich Gauss, seorang ahli matematika dari Jerman (Kuncoro, 2001). Estimator β yang diperoleh dengan menggunakan metode *OLS* adalah $\hat{\beta}$ yang meminimumkan jumlah kuadrat galat *OLS* (JKG_{OLS}).

Persamaan Regresi Ganda:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \beta_3 X_{i3} + \beta_h X_{ih} + \varepsilon_i \quad (2.39)$$

Persamaan (2.39) dapat ditulis:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

dan persamaan regresi dugaannya yaitu $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{OLS}$ (2.40)

Jumlah kuadrat galat *OLS* (JKG_{OLS}) adalah:

$$\begin{aligned} \text{JKG}_{OLS} &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_{iOLS}^2 = \varepsilon_{1OLS}^2 + \varepsilon_{2OLS}^2 + \varepsilon_{3OLS}^2 + \cdots + \varepsilon_{nOLS}^2 \\ &= [\varepsilon_{1OLS} \ \varepsilon_{2OLS} \ \varepsilon_{3OLS} \ \cdots \ \varepsilon_{nOLS}] \begin{bmatrix} \varepsilon_{1OLS} \\ \varepsilon_{2OLS} \\ \varepsilon_{3OLS} \\ \vdots \\ \varepsilon_{nOLS} \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}'_{OLS} \boldsymbol{\varepsilon}_{OLS} \end{aligned} \quad (2.41)$$

dengan $\boldsymbol{\varepsilon}_{OLS} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$, maka

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{iOLS}^2 &= \boldsymbol{\varepsilon}'_{OLS} \boldsymbol{\varepsilon}_{OLS} \\ &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})' (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= (\mathbf{Y}' - \hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}') (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= \mathbf{Y}' \mathbf{Y} - \mathbf{Y}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}' \mathbf{Y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} \end{aligned} \quad (2.42)$$

$\hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}' \mathbf{Y}$ adalah matriks berukuran 1×1 . Dengan menggunakan sifat transpose

matriks, maka $(\hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}' \mathbf{Y})' = \mathbf{Y}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}$, sehingga

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \varepsilon_{i_{OLS}}^2 &= \boldsymbol{\varepsilon}'_{OLS} \boldsymbol{\varepsilon}_{OLS} \\
&= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})' (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\
&= (\mathbf{Y}' - \hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}') (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\
&= \mathbf{Y}' \mathbf{Y} - \mathbf{Y}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}' \mathbf{Y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} \\
&= \mathbf{Y}' \mathbf{Y} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}' \mathbf{Y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} \tag{2.43}
\end{aligned}$$

Estimator $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ adalah $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ yang meminimumkan JKG_{OLS} , yaitu $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ yang memenuhi persamaan $\frac{\partial \text{JKG}_{OLS}}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} = 0$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
-2\mathbf{X}' \mathbf{Y} + 2\mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} &= \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow 2\mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} &= 2\mathbf{X}' \mathbf{Y} \\
\Leftrightarrow \mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} &= \mathbf{X}' \mathbf{Y} \\
\Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{\beta}} &= (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{Y} \tag{2.44}
\end{aligned}$$

Sifat-sifat penduga metode kuadrat terkecil yaitu:

1. $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ Linear

$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ linear jika $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ merupakan fungsi linear dari $\boldsymbol{\beta}$

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\beta}} &= (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{Y} \\
&= (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' (\mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) \\
&= (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \boldsymbol{\varepsilon} \\
&= \mathbf{I} \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.45}
\end{aligned}$$

2. $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ tidak bias

$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ adalah penduga tak bias dari $\boldsymbol{\beta}$ jika $E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}$

Dari persamaan (2.44) telah diketahui bahwa $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$, maka:

$$\begin{aligned}
E(\hat{\beta}) &= E((X'X)^{-1}X'Y) \\
E(\hat{\beta}) &= E((X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon)) \\
&= E((X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon) \\
&= E((X'X)^{-1}X'X\beta) + E((X'X)^{-1}X'\varepsilon) \\
&= (X'X)^{-1}X'X E(\beta) + (X'X)^{-1}X' E(\varepsilon) \\
&= (X'X)^{-1}X'X\beta \\
&= I\beta \\
&= \beta
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Jadi, $\hat{\beta}$ adalah penduga tak bias dari β

3. $\hat{\beta}$ mempunyai variansi minimum

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\beta}) &= E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] \\
&= E[((X'X)^{-1}X'Y - \beta)((X'X)^{-1}X'Y - \beta)'] \\
&= E[((X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon) - \beta)((X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon) - \beta)'] \\
&= E[((X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon - \beta)((X'X)^{-1}X'X\beta \\
&\quad + (X'X)^{-1}X'\varepsilon - \beta)'] \\
&= E[(\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon - \beta)(\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon - \beta)'] \\
&= E[((X'X)^{-1}X'\varepsilon)((X'X)^{-1}X'\varepsilon)'] \\
&= E[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1}] \\
&= (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon\varepsilon')X(X'X)^{-1} \\
&= (X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}E(\varepsilon\varepsilon') \\
&= (X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}\sigma^2
\end{aligned}$$

$$= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\boldsymbol{\sigma}^2 \quad (2.47)$$

dengan $E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \sigma^2$

Misal $\hat{\beta}_1$ merupakan estimator lain dari $\boldsymbol{\beta}$ yang juga merupakan tak bias dan linear.

$$\hat{\beta}_1 = [(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{G}]\mathbf{Y} \quad (2.48)$$

Dengan $\mathbf{G}$ adalah matriks berukuran $(h + 1) \times n$

Karena $\hat{\beta}_1$ tak bias, maka:

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}_1) &= E[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{G}]\mathbf{Y} \\ &= E[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{G}](\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= E[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{G}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{G}\boldsymbol{\varepsilon}] \\ &= E(\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{E}(\mathbf{G}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{E}((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{E}(\mathbf{G}\boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= \boldsymbol{\beta} + \mathbf{G}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (2.49)$$

agar $\hat{\beta}_1$ tidak bias maka $\mathbf{G}\mathbf{X}$ harus sama dengan 0.

$$\begin{aligned} Var(\hat{\beta}_1) &= E[(\hat{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta})(\hat{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta})'] \\ &= E\{[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{G}]\mathbf{Y} - \boldsymbol{\beta}\}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{G}]\mathbf{Y} - \boldsymbol{\beta}\}' \\ &= E\{[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{G}](\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) \\ &\quad - \boldsymbol{\beta}\}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{G}](\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\beta}\}' \\ &= E\{[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{G}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{G}\boldsymbol{\varepsilon} - \\ &\quad \boldsymbol{\beta}\}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{G}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{G}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta}]\}' \end{aligned} \quad (2.50)$$

Karena $\mathbf{G}\mathbf{X} = 0$, maka

$$\begin{aligned} Var(\hat{\beta}_1) &= E\{[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{G}\boldsymbol{\varepsilon}][(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{G}\boldsymbol{\varepsilon}]\}' \\ &= E\{[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{G}]\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{G}]\}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{G}\} \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') \{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{G}'\} \\
&= \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') \{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{G}\} \{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{G}'\} \\
&= \sigma^2 \mathbf{I} \{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{G}'\mathbf{X}' + \mathbf{G}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\
&\quad + \mathbf{G}\mathbf{G}'\} \\
&= \sigma^2 \mathbf{I} \{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{G}'\} \\
&= \text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{G}\mathbf{G}'\sigma^2
\end{aligned} \tag{2.51}$$

terbukti $\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) < \text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$

E. Restriksi Linear

Restriksi linear merupakan salah satu bentuk informasi prior. Menurut Berger (1980), informasi prior untuk parameter $\boldsymbol{\beta}$ adalah suatu informasi non sampel yang muncul dari pengalaman masa lalu dengan situasi yang hampir sama dan memuat parameter $\boldsymbol{\beta}$ yang sama. Sebagai contoh restriksi linear adalah sebagai berikut:

Contoh 2.1. Dalam suatu penelitian akan diestimasi vektor parameter $\boldsymbol{\beta}$, dari penelitian sebelumnya diperoleh bahwa β_1 sama dengan suatu konstanta k , jumlah parameter β_i , dengan $i = 1, 2, 3, \dots, m$ sama dengan satu, dan parameter $\beta_2 = \beta_3$. Hasil dari penelitian sebelumnya tersebut tidak diabaikan, namun dapat dijadikan sebagai informasi prior untuk penelitian selanjutnya. Informasi prior yang dimaksud berbentuk restriksi linear.

Restriksi linear dari model regresi linear sederhana $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, yaitu:

$$q_{11}\beta_1 + q_{12}\beta_2 + \dots + q_{1h}\beta_h = r_1$$

$$q_{21}\beta_1 + q_{22}\beta_2 + \dots + q_{2h}\beta_h = r_2$$

⋮

$$q_{n1}\beta_1 + q_{n2}\beta_2 + \dots + q_{nh}\beta_h = r_n$$

Apabila ditulis dalam bentuk matriks adalah:

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1h} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2h} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

atau dapat ditulis sebagai:

$$\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r} \quad (2.52)$$

dengan:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1h} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2h} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nh} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_h \end{bmatrix}, \text{ dan } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

$\mathbf{R}$ adalah matriks berukuran $n \times h$, merupakan struktur informasi pada parameter $\boldsymbol{\beta}$, baik secara individual atau kombinasi linear dari elemen-elemen vektor $\boldsymbol{\beta}$. $\mathbf{r}$ adalah matriks berukuran $n \times 1$. $\mathbf{R}$ dan $\mathbf{r}$ masing-masing merupakan vektor yang telah diketahui.

Selanjutnya bentuk (2.52) dinamakan persamaan restriksi linear umum.

Contoh 2.1 jika disajikan dalam bentuk (2.52) adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$$\text{Artinya: } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jadi restriksi linear untuk penelitian pada contoh 2.1 adalah seperti pada (2.53). Diasumsikan vektor parameter $\boldsymbol{\beta}$ dalam (2.52) yang tidak diketahui diduga menggunakan metode kuadrat terkecil yaitu $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, diperoleh vektor $\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}$.

Selanjutnya akan diturunkan distribusi dari $\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}$, sebagai berikut:

$$E(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}, \text{ dan } Var(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2 \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}' \quad (2.54)$$

F. Multikolinearitas

1. Pengertian Multikolinearitas

Istilah multikolinearitas pertama kali dikemukakan oleh Ragnar Frisch pada tahun 1934, yang menyatakan bahwa model regresi dikatakan terkena multikolinearitas bila terjadi hubungan linier yang sempurna (*perfect*) dan pasti (*exact*) diantara beberapa atau semua variabel bebas dari model regresi.

Menurut Kuncoro (2001), multikolinearitas adalah adanya hubungan linear yang sempurna (mendekati sempurna) antara beberapa atau semua variabel bebas. Gujarati (2003) menjelaskan bahwa berdasarkan hubungan yang terjadi antara variabel-variabel bebas, multikolinearitas dapat dibedakan menjadi dua, yaitu multikolinearitas sempurna dan multikolinearitas kurang sempurna.

a. Multikolinearitas Sempurna

Multikolinearitas sempurna terjadi apabila berlaku hubungan:

$$\sum_{j=1}^h \lambda_j X_j = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_h X_h = 0 \quad (2.55)$$

dimana $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_h$ seluruhnya tidak sama dengan nol ($\lambda_i \neq 0, i = 1, 2, 3, \dots, h$). Untuk mengetahui multikolinearitas sempurna dimisalkan $\lambda_2 \neq 0$, sehingga persamaan X_{2i} dapat ditulis sebagai berikut:

$$X_{2i} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} X_{1i} - \frac{\lambda_3}{\lambda_2} X_{3i} - \dots - \frac{\lambda_h}{\lambda_2} X_{hi} \quad (2.56)$$

Persamaan tersebut menunjukkan bagaimana X_2 berhubungan secara linear sempurna dengan sisa variabel lainnya.

b. Multikolinearitas Kurang Sempurna

Multikolinearitas kurang sempurna terjadi jika berlaku suatu hubungan:

$$\sum_{j=1}^h \lambda_j X_j = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_h X_h + \varepsilon_i = 0 \quad (2.57)$$

dimana ε_i adalah galat sisa dengan syarat galat yang saling bebas dan menyebar normal $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, untuk mengetahui adanya multikolinearitas tidak sempurna, maka dimisalkan $\lambda_2 \neq 0$, sehingga persamaan X_{2i} dapat ditulis sebagai berikut:

$$X_{2i} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} X_{1i} - \frac{\lambda_3}{\lambda_2} X_{3i} - \dots - \frac{\lambda_h}{\lambda_2} X_{hi} - \frac{1}{\lambda_2} \varepsilon_i \quad (2.58)$$

Persamaan tersebut menunjukkan bagaimana X_2 tidak berhubungan secara linear sempurna dengan sisa variabel lainnya, sebab tergantung pada ε_i .

2. Deteksi Multikolinearitas

Deteksi multikolinearitas dilakukan untuk mengetahui ada atau tidaknya korelasi yang tinggi antara variabel-variabel bebas dalam suatu regresi linear ganda. Apabila terjadi multikolinearitas, maka hubungan antara variabel bebas dan variabel terikatnya akan terganggu. Beberapa cara untuk mengetahui ada tidaknya multikolinearitas menurut Montgomery (2006) adalah:

a. Menganalisis koefisien korelasi sederhana antara variabel bebasnya.

Multikolinearitas dapat diduga dari tingginya nilai korelasi antara variabel bebasnya. Kolinearitas antara variabel bebas dapat diduga

dengan melihat nilai dari koefisien korelasi sederhana yang cukup tinggi ($0,8 \leq r \leq 1,0$).

b. Menggunakan *Variance Inflation Factor* (VIF)

Variance Inflation Factor (VIF) adalah salah satu cara dalam mendeteksi adanya multikolinearitas. Hal ini diperoleh berdasarkan fakta bahwa kenaikan dari variansi tergantung dari σ^2 dan VIF itu sendiri. VIF dinyatakan dengan rumus:

$$VIF = \frac{1}{1-R_j^2} \quad (2.59)$$

dimana R_j^2 adalah koefisien determinasi dari variabel bebas X_j yang diregresikan terhadap variabel bebas lainnya.

c. Metode *TOL* (*Tolerance Value*)

Menurut Gujarati (2003) untuk mendeteksi multikolinearitas, selain menggunakan koefisien korelasi dan VIF, juga dapat menggunakan metode *TOL* (*Tolerance Value*). *TOL* adalah indikasi dari persen variansi dalam prediktor yang tidak dapat dihitung oleh variabel prediktor. Rumusan dari *TOL* adalah sebagai berikut:

$$TOL = \frac{1}{VIF_j} \quad (2.60)$$

Suatu X dikatakan memiliki koefisien kolinearitas yang tinggi dengan X yang lainnya jika memiliki nilai $TOL < 0,1$.

3. Akibat Multikolinearitas

Montgomery (2006) menjelaskan bahwa multikolinearitas dapat mengakibatkan koefisien regresi yang dihasilkan oleh analisis regresi

berganda menjadi sangat lemah atau tidak dapat memberikan hasil analisis yang mewakili sifat atau pengaruh dari variabel bebas yang bersangkutan.

Dalam banyak hal masalah multikolinearitas dapat menyebabkan uji T menjadi tidak signifikan padahal jika masing-masing variabel bebas diregresikan secara terpisah dengan variabel tak bebas (*simple regression*), uji T menunjukkan hasil yang signifikan.

4. Cara Mengatasi Multikolinearitas

Apabila dalam deteksi multikolinearitas menunjukkan terjadinya pelanggaran asumsi multikolinearitas, maka masalah tersebut harus diatasi. Berikut adalah beberapa cara untuk mengatasi multikolinearitas:

a. Memanfaatkan informasi sebelumnya (*prior information*)

Menurut Berger (1980), informasi prior untuk parameter β adalah suatu informasi non sampel yang muncul dari pengalaman masa lalu dengan situasi yang hampir sama dan memuat parameter β yang sama.

b. Memperbesar ukuran sampel

Multikolinearitas diharapkan bisa hilang atau berkurang jika ukuran sampel diperbesar (atau jumlah sampel ditambah). Dengan memperbesar ukuran sampel, maka kovarian diantara parameter-parameter dapat dikurangi.

c. Menghilangkan salah satu atau lebih variabel bebas.

Untuk menghilangkan beberapa variabel bebas dari model, dilakukan satu persatu. Pilih variabel bebas yang memiliki korelasi

paling tinggi dengan variabel lainnya. Menghilangkan satu variabel dari model harus dilakukan dengan hati-hati. Tindakan ini tidak bisa dilakukan jika hilangnya sebuah variabel akan mengakibatkan terjadinya kesalahan spesifikasi dalam model. Hal ini biasanya dikarenakan secara teoritis variabel tersebut tidak dapat dihilangkan dari model.

d. Estimasi Regresi *Ridge*

Menurut Montgomery (2006), salah satu cara untuk mengatasi masalah multikolinearitas adalah menggunakan estimasi regresi *Ridge*. Estimasi *Ridge* untuk koefisien regresi dapat diperoleh dengan menyelesaikan suatu bentuk persamaan normal regresi. Asumsikan bahwa bentuk standar dari model regresi linear ganda adalah sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_h X_{ih} + \varepsilon_i$$

Parameter penting yang membedakan regresi *ridge* dari metode kuadrat terkecil adalah konstanta k . Konstanta bias k yang relatif kecil, bernilai antara 0 dan 1 ditambahkan pada diagonal utama matriks $\mathbf{X}'\mathbf{X}$, sehingga koefisien estimator regresi *Ridge* dipenuhi dengan besarnya konstanta bias k (Hoerl dan Kennard, 1970).

G. Regresi *Ridge*

Regresi *Ridge* merupakan metode yang digunakan untuk mengatasi multikolinearitas pada regresi linear ganda yang mengakibatkan matriks $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ singular. Regresi *Ridge* pertama kali diperkenalkan oleh Hoerl dan Kennard

pada tahun 1970. Pada dasarnya metode ini juga merupakan metode kuadrat terkecil. Perbedaannya adalah bahwa pada metode *ridge regression*, nilai variabel independennya ditransformasikan dahulu melalui prosedur *centering and rescaling*.

Dengan menggunakan pengganda Lagrange, akan dicari estimator regresi *ridge* dengan mencari nilai $\hat{\beta}^*$ yang meminimumkan fungsi tujuan $L = (\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^* \hat{\beta}^*)'(\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^* \hat{\beta}^*)$ dengan kendala $\hat{\beta}^{*'} \hat{\beta}^* - c^2 = 0$, yang ekuivalen dengan meminimumkan :

$$G = (\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^* \hat{\beta}^*)'(\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^* \hat{\beta}^*) + k(\hat{\beta}^{*'} \hat{\beta}^* - c^2) \quad (2.61)$$

$$\Leftrightarrow G = \mathbf{Y}^{*'} \mathbf{Y}^* - \mathbf{Y}^{*'} \mathbf{X}^* \hat{\beta}^* - \hat{\beta}^{*'} \mathbf{X}^{*'} \mathbf{Y}^* + \hat{\beta}^{*'} \mathbf{X}^{*'} \mathbf{X}^* \hat{\beta}^* + k(\hat{\beta}^{*'} \hat{\beta}^* - c^2)$$

dengan :

- k = Pengganda lagrange,
- c = Konstanta positif,
- $\mathbf{Y}^*$ = Variabel dependen transformasi,
- $\mathbf{X}^*$ = Variabel independen transformasi

Karena $\hat{\beta}^{*'} \mathbf{X}^{*'} \mathbf{Y}^*$ merupakan skalar atau matiks berukuran 1×1 , maka dengan menggunakan sifat transpose matriks diperoleh transpose dari matriks $\hat{\beta}^{*'} \mathbf{X}^{*'} \mathbf{Y}^*$ adalah $(\hat{\beta}^{*'} \mathbf{X}^{*'} \mathbf{Y}^*)' = \mathbf{Y}^{*'} \mathbf{X}^* \hat{\beta}^*$, sehingga persamaan (2.61) menjadi

$$G = \mathbf{Y}^{*'} \mathbf{Y}^* - 2\hat{\beta}^{*'} \mathbf{X}^{*'} \mathbf{Y}^* + \hat{\beta}^{*'} \mathbf{X}^{*'} \mathbf{X}^* \hat{\beta}^* + k(\hat{\beta}^{*'} \hat{\beta}^* - c^2) \quad (2.62)$$

Nilai fungsi G akan minimum jika $\frac{\partial G}{\partial \hat{\beta}^*} = 0$, persamaan (2.62) jika

diturunkan terhadap $\hat{\beta}^*$ akan menjadi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \hat{\beta}^*} &= -2\mathbf{X}^{*'} \mathbf{Y}^* + 2\hat{\beta}^{*'} \mathbf{X}^{*'} \mathbf{X}^* + 2k\hat{\beta}^* \\ \Leftrightarrow \mathbf{0} &= -\mathbf{X}^{*'} \hat{\beta}^* + \hat{\beta}^* (\mathbf{X}^{*'} \mathbf{X}^* + k\mathbf{I}) \\ \Leftrightarrow \hat{\beta}^* (\mathbf{X}^{*'} \mathbf{X}^* + k\mathbf{I}) &= \mathbf{X}^{*'} \mathbf{Y}^* \\ \Leftrightarrow \hat{\beta}^* &= (\mathbf{X}^{*'} \mathbf{X}^* + k\mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^{*'} \mathbf{Y}^* \end{aligned} \quad (2.63)$$

Jadi $\hat{\beta}^* = (\mathbf{X}^{*\prime} \mathbf{X}^* + k\mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^{*\prime} \mathbf{Y}^*$ merupakan estimator regresi *ridge*.

H. Uang Primer

Uang primer adalah uang yang dikeluarkan oleh bank sentral (Bank Indonesia) yang selanjutnya uang tersebut didistribusikan kepada Bank Umum, Bank Perkreditan Rakyat (BPR), dan sektor swasta (tidak termasuk Pemerintah Pusat dan Luar Negeri). Uang primer meliputi uang kartal (berupa uang kartal di masyarakat, dan Kas Bank Umum dan BPR), saldo giro rupiah bank umum pada Bank Indonesia, simpanan sektor swasta domestik, Sertifikat Bank Indonesia (SBI) dan Setifikat Deposito Bank Indonesia (SDBI). Uang kartal adalah uang kertas dan uang logam yang dikeluarkan dan diedarkan oleh Bank Indoneasia (BI) sebagai alat pembayaran yang sah. Saldo giro rupiah bank umum pada BI adalah penempatan bank umum dalam bentuk giro rupiah pada BI. SBI adalah surat berharga dalam mata uang rupiah yang diterbitkan oleh BI sebagai pengakuan utang berjangka waktu pendek. Sementara SDBI adalah surat berharga dalam mata uang rupiah yang diterbitkan oleh BI sebagai pengakuan utang berjangka waktu pendek yang dapat diperdagangkan hanya antar bank.

Faktor-faktor yang mempengaruhi uang primer, diantaranya:

a. Tagihan kepada bukan penduduk

Tagihan kepada bukan penduduk adalah tagihan Bank Indonesia kepada bukan penduduk. Bukan penduduk adalah orang, badan hukum, atau badan lainnya yang tidak berdomisili di Indonesia, berdomisili atau berencana

berdomisili di Indonesia kurang dari 1 (satu) tahun, termasuk staf diplomatik asing di Indonesia

b. Kredit Likuiditas

Kredit Likuiditas adalah kredit yang diberikan Bank Indonesia kepada bank umum, yang digunakan untuk membiayai proyek-proyek nasabahnya, khususnya proyek-proyek yang berkaitan dengan program pemerintah. Contohnya adalah Kredit Usaha Tani (KUT), Kredit Koperasi, pengadaan pangan dan gula, dan investasi.

c. Tagihan kepada Bank Umum dan BPR

Tagihan kepada Bank Umum dan BPR adalah tagihan Bank Indonesia pada bank umum dan BPR baik dalam rupiah maupun valuta asing.

Perubahan nilai beberapa variabel pada data uang primer ini sejalan dengan perkembangan waktu. Dalam perubahannya, sering terjadi korelasi yang kuat antar variabel-variabel independen. Hubungan antar variabel-variabel independen inilah yang dikenal dengan multikolinearitas.

Pada data uang primer, uang primer sebagai variabel dependen (Y) sedangkan faktor-faktor yang mempengaruhi uang primer sebagai variabel independen (X). Perubahan nilai dari faktor-faktor yang mempengaruhi uang primer (variabel independen) akan menyebabkan perubahan nilai uang primer (variabel dependen). Kredit likuiditas biasanya cenderung menambah uang primer karena mengurangi deposito pemerintah pada Bank Indonesia (Agung Pribadi, 2011). Kenaikan kredit likuiditas akan diikuti naiknya tagihan kepada bank umum dan BPR.

Dalam kasus ini, diduga terjadi pelanggaran asumsi multikolinearitas diantara variabel-variabel independennya, yaitu variabel kredit likuiditas dan tagihan kepada bank umum dan BPR. Adanya multikolinearitas mengakibatkan estimator metode kuadrat terkecil menjadi tidak efisien. Oleh karena itu, masalah multikolinearitas dianggap sebagai suatu kelemahan pada estimator kuadrat terkecil.

I. Koefisien Korelasi Ganda

Koefisien korelasi ganda digunakan untuk menentukan hubungan dua atau lebih variabel independen dengan satu variabel dependen secara bersamaan. Koefisien korelasi untuk data sampel dinotasikan dengan “ r ”, sedangkan koefisien korelasi untuk data populasi dinotasikan dengan “ ρ ”. Untuk mengetahui apakah koefisien korelasi ganda berarti atau tidak, maka dilakukan uji keberartian koefisien korelasi ganda (Sudjana, 2005) dengan menggunakan uji F sebagai berikut:

a. Hipotesis:

$H_0 : \rho = 0$ (koefisien korelasi tidak berarti)

$H_1 : \rho \neq 0$ (koefisien korelasi berarti)

b. Taraf Nyata: α

c. Statistik Uji:

$$F = \frac{R^2/d}{1 - R^2/n - d - 1}$$

R^2 adalah koefisien korelasi determinasi

n adalah banyaknya pengamatan

d adalah banyaknya variabel independen

d. Kriteria Keputusan:

H_0 ditolak jika $F_{hit} > F_{\alpha(d,n-d-1)}$

e. Hitungan

f. Kesimpulan