

**ANALISIS MODEL ANTRIAN DENGAN *WORKING VACATION*
PADA POLA KEDATANGAN BERKELOMPOK (*BATCH ARRIVAL*)
SATU *SERVER***

SKRIPSI

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
untuk memenuhi sebagian persyaratan
guna memperoleh gelar Sarjana Sains



Oleh :
Sucia Mentari
NIM. 11305141007

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2015**

PERSETUJUAN

Skripsi yang berjudul

**“ANALISIS MODEL ANTRIAN DENGAN *WORKING VACATION*
PADA POLA KEDATANGAN BERKELOMPOK (*BATCH ARRIVAL*)
SATU *SERVER*”**

yang disusun oleh

Sucia Mentari

NIM. 11305141007

Telah disetujui oleh pembimbing

Untuk diujikan dihadapan Dewan Penguji Skripsi

Program Studi Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Yogyakarta

Yogyakarta, 6 Oktober 2015

Pembimbing I,



Retno Subekti, M. Sc.
NIP. 198111162005012002

Pembimbing II,



Nikenasih Binatari, M. Si.
NIP. 198410192008122005

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul “ANALISIS MODEL ANTRIAN DENGAN *WORKING VACATION* PADA POLA KEDATANGAN BERKELOMPOK (*BATCH ARRIVAL*) SATU *SERVER*” yang disusun oleh Sucia Mentari, NIM 11305141007 ini telah dipertahankan di depan Dewan Penguji pada tanggal 16 Oktober 2015 dan dinyatakan lulus.

DEWAN PENGUJI			
Nama	Jabatan	Tanda Tangan	Tanggal
<u>Retno Subekti, M.Sc</u> NIP. 198111162005012002	Ketua Penguji		20 oktober 2015
<u>Nikenasih Binatari, M.Si</u> NIP. 198410192008122005	Sekretaris Penguji		20 oktober 2015
<u>Endang Listyani, M. S</u> NIP. 195911151986012001	Penguji Utama		20 oktober 2015
<u>Atmini Dhoruri, M. S</u> NIP. 196007101986012001	Penguji Pendamping		20 oktober 2015

Yogyakarta, 20 Oktober 2015

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Yogyakarta

Dekan,



Dr. Hartono

NIP. 19620329 198702 1 002

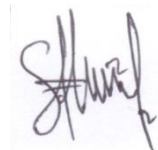
PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini saya:

NAMA : **Sucia Mentari**
NIM : **11305141007**
JURUSAN : **Pendidikan Matematika**
JUDUL SKRIPSI : **Analisis Model Antrian Dengan *Working Vacation* Pada Pola Kedatangan Berkelompok (*Batch Arrival*) Satu Server**

Menyatakan bahwa karya ilmiah ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan sepanjang pengetahuan saya tidak berisi materi yang dipublikasikan atau ditulis oleh orang lain atau telah digunakan sebagai persyaratan studi di perguruan tinggi lain kecuali pada bagian – bagian tertentu saya ambil sebagai acuan. Apabila terbukti pernyataan saya ini tidak benar, maka sepenuhnya menjadi tanggung jawab saya, dan saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan yang berlaku.

Yogyakarta, 6 Oktober 2015



Sucia Mentari
NIM. 11305141007

MOTTO

Dan apabila kamu menghitung nikmat Allah, niscaya kamu tidak akan dapat
menghitungnya.

(QS. Ibrahim: 34)

Allah tidak membebani seseorang itu melainkan sesuai dengan
kesanggupannya.

(QS. Al-Baqarah: 286)

Jika ingin hidup senang, maka susah terlebih dulu
(Ayah)

Kamu boleh bersedih dan menangis, tapi jangan pernah untuk menyerah.

Ketika kita mempermudah jalan orang lain, insyaallah Allah akan
mempermudah jalan kita

PERSEMBAHAN

Karya kecil ini kupersembahkan untuk :

Ayah dan Mama tercinta,
yang tak pernah lelah untuk memberikan kasih sayang, doa, nasihat,
dan dukungan

kakak, adik-adik, dan seluruh keluarga ku,
yang selalu mendukungku dan menjadi penyemangatku

bang putra, yang selalu sabar dengan sikapku,
terimakasih atas perhatian yang diberikan untukku dan telah sabar
menungguku

sahabat - sahabatku :
maya, tiara, febi, nadia, puput, dan jalu
terimakasih untuk semua waktu yang kita lewati bersama yang penuh
dengan kebahagiaan, jarak kelak akan memisahkan kita tapi
persahabatan tidak akan pernah terputus karena jarak.

serta teman - teman seperjuangan mat sub 11 dan swa 11,
terimakasih untuk semua cerita yang kita rangkai bersama selama
masa perkuliahan.

**ANALISIS MODEL ANTRIAN DENGAN *WORKING VACATION*
PADA POLA KEDATANGAN BERKELOMPOK (*BATCH ARRIVAL*)
SATU *SERVER***

Oleh
Sucia Mentari
NIM. 11305141007

ABSTRAK

Suatu sistem antrian satu *server* dengan pola kedatangan berkelompok dan berdistribusi Poisson, serta waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial disebut sistem antrian Markovian yang dinotasikan dengan $M^X/M/1$, dengan X adalah variabel acak yang menyatakan ukuran kelompok. Jika dalam suatu sistem antrian tidak ada pelanggan yang mengantri untuk dilayani, maka *server* akan melakukan *vacation*. Ketika pelanggan masuk dalam sistem saat *server* melakukan *vacation*, pelanggan tidak dapat langsung dilayani, sehingga terjadi penundaan waktu pelayanan. Tujuan dari penulisan ini adalah menganalisis model antrian pola kedatangan berkelompok satu *server* dengan *working vacation model* ($M^X/M/1 (WV)$), menurunkan formula untuk ukuran keefektifannya, serta memberikan implementasi dari model antrian tersebut.

Penurunan formula untuk mendapatkan ukuran keefektifan sistem antrian ($M^X/M/1 (WV)$) dilakukan dengan pendekatan *Quasi Birth-Death Process*. Sebagai dasar untuk memperoleh ukuran keefektifan model antrian tersebut yaitu dengan menentukan *probability generating function* (*PGF*) dari banyaknya pelanggan dalam sistem antrian $M^X/M/1$ biasa dan *pgf* dari penambahan pelanggan yang terjadi karena adanya *vacation*. Waktu *vacation* diasumsikan berdistribusi Eksponensial, dan pelanggan dilayani secara individu mengikuti disiplin antrian *FCFS* (*First Come First Serve*).

Ukuran keefektifan pada model antrian ($M^X/M/1 (WV)$) meliputi nilai harapan banyaknya pelanggan dalam sistem (L), nilai harapan banyaknya pelanggan dalam antrian ($L_q^{(v)}$), nilai harapan waktu tunggu pelanggan dalam sistem (W), dan nilai harapan waktu tunggu pelanggan dalam antrian ($W_q^{(v)}$). Sebagai implementasi diberikan ilustrasi data yang dibangkitkan dengan *software* Minitab. Dari analisis diperoleh hasil yang lebih besar jika dibandingkan dengan hasil dari model antrian kedatangan berkelompok tanpa *vacation*. Hal itu lebih mendekati keadaan sebenarnya pelanggan dalam sistem.

KATA PENGANTAR

Puji syukur atas khadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulisan tugas akhir skripsi yang berjudul “Analisis Model Antrian Dengan *Working Vacation* Pada Pola Kedatangan Berkelompok (*Batch Arrival*) satu *server*” ini dapat diselesaikan.

Penulisan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak, oleh karena itu dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bpk. Dr. Hartono selaku Dekan FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta, yang telah memberikan kesempatan penulis dalam menyelesaikan studi.
2. Bpk. Dr. Suyanta selaku Wakil Dekan I FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta, yang telah memberikan kemudahan dalam pengurusan administrasi selama penulisan skripsi.
3. Bpk. Dr. Sugiman selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta, yang telah memberikan kemudahan dalam pengurusan administrasi selama penulisan skripsi.
4. Bpk. Dr. Agus Maman Abadi selaku Ketua Program Studi Matematika, yang telah memberikan informasi dan pengarahan dalam penyusunan tugas akhir skripsi.
5. Bpk. Musthofa, S.Si selaku Penasehat Akademik, yang telah memberikan informasi dan pengarahan selama penulis menempuh kuliah.
6. Ibu Retno Subekti, M.Sc selaku Dosen Pembimbing, yang telah memberikan pengarahan, nasehat, dan motivasi dalam menyusun skripsi.

7. Ibu Nikenasih Binatari, M.Si selaku Dosen Pembimbing, yang telah memberikan pengarahannya, nasehat, dan motivasi dalam menyusun skripsi.
8. Ibu Endang Listyani, M.S selaku Dosen Penguji, yang telah memberikan saran – saran dalam penulisan skripsi.
9. Ibu Atmini Dhoruri, M.S selaku Dosen Penguji, yang telah memberikan saran – saran dalam penulisan skripsi.
10. Seluruh dosen Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta yang telah memberikan ilmu kepada penulis.
11. Semua pihak terkait yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini belum sepenuhnya sempurna, untuk itu penulis menerima saran dan kritik yang bersifat membangun. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat.

Yogyakarta, 6 Oktober 2015

Sucia Mentari
NIM. 11305141007

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN MOTTO	v
HALAMAN PERSEMBAHAN	vi
ABSTRAK	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR SIMBOL	xiii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR LAMPIRAN	xvi
BAB I PENDAHULUAN	
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Rumusan Masalah	4
C. Tujuan	4
D. Manfaat	5
BAB II LANDASAN TEORI	
A. Proses Antrian	6
1. Definisi Proses Antrian	6
2. Komponen Dasar dalam Proses Antrian	7
B. Distribusi Eksponensial dan Distribusi Poisson	15

1. Distribusi Eksponensial.....	15
2. Distribusi Poisson.....	15
C. <i>Probability Generating Function (PGF)</i>	16
D. Notasi Kendal.....	18
E. Proses Kelahiran dan Kematian (<i>Birth-Death Processes</i>).....	19
F. Distribusi Kedatangan.....	27
G. Distribusi Kepergian	32
H. Proses Kedatangan dan Kepergian <i>Steady State</i>	36
I. Persamaan Kolmogorov ($M/M/1$)	39
J. Ukuran Keefektifan Sistem Antrian.....	39
K. Antrian Kedatangan Berkelompok (<i>Batch Arrival</i>) Satu Server	42
1. Pola Kedatangan Berkelompok (<i>Batch Arrival</i>)	41
2. Proses Kedatangan dan Kepergian Pada Sistem Antrian $M^X/M/1$...	44
3. Solusi <i>Steady State</i> Model Antrian $M^X/M/1$	47
L. <i>Server Vacations</i>	52

BAB III PEMBAHASAN

A. Sistem Antrian Kedatangan Berkelompok (<i>Batch Arrival</i>) dengan <i>Working Vacation</i> Satu Server.....	55
B. <i>Quasi Birth – Death (QBD) Process</i>	58
C. Solusi <i>Steady State</i> Model Antrian $M^X/M/1$ (WV)	62
D. Ukuran keefektifan Sistem Antrian $M^X/M/1$ (WV)	70
E. Implementasi.....	80

BAB IV PENUTUP

A. Simpulan	89
B. Saran	91

DAFTAR PUSTAKA	92
LAMPIRAN.....	95

DAFTAR SIMBOL

$P_n(t)$: Peluang terdapat n pelanggan dalam sistem pada saat t
n	: Banyaknya pelanggan dalam sistem antrian
$\lambda_n \Delta t$: Probabilitas satu kedatangan bila terdapat n pelanggan di dalam sistem
λ_n	: Laju kedatangan pelanggan bila terdapat n pelanggan di dalam sistem
$\mu_n \Delta t$: Probabilitas satu kepergian bila terdapat n pelanggan di dalam sistem
μ_n	: Laju pelayanan pelanggan bila terdapat n pelanggan di dalam sistem
$J(t)$: Banyaknya <i>server</i> yang sibuk/tidak melakukan <i>vacation</i> pada waktu t
π_{kj}	: Peluang terdapat k pelanggan di dalam sistem antrian pada saat sebanyak j <i>server</i> sedang sibuk
$X(t)$: Banyaknya kedatangan pelanggan pada waktu t
$Y(t)$: Banyaknya kepergian pelanggan pada waktu t
$N(t)$: Banyaknya pelanggan di dalam sistem sampai waktu t
ρ	: Faktor utilitas sistem atau peluang <i>server</i> sibuk
$o(\Delta t)$: Suatu fungsi yang memenuhi $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$
L_s	: Nilai harapan banyak pelanggan dalam sistem
L_q	: Nilai harapan banyak pelanggan dalam antrian
W_s	: Nilai harapan waktu tunggu pelanggan dalam sistem
W_q	: Nilai harapan waktu tunggu pelanggan dalam antrian
L_d	: Nilai harapan panjang antrian tambahan saat terjadi penundaan pelayanan sebagai akibat dari adanya <i>vacation</i>
L	: Nilai harapan banyaknya pelanggan dalam sistem $M^X/M/1$ (WV)
$L_q^{(v)}$: Nilai harapan banyaknya pelanggan dalam antrian $M^X/M/1$ (WV)
W	: Nilai harapan waktu tunggu pelanggan dalam sistem $M^X/M/1$ (WV)
$W_q^{(v)}$: Nilai harapan waktu tunggu pelanggan dalam antrian $M^X/M/1$ (WV)
\bar{a}	: Rata – rata ukuran kelompok yang masuk ke dalam sistem antrian
$\lambda \bar{a}$: Laju kedatangan pelanggan, dengan tiap kedatangan berukuran \bar{a}

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Simbol – Simbol Pengganti Notasi Kendall – Lee	19
Tabel 2.2 Kemungkinan Kejadian Terdapat n Pelanggan dalam Sistem Pada Saat $t + \Delta t$	24
Tabel 2.3 Kemungkinan Terdapat n Pelanggan dalam Sistem Antrian dengan Pola Kedatangan Berkelompok Pada $t + \Delta t$	44
Tabel 2.4 Kemungkinan Terdapat n Pelanggan dalam Sistem Antrian dengan Pola Kedatangan Berkelompok Pada $t + \Delta t$	45
Tabel 3.5 Ukuran Keefektifan Model Antrian $M^X/M/1$ (WV)	79
Tabel 3.6 Ukuran Kelompok dan Waktu Antar Kedatangan Tiap Kelompok	81
Tabel 3.7 Lama Waktu <i>Vacation</i>	83
Tabel 3.8 Output Penyelesaian Masalah Antrian Pada Model $(M^{22}/M/1)$ dengan WINQSB	88

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Sistem Antrian.....	7
Gambar 2.2 Sistem Antrian Single Channel – Single Phase.....	10
Gambar 2.3 Sistem Antrian Single Channel – Multi Phase	10
Gambar 2.4 Sistem Antrian Multi Channel – Single Phase	11
Gambar 2.5 Sistem Antrian Multi Channel – Multi Phase	12
Gambar 2.6 Proses Kedatangan dan Kepergian dalam Sistem Antrian	23
Gambar 2.7 Sistem Antrian $M^X/M/1$	42
Gambar 2.8 Diagram Laju Transisi untuk Sistem Antrian $M^X/M/1$ (Hadianti, 2066:176)	44
Gambar 3.9 Antrian $M^X/M/1$ (WV).....	57
Gambar 3.10 Diagram Transisi Antrian $M^X/M/1$ (WV).....	60

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Tampilan hasil <i>generate</i> Data Waktu Pelayanan Pelanggan	95
Lampiran 2. Data Waktu Kedatangan Pelanggan, Waktu Mulai Dilayani, Waktu Selesai Dilayani, dan Lama Waktu Pelayanan Pelanggan.....	99
Lampiran 3. Uji Kesesuaian Distribusi Kedatangan Pelanggan, Waktu Pelayanan Pelanggan, dan Waktu <i>Vacation</i> Menggunakan <i>One – Sample Kolmogorov Smirnov Test</i>	102
Lampiran 4. Tampilan Langkah – Langkah Penggunaan <i>Software</i> WINQSB Untuk Penyelesaian Masalah Atrian Dengan Pola Kedatangan Berkelompok.....	107
Lampiran 5. Program untuk Menghitung Ukuran Keefetifan Sistem Antrian $M^X/M/1 (WV)$ dengan <i>software</i> MATLAB	111

BAB I PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Salah satu fenomena yang sering terjadi dalam kehidupan sehari-hari adalah fenomena menunggu. Hal tersebut terjadi karena kebutuhan akan suatu pelayanan melebihi kapasitas yang tersedia untuk penyelenggaraan pelayanan tersebut. Kondisi tersebut sering terlihat dalam kehidupan sehari-hari, seperti orang menunggu untuk mendapatkan tiket menonton di bioskop, menunggu penemuan obat di apotik, mengantri di kasir sebuah swalayan, dan berkas – berkas yang akan di sortir. Antrian yang terlalu panjang akan merugikan pelanggan maupun pengelola tempat pelayanan, sebab jika pelanggan tidak sabar, maka perusahaan akan kehilangan pelanggan. Oleh sebab itu, perbaikan sistem pelayanan dan pengoptimalan jumlah *server* diharapkan mampu mengurangi antrian, sehingga proses menunggu tidak terjadi terlalu lama.

Salah satu ilmu yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah antrian adalah matematika. Teori antrian merupakan salah satu cabang dari matematika terapan yang sering digunakan aplikasinya. Menurut Sinalunga (2008:238), Teori antrian (*Queueing theory*) merupakan studi probabilistik kejadian garis tunggu (*waiting lines*), yakni suatu garis tunggu dari pelanggan yang memerlukan layanan dari sistem yang ada.

Menurut Wospakrik (1996:302), sistem antrian adalah himpunan pelanggan, *server* beserta aturan yang mengatur antara kedatangan *pelanggan* dan pelayanannya. Salah satu komponen dari sistem antrian adalah pola kedatangan pelanggan. Tipe kedatangan ada dua macam, yaitu pelanggan tiba

dalam sistem antrian secara individu pada satu waktu dan sekelompok pelanggan yang datang bersamaan pada satu waktu. Dalam masalah antrian biasa diasumsikan bahwa pelanggan tiba di suatu fasilitas layanan secara individu. Namun asumsi tersebut terbantahkan dalam beberapa situasi di dunia nyata, misal orang-orang pergi ke bioskop atau rumah makan, surat yang tiba di kantor pos, berkas-berkas yang akan di tanda tangani, beberapa contoh keadaan pelanggan tidak datang sendiri-sendiri, tetapi secara berkelompok dalam satu waktu. Tentu saja kondisi ini berbeda dengan antrian yang kedatangannya secara individu, misalnya waktu tunggu pelanggan, dan kesibukan sistem tidak akan sama.

Pada model antrian yang menggunakan satu *server* atau multiserver, *server* diasumsikan selalu tersedia untuk melayani pelanggan. Namun, pada kenyataannya ada banyak faktor yang dapat menunda pelayanan selama beberapa saat, sehingga *server* tidak dapat melayani secara seketika pada saat pelanggan datang. Sebagai contoh, pada jasa percetakan yang melayani permintaan cetak foto dan selebaran berbagai undangan. Pada saat tidak ada pelanggan yang datang atau tidak ada pelanggan yang mengantri, *server* dapat melakukan percetakan foto yang dipesan oleh pelanggan sebelumnya atau mencetak pesanan undangan milik pelanggan lain, *server* melakukan percetakan pesanan sebelumnya sebagai tugas sekunder. Waktu yang digunakan untuk melakukan tugas sekunder dipandang sebagai *vacation*. Untuk kasus pada contoh tersebut, *vacation* dapat dilakukan lebih dari satu kali oleh *server*.

Antrian dengan sistem *working vacation* umumnya telah diklasifikasikan ke dalam dua kategori sesuai dengan kebijakan *vacation* ; (1) jika *server* tidak menemukan pelanggan setelah kembali dari *vacation*, ia segera melakukan *vacation* yang lain, dan seterusnya, sampai akhirnya ia menemukan setidaknya satu pelanggan; (2) jika *server* tidak menemukan pelanggan setelah kembali, dia menunggu untuk pelanggan pertama atau kelompok pelanggan tiba. Pada kedua tipe, jika *server* menemukan setiap pelanggan ketika ia kembali ia segera memulai pelayanannya. *Vacation* dapat dianggap sebagai waktu istirahat *server*, atau gangguan teknis pada saat *server* melakukan pelayanan.

Dalam tugas akhir ini akan dibahas mengenai analisis model antrian dengan *working vacation* pada pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*) satu *server*. *Vacation* hanya akan dilakukan *server* ketika tidak ada pelanggan yang mengantri dalam sistem. Ketika pelanggan masuk ke dalam sistem ketika *server* melakukan *vacation*, maka pelanggan tidak dapat langsung dilayani oleh *server*. Sehingga terjadi penundaan pelayanan yang menyebabkan waktu tunggu pelanggan dalam sistem bertambah. Penelusuran rumus dimulai dengan menganalisis sistem antrian satu *server* dengan pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*). Tujuan pembahasan ini untuk memperoleh beberapa karakteristik yang dapat mengukur kinerja/keefektifan sistem antrian yang meliputi nilai harapan banyak pelanggan dalam sistem, nilai harapan banyak pelanggan dalam antrian, nilai harapan waktu tunggu pelanggan dalam sistem dan nilai harapan waktu tunggu pelanggan dalam antrian. Pada model antrian *batch arrival* dengan *working vacation*, diharapkan *server* mampu

mengakomodasi jumlah antrian unit yang lebih dari satu, yang masuk ke dalam sistem antrian dalam waktu bersamaan, serta mampu mengakomodasi waktu *vacation*. Sehingga diharapkan unit tidak menunggu terlalu lama.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah maka permasalahan dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana model dari sistem antrian dengan *working vacation* pada pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*) satu *server*?
2. Bagaimana ukuran keefektifan dari model antrian dengan *working vacation* pada pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*) satu *server*?
3. Bagaimana implementasi model antrian dengan *working vacation* pada pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*) satu *server*?

C. Tujuan

Dengan mengacu pada latar belakang masalah dan rumusan masalah, maka tujuan penulisan ini adalah:

1. Menjelaskan model dari sistem antrian dengan *working vacation* pada pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*) satu *server*.
2. Menjelaskan ukuran keefektifan dari model sistem antrian dengan *working vacation* pada pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*) satu *server*.
3. Menjelaskan implementasi model antrian dengan *working vacation* pada pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*) satu *server*.

D. Manfaat

Penulisan tugas akhir ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Bagi pembaca memberikan gambaran mengenai model antrian dengan *working vacation* pada pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*) satu *server*.
2. Bagi perpustakaan jurusan pendidikan matematika memberikan tambahan referensi tentang kajian teori antrian.
3. Bagi instansi dapat dijadikan pertimbangan sebagai dasar pengambilan keputusan dalam pengoptimalan *server*.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini diuraikan tentang dasar-dasar yang diperlukan dalam pembahasan model antrian dengan *working vacation* pada pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*) satu *server*, mencakup tentang model antrian satu *server* pola kedatangan berkelompok yang berdistribusi Poisson, waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial, *probability generating function* (PGF), dan antrian *batch arrival* satu *server*.

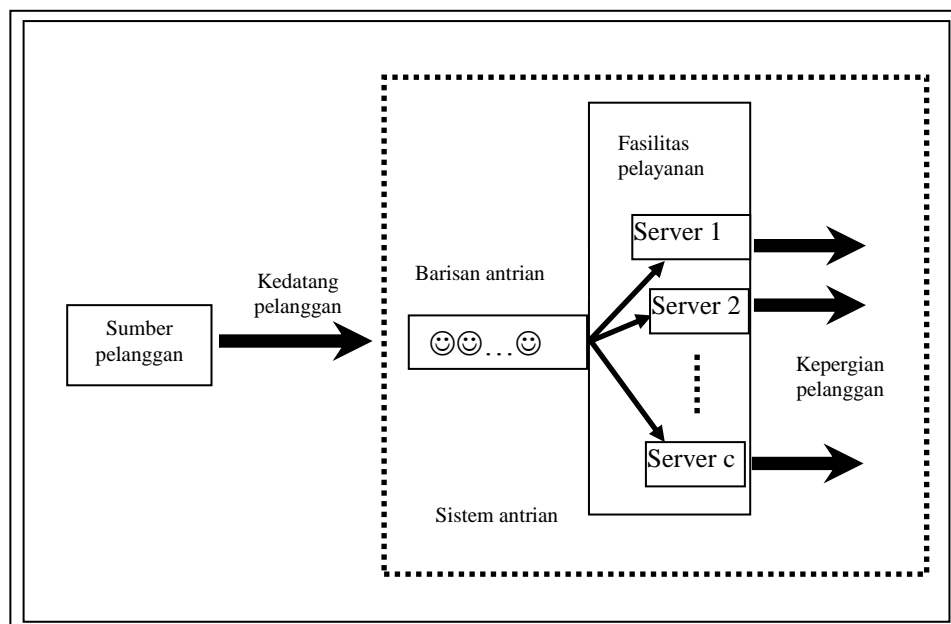
A. Proses Antrian

1. Definisi Proses Antrian

Menurut Bronson (1996:310), proses antrian merupakan proses yang berhubungan dengan kedatangan pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan, menunggu panggilan dalam baris antrian jika belum mendapat pelayanan dan akhirnya meninggalkan fasilitas pelayanan setelah mendapat pelayanan. Proses ini dimulai saat pelanggan – pelanggan yang memerlukan pelayanan mulai datang. Mereka berasal dari suatu populasi yang disebut sebagai sumber input.

Menurut Hillier dan Lieberman (1980:401), proses antrian adalah suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan pelanggan ke suatu sistem antrian, kemudian menunggu dalam antrian hingga pelayan memilih pelanggan sesuai dengan disiplin pelayanan, dan akhirnya pelanggan meninggalkan sistem antrian setelah selesai pelayanan.

Sistem antrian adalah himpunan pelanggan, pelayan, dan suatu aturan yang mengatur kedatangan para pelanggan dan pelayanannya. Sistem antrian merupakan ” proses kelahiran – kematian ” dengan suatu populasi yang terdiri atas para pelanggan yang sedang menunggu pelayanan atau yang sedang dilayani. Kelahiran terjadi jika seorang pelanggan memasuki fasilitas pelayanan, sedangkan kematian terjadi jika pelanggan meninggalkan fasilitas pelayanan. Keadaan sistem adalah jumlah pelanggan dalam suatu fasilitas pelayanan. (Wospakrik, 1996:302)



Gambar 2.1 Sistem Antrian

2. Komponen Dasar dalam Proses Antrian

Menurut Taha (1997:609), suatu sistem antrian bergantung pada tujuh komponen yaitu pola kedatangan, pola kepergian, kapasitas sistem, desain pelayanan, disiplin pelayanan, ukuran sumber pemanggilan, dan

perilaku manusia. Komponen – komponen tersebut diuraikan sebagai berikut.

a. Pola Kedatangan

Menurut Wagner (1972:840), pola kedatangan adalah pola pembentukan antrian akibat kedatangan pelanggan dalam selang waktu tertentu. Pola kedatangan dapat diketahui secara pasti atau berupa suatu variabel acak yang distribusi peluangnya dianggap telah diketahui.

Jika tidak disebutkan secara khusus pelanggan datang secara individu ke dalam sistem antrian. Namun dapat pula lebih dari satu pelanggan datang secara bersamaan ke dalam sistem antrian, pada kondisi ini disebut dengan *bulk arrival* (Taha, 1997:177).

b. Pola Kepergian

Pola kepergian adalah banyak kepergian pelanggan selama periode waktu tertentu. Pola kepergian biasanya dicirikan oleh waktu pelayanan, yaitu waktu yang dibutuhkan oleh seorang pelayan untuk melayani seorang pelanggan. Waktu pelayanan dapat bersifat deterministik dan dapat berupa suatu variabel acak dengan distribusi peluang tertentu (Bronson, 1996:310).

Waktu pelayan bersifat deterministik berarti bahwa waktu yang dibutuhkan untuk melayani setiap pelanggan selalu tetap, sedangkan waktu pelayanan yang berupa variabel acak adalah waktu yang dibutuhkan untuk melayani setiap pelanggan berbeda – beda.

c. Kapasitas sistem

Menurut Bronson (1996:310), kapasitas sistem adalah banyak maksimum pelanggan, baik pelanggan yang sedang berada dalam pelayanan maupun dalam antrian, yang ditampung oleh fasilitas pelayanan pada waktu yang sama. Suatu sistem antrian yang tidak membatasi banyak pelanggan dalam fasilitas pelayanannya disebut sistem berkapasitas tak berhingga, sedangkan suatu sistem yang membatasi banyak pelanggan dalam fasilitas pelayanannya disebut sistem berkapasitas berhingga, jika pelanggan memasuki sistem pada saat fasilitas pelayanan penuh maka pelanggan akan ditolak dan meninggalkan sistem tanpa memperoleh pelayanan.

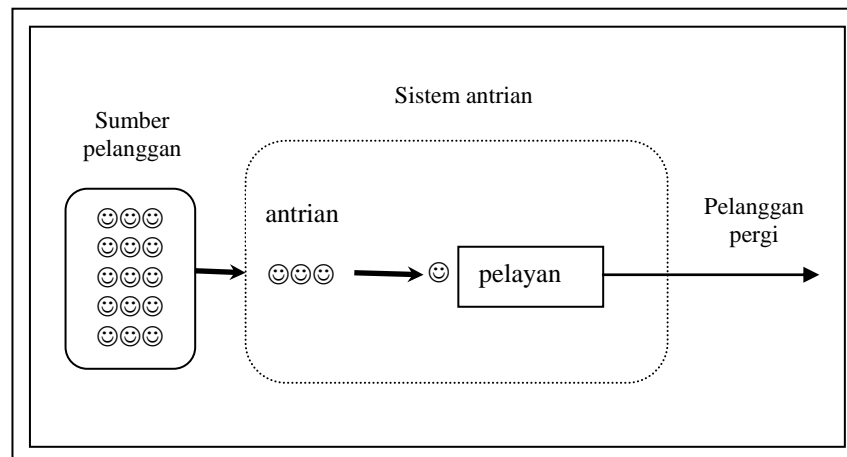
d. Desain Pelayanan

Menurut Sinalungga (2008:249), Desain sarana pelayanan dapat diklasifikasikan dalam *channel* dan *phase* yang akan membentuk suatu struktur antrian yang berbeda – beda. *Channel* menunjukkan jumlah jalur untuk memasuki sistem pelayanan. *Phase* berarti jumlah stasiun – stasiun pelayanan, dimana para pelanggan harus melaluinya sebelum pelayanan dinyatakan lengkap. Ada empat model struktur antrian dasar yang umum terjadi dalam seluruh sistem antrian:

1. *Single Channel – Single Phase*

Single Channel berarti hanya ada satu jalur untuk memasuki sistem pelayanan atau ada satu pelayanan. *Single Phase* menunjukkan bahwa hanya ada satu stasiun pelayanan sehingga yang telah menerima pelayanan dapat langsung keluar dari sistem

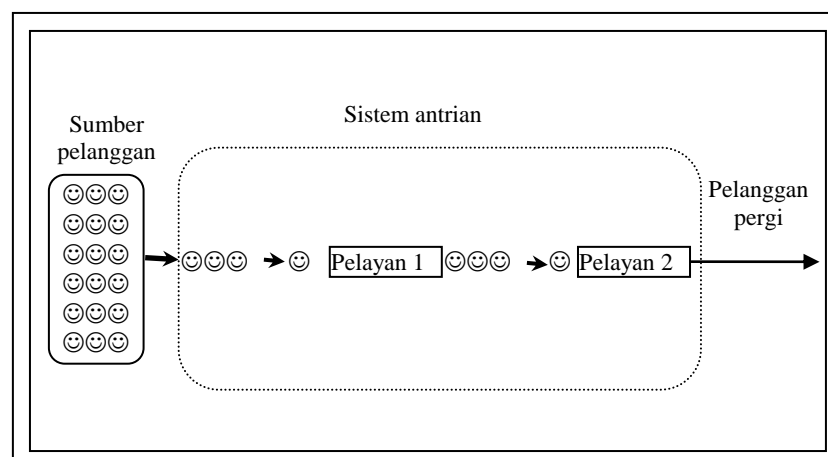
antrian. Contohnya antrian pada penjualan tiket kereta api yang dibuka hanya satu loket.



Gambar 2.2 Sistem Antrian Single Channel – Single Phase

2. *Single Channel – Multi Phase*

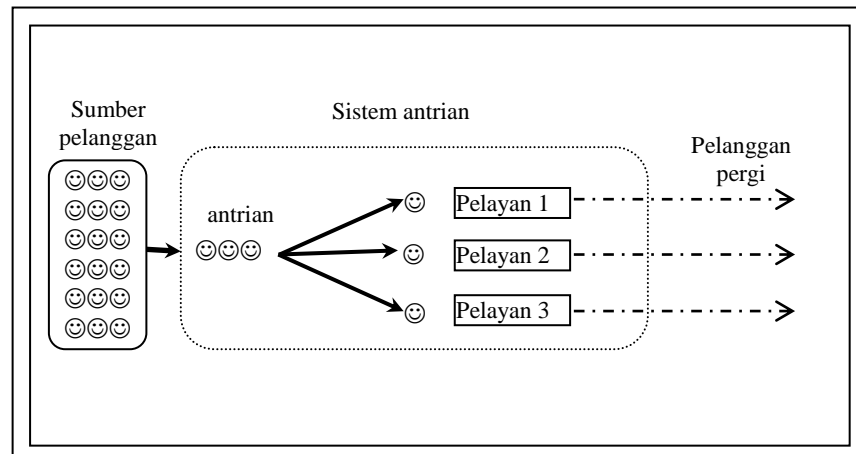
Multi Phase berarti ada dua atau lebih pelayanan yang dilaksanakan secara berurutan dalam *phase – phase*. Misalnya pada antrian di laundry, pakaian – pakaian setelah dicuci kemudian dijemur lalu disetrika dan terakhir dikemas.



Gambar 2.3 Sistem Antrian Single Channel – Multi Phase

3. *Multi Channel – Single Phase*

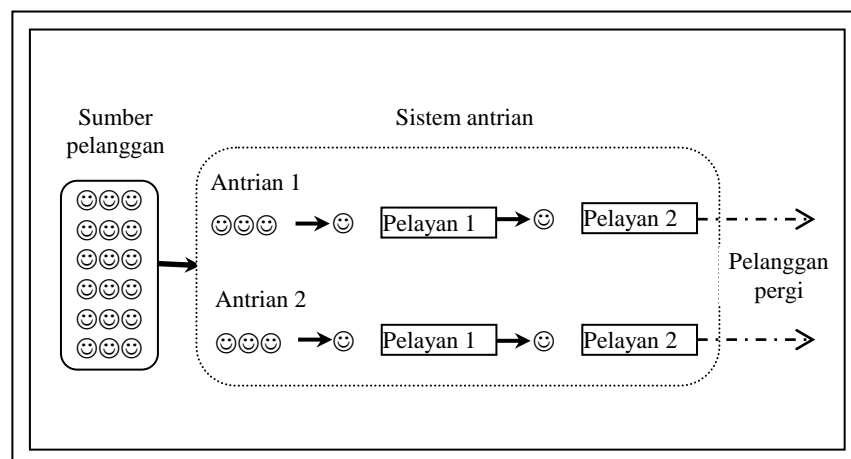
Sistem *multi channel – single phase* terjadi jika ada dua atau lebih fasilitas pelayanan dialiri oleh suatu antrian tunggal. Sebagai contoh adalah layanan pelayanan nasabah di Bank.



Gambar 2.4 Sistem Antrian Multi Channel – Single Phase

4. *Multi Channel – Multi Phase*

Sistem ini terjadi jika ada dua atau lebih fasilitas pelayanan dengan pelayanannya lebih dari satu *phase*. Sebagai contoh adalah pelayanan kepada pasien di rumah sakit dari pendaftaran, diagnosa, tindakan medis sampai pembayaran. Setiap sistem – sistem ini mempunyai beberapa fasilitas pelayanan pada setiap tahap, sehingga lebih dari satu individu dapat dilayani pada suatu waktu.



Gambar 2.5 Sistem Antrian Multi Channel – Multi Phase

e. Disiplin Pelayanan

Menurut Sinalunga (2008:251), disiplin pelayanan adalah suatu aturan yang dikenalkan dalam memilih pelanggan dari barisan antrian untuk segera dilayani. Adapun pembagian disiplin pelayanan ialah:

1. *First come first served (FCFS)* atau *first in first out (FIFO)*, suatu peraturan dimana yang akan dilayani ialah pelanggan yang datang terlebih dahulu. Contohnya antrian di suatu kasir sebuah swalayan.
2. *Last come first served (LCFS)* atau *last in first out (LIFO)*, merupakan antrian dimana yang datang paling akhir adalah yang dilayani paling awal atau paling dahulu. Contohnya antrian pada satu tumpukan barang digudang, barang yang terakhir masuk akan berada ditumpukkan paling atas, sehingga akan diambil pertama.

3. *Service in random order (SIRO)* atau pelayanan dalam urutan acak atau sering dikenal juga *random selection for services (RSS)*, artinya pelayanan atau panggilan didasarkan pada peluang secara random, tidak mempermasalahkan siapa yang lebih dahulu tiba. Contohnya kertas – kertas undian yang menunggu untuk ditentukan pemenangnya, yang diambil secara acak.
 4. *Priority service (PS)*, artinya prioritas pelayanan diberikan kepada mereka yang mempunyai prioritas paling tinggi dibandingkan dengan mereka yang memiliki prioritas paling rendah, meskipun yang terakhir ini sudah lebih dahulu tiba dalam garis tunggu. Kejadian seperti ini bisa disebabkan oleh beberapa hal, misalnya seseorang yang keadaan penyakit yang lebih berat dibanding dengan orang lain dalam sebuah rumah sakit.
- f. Sumber Pemanggilan

Menurut Taha (1996:177), ukuran sumber pemanggilan adalah banyaknya populasi yang membutuhkan pelayanan dalam suatu sistem antrian. Ukuran sumber pemanggilan dapat terbatas maupun tak terbatas. Sumber pemanggilan terbatas misalnya mahasiswa yang akan melakukan registrasi ulang di suatu universitas, dimana jumlahnya sudah pasti. Sedangkan sumber pemanggilan yang tidak terbatas misalnya nasabah bank yang antri untuk menabung atau membuka rekening baru, jumlahnya bisa tak

terbatas.

g. Perilaku Manusia

Perilaku manusia merupakan perilaku – perilaku yang mempengaruhi suatu sistem antrian ketika manusia mempunyai peran dalam sistem baik sebagai pelanggan maupun pelayan. Jika manusia berperan sebagai pelayan, dapat melayani pelanggan dengan cepat atau lambat sesuai kemampuannya sehingga mempengaruhi lamanya waktu tunggu (Taha, 1996:178).

Menurut Gross dan Harris (1998:3), perilaku manusia dalam sistem antrian jika berperan sebagai pelanggan sebagai berikut:

1. *Reneging*

menggambarkan situasi dimana seseorang masuk dalam antrian, namun belum memperoleh pelayanan, kemudian meninggalkan antrian tersebut.

2. *Balking*

menggambarkan orang yang tidak masuk dalam antrian dan langsung meninggalkan antrian.

3. *Jockeying*

menggambarkan situasi jika dalam sistem ada dua atau lebih jalur antrian maka orang dapat berpindah antrian dari jalur yang satu ke jalur yang lain.

B. Distribusi Eksponensial dan Distribusi Poisson

1. Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial digunakan untuk menggambarkan distribusi waktu pada fasilitas jasa, dimana waktu pelayanan tersebut diasumsikan bersifat bebas. Artinya, waktu untuk melayani pendatang tidak bergantung pada lama waktu yang telah dihabiskan untuk melayani pendatang sebelumnya, dan tidak bergantung pada jumlah pendatang yang menunggu untuk dilayani. (Djauhari, 1997:175-176)

Definisi 2.1 (Cooper, 1981:42) Jika X adalah variabel acak kontinu dengan fungsi distribusi kumulatif $P\{X \leq x\} = F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x}, & \text{untuk } x \geq 0 \\ 0 & , \text{ untuk lainnya} \end{cases}$$

dan fungsi densitas peluang $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ yaitu

$$f(x) = \mu e^{-\mu x}, \quad x \geq 0 \quad (2.1)$$

maka X disebut berdistribusi Eksponensial dengan parameter μ .

2. Distribusi Poisson

Suatu eksperimen yang menghasilkan jumlah sukses yang terjadi pada interval waktu ataupun daerah yang spesifik dikenal sebagai eksperimen Poisson. Interval waktu tersebut dapat berupa menit, hari, minggu, bulan, maupun tahun, sedangkan daerah yang spesifik dapat berarti garis, luas, sisi, maupun material. (Dimyati, 1999:309)

Menurut Dimyati, (1999:309) ciri – ciri eksperimen Poisson adalah:

- a. Banyaknya hasil percobaan yang terjadi dalam suatu selang waktu atau suatu daerah tertentu bersifat independen terhadap banyaknya hasil percobaan yang terjadi pada selang waktu atau daerah lain yang terpisah.
- b. Peluang terjadinya satu hasil percobaan selama suatu selang waktu yang singkat sekali atau dalam suatu daerah yang kecil, sebanding dengan panjang selang waktu tersebut atau besarnya daerah tersebut.
- c. Peluang bahwa lebih dari satu hasil percobaan akan terjadi dalam selang waktu yang singkat tersebut atau dalam daerah yang kecil tersebut dapat diabaikan.

Definisi 2.2 (Djauhari, 1997:163) Variabel acak X dikatakan berdistribusi Poisson dengan parameter λ jika fungsi peluangnya sebagai berikut.

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

C. Probability Generating Function (PGF)

Akan ditemukan gagasan untuk fungsi pembangkit probabilitas yang berguna dalam analisis sistem antrian. Probabilitas menghasilkan fungsi yang banyak digunakan dalam studi, proses stokastik dan sistem antrian adalah contoh khusus dari proses tersebut.

Definisi 2.3 (Bain & Engelhardt, 1991:61) Jika X adalah suatu variabel acak diskrit dengan fungsi peluang $f(x)$ maka nilai harapan dari X didefinisikan sebagai

$$E(X) = \sum_x x f(x) \quad (2.3)$$

Definisi 2.4 (Purcell & Varberg, 1987:49) Andaikan $S(x)$ adalah jumlah sebuah deret pangkat pada sebuah selang $I = \{x | -1 < x < 1\}$ sehingga

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots \quad (2.4)$$

maka turunan pertama dari $S(x)$ adalah

$$\frac{dS(x)}{dx} = \frac{d \sum_{n=0}^{\infty} x^n}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} \quad (2.5)$$

Definisi 2.5 (Purcell & Varberg, 1987 : 12) Deret geometri berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n, \quad \text{dengan } a \neq 0$$

akan konvergen dan mempunyai jumlah

$$S = \frac{a}{a-x}, \text{ apabila } |x| < 1$$

Definisi 2.6 (Bunday, 1996:10) Jika N adalah suatu variabel acak diskrit yang diasumsikan nilainya n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) dengan probabilitas P_n maka *probability generating function* (PGF) dari N didefinisikan sebagai

$$P(z) = E[z^N] = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n \quad (2.6)$$

P_n menyatakan peluang terdapat n pelanggan di dalam sistem antrian. $P(z)$ adalah rangkaian konvergen dan fungsi *well-behaved* dari z untuk $|z| \leq 1$.

untuk $z = 1$, diperoleh

$$P(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \quad (2.7)$$

turunan pertama dari $P(z)$ adalah

$$P'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n z^{n-1} \quad (2.8)$$

sehingga untuk $z = 1$, diperoleh

$$P'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$$

berdasarkan Definisi (2.3) maka diperoleh

$$P'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = E(N) \quad (2.9)$$

demikian pula

$$P''(1) = E[N(N-1)] = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)P_n$$

D. Notasi Kendal

Notasi baku untuk memodelkan suatu sistem antrian pertama kali dikemukakan oleh D.G.Kendall dalam bentuk $a/b/c$, dan dikenal sebagai notasi kendall. Namun, A.M. Lee menambahkan simbol d dan e sehingga menjadi $a/b/c/d/e$ yang disebut notasi Kendall – Lee (Taha, 1996:627).

Menurut Taha (1997:186), notasi Kendall – Lee tersebut perlu ditambahkan dengan simbol f . Sehingga karakteristik suatu antrian dapat dinotasikan dalam format baku $(a/b/c) : (d/e/f)$. Notasi dari a sampai f tersebut berturut – turut menyatakan distribusi waktu antar kedatangan, distribusi pelayanan, jumlah *server*, disiplin antrian, kapasitas sistem, dan ukuran sumber pemanggilan. Notasi a sampai f dapat digantikan dengan simbol – simbol yang diberikan dalam tabel 2.1 berikut.

Tabel 2.1 Simbol – Simbol Pengganti Notasi Kendall – Lee

Notasi	Simbol	Keterangan
a dan b	M	Markov menyatakan kedatangan dan kepergian berdistribusi Poisson (waktu antar kedatangan berdistribusi Eksponensial).
	D	Deterministik menyatakan waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan konstan.
	E_k	Waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan berdistribusi Erlang
	GI	Distribusi independen umum dari kedatangan (atau waktu antar kedatangan)
	G	Distribusi umum dari keberangkatan (atau waktu pelayanan)
d	<i>FCFS/FIFO</i>	<i>First Come First Served/ First In First Out</i>
	<i>LCFS/LIFO</i>	<i>Last Come First Served/ Last In First Out</i>
	<i>SIRO</i>	<i>Service in random order</i>
	<i>PS</i>	<i>Priority service</i>
c, e, f	$1, 2, 3, \dots \infty$	

E. Proses Kelahiran dan Kematian (*Birth-Death Processes*)

Proses kedatangan dan kepergian dalam suatu sistem antrian merupakan proses kelahiran dan kematian (*birth – death processe*). Kelahiran terjadi jika seorang pelanggan memasuki sistem antrian dan kematian terjadi jika seorang pelanggan meninggalkan sistem antrian tersebut.

Menurut Winston (1994:115), proses kelahiran dan kematian merupakan proses penjumlahan dalam suatu sistem dimana keadaan sistem selalu menghasilkan n bilangan bulat positif. Keadaan sistem pada saat t

didefinisikan sebagai selisih antara banyaknya kelahiran dan kematian pada saat t . Dengan demikian, keadaan sistem pada saat t dalam suatu sistem antrian yang dinotasikan dengan $N(t)$, adalah selisih antara banyaknya kedatangan dan kepergian pada saat t .

Misal, banyaknya kedatangan pelanggan pada saat t dinotasikan dengan $X(t)$ dan banyaknya kepergian pada saat t dinotasikan dengan $Y(t)$, maka banyaknya pelanggan yang berada dalam sistem pada saat t adalah $N(t) = X(t) - Y(t)$. Sedangkan peluang terdapat n pelanggan dalam sistem antrian pada saat t dinotasikan dengan $P(N(t) = n)$ atau $P_n(t)$.

Akan dicari peluang terdapat n pelanggan dalam suatu sistem antrian pada saat t . Namun sebelumnya, diberikan Definisi – Definisi yang digunakan pada pembahasan selanjutnya.

Definisi 2.7 (Hogg dan Tanis, 2001 : 66) Kejadian $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ dikatakan kejadian – kejadian yang saling asing jika $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$.

Definisi 2.8 (Bain dan Engelhardt, 1992:9) Jika sebuah percobaan A_1, A_2, A_3, \dots adalah kejadian yang mungkin terjadi pada ruang sampel S . Fungsi peluang merupakan fungsi yang mengawankan setiap kejadian A dengan bilangan real $P(A)$ dan $P(A)$ disebut peluang kejadian A jika memenuhi ketentuan berikut.

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. Jika $A_1, A_2, A_3, A_4 \dots$ adalah kejadian yang saling asing, maka $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + \dots$

Definisi 2.9 (Hogg dan Tanis, 2001 : 96) Kejadian A dan B dikatakan saling bebas jika dan hanya jika

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Jika kejadian A dan B tidak memenuhi kondisi tersebut maka disebut kejadian bergantung.

Definisi 2.10 (Ross, 1999 : 60) $o(\Delta t)$ merupakan suatu fungsi atas Δt dengan ketentuan $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

Definisi 2.11 (Purcell & Varberg, 1987 : 141)

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{df(t)}{dt}$$

Asal limit fungsinya ada.

Teorema 2.1 (Bartle dan Sherbert, 2000 : 176 – 177) Misal f dan g didefinisikan pada $[a, b]$, misal $f(a) = g(a) = 0$, sehingga $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0}$ dikatakan *indeterminate* dan $g(x) \neq 0$ maka limit dari $\frac{f}{g}$ di a ada dan sama dengan $\frac{f'(a)}{g'(a)}$.
sehingga

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Teorema tersebut disebut dengan aturan L'Hopital.

Bukti:

Jika $f(a) = g(a) = 0$ untuk $a < x < b$ berlaku

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

maka $f'(x)/g'(x)$ berdasarkan Definisi (2.11) adalah

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Terbukti bahwa $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Menurut Wospakrik (1996:297), asumsi – asumsi proses kelahiran dan kematian dalam antrian sebagai berikut:

- i) Semua kejadian pada suatu interval waktu yang sangat pendek (Δt) mempunyai probabilitas yang sama apabila sebanyak n pelanggan berada dalam sistem antrian, maka probabilitas sebuah kedatangan terjadi antara t dan $t + \Delta t$, dinyatakan dengan

$$P\left((X(t + \Delta t) - X(t)) = 1\right) = \lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$$

λ merupakan laju kedatangan.

- ii) Probabilitas tidak ada kedatangan antara t dan $t + \Delta t$, dinyatakan dengan

$$P\left((X(t + \Delta t) - X(t)) = 0\right) = 1 - \lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$$

- iii) Probabilitas ada satu kepergian antara t dan $t + \Delta t$, dinyatakan dengan

$$P\left((X(t + \Delta t) - X(t)) = 1\right) = \mu_n \Delta t + o(\Delta t)$$

μ merupakan laju pelayanan.

- iv) Probabilitas tidak ada kepergian antara t dan $t + \Delta t$, dinyatakan dengan

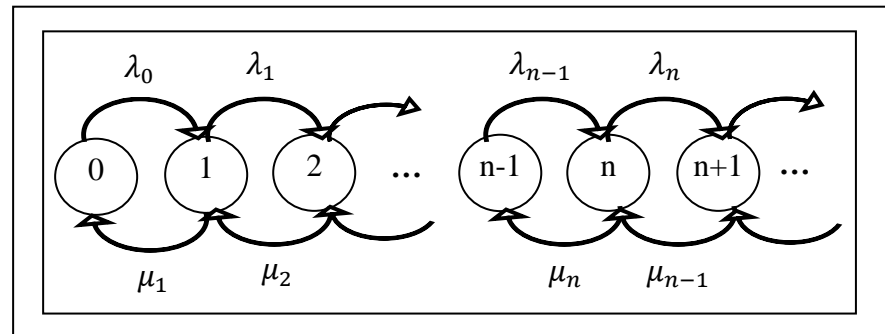
$$P\left((X(t + \Delta t) - X(t)) = 0\right) = 1 - \mu_n \Delta t + o(\Delta t)$$

- v) Probabilitas terjadi lebih dari satu kejadian pada selang waktu yang sangat pendek adalah sangat kecil sehingga dapat diabaikan, dapat dinyatakan dengan

$$P\left((X(t + \Delta t) - X(t)) > 1\right) = o(\Delta t)$$

vi) Proses kedatangan dan pelayanan merupakan kejadian yang saling bebas.

Berdasarkan asumsi (vi), kedatangan dan kepergian merupakan kejadian – kejadian yang saling bebas, sehingga kejadian – kejadian pada interval waktu tertentu tidak mempengaruhi kejadian pada interval waktu sebelumnya atau kejadian pada interval waktu sesudahnya. Proses kedatangan dan kepergian dalam suatu sistem antrian sesuai asumsi – asumsi diatas ditunjukkan pada Gambar 2.6 berikut.



Gambar 2.6 Proses Kedatangan dan Kepergian dalam Sistem Antrian

Berdasarkan Gambar 2.6 kemungkinan – kemungkinan kejadian saling asing yang dapat terjadi jika terdapat n ($n > 0$) pelanggan dalam sistem pada waktu $t + \Delta t$ adalah sebagai berikut.

Tabel 2.2 Kemungkinan Kejadian Terdapat n Pelanggan dalam Sistem Pada Saat $t + \Delta t$

Kasus	Jumlah Pelanggan pada Waktu (t)	Jumlah Kedatangan pada Waktu (Δt)	Jumlah Kepergian pada Waktu (Δt)	Jumlah Pelanggan pada Waktu (t+ Δt)
1	n	0	0	n
2	n+1	0	1	n
3	n-1	1	0	n
4	n	1	1	n

Menurut asumsi (vi), kedatangan dan kepergian merupakan kejadian – kejadian yang saling bebas, sehingga peluang dari masing – masing kejadian tersebut adalah sebagai berikut:

1. Probabilitas kasus 1 = $P_n(t)(1 - \lambda_n \Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu_n \Delta t + o(\Delta t))$
2. Probabilitas kasus 2 = $P_{n+1}(t)(1 - \lambda_{n+1} \Delta t + o(\Delta t))(\mu_{n+1} \Delta t + o(\Delta t))$
3. Probabilitas kasus 3 = $P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1} \Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu_{n-1} \Delta t + o(\Delta t))$
 $= P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1} \Delta t + o(\Delta t))$
4. Probabilitas kasus 4 adalah $o(\Delta t)$, sesuai dengan asumsi v

Karena kasus – kasus tersebut saling asing, maka probabilitas terdapat n pelanggan dalam sistem ($n \geq 1$) pada saat ($t + \Delta t$) dinyatakan dengan:

$$P_n(t + \Delta t) = P(\text{kasus 1 atau kasus 2 atau kasus 3 atau kasus 4})$$

$$P_n(t + \Delta t) = \text{probabilitas kasus 1} + \text{probabilitas kasus 2} + \text{probabilitas kasus 3} + \text{probabilitas kasus 4}$$

$$\begin{aligned}
 P_n(t + \Delta t) &= P_n(t)(1 - \lambda_n \Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu_n \Delta t + o(\Delta t)) \\
 &\quad + P_{n+1}(t)(1 - \lambda_{n+1} \Delta t + o(\Delta t))(\mu_{n+1} \Delta t + o(\Delta t)) \\
 &\quad + P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1} \Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
P_n(t + \Delta t) &= P_n(t) - P_n(t)(\lambda_n \Delta t) - P_n(t)(\mu_n \Delta t) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1} \Delta t) \\
&\quad + P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1} \Delta t) + o(\Delta t)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

pada Persamaan (2.11) dikurangkan $P_n(t)$ pada ruas kanan dan kiri kemudian dibagi dengan Δt maka didapatkan:

$$\begin{aligned}
\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} &= P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}) - P_n(t)(\lambda_n) - P_n(t)(\mu_n) + \\
&\quad \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

karena Δt sangat kecil dan mendekati nol, maka berdasarkan Definisi 2.11 didapatkan:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}) - \right. \\
&\quad \left. P_n(t)(\lambda_n) - P_n(t)(\mu_n) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dP_n(t)}{dt} &= P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}) - P_n(t)(\lambda_n) - P_n(t)(\mu_n) \\
&= -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + (\mu_{n+1})P_{n+1}(t) + (\lambda_{n-1})P_{n-1}(t)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Persamaan (2.13) merupakan dasar perhitungan probabilitas terdapat n pelanggan pada proses kedatangan murni dan kepergian murni. Persamaan (2.13) disebut sebagai Persamaan Kolmogorov untuk $n \geq 1$.

Selanjutnya akan dibahas secara khusus probabilitas terdapat n pelanggan untuk nilai $n = 0$. Pada saat jumlah pelanggan dalam sistem adalah nol, maka probabilitas terjadinya nol kepergian pelanggan pada kasus 1 adalah satu.

Probabilitas terdapat n pelanggan, dengan $n = 0$ dalam waktu $(t + \Delta t)$ adalah

$$P_n(t + \Delta t) = P \text{ (Kasus 1 atau Kasus 2 atau Kasus 4)}$$

$$P_n(t + \Delta t) = \text{Probabilis Kasus 1} + \text{Probabilitas Kasus 2} + \text{Probabilitas Kasus 4}$$

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)(1 - \lambda_n \Delta t + o(\Delta t))(1) + P_{n+1}(t)(1 - \lambda_{n+1} \Delta t + o(\Delta t))(\mu_{n+1} \Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t)$$

nilai $n = 0$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} P_0(t + \Delta t) &= P_0(t)(1 - \lambda_0 \Delta t + o(\Delta t))(1) + P_1(t)(1 - \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t))(\mu_1 \Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t) \\ &= P_0(t)(1 - \lambda_0 \Delta t + o(\Delta t)) + P_1(t)(\mu_1 \Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t) \\ &= P_0(t)(\lambda_0 \Delta t) + P_1(t)(\mu_1 \Delta t) + o(\Delta t) \end{aligned}$$

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) - P_0(t)(\lambda_0 \Delta t) + P_1(t)(\mu_1 \Delta t) + o(\Delta t) \quad (2.14)$$

pada Persamaan (2.14) dikurangkan $P_0(t)$ pada ruas kanan dan ruas kiri, kemudian dibagi dengan Δt , maka diperoleh

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = P_1(t)(\mu_1) - P_0(t)(\lambda_0) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

karena Δt sangat kecil dan mendekati nol, maka berdasarkan Definisi 2.11 didapatkan:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[P_1(t)(\mu_1) - P_0(t)(\lambda_0) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right] \\ \frac{dP_0(t)}{dt} &= P_1(t)(\mu_1) - P_0(t)(\lambda_0) \quad , n = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Persamaan (2.13) dan (2.15) merupakan Persamaan Kolmogorov yang digunakan sebagai dasar untuk menentukan peluang bahwa ada n pelanggan dengan $n \geq 1$ dan $n = 0$ pada selang waktu $(t, t + \Delta t)$, yang dapat diringkas sebagai berikut

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + (\mu_{n+1})P_{n+1}(t) + P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}), \quad n \geq 1$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = P_1(t)\mu_1 - P_0(t)(\lambda_0), \quad n = 0$$

F. Distribusi Kedatangan

Distribusi kedatangan berhubungan dengan peluang terdapat n kedatangan pelanggan dalam suatu sistem antrian pada interval waktu tertentu. Kedatangan yang dimaksud dalam pembahasan ini adalah kedatangan murni, yaitu kedatangan tanpa disertai kepergian, maka laju kepergian $\mu_n = 0, \forall n \geq 0$ (Dimiyati, 1999 : 358 – 359).

Peluang terdapat n ($n \geq 0$) kedatangan pada waktu t dapat diperoleh dengan mensubstitusikan $\mu_n = 0$ dan $\lambda_n = \lambda$ ke Persamaan (2.13) dan Persamaan (2.15) sehingga diperoleh sebagai berikut

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \quad (2.16)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t), \quad n > 0 \quad (2.17)$$

Definisi 2.12 (Kreeyszig, 2003:33) Persamaan diferensial orde satu dapat dinyatakan sebagai

$$y' = ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$$

Persamaan (2.16) dapat dinyatakan sebagai Persamaan differensial linear orde satu dengan $P(x) = \lambda$ dan $Q(x) = 0$. Maka penyelesaiannya adalah

$$\begin{aligned} P_0(t) &= ce^{-\int \lambda dt} \\ &= ce^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Diasumsikan bahwa proses kedatangan murni dimulai pada saat sistem memiliki nol pelanggan, sehingga peluang terdapat nol pelanggan ($n = 0$) dalam sistem pada saat $t = 0$ adalah 1 dinotasikan dengan $P_0(0) = 1$.

Peluang ada pelanggan ($n > 0$) pada $t = 0$ adalah 0, hal ini dapat dituliskan sebagai berikut.

$$P_n(0) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n > 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

dengan demikian

$$P_0(0) = ce^{-\lambda \cdot 0} = 1$$

dan diperoleh $c = 1$

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \quad (2.19)$$

Jadi Persamaan (2.19) merupakan solusi untuk Persamaan (2.16).

Selanjutnya akan dicari solusi untuk Persamaan (2.17) sebagai berikut. Berdasarkan Definisi (2.12), Persamaan (2.17) dapat dinyatakan sebagai Persamaan differensial linear orde satu dengan $P(x) = \lambda$ dan $Q(x) = \lambda P_{n-1}(t)$. Maka penyelesaiannya adalah

$$\begin{aligned} P_n(t) &= ce^{-\int \lambda dt} + e^{-\int \lambda dt} \int \lambda e^{\int \lambda dt} P_{n-1}(t) dt \\ &= ce^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} P_{n-1}(t) dt \end{aligned} \quad (2.20)$$

untuk nilai $n = 1$ diperoleh

$$P_1(t) = ce^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} P_0(t) dt \quad (2.21)$$

Persamaan (2.19) disubsitusikan ke Persamaan (2.21) diperoleh

$$\begin{aligned} P_1(t) &= ce^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} e^{-\lambda t} dt \\ &= ce^{-\lambda t} + \lambda te^{-\lambda t} \end{aligned} \quad (2.22)$$

berdasarkan Persamaan (2.18) maka dari Persamaan (2.22) didapatkan

$$P_1(0) = ce^{-\lambda \cdot 0} + \lambda \cdot 0 \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = 0$$

sehingga diperoleh nilai $c = 0$, maka Persamaan (2.22) menjadi

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} \quad (2.23)$$

Jadi Persamaan (2.23) adalah solusi Persamaan (2.17) untuk $n = 1$

Selanjutnya dicari solusi Persamaan (2.17) untuk $n = 2$ sebagai berikut
untuk $n = 2$ Persamaan (2.20) menjadi

$$P_2(t) = c e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} P_1(t) dt \quad (2.24)$$

Persamaan (2.23) disubstitusikan ke Persamaan (2.24) didapatkan

$$\begin{aligned} P_2(t) &= c e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} \lambda t e^{-\lambda t} dt \\ &= c e^{-\lambda t} + \lambda^2 e^{-\lambda t} \int t dt \\ &= c e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t} \end{aligned} \quad (2.25)$$

berdasarkan Persamaan (2.18) maka dari Persamaan (2.25) didapatkan

$$P_2(0) = c e^{-\lambda \cdot 0} + \frac{(\lambda \cdot 0)^2}{2} e^{-\lambda \cdot 0} = 0$$

sehingga diperoleh nilai $c = 0$, maka Persamaan (2.25) menjadi

$$P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t} \quad (2.26)$$

Jadi Persamaan (2.26) adalah solusi Persamaan (2.25) untuk $n = 2$

Dari Persamaan (2.19), (2.23), dan (2.26) dapat disimpulkan bahwa
solusi umum dari Persamaan (2.16) dan Persamaan (2.17) adalah

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad (2.27)$$

Bukti bahwa Persamaan (2.27) adalah solusi umum dari Persamaan
(2.16) dan Persamaan (2.17) adalah sebagai berikut

Langkah – langkah pembuktian dengan induksi matematika

1. Persamaan (2.23) yaitu $P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$ membuktikan bahwa Persamaan (2.27) merupakan penyelesaian Persamaan (2.17) untuk $n = 1$.
2. Diasumsikan Persamaan (2.27) merupakan penyelesaian Persamaan (2.17) untuk $n = k$, maka $P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$
3. Akan dibuktikan bahwa Persamaan (2.27) merupakan penyelesaian dari Persamaan (2.26) untuk $n = k + 1$
untuk $n = k + 1$, Persamaan (2.17) menjadi

$$\frac{dP_{k+1}(t)}{dt} = \lambda P_k(t) - \lambda P_{k+1}(t) \quad (2.28)$$

asumsi 2 didistribusikan ke Persamaan (2.28) sehingga menjadi

$$\frac{dP_{k+1}(t)}{dt} = \lambda^{k+1} \frac{t^k}{k!} e^{-\lambda t} - \lambda P_{k+1}(t) \quad (2.29)$$

Persamaan (2.29) merupakan Persamaan differensial orde satu dengan

$p(x) = \lambda$ dan $Q(x) = \lambda^{k+1} \frac{t^k}{k!} e^{-\lambda t}$, sehingga penyelesaiannya adalah

$$\begin{aligned} P_{k+1}(t) &= c e^{-\int \lambda dt} + e^{-\int \lambda dt} \int \lambda^{k+1} \frac{t^k}{k!} e^{-\lambda t} e^{\int \lambda dt} dt \\ &= c e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \int \lambda^{k+1} \frac{t^k}{k!} e^{-\lambda t} e^{\lambda t} dt \\ &= c e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \lambda^{k+1} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= c e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda t} \end{aligned} \quad (2.30)$$

berdasarkan Persamaan (2.18) maka dari Persamaan (2.30) didapatkan

$$P_{k+1}(0) = c e^{-\lambda \cdot 0} + \frac{(\lambda \cdot 0)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda \cdot 0}$$

sehingga diperoleh nilai $c = 0$, maka Persamaan (2.30) menjadi

$$P_{k+1}(t) = \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda t} \quad (2.31)$$

Persamaan (2.31) merupakan penyelesaian dari Persamaan (2.17) untuk $n = k + 1$ dan memenuhi Persamaan (2.27)

Jadi, $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ merupakan solusi umum dari Persamaan (2.16)

dan Persamaan (2.17). Dengan demikian, berdasarkan Definisi (2.2) dapat disimpulkan bahwa kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson.

Teorema 2.2 (Bronson, 1966:305) Jika kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson maka waktu antar kedatangan pelanggan berdistribusi Eksponensial.

Bukti:

Berdasarkan uraian sebelumnya, diketahui bahwa kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson. $T_n (n > 0)$ adalah waktu antara $(n - 1)$ kedatangan sampai n kedatangan. Barisan $\{T_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$ merupakan barisan waktu antar kedatangan yang saling asing dan saling bebas.

Ambil T_1 yang merupakan waktu antara tidak ada pelanggan dalam sistem dan ketika ada kedatangan pertama. Akan ditunjukkan bahwa T_1 berdistribusi Eksponensial.

Ambil $t < T_1$, maka banyaknya kedatangan pada waktu t adalah nol, artinya

$$\begin{aligned} P_n(T_1 > t) &= P(\text{tidak ada kedatangan selama waktu } t) \\ &= P_0(t) \end{aligned}$$

berdasarkan Persamaan (2.19), $P_0(t) = e^{-\lambda t}$ dengan λ menyatakan laju kedatangan rata – rata, maka fungsi distribusi kumulatif dari T_1 dengan $t \geq 0$ adalah

$$\begin{aligned}
 F(t) &= P(T_1 \leq t) \\
 &= 1 - P(T_1 > t) \\
 &= 1 - P_0(t) \\
 &= 1 - e^{-\lambda t}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

berdasarkan Definisi (2.1), Persamaan (2.32) merupakan distribusi kumulatif dari distribusi Eksponensial yang secara umum ditulis

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

sehingga fungsi densitas peluang dari T_1 untuk $t \geq 0$ adalah

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} \tag{2.33}$$

Berdasarkan Definisi (2.1), T_1 merupakan peubah acak yang berdistribusi Eksponensial dengan parameter λ . Sesuai dengan asumsi bahwa barisan waktu antar kedatangan pada sistem antrian adalah saling bebas, maka pembuktian diatas juga berlaku untuk $\{T_n\}, n > 0$. Jadi terbukti bahwa waktu antar kedatangan berdistribusi Eksponensial.

G. Distribusi Kepergian

Distribusi kepergian berhubungan dengan peluang terdapat n kepergian pelanggan dalam suatu sistem antrian pada interval waktu tertentu. Kepergian yang dimaksud dalam pembahasan ini adalah kepergian murni, yaitu kepergian yang tanpa disertai kedatangan, sehingga laju kedatangan $\lambda_n = 0, \forall n \geq 0$.

Diasumsikan bahwa laju kepergian tidak tergantung pada banyaknya pelanggan yang berada dalam sistem, sehingga $\mu_n = \mu, \forall n \geq 0$. Peluang terdapat $n(n \geq 0)$ kepergian selama waktu t dapat diperoleh dengan mensubsitusikan $\lambda_n = 0$ dan $\mu_n = \mu$ ke Persamaan (2.13) dan Persamaan (2.15) sehingga diperoleh

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_{n+1}(t) \quad (2.34)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\mu P_n(t) + \mu P_{n+1}(t), \quad n > 0 \quad (2.35)$$

Akan ditunjukkan bahwa kepergian pelanggan berdistribusi Poisson. Jika jumlah pelanggan dalam sistem antrian selama t adalah $n = N$, maka $P_{n+1} = 0, n \geq N$ sehingga untuk $n \geq N$ berlaku

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\mu P_n(t) \quad (2.36)$$

Sedangkan untuk $0 < n < N$ berlaku

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\mu P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) \quad (2.37)$$

berdasarkan Definisi (2.12), Persamaan (2.16) dan Persamaan (2.37) dapat dinyatakan sebagai Persamaan differensial orde satu. Sehingga penyelesaian Persamaan (2.36) adalah

$$P_n(t) = ce^{-\mu t}, \quad n \geq N$$

Diasumsikan bahwa proses kepergian murni dimulai ($t = 0$) pada saat sistem memiliki $n = N$ pelanggan dalam sistem. Sehingga peluang terdapat N pelanggan dalam sistem pada kondisi awal ($t = 0$) dinotasikan $P_N(0)$ adalah 1. Jika $0 \leq n < N$ maka $P_N(0) = 0$. Hal ini dapat dituliskan sebagai berikut

$$P_N(0) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq n < N \\ 1 & , n = N \end{cases} \quad (2.38)$$

dengan demikian, $P_N(0) = ce^{-\mu \cdot 0} = 1$

maka diperoleh nilai $c = 1$, oleh karena itu diperoleh

$$P_n(t) = e^{-\mu t} \quad (2.39)$$

Selanjutnya akan dicari solusi untuk Persamaan (2.37) sebagai berikut,

Penyelesaian dari Persamaan (2.37) adalah

$$P_n(t) = ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int e^{\mu t} P_{n+1}(t) dt, \quad 0 < n < N \quad (2.40)$$

untuk $n = N - 1$ maka

$$P_{N-1}(t) = ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int e^{\mu t} P_N(t) dt \quad (2.41)$$

substitusi Persamaan (2.39) ke Persamaan (2.41) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} P_{N-1}(t) &= ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int e^{\mu t} e^{-\mu t} dt \\ &= ce^{-\mu t} + \mu t e^{-\mu t} \end{aligned} \quad (2.42)$$

berdasarkan Persamaan (2.38), maka

$$P_{N-1}(0) = ce^{-\mu \cdot 0} + \mu \cdot 0 \cdot e^{-\mu \cdot 0}$$

sehingga $c = 0$, maka Persamaan (2.42) menjadi

$$P_{N-1}(t) = \mu t e^{-\mu t} \quad (2.43)$$

untuk $n = N - 2$, Persamaan (2.42) menjadi

$$P_{N-2}(t) = ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int e^{\mu t} P_{N-1}(t) dt \quad (2.44)$$

Persamaan (2.43) disubstitusikan ke Persamaan (2.44) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} P_{N-2}(t) &= ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int e^{\mu t} \mu t e^{-\mu t} dt \\ &= ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int \mu t dt \end{aligned}$$

$$= ce^{-\mu t} + \frac{(\mu t)^2}{2} e^{-\mu t} \quad (2.45)$$

berdasarkan Persamaan (2.38) maka

$$P_{N-2}(0) = ce^{-\mu \cdot 0} + \frac{(\mu \cdot 0)^2}{2} e^{-\mu \cdot 0} = 0$$

sehingga diperoleh $c = 0$, maka Persamaan (2.45) menjadi

$$P_{N-2}(t) = \frac{(\mu t)^2}{2} e^{-\mu t} \quad (2.46)$$

Dari Persamaan (2.39), (2.43), dan Persamaan (2.46) dapat disimpulkan bahwa penyelesaian umum dari Persamaan (2.36) dan Persamaan (2.37) adalah

$$P_n(t) = \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t}$$

Pembuktiannya analog dengan pembuktian distribusi kedatangan yang telah dibahas pada subbab sebelumnya. Jadi kepergian pelanggan juga berdistribusi Poisson, dengan parameter μ .

Teorema 2.3 (Wagner, 1978 : 850) Jika kepergian pelanggan berdistribusi Poisson maka waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial.

Bukti :

Misal keadaan awal suatu sistem antrian sebanyak $n = N$ pelanggan. Ambil T_1 sebagai waktu pelayanan pertama, T_n , $n > 1$ menunjukkan waktu pelayanan kepada pelanggan ke n sehingga barisan $\{T_n\}$ dengan $n = 1, 2, 3, \dots$ merupakan barisan waktu pelayanan yang saling asing dan saling bebas.

Akan ditunjukkan bahwa T_1 berdistribusi Eksponensial. Ambil $t < T_1$, maka jumlah kepergian pada waktu t adalah nol, artinya

$$\begin{aligned} P_N(T_1 > t) &= P(\text{Terdapat } N \text{ pelanggan pada waktu } t) \\ &= P_N(t) \end{aligned}$$

berdasarkan Persamaan (2.39), $P_N(t) = e^{-\mu t}$ dengan μ menyatakan laju pelayanan rata – rata, maka fungsi distribusi kumulatif dari T_1 dengan $t \geq 0$ adalah

$$\begin{aligned}
 F(t) &= P(T_1 \leq t) \\
 &= 1 - P(T_1 > t) \\
 &= 1 - P_N(t) \\
 &= 1 - e^{-\mu t}
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Berdasarkan Definisi (2.1), Persamaan (2.47) merupakan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Eksponensial yang secara umum ditulis

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

sehingga fungsi densitas peluang dari T_1 untuk $t \geq 0$ adalah

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \mu e^{-\mu t} \tag{2.48}$$

Berdasarkan Definisi (2.1), T_1 merupakan variabel acak yang berdistribusi Eksponensial dengan parameter μ . Sesuai dengan asumsi bahwa barisan waktu pelayanan pada sistem antrian adalah saling bebas, maka pembuktian diatas juga berlaku untuk $\{T_n\}$, $n > 0$. Jadi terbukti bahwa waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial.

H. Proses Kedatangan dan Kepergian *Steady State*

Kondisi *steady state* yaitu keadaan sistem yang tidak tergantung pada keadaan awal maupun waktu yang telah dilalui. Jika suatu sistem antrian telah mencapai kondisi *steady state* maka peluang terdapat n pelanggan dalam

sistem pada waktu $t(P_n(t))$ tidak tergantung pada waktu (Ecker dan Kupferschmid, 1988:394).

Kondisi *steady state* terjadi ketika $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$ dan $\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P_n$ sehingga $P_n(t) = P_n$ untuk semua t , artinya P_n tidak tergantung pada waktu.

Proses kedatangan dan kepergian pada pembahasan sebelumnya menghasilkan Persamaan (2.13) dan Persamaan (2.15). Untuk memperoleh kondisi *steady state*, substitusikan $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$ dan $P_n(t) = P_n$ pada Persamaan (2.13) dan Persamaan (2.15), sehingga diperoleh Persamaan kesetimbangan sebagai berikut

$$0 = -(\lambda_n + \mu_n)P_n + (\mu_{n+1})P_{n+1} + P_{n-1}(\lambda_{n-1}) \quad n \geq 1 \quad (2.49)$$

$$0 = P_1(\mu_1) - P_0(\lambda_0), \quad n = 0 \quad (2.50)$$

atau

$$P_{n+1} = \frac{(\lambda_n + \mu_n)P_n}{\mu_{n+1}} - \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n+1}}P_{n-1}, \quad n > 0 \quad (2.51)$$

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0, \quad n = 0 \quad (2.52)$$

akan dicari penyelesaian umum dari Persamaan (2.49) dan (2.50)

untuk $n = 1$, maka Persamaan (2.51) menjadi

$$P_2 = \frac{(\lambda_1 + \mu_1)P_1}{\mu_2} - \frac{\lambda_0}{\mu_2}P_0 \quad (2.53)$$

selanjutnya Persamaan (2.52) disubstitusikan ke Persamaan (2.53), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{(\lambda_1 + \mu_1)}{\mu_2} \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} P_0 \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_0 + \mu_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} P_0 \end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0$$

untuk $n = 2$ diperoleh

$$P_3 = \frac{(\lambda_2 + \mu_2)P_2}{\mu_3} - \frac{\lambda_1}{\mu_3} P_1$$

selanjutnya akan dibuktikan bahwa penyelesaian umum dari Persamaan (2.49)

dan (2.50) adalah

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1} P_0 \\ &= P_0 \prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right), \end{aligned} \quad (2.54)$$

Bukti dengan induksi matematika:

1. Untuk $n = 1$ maka

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

dan $n = 2$ maka

$$P_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0$$

2. Diasumsikan bahwa Persamaan (2.54) berlaku untuk $n = k$ maka

$$P_k = \frac{\lambda_{k-1} \lambda_{k-2} \dots \lambda_0}{\mu_k \mu_{k-1} \dots \mu_1} P_0$$

3. Akan dibuktikan Persamaan (2.54) berlaku untuk $n = k + 1$

$$P_{k+1} = \frac{\lambda_k \lambda_{k-1} \dots \lambda_0}{\mu_{k+1} \mu_k \dots \mu_1} P_0$$

substitusikan Persamaan (2.54) ke Persamaan (2.51), dengan $n = k + 1$

diperoleh

$$\begin{aligned}
P_{k+2} &= \frac{(\lambda_{k+1} + \mu_{k+1})}{\mu_{k+2}} \frac{\lambda_k \lambda_{k-1} \dots \lambda_0}{\mu_{k+1} \mu_k \dots \mu_1} P_0 - \frac{\lambda_k}{\mu_{k+2}} \frac{\lambda_{k-1} \lambda_{k-2} \dots \lambda_0}{\mu_k \mu_{k-1} \dots \mu_1} P_0 \\
&= \frac{\lambda_{k+1} \lambda_k \lambda_{k-1} \dots \lambda_0 P_0}{\mu_{k+2} \mu_{k+1} \mu_k \dots \mu_1} + \frac{\mu_{k+1} \lambda_k \lambda_{k-1} \dots \lambda_0 P_0}{\mu_{k+2} \mu_{k+1} \mu_k \dots \mu_1} - \frac{\lambda_k}{\mu_{k+2}} \frac{\lambda_{k-1} \lambda_{k-2} \dots \lambda_0}{\mu_k \mu_{k-1} \dots \mu_1} P_0 \\
&= \frac{\lambda_{k+1} \lambda_k \lambda_{k-1} \dots \lambda_0}{\mu_{k+2} \mu_{k+1} \mu_k \dots \mu_1} P_0 \quad (2.55)
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa Persamaan (2.54) berlaku untuk $n = k + 1$.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa Persamaan (2.54) menyatakan peluang terdapat n pelanggan dalam keadaan *steady state* (P_n), $n > 0$.

I. Persamaan Kolmogorov ($M/M/1$)

Pada subbab sebelumnya telah dibahas masalah proses kelahiran dan kematian. Dengan mensubstitusikan $\lambda_n = \lambda$ dan $\mu_n = \mu$ ke Persamaan (2.13) dan Persamaan (2.15), akan menghasilkan Persamaan Kolmogorov pada sistem antrian ($M/M/1$) sebagai berikut.

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)P_n(t) + (\mu)P_{n+1}(t) + (\lambda)P_{n-1}(t) \quad (2.56)$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = (\mu)P_1(t) - (\lambda)P_0(t) \quad (2.57)$$

J. Ukuran Keefektifan Sistem Antrian

Menurut Taha (1997, 189:190), ukuran keefektifan suatu sistem antrian dapat ditentukan setelah probabilitas *steady state* diketahui. Ukuran – ukuran keefektifan suatu sistem tersebut antara lain:

1. Nilai harapan banyaknya pelanggan dalam sistem antrian (L_s)
2. Nilai harapan banyaknya pelanggan dalam antrian (L_q)
3. Nilai harapan waktu tunggu dalam sistem antrian (W_s)
4. Nilai harapan waktu tunggu dalam antrian (W_q)

Sebelum membahas lebih lanjut, akan diuraikan lima Definisi yang mendukung pembahasan ukuran keefektifan suatu sistem.

Definisi 2.13 (Taha, 1993:596) Jumlah pelanggan dalam sistem adalah jumlah pelanggan dalam antrian ditambah jumlah pelanggan yang sedang mendapat layanan.

Definisi 2.14 (Taha, 1993:596) Laju kedatangan efektif merupakan laju kedatangan rata – rata dalam waktu yang panjang. Laju kedatangan efektif dinotasikan λ_{eff} dan dinyatakan dengan

$$\lambda_{eff} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n \quad (2.58)$$

λ_n merupakan laju kedatangan jika ada n pelanggan dalam sistem, jika laju kedatangan konstan untuk semua n , maka cukup ditulis dengan λ .

(Dimyati, 1993 : 353)

Definisi 2.15 (Dimyati, 2003:373) Laju pelayanan rata – rata untuk seluruh pelayan dalam sistem antrian adalah laju pelayanan rata – rata dimana pelanggan yang sudah mendapat pelayanan meninggalkan sistem antrian. Laju pelayanan rata – rata untuk seluruh pelayan dinyatakan dengan μ .

Nilai harapan banyaknya pelanggan dalam sistem antrian (L_s) merupakan jumlah dari perkalian keseluruhan pelanggan dalam sistem dengan peluang terdapat n pelanggan (Ecker, 1988:390), dinyatakan dengan

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n \quad (2.59)$$

Nilai harapan banyaknya pelanggan dalam antrian (L_q) merupakan jumlah dari perkalian pelanggan dalam antrian dengan peluang terdapat n pelanggan (Hiller & Lieberman, 2011:852), dinyatakan dengan

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty} (n - c)P_n \quad (2.60)$$

Apabila W_s merupakan waktu menunggu pelanggan dalam sistem antrian dan W_q merupakan waktu menunggu pelanggan dalam antrian, maka hubungan W_s , W_q , L_s , L_q dinyatakan dengan

$$L_s = \lambda W_s \quad (2.61)$$

$$L_q = \lambda W_q \quad (2.62)$$

Persamaan (2.61) dan (2.62) dikenal dengan formula *Little Law*, diperkenalkan pertama kali oleh John D.C Little pada tahun 1961 (Gross dan Harris, 1998:11).

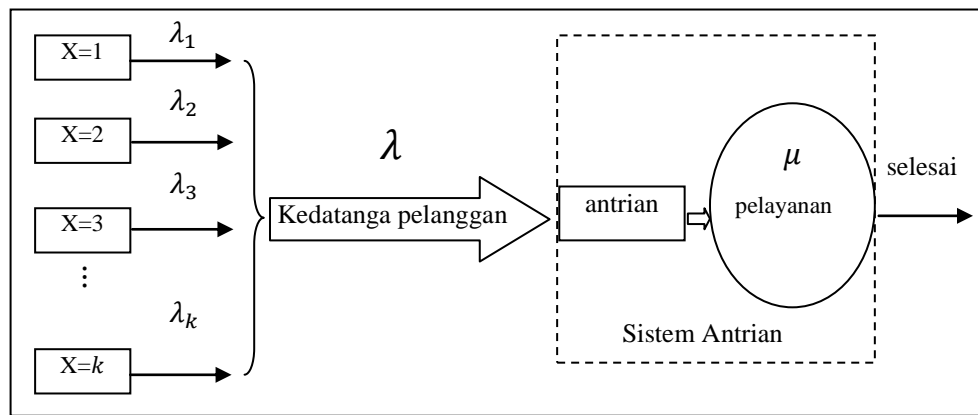
K. Antrian Kedatangan Berkelompok (*Batch Arrival*) Satu Server

1. Pola Kedatangan Berkelompok (*Batch Arrival*)

Pada sistem antrian ini pelanggan datang secara berkelompok dengan ukuran kelompok tersebut adalah X , dimana secara umum X adalah variabel acak positif. Pada pembahasan ini, pelanggan datang berdasarkan distribusi Poisson dengan laju kedatangan λ , dan terdapat sebuah *server* yang memiliki waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial dengan laju pelayanan μ , dimana pelanggan dilayani secara individu dengan disiplin antrian *FIFO* (*First In First Out*). Desain pelayanan pada sistem antrian ini adalah *Single*

Channel single Phase. Notasi untuk model antrian satu *server* dengan pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*) tersebut adalah $M^X/M/1$.

Contoh situasi pada sistem antrian dimana pelanggan datang secara berkelompok yaitu kedatangan pelanggan secara berkelompok di sebuah restoran, dan surat – surat yang datang di kantor pos. ilustrasi sistem antrian dengan pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*) terlihat dalam gambar 2.7 berikut ini.



Gambar 2.7 Sistem Antrian $M^X/M/1$

Jika X adalah variabel acak yang menyatakan ukuran kelompok dengan fungsi peluang $a_k = P(X = k)$ dengan $k \geq 1$ maka berdasarkan Definisi (2.5) *probability generating function (PGF)* dari X adalah

$$A(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, |z| \leq 1 \quad (2.63)$$

turunan pertama dari $A(z)$ adalah

$$A'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$$

maka

$$A'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k, \quad (2.64)$$

berdasarkan Definisi (2.3), Persamaan (2.64) merupakan nilai harapan dari X dinyatakan dengan

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k = A'(1) \quad (2.65)$$

Dengan demikian nilai harapan ukuran kelompok yang masuk ke dalam sistem antrian dapat diperoleh dengan mencari $A'(1)$. Sehingga nilai harapan ukuran kelompok yang masuk ke dalam sistem antrian adalah

$$E(X) = A'(1) = \bar{a} \quad (2.66)$$

2. Proses Kedatangan dan Kepergian Pada Sistem Antrian $M^X/M/1$

Pada sistem antrian dengan pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*), ukuran kelompok yang masuk ke dalam suatu sistem antrian merupakan variabel acak positif X , dengan fungsi peluang kedatangan suatu kelompok berukuran k adalah

$$P(X = k) a_k \text{ dengan } k \geq 1 \quad (2.67)$$

jika laju kedatangan suatu kelompok yang terdiri dari k pelanggan dinyatakan dengan λ_k maka

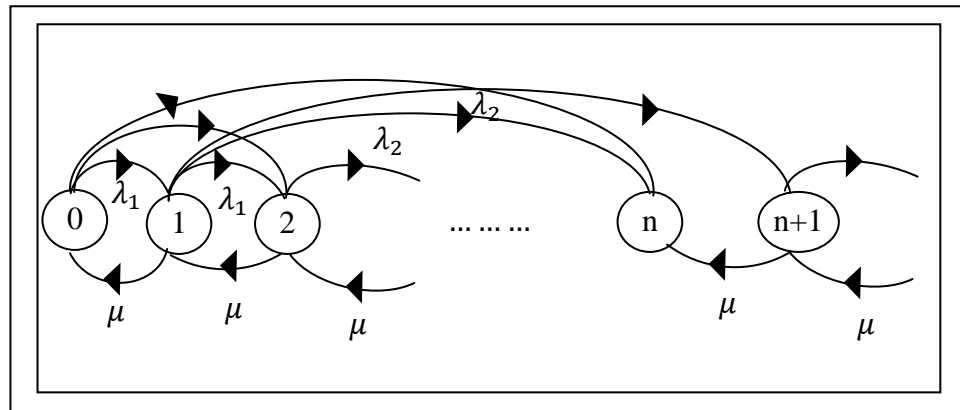
$$a_k = \frac{\lambda_k}{\lambda} \quad (2.68)$$

dengan λ adalah $\sum_k \lambda_k$.

karena proses kedatangan pada sistem antrian pola kedatangan berkelompok mengikuti distribusi Poisson dengan banyaknya kedatangan tiap satuan waktu adalah λ dan setiap kedatangan tersebut berukuran \bar{a} , maka

banyaknya kedatangan tiap satuan waktu pada sistem antrian $M^X/M/1$ ini adalah $\lambda \bar{a}$.

Laju transisi untuk sistem antrian $M^X/M/1$ dapat dilihat dalam gambar 2.8 berikut



Gambar 2.8 Diagram Laju Transisi untuk Sistem Antrian $M^X/M/1$ (Hadianti, 2006:176)

Berdasarkan Gambar 2.8, jika terdapat $n (n > 0)$ pelanggan kejadian – kejadian saling asing yang mungkin terjadi dengan pola kedatangan berkelompok yang berukuran $k (1 \leq k \leq n)$ dapat ditunjukkan pada tabel 2.3 sebagai berikut

Tabel 2.3 Kemungkinan Terdapat n Pelanggan dalam Sistem Antrian dengan Pola Kedatangan Berkelompok Pada $t + \Delta t$

Kasus	jumlah pelanggan pada waktu (t)	jumlah kedatangan pada waktu (Δt)	jumlah kepergian pada waktu (Δt)	Jumlah pelanggan pada waktu ($t + \Delta t$)
1	n	0	0	n
2	n+1	0	1	n
3	n-k	k	0	n
4	n	1	1	n

Jika terdapat n pelanggan dengan $n = 0$ maka kejadian – kejadian saling asing yang mungkin terjadi dapat dilihat pada tabel 2.4 sebagai berikut

Tabel 2.4 Kemungkinan Terdapat n Pelanggan dalam Sistem Antrian dengan Pola Kedatangan Berkelompok Pada $t + \Delta t$

Kasus	jumlah pelanggan pada waktu (t)	jumlah kedatangan pada waktu (Δt)	jumlah kepergian pada waktu (Δt)	Jumlah pelanggan pada waktu ($t + \Delta t$)
1	n	0	0	n
2	$n+1$	0	1	n
4	n	1	1	n

Pada model antrian dengan pola kedatangan berkelompok, probabilitas sebuah kedatangan yang terdiri dari k pelanggan terjadi antara t dan $(t + \Delta t)$ adalah $\lambda a_k \Delta t + o(\Delta t)$.

Probabilitas kasus 3 = probabilitas kedatangan berukuran 1 atau 2 atau 3 atau 4 dan seterusnya sampai n .

$$\begin{aligned}
 \text{Probabilitas kasus 3} &= P_{n-1}(t)(\lambda a_1 \Delta t + o(\Delta t)) + P_{n-2}(t)(\lambda a_2 \Delta t + o(\Delta t)) \\
 &\quad + P_{n-3}(t)(\lambda a_3 \Delta t + o(\Delta t)) + \dots + P_0(t)(\lambda a_n \Delta t + o(\Delta t)) \\
 &= \sum_{k=1}^n P_{n-k}(t) P_{n-1}(t) \lambda a_k \Delta t + o(\Delta t) \quad (2.69)
 \end{aligned}$$

Karena model antrian $M^X/M/1$ merupakan variasi dari model antrian $M/M/1$ maka proses kedatangan dan kepergian pada sistem antrian $M^X/M/1$ diperoleh berdasarkan proses kedatangan dan kepergian pada sistem antrian $M/M/1$. Pada proses kedatangan dan kepergian sistem antrian $M/M/1$ menghasilkan Persamaan Kolmogorov yaitu Persamaan

(2.56) dan (2.57). Sehingga proses kedatangan dan kepergian pada sistem antrian $M^X/M/1$ diperoleh berdasarkan Persamaan (2.56) dan (2.57) dengan probabilitas kasus ketiga sesuai dengan Persamaan (2.69), maka menghasilkan Persamaan Kolmogorov sebagai berikut.

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)P_n(t) + (\mu)P_{n+1}(t) + \sum_{k=1}^n \lambda a_k P_{n-k}(t), n \geq 1 \quad (2.70)$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = P_1(t)(\mu) - P_0(t)(\lambda), n = 0 \quad (2.71)$$

3. Solusi *Steady State* Model Antrian $M^X/M/1$

Kondisi *steady state* yaitu keadaan sistem yang tidak tergantung pada keadaan awal maupun waktu yang telah dilalui. Jika suatu sistem antrian telah mencapai kondisi *steady state* maka peluang terdapat n pelanggan dalam sistem pada waktu t , yang dinotasikan dengan $(P_n(t))$ tidak tergantung pada waktu.

Kondisi *steady state* terjadi ketika $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$ dan $\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P_n$, sehingga $P_n(t) = P_n$, untuk semua t , artinya P_n tidak tergantung pada waktu. Kondisi *steady state* pada sistem antrian $M^X/M/1$ diperoleh dengan mensubstitusikan $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$, dan $P_n(t) = P_n$ ke Persamaan (2.70) dan Persamaan (2.71) sehingga didapatkan

$$0 = P_1\mu - P_0\lambda, n = 0 \quad (2.72)$$

$$0 = -(\lambda + \mu)P_n + (\mu)P_{n+1} + \sum_{k=1}^n \lambda a_k P_{n-k}, n \geq 1 \quad (2.73)$$

Persamaan (2.72) dan (2.73) tidak dapat diselesaikan menggunakan metode rekursif seperti pada model antrian $M/M/1$. Untuk menentukan

solusi *steady state* pada model antrian $M^X/M/1$, langkah pertama adalah menentukan PGF dari banyak pelanggan dalam sistem.

Jika N adalah variabel diskrit yang menyatakan banyaknya pelanggan dalam sistem, dengan probabilitas P_n maka berdasarkan Definisi (2.3) PGF dari N adalah

$$P(z) = E[z^N] = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n, |z| \leq 1 \quad (2.74)$$

Jika X menyatakan ukuran kelompok yang masuk ke dalam sistem antrian dan N menyatakan banyaknya pelanggan dalam sistem, maka dari Persamaan (2.63) dan Persamaan (2.74) PGF dari X dan N masing – masing adalah

$$A(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, \quad P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n, \quad |z| \leq 1$$

penyelesaian Persamaan (2.72) dan (2.73) dengan mencari PGF dari N adalah sebagai berikut

Persamaan (2.72) dan (2.73) dikalikan dengan z^n , maka didapatkan

$$0 = P_1 \mu z^n - P_0 \lambda z^n, \quad n = 0 \quad (2.75)$$

$$0 = -(\lambda + \mu) P_n z^n + (\mu) P_{n+1} z^n + \lambda \sum_{k=1}^n a_k P_{n-k} z^n, \quad n \geq 1 \quad (2.76)$$

kemudian Persamaan (2.75) dan Persamaan (2.76) dapat diuraikan sebagai berikut.

untuk $n = 0$ maka Persamaan (2.75) menjadi $0 = P_1 \mu - P_0 \lambda$, nilainya sama dengan Persamaan (2.72).

dari Persamaan (2.76) dapat diuraikan sebagai berikut.

untuk $n = 1$ didapatkan $0 = -(\lambda + \mu)P_1z + (\mu)P_2z + \lambda \sum_{k=1}^n a_k P_{1-k}z$

untuk $n = 2$ didapatkan $0 = -(\lambda + \mu)P_2z^2 + (\mu)P_3z^2 + \lambda \sum_{k=1}^n a_k P_{2-k}z^2$

untuk $n = 3$ didapatkan $0 = -(\lambda + \mu)P_3z^3 + (\mu)P_4z^3 + \lambda \sum_{k=1}^n a_k P_{3-k}z^3$

\vdots

untuk $n - 1$ didapatkan $0 = -(\lambda + \mu)P_{n-1}z^{n-1} + (\mu)P_nz^{n-1} +$

$$\lambda \sum_{k=1}^n a_k P_{(n-1)-k}z^{n-1}$$

untuk n didapatkan $0 = -(\lambda + \mu)P_nz^n + (\mu)P_{n+1}z^n + \lambda \sum_{k=1}^n a_k P_{n-k}z^n$

\vdots

dan seterusnya.

Langkah penyelesaian berikutnya yaitu Persamaan – Persamaan yang telah didapatkan diatas dari penguraian Persamaan (2.75) dan Persamaan (2.76) dijumlahkan dari $n = 0$ sampai ∞ .

Untuk jumlahan dari $n = 1$ sampai ∞ diperoleh

$$-(\lambda + \mu) \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1} z^n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n-k} a_k z^n = 0 \quad (2.77)$$

Persamaan (2.77) ditambah dengan Persamaan (2.72) didapatkan

$$\begin{aligned} (P_1\mu - P_0\lambda) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n - \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1} z^n + \\ \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n-k} a_k z^n = 0 \end{aligned} \quad (2.78)$$

dengan

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n-k} a_k z^n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n-k} z^{n-k} a_k z^k$$

kemudian dapat diuraikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} (P_{n-1}z^{n-1}a_1z^1 + P_{n-2}z^{n-2}a_2z^2 + P_{n-3}z^{n-3}a_3z^3 + P_{n-4}z^{n-4}a_4z^4 \\
&\quad + P_{n-5}z^{n-5}a_5z^5 + \dots) \\
&= (P_0z^0a_1z^1 + P_1z^1a_1z^1 + P_0z^0a_2z^2 + P_2z^2a_1z^1 + P_1z^1a_2z^2 \\
&\quad + P_0z^0a_3z^3 + P_3z^3a_1z^1 + P_2z^2a_2z^2 + P_1z^1a_3z^3 \\
&\quad + P_0z^0a_4z^4 + \dots) \\
&= P_0z^0(a_1z^1 + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + \dots) + P_1z^1(a_1z^1 + a_2z^2 + a_3z^3 \\
&\quad + a_4z^4 + \dots) + P_2z^2(a_1z^1 + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + \dots) \\
&\quad + P_3z^3(a_1z^1 + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + \dots) + \dots \\
&= (a_1z^1 + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + \dots)(P_0z^0 + P_1z^1 + P_2z^2 + P_3z^3 \\
&\quad + P_4z^4) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_kz^k \sum_{n=k}^{\infty} P_{n-k}z^{n-k} \tag{2.79}
\end{aligned}$$

berdasarkan Persamaan (2.63) dan Persamaan (2.74), maka persamaan (2.79)

dapat dinyatakan dengan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_kz^k \sum_{n=k}^{\infty} P_{n-k}z^{n-k} = A(z)P(z) \tag{2.80}$$

kemudian substitusikan Persamaan (2.80) ke Persamaan (2.78), sehingga

diperoleh

$$\begin{aligned}
&(P_1\mu - P_0\lambda) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} P_nz^n - \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_nz^n \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1}z^n + \lambda A(z)P(z) = 0 \\
&(P_1\mu - P_0\lambda) - \lambda(P(z) - P_0) - \mu(P(z) - P_0) + \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1}z^n + \lambda A(z)P(z) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\lambda + \mu)P(z) + \mu P_0 + \mu P_1 + \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1}z^n + \lambda A(z)P(z) = 0 \\
& -(\lambda + \mu)P(z) + \mu P_0 + \mu \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}z^n + \lambda A(z)P(z) = 0 \quad (2.81)
\end{aligned}$$

misal $n + 1 = m$, maka substitusi $n = m - 1$ ke Persamaan (2.81), sehingga diperoleh

$$-(\lambda + \mu)P(z) + \mu P_0 + \frac{\mu}{z} \sum_{m=1}^{\infty} P_m z^m + \lambda A(z)P(z) = 0 \quad (2.82)$$

kedua ruas pada Persamaan (2.82) dikalikan dengan z , menghasilkan

$$\begin{aligned}
& -z(\lambda + \mu)P(z) + z\mu P_0 + \mu[P(z) - P_0] + \lambda A(z)P(z) = 0 \\
& (-z(\lambda + \mu) + z\lambda A(z) + \mu)P(z) + \mu P_0(z - 1) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(z) &= \frac{\mu P_0(z - 1)}{(z(\lambda + \mu) - z\lambda A(z) - \mu)} \\
&= \frac{\mu P_0(z - 1)}{z\lambda(1 - A(z)) - \mu(1 - z)} \\
&= \frac{\mu P_0(1 - z)}{\mu(1 - z) - z\lambda(1 - A(z))} \quad (2.83)
\end{aligned}$$

Jadi Persamaan (2.83) adalah PGF dari N , pada model antrian $M^X/M/1$.

Pada Persamaan (2.83) akan dicari nilai P_0 yang merupakan peluang terdapat nol pelanggan dalam sistem sebagai berikut

dari Persamaan (2.74) diketahui PGF dari N adalah

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n$$

untuk $z = 1$, diperoleh

$$P(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n 1^n$$

berdasarkan Definisi (2.8) jumlah total suatu peluang adalah 1, sehingga diperoleh

$$P(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1, \quad (2.84)$$

dari Persamaan (2.83) diketahui PGF dari N adalah

$$P(z) = \frac{\mu P_0(1-z)}{\mu(1-z) - z\lambda(1-A(z))}$$

substitusi $z = 1$ ke Persamaan (2.83), maka diperoleh

$$P(1) = \frac{\mu P_0(1-1)}{\mu(1-1) - 1\lambda(1-A(1))}$$

Persamaan tersebut berbentuk $\frac{0}{0}$ maka berdasarkan teorema 2.1

penyelesaiannya menggunakan aturan l'Hopital sebagai berikut

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} P(z) &= \frac{\lim_{z \rightarrow 1} \mu P_0(1-z)}{\lim_{z \rightarrow 1} [\mu(1-z) - z\lambda(1-A(z))]} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-\mu P_0}{-\mu - \lambda + \lambda A(z) + \lambda z A'(z)} \\ &= \frac{\mu P_0}{\mu - \lambda A'(1)} \end{aligned} \quad (2.85)$$

dari Persamaan (2.84) dan Persamaan (2.85) diperoleh

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\mu P_0}{\mu - \lambda A'(1)} \\ P_0 &= 1 - \frac{\lambda A'(1)}{\mu} \end{aligned} \quad (2.86)$$

substitusi Persamaan (2.66) ke Persamaan (2.86) diperoleh

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda E(X)}{\mu}$$

jadi

$$P_0 = 1 - \rho \quad (2.87)$$

dengan

$$\rho = \frac{\lambda E(X)}{\mu}$$

substitusi Persamaan (2.87) ke Persamaan (2.83) maka PGF dari N dapat dinyatakan dengan

$$P(z) = \frac{\mu(1 - \rho)(1 - z)}{\mu(1 - z) - z\lambda(1 - A(z))} \quad (2.88)$$

Probabilitas terdapat n pelanggan dalam sistem pada model antrian $M^X/M/1$ merupakan koefisien dari z^n . Dari Persamaan (2.88) dapat ditentukan nilai harapan banyaknya pelanggan dalam sistem pada model antrian $M^X/M/1$.

Pada sistem antrian diasumsikan *server* selalu tersedia untuk melayani pelanggan. Namun, pada kenyataannya banyak faktor yang menyebabkan *server* tidak dapat melayani pelanggan pada waktu pelayanan berlangsung. Hal tersebut dianggap sebagai *vacations* yang dilakukan *server*.

L. Server Vacations

Vacation dalam konsep antrian adalah periode ketika *server* tidak tersedia untuk memberikan pelayanan. Kedatangan pada waktu *vacation* dimulai hanya akan dilayani setelah *server* kembali dari *vacation*. Banyak situasi yang menyebabkan *server* melakukan *vacation*, antara lain yaitu gangguan mesin, maintenance sistem, dan pergantian *server* (dimana *server* melayani lebih dari satu antrian dalam sistem atau melayani lebih dari satu sistem). Doshi (1986) membahas perbedaan tipe dari model *vacation* yaitu :

1. Model *single vacation*

Model ini adalah tepat satu *vacation* setelah berakhir dari setiap periode sibuk. Jika *server* kembali dari *vacation*, *server* tidak pergi untuk *vacation* yang lain sekalipun sistem masih kosong pada waktu itu. Tipe *vacation* ini mungkin timbul dari panggilan seperti maintenance dalam sistem produksi, maintenance bisa menjadi pertimbangan *vacation*.

2. Model *multiple vacation*

Tipe dari *vacation* ini mungkin timbul dari panggilan seperti *maintenance* komputer dan komunikasi sistem dimana pengolah dalam komputer dan komunikasi sistem melakukan percobaan sekali dan *maintenance* tambahan dilakukan dengan fungsi pemilihan yang utama dari mereka (proses panggilan telepon, menerima dan mengirim data, dan lain sebagainya). *Maintenance* pekerja dibagi menjadi *segment* pendek. Sewaktu – waktu pelanggan tidak datang, pengolah melakukan *segment* dari *maintenance* pekerja. Ketika sistem kosong, *server* mengambil *vacation* (pekerja dalam *segment maintenance*). Saat kembali dari *vacation*, *server* mulai melayani hanya jika terdapat K atau lebih pelanggan yang menunggu dalam antrian, jika jumlah yang menunggu kurang dari K , maka *server* pergi untuk *vacation* yang lain (*segment maintenance*).

3. Model pelayanan *vacation* terbatas

Pada model ini *server* mengambil *vacation* saat sistem kosong atau setelah melayani m pelanggan, atau setelah waktu T . Dengan begitu *server* menetapkan pelayanan dalam sistem sesuai dengan tipe *vacation*.

Dalam surveinya Doshi (1986), menyebutkan beberapa model pelayanan sebagai berikut:

- *Gated service*, dalam kasus ini, setelah *server* kembali dari *vacation*, *server* menetapkan pintu terakhir pelanggan menunggu. Ketika memulai untuk melayani hanya pelanggan yang tak lebih dari pintu, mendasarkan beberapa peraturan dari banyaknya atau panjangnya antrian pelanggan yang harus dilayani.
- *Exhaustive service*, dalam kasus ini, *server* melayani pelanggan sampai sistem kosong, kemudian pergi untuk *vacation*.
- *Limited service*, dalam kasus ini, menyediakan K tempat dalam jumlah maksimum dari pelanggan bisa dilayani sebelum *server* pergi *vacation*. *Server* pergi untuk *vacation* ketika : (i) sistem kosong, atau (ii) ketika K pelanggan telah dilayani.

BAB III PEMBAHASAN

Dalam skripsi ini akan dibahas tentang model antrian satu *server* pada pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*) dengan adanya *vacation*. Pada pembahasan awal dijelaskan tentang pola dari sistem tersebut. Pembahasan selanjutnya menjelaskan tentang penurunan formula untuk mendapatkan ukuran keefektifan sistem, yaitu dilakukan dengan pendekatan *Quasi Birth-Death Process* dan *Probability Generating function* (PGF). Ukuran keefektifan tersebut adalah ekspektasi rata – rata banyak pelanggan dalam sistem (L), ekspektasi rata – rata banyak pelanggan dalam antrian ($L_q^{(v)}$), ekspektasi rata – rata waktu tunggu pelanggan dalam sistem (W), dan ekspektasi rata – rata waktu tunggu pelanggan dalam antrian ($W_q^{(v)}$).

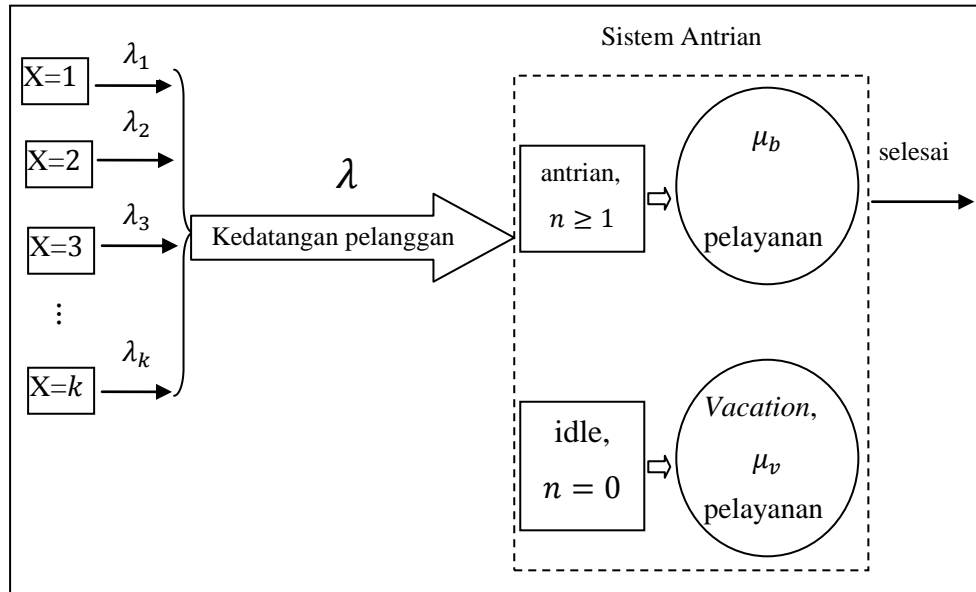
A. Sistem Antrian Kedatangan Berkelompok (*Batch Arrival*) dengan *Working Vacation* Satu Server

Pada sistem antrian *server* selalu tersedia untuk melayani pelanggan. Namun, pada beberapa kasus antrian banyak faktor yang menyebabkan pelayanan tertunda beberapa saat, sehingga *server* tidak dapat melayani seketika pada saat pelanggan datang. *Server* yang tidak tersedia pada waktu pelayanan berlangsung dalam sistem antrian diasumsikan sedang melakukan *vacation*. *Vacation* dapat dianggap sebagai waktu istirahat *server*, waktu bagi *server* ketika melakukan tugas sekunder, atau gangguan teknis pada saat *server* melakukan pelayanan. Pada skripsi ini hanya akan dibahas mengenai *vacation* yang dilakukan *server* ketika tidak ada pelanggan dalam sistem. Ketika

pelanggan masuk dalam sistem saat *server* melakukan *vacation*, pelanggan tidak dapat langsung dilayani oleh *server*. Sehingga terjadi penundaan pelayanan yang menyebabkan waktu tunggu pelanggan dalam sistem bertambah.

Sebagai contoh dari sistem tersebut adalah pada jasa percetakan yang melayani permintaan cetak foto dan selebaran berbagai undangan. Pada saat tidak ada pelanggan yang datang atau tidak ada pelanggan yang mengantri, *server* dapat melakukan percetakan foto yang dipesan oleh pelanggan sebelumnya atau mencetak pesanan undangan milik pelanggan lain. Waktu ketika *server* melakukan percetakan pesanan sebelumnya dianggap sebagai *vacation*. Ketika pelanggan masuk dalam sistem saat *server* melakukan *vacation*, maka pelanggan tidak dapat langsung dilayani oleh *server*. Oleh karena itu, *vacation* menyebabkan terjadinya waktu penundaan pelayanan, walaupun waktu penundaan tersebut hanya sesaat.

Pada pembahasan ini, pelanggan datang ke dalam sistem antrian secara berkelompok. Pelayanan pelanggan dalam sistem dilakukan secara individu oleh satu *server*. Ilustrasi sistem antrian dengan *working vacation* pada pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*) satu *server*, terlihat dalam Gambar 3.9 berikut ini



Gambar 3.9 Antrian $M^X/M/1$ (WV)

Pada sistem antrian ini pelanggan datang secara berkelompok dengan ukuran kelompok tersebut adalah X , dengan X adalah variabel acak positif. Laju kedatangan pelanggan ke dalam sistem berdasarkan distribusi Poisson dengan parameter λ . Dalam sistem antrian ini, terdapat sebuah *server* yang memiliki laju pelayanan berdistribusi Eksponensial dengan parameter μ_b . Jika tidak ada pelanggan dalam sistem selama pelayanan berlangsung, maka *server* memulai *vacation* dan waktu *vacation* mengikuti distribusi Eksponensial dengan parameter θ . Selama waktu *vacation*, laju pelayanan adalah μ_v yang berarti pelayanan saat *server* melakukan *vacation*. Diasumsikan bahwa laju kedatangan, laju pelayanan, dan waktu *vacation* ketiganya saling bebas.

Disiplin pelayanan pada pembahasan ini mengikuti aturan *FCFS* (*First Come First Served*) yaitu suatu peraturan dimana pelanggan yang akan dilayani ialah pelanggan yang datang terlebih dahulu. Pelanggan yang datang

dilayani dengan satu *server* dan ketika pelayanan tersebut berakhir pelanggan dapat langsung keluar dari sistem antrian, sehingga sistem antrian ini mengikuti desain pelayanan *Single Channel Single Phase*. Notasi untuk model antrian pada pembahasan ini adalah $M^X/M/1$ (WV). Sesuai notasi Kendall Lee, M menyatakan kedatangan dan kepergian berdistribusi Poisson, X menyatakan variabel acak rata – rata ukuran kelompok yang masuk ke dalam sistem, dan 1 menyatakan banyaknya *server* dalam sistem antrian, dan (WV) menyatakan *vacation queueing* model.

B. Quasi Birth – Death (QBD) Process

QBD *process* merupakan generalisasi dari *Birth-Death Process* dari suatu *state space* berdimensi satu menjadi *state space* berdimensi lebih dari satu. QBD *process* dengan *state space* $S = \{(k, j) | k \geq 0, j = 0, 1, 2, \dots, m\}$ dimana k merupakan level proses, j merupakan fase proses, dan m suatu bilangan bulat berhingga atau tak berhingga. Perpindahan level dari proses tersebut hanya diperkenankan pada *state* terdekat. Suatu *state* $(k, j) \in S$ dapat beralih ke *state* (k, j) , $(k - 1, j)$, $(k + 1, j)$, tetapi tidak dapat beralih ke *state* yang berbentuk $(k \pm n, j)$ dimana $n \geq 2$.

Pada pembahasan ini pelanggan datang secara berkelompok, dengan banyaknya *server* satu. Ketika *server* selesai melayani pelanggan dan tidak ada pelanggan dalam antrian, maka *server* memulai *vacation*. Diasumsikan bahwa laju kedatangan pelanggan λ , laju pelayanan μ_b , dan waktu *vacation* θ saling bebas. Diberikan $L(t)$ adalah banyaknya pelanggan dalam sistem pada waktu t ,

dan $J(t)$ adalah banyak *server* yang bekerja atau tidak melakukan *vacation* pada waktu t

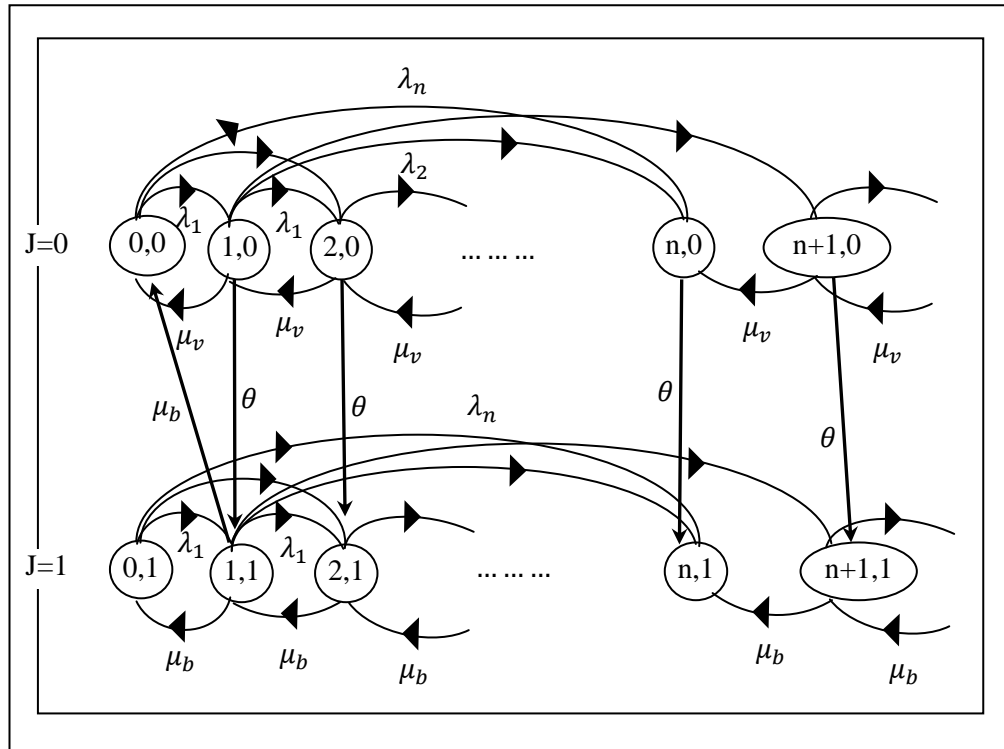
$$J(t) = \begin{cases} 0, & \text{sistem pada periode } working \text{ vacation pada waktu ke } t \\ 1, & \text{sistem pada periode pelayanan sibuk pada waktu ke } t \end{cases}$$

sehingga $\{(L(t), J(t)), t \geq 0\}$ adalah sebuah *Quasi Birth Death (QBD)* dengan *state space*

$$\Omega = \{(0,0)\} \cup \{(k,j) | k \geq 1, j = 0,1\}$$

dengan *state* $(k,1), k \geq 1$ menunjukkan bahwa sistem dalam periode sibuk biasa, *state* $(k,0), k \geq 0$ menunjukkan bahwa sistem pada periode *working vacation* dan ada k pelanggan dalam antrian. Sebagai contoh, *state* $(2,1)$ mempresentasikan bahwa di dalam sistem antrian terdapat 2 pelanggan dan ada 1 *server* yang aktif atau tidak sedang melakukan *vacation*.

Diagram transisi untuk periode *working vacation* dan periode pelayanan sibuk ditunjukkan oleh Gambar 3.10



Gambar 3.10 Diagram Transisi Antrian $M^X/M/1$ (WV)

Dari Gambar 3.10, dapat dibentuk *state – state* dari antrian $M^X/M/1$ (WV) sebagai berikut

1. Probabilitas tidak ada kedatangan = $-\lambda$, yaitu pada *state* $(0,0)$ ke *state* $(0,0)$
2. Probabilitas ada satu kedatangan dengan ukuran kelompok $a_1 = \lambda a_1$, yaitu pada *state* $(k, 0)$ ke *state* $(k + 1, 0)$, $k \geq 0$
3. Probabilitas ada satu kedatangan dengan ukuran kelompok $a_2 = \lambda a_2$, yaitu pada *state* $(k, 0)$ ke *state* $(k + 2, 0)$, $k \geq 0$
4. Probabilitas ada satu kedatangan dengan ukuran kelompok $a_i = \lambda a_i$, yaitu pada *state* $(k, 0)$ ke *state* $(k + i, 0)$, $k \geq 0$ dan $i \geq 1$

5. Probabilitas pelayanan saat *server* melakukan *vacation* = μ_v , yaitu pada *state* $(k, 0)$ ke *state* $(k - 1, 0)$, $k \geq 1$
6. Probabilitas tidak ada kedatangan, dan tidak ada pelayanan serta tidak ada *vacation* = $-(\lambda + \mu_v + \theta)$, yaitu pada *state* $(k, 0)$ ke *state* $(k, 0)$, $k \geq 1$
7. Probabilitas waktu *vacation* = θ , yaitu pada *state* $(k, 0)$ ke *state* $(k, 1)$, $k \geq 1$
8. Probabilitas tidak ada kedatangan dan tidak ada pelayanan = $-(\lambda + \mu_b)$, yaitu pada *state* $(k, 1)$ ke *state* $(k, 1)$, $k \geq 1$
9. Probabilitas pelayanan pada saat *server* sibuk = μ_b , yaitu pada *state* $(n, 1)$ ke *state* $(n - 1, 1)$ = μ_b
10. Probabilitas kejadian yang tidak mungkin = 0, yaitu pada *state* $(k, 1)$ ke *state* $(k, 0)$ $k \geq 1$, *state* $(k + 1, 0)$ ke *state* $(k - 1, 0)$ $k \geq 1$, *state* $(k, 0)$ ke *state* $(k + 1, 1)$ $k \geq 0$, *state* $(k + 1, 1)$ ke *state* $(k - 1, 1)$ $k \geq 1$.

sehingga matriks generator infinitesimal Q dari sistem dapat dituliskan sebagai berikut

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} (0,0) & (1,0) & (1,1) & (2,0) & (2,1) & (3,0) & (3,1) \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} (0,0) \\ (1,0) \\ (1,1) \\ (2,0) \\ (2,1) \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda a_1 & 0 & \lambda a_2 & 0 & \lambda a_3 & 0 \dots \\ \mu_v & -(\lambda + \mu_v + \theta) & \theta & \lambda a_1 & 0 & \lambda a_2 & 0 \dots \\ \mu_b & 0 & -(\lambda + \mu) & 0 & \lambda a_1 & 0 & \lambda a_2 \dots \\ 0 & \mu_v & 0 & -(\lambda + \mu_v + \theta) & \theta & \lambda a_1 & 0 \dots \\ 0 & 0 & \mu_b & 0 & -(\lambda + \mu) & 0 & \lambda a_1 \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \dots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

kemudian matriks Q dipartisi dalam blok – blok matriks berikut ini

$$B_0 = -\lambda, \quad B_i = [\lambda a_i \ 0], \quad i \geq 1$$

$$C_0 = [\mu_v \ \mu_b]^T, \quad D_0 = \begin{bmatrix} \mu_v & 0 \\ 0 & \mu_b \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} -(\lambda + \mu_v + \theta) & \theta \\ 0 & -(\lambda + \mu_b) \end{bmatrix},$$

$$D_i = \begin{bmatrix} \lambda a_{i-1} & 0 \\ 0 & \lambda a_{i-1} \end{bmatrix}, \quad i \geq 2$$

selanjutnya matriks Q dapat dituliskan kembali secara ringkas seperti berikut

$$Q = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & \cdots \\ C_0 & D_1 & D_2 & D_3 & \cdots \\ & D_0 & D_1 & D_2 & \cdots \\ & & D_0 & D_1 & \cdots \\ & & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Matriks Q memiliki struktur blok-tridiagonal yang menunjukkan bahwa $\{L(t), J(t)\}$ adalah *quasi birth – death*. Struktur pada matriks Q berulang positif, sehingga distribusi stasionernya dapat ditulis sebagai vektor tersegmentasi dan dilambangkan sebagai

$$\pi_{kj} = P(L = k, J = j) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{L(t) = k, J(t) = j\}, \quad (k, j) \in \Omega$$

$$\pi_0 = \pi_{00}, \quad \pi_1 = (\pi_{10}, \pi_{11}), \quad \pi_k = (\pi_{k0}, \pi_{k1}), \quad k \geq 1$$

vektor distribusi stasioner π memenuhi Persamaan keseimbangan dan normalisasi

$$\pi Q = 0.$$

C. Solusi *Steady State Model Antrian $M^X/M/1$ (WV)*

Kondisi *steady state* yaitu keadaan sistem yang tidak tergantung pada keadaan awal maupun waktu yang telah dilalui. Jika suatu sistem telah mencapai kondisi *steady state* maka peluang terdapat n pelanggan dalam sistem pada waktu t ($P_n(t)$) tidak tergantung pada waktu (Cooper, 1981).

Berdasarkan Persamaan $\pi Q = 0$ dengan Q adalah matriks generator infinitesimal, diperoleh

$$-\lambda\pi_{00} + \mu_v\pi_{10} + \mu_b\pi_{11} = 0 \quad (3.1)$$

$$\lambda a_1\pi_{00} - (\lambda + \mu_v + \theta)\pi_{10} + \mu_v\pi_{20} = 0 \quad (3.2)$$

$$\lambda a_n\pi_{00} + \lambda \sum_{k=1}^n a_k\pi_{n-k,0} - (\lambda + \mu_v + \mu)\pi_{n0} + \mu_v\pi_{n+1,0} = 0, n \geq 2 \quad (3.3)$$

$$\theta\pi_{10} - (\lambda + \mu_b)\pi_{11} + \mu_b\pi_{21} = 0 \quad (3.4)$$

$$\lambda \sum_{k=1}^{n-1} a_k\pi_{n-k,1} + \theta\pi_{n0} - (\lambda + \mu_b)\pi_{n1} + \mu_b\pi_{n+1,1} = 0, n \geq 2 \quad (3.5)$$

Didefinisikan L adalah banyak pelanggan dalam sistem dan J adalah banyak *server* yang bekerja, maka berdasarkan Definisi 2.6 *probability generating function* (PGF) dari (L, J) masing – masing adalah

$$Q_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{k0} z^k, \quad |z| \leq 1$$

$$Q_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{k1} z^k, \quad |z| \leq 1$$

$Q_0(z)$ adalah PGF ketika *server* melakukan *vacation* dan $Q_1(z)$ adalah PGF ketika *server* bekerja. Kemudian PGF dari stasioner panjang sistem L adalah jumlahan dari kedua PGF tersebut, sehingga dapat ditulis sebagai berikut

$$L(z) = \pi_{00} + Q_0(z) + Q_1(z), \quad |z| \leq 1 \quad (3.6)$$

Agar dapat menyelesaikan PGF dari stasioner panjang sistem, diperlukan lemma berikut:

Lemma 3.1 Persamaan $(\lambda + \mu_v + \theta)z - \mu_v - \lambda zA(z) = 0$ memiliki akar khusus $z = \alpha$ pada interval $(0,1)$. $A(z)$ merupakan *probability generating function* dari ukuran kelompok yang dinyatakan dengan X .

Bukti:

$$(\lambda + \mu_v + \theta)z - \mu_v - \lambda zA(z) = 0$$

$$\lambda + \theta - \lambda A(z) = \frac{\mu_v}{z} - \mu_v$$

sistem persamaan

$$f(z) = \lambda + \theta - \lambda A(z), \quad 0 < z < 1$$

untuk setiap $0 < z < 1$, diperoleh

$$f'(z) = -\lambda A'(z) < 0, \quad f''(z) = \lambda A''(z) < 0 \quad (3.7)$$

oleh karena itu $f(z)$ adalah fungsi cekung dan menurun dalam interval $(0,1)$.

lebih lanjut,

$$f(0) = \lambda + \theta > \theta = f(1)$$

demikian pula dimisalkan $g(z) = \frac{\mu_v}{z} - \mu_v, 0 < z < 1$. Kemudian diperoleh

$$g'(z) = -\frac{\mu_v}{z^2} < 0, \quad g''(z) = \frac{2\mu_v}{z^3} > 0, \quad 0 < z < 1 \quad (3.8)$$

dengan demikian $g(z)$ adalah fungsi menurun dan cembung pada interval $(0,1)$, dan $0 = g(1) < g(0^+) = \infty$.

Dari Persamaan (3.7) dan Persamaan (3.8), terbukti bahwa Persamaan

$\lambda + \theta - \lambda A(z) = \frac{\mu_v}{z} - \mu_v$ memiliki akar khusus $z = \alpha$ pada interval $(0,1)$.

Teorema 3.1 (sums of independent random variables). Misal L_s dan L_d variabel acak independen dengan PGF masing – masing $L_s(z)$ dan $L_d(z)$, dan $L = L_s + L_d$, maka

$$L(z) = (L_s + L_d)(z) = L_s(z)L_d(z).$$

Bukti:

$$\begin{aligned} L(z) &= E(z^N) = E(z^{L_s + L_d}) \\ &= E(z^{L_s})E(z^{L_d}) \quad (\text{independen}) \end{aligned}$$

$$= L_s(z)L_d(z).$$

Selanjutnya, teorema berikut akan membuktikan struktur dekomposisi stokastik dari panjang sistem.

Teorema 3.2. Jika $\rho = \frac{\lambda \bar{a}}{\mu_b} < 1$ dan $\mu_v < \mu_b$, panjang sistem stasioner L dapat diuraikan menjadi jumlah dari dua variabel acak independen

$$L = L_s + L_d$$

L_s adalah panjang sistem sesuai antrian $M^X/M/1$ tanpa *vacation* dan memiliki PGF

$$L_s(z) = \frac{\mu(1 - \rho)(z - 1)}{(\lambda + \mu_b)z - \mu_b - \lambda z A(z)}$$

L_d adalah panjang sistem tambahan dan memiliki PGF

$$L_d(z) = \frac{\sigma(z)}{\delta\{(\lambda + \mu_v + \theta)z - \mu_v - \lambda z A(z)\}}$$

dimana

$$\sigma(z) = \mu_b\{(\lambda + \mu_v + \theta)z - \mu_v - \lambda z A(z)\} + \lambda z\{A(z) - A(\alpha)\}(\mu_b - \mu_v)$$

dan

$$\delta = \mu_b + \frac{\lambda}{\theta}\{1 - A(\alpha)\}(\mu_b - \mu_v)$$

Bukti :

Selanjutnya, mengalikan Persamaan (3.2) dengan z , Persamaan (3.3) dengan z^n dan menjumlahkan hasil dari kedua Persamaan tersebut, diperoleh

$$\begin{aligned} & \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \pi_{00} + \lambda \sum_{n=2}^{\infty} z^n \sum_{k=1}^{n-1} a_k \pi_{n-k,0} - (\lambda + \mu_v + \theta) \sum_{n=1}^{\infty} \pi_{n0} z^n \\ & + \mu_v \sum_{n=1}^{\infty} \pi_{n+1,0} z^n = 0 \end{aligned}$$

setelah perhitungan, diperoleh

$$\begin{aligned} & \lambda A(z) \pi_{00} + \lambda A(z) Q_0(z) - (\lambda + \mu_v + \theta) Q_0(z) + \frac{\mu_v \{Q_0(z) - \pi_{10} z\}}{z} = 0 \\ & (\lambda + \mu_v + \theta) Q_0(z) - \lambda A(z) Q_0(z) - \frac{\mu_v \{Q_0(z)\}}{z} = \lambda A(z) \pi_{00} - \frac{\mu_v \{\pi_{10} z\}}{z} \\ & \frac{(\lambda + \mu_v + \theta) z Q_0(z) - \lambda z A(z) Q_0(z) - \mu_v \{Q_0(z)\}}{z} = \frac{\lambda A(z) \pi_{00} z - \mu_v \{\pi_{10} z\}}{z} \\ & \frac{\{(\lambda + \mu_v + \theta) z - \lambda z A(z) - \mu_v\} Q_0(z)}{z} = \frac{\{\lambda A(z) \pi_{00} - \mu_v \pi_{10}\} z}{z} \\ & Q_0(z) = \frac{\{\lambda A(z) \pi_{00} - \mu_v \pi_{10}\} z}{(\lambda + \mu_v + \theta) z - \mu_v - \lambda z A(z)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

karena $Q_0(z)$ adalah fungsi analitik di $(0,1)$, dimana sisi kanan dari (3.9) memiliki angka nol di $(0,1)$. Dari lemma 3.1, penyebut dari $Q_0(z)$ sama dengan 0 jika $z = \alpha$, begitu juga pembilangnya. mengganti $z = \alpha$ ke dalam pembilang dari sisi kanan (3.9), diperoleh

$$\begin{aligned} & \lambda A(\alpha) \pi_{00} - \mu_v \pi_{10} = 0 \\ & \mu_v \pi_{10} = \lambda A(\alpha) \pi_{00} \end{aligned} \quad (3.10)$$

substitusi (3.10) ke (3.9), diperoleh

$$Q_0(z) = \frac{\lambda \{A(z) - A(\alpha)\} \pi_{00} z}{(\lambda + \mu_v + \theta) z - \mu_v - \lambda z A(z)}, \quad (3.11)$$

Demikian pula, mengalikan Persamaan (3.4) dengan z dan setiap Persamaan (3.5) oleh z^n dan menjumlahkan hasil dari kedua Persamaan tersebut, diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{n=2}^{\infty} z^n \sum_{k=1}^{n-1} a_k \pi_{n-k,1} + \theta \sum_{n=1}^{\infty} \pi_{n0} z^n - (\lambda + \mu_b) \sum_{n=1}^{\infty} \pi_{n1} z^n \\ + \mu_b \sum_{n=1}^{\infty} \pi_{n+1,1} z^n = 0 \end{aligned}$$

setelah perhitungan, diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda A(z) Q_1(z) + \theta Q_0(z) - (\lambda + \mu_b) Q_1(z) + \frac{\mu_b \{Q_1(z) - \pi_{11} z\}}{z} &= 0 \\ (\lambda + \mu_b) Q_1(z) - \frac{\mu_b \{Q_1(z)\}}{z} - \lambda A(z) Q_1(z) &= \theta Q_0(z) - \frac{\mu_b \{\pi_{11} z\}}{z} \\ \frac{(\lambda + \mu_b) z Q_1(z) - \mu_b \{Q_1(z) - \lambda z A(z) Q_1(z)\}}{z} &= \frac{\theta z Q_0(z) - \mu_b \{\pi_{11} z\}}{z} \\ \frac{\{(\lambda + \mu_b) z - \mu_b - \lambda z A(z)\} Q_1(z)}{z} &= \frac{\{\theta Q_0(z) - \mu_b \pi_{11}\} z}{z} \end{aligned}$$

oleh karena itu, diperoleh

$$Q_1(z) = \frac{\{\theta Q_0(z) - \mu_b \pi_{11}\} z}{(\lambda + \mu_b) z - \mu_b - \lambda z A(z)} \quad (3.12)$$

karena $\lim_{z \rightarrow 1} Q_1(z) = 0$ dan $\lim_{z \rightarrow 0} Q_1(z) = 0$

maka, $\lim_{z \rightarrow 1-0} \{(\lambda + \mu_b) z - \mu_b - \lambda z A(z)\} = 0$, diperoleh

$$\theta Q_0(1) - \mu_b \pi_{11} = 0 \quad (3.13)$$

substitusi $z = 1$ ke Persamaan (3.11), diperoleh

$$Q_0(1) = \frac{\lambda \{1 - A(\alpha)\} \pi_{00}}{\theta} \quad (3.14)$$

substitusi Persamaan (3.14) ke Persamaan (3.13), diperoleh

$$\mu_b \pi_{11} = \lambda \{1 - A(\alpha)\} \pi_{00} \quad (3.15)$$

substitusi Persamaan (3.15) ke Persamaan (3.12), diperoleh

$$Q_1(z) = \frac{[\theta Q_0(z) - \lambda \{1 - A(\alpha)\} \pi_{00}] z}{(\lambda + \mu_b) z - \mu_b - \lambda z A(z)} \quad (3.16)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (3.11) dan (3.16) ke Persamaan, (3.6), diperoleh

$$L(z) = \pi_{00} + Q_0(z) + Q_1(z) \\ = \frac{(z-1)\sigma(z)\pi_{00}}{\{(\lambda + \mu_b)z - \mu_b - \lambda zA(z)\}\{(\lambda + \mu_v + \theta)z - \mu_v - \lambda zA(z)\}} \quad (3.17)$$

dimana

$$\sigma(z) = \mu_b\{(\lambda + \mu_v + \theta)z - \mu_v - \lambda zA(z)\} + \lambda z\{A(z) - A(\alpha)\}(\mu_b - \mu_v)$$

menggunakan $L(1) = 1$ dan aturan L'Hospital, diperoleh

$$\lim_{z \rightarrow 1-0} L(z) \\ = \lim_{z \rightarrow 1-0} \frac{(z-1)\sigma(z)\pi_{00}}{\{(\lambda + \mu_b)z - \mu_b - \lambda zA(z)\}\{(\lambda + \mu_v + \theta)z - \mu_v - \lambda zA(z)\}}$$

$$\text{Misal } U(z) = (z-1)\sigma(z)\pi_{00} = z\sigma(z)\pi_{00} - \sigma(z)\pi_{00}$$

$$\text{dan } V(z) = \{(\lambda + \mu_b)z - \mu_b - \lambda zA(z)\}\{(\lambda + \mu_v + \theta)z - \mu_v - \lambda zA(z)\}$$

$$V(z) = (\lambda + \mu_b)z\{(\lambda + \mu_v + \theta)z - \mu_v - \lambda zA(z)\} \\ - \mu_b\{(\lambda + \mu_v + \theta)z - \mu_v - \lambda zA(z)\} \\ - \lambda zA(z)\{(\lambda + \mu_v + \theta)z - \mu_v - \lambda zA(z)\}$$

sehingga

$$U'(z) = \sigma(z)\pi_{00} + z\sigma'(z)\pi_{00} - \sigma'(z)\pi_{00} \\ = \sigma(z)\pi_{00} + (z-1)\sigma'(z)\pi_{00}$$

$$U'(1) = \sigma(1)\pi_{00} = [\mu_b\theta + \lambda\{1 - A(\alpha)\}(\mu_b - \mu_v)]\pi_{00} \quad (3.18)$$

dan

$$V'(z) = \\ = (\lambda + \mu_b)\{(\lambda + \mu_v + \theta)z - \mu_v - \lambda zA(z)\} \\ + (\lambda + \mu_b)z\{(\lambda + \mu_v + \theta) - \lambda A(z) - \lambda zA'(z)\}$$

$$\begin{aligned}
& -\mu_b\{(\lambda + \mu_v + \theta) - \lambda A(z) - \lambda z A'(z)\} \\
& -\lambda A(z) - \lambda z A'(z)\{(\lambda + \mu_v + \theta)z - \mu_v - \lambda z A(z)\} \\
& -\lambda z A(z)\{(\lambda + \mu_v + \theta) - \lambda A(z) - \lambda z A'(z)\} \\
V'(1) &= (\lambda + \mu_b)\theta + (\lambda + \mu_b)(\mu_v + \theta - \lambda \bar{a}) - \mu_b(\mu_v + \theta - \lambda \bar{a}) - \\
& (-\lambda - \lambda \bar{a})\theta - \lambda(\mu_v + \theta - \lambda \bar{a}) \\
&= (\lambda + \mu_b)\theta - \lambda\theta - \lambda \bar{a}\theta \\
&= \theta(\mu_b - \lambda \bar{a}) \tag{3.19}
\end{aligned}$$

maka

$$L(1) = \lim_{z \rightarrow 1-0} L(z) = \frac{U'(1)}{V'(1)} = 1 \tag{3.20}$$

substitusi Persamaan (3.18) dan (3.19) ke Persamaan (3.20), diperoleh

$$L(1) = \lim_{z \rightarrow 1-0} L(z) = \frac{[\mu_b\theta + \lambda\{1 - A(\alpha)\}(\mu_b - \mu_v)]\pi_{00}}{\theta(\mu_b - \lambda \bar{a})} = 1 \tag{3.21}$$

Pembilang dan penyebut dari pernyataan diatas adalah positif karena

$\mu_v < \mu_b$ dan $\rho = \frac{\lambda \bar{a}}{\mu_b} < 1$. Selanjutnya, dari Persamaan (3.21) diperoleh

$$\begin{aligned}
\pi_{00} &= \frac{\theta(\mu_b - \lambda \bar{a})}{\mu\theta + \lambda\{1 - A(\alpha)\}(\mu_b - \mu_v)} \\
\pi_{00} &= \frac{\mu_b - \lambda \bar{a}}{\mu_b + \frac{\lambda}{\theta}\{1 - A(\alpha)\}(\mu_b - \mu_v)} \\
\pi_{00} &= \frac{\mu_b(1 - \rho)}{\delta}
\end{aligned}$$

dengan $\delta = \mu_b + \frac{\lambda}{\theta}\{1 - A(\alpha)\}(\mu_b - \mu_v)$

substitusi pernyataan dari π_{00} ke dalam (3.20), akhirnya diperoleh

$$L(z) = \frac{\mu_b(1 - \rho)(z - 1)}{(\lambda + \mu_b)z - \mu_b - \lambda z A(z)} \cdot \frac{\sigma(z)}{\delta\{(\lambda + \mu_v + \theta)z - \mu_v - \lambda z A(z)\}}$$

$$= L_s(z)L_d(z)$$

Diketahui L_s dan L_d adalah variabel acak independen dan $L = L_s + L_d$. Sesuai dengan teorema 3.1, maka $L(z) = (L_s + L_d)(z) = L_s(z)L_d(z)$. Sehingga terbukti bahwa $L_s(z)$ adalah PGF dari panjang sistem sesuai antrian $M^X/M/1$ tanpa *vacation* dan $L_d(z)$ adalah PGF dari panjang sistem tambahan saat *working vacation*. Oleh karena itu, teorema 3.2 terbukti.

A. Ukuran keefektifan Sistem Antrian $M^X/M/1 (WV)$

Ukuran keefektifan suatu sistem antrian *batch arrival* dengan *working vacation* dapat ditentukan setelah PGF dari panjang sistem antrian $M^X/M/1$ tanpa *working vacation* dan panjang sistem saat periode *working vacation* diketahui. Ukuran – ukuran keefektifan dari suatu sistem antrian tersebut adalah banyak pelanggan dalam sistem (L), banyak pelanggan yang menunggu dalam antrian ($L_q^{(c)}$), waktu tunggu setiap pelanggan dalam sistem (W), waktu tunggu setiap pelanggan dalam antrian ($W_q^{(c)}$), dan presentase pemanfaatan sarana pelayanan (\bar{c}). Ukuran – ukuran keefektifan tersebut dapat digunakan untuk menganalisis operasi situasi antrian, yang dimaksudkan untuk pembuatan rekomendasi tentang rancangan sistem tersebut.

a. Nilai harapan banyak pelanggan dalam sistem $M^X/M/1 (WV)$

Nilai harapan banyak pelanggan dalam sistem antrian $M^X/M/1 (WV)$ merupakan jumlah dari banyak pelanggan dalam sistem saat periode sibuk tanpa *working vacation* dan banyak pelanggan tambahan dalam sistem saat *server* melakukan *vacation*, dinyatakan dengan

$$L = L_s + L_d \quad (3.22)$$

dari Persamaan (3.22), diketahui PGF dari L_s yaitu

$$L_s(z) = \frac{\mu_b(1-\rho)(z-1)}{(\lambda + \mu_b)z - \mu_b - \lambda zA(z)} \quad (3.23)$$

dan PGF dari L_d yaitu

$$L_d(z) = \frac{\sigma(z)}{\delta\{(\lambda + \mu_v + \theta)z - \mu_v - \lambda zA(z)\}} \quad (3.24)$$

Untuk memperoleh nilai harapan banyaknya pelanggan dalam sistem pada model antrian $M^X/M/1(WV)$ adalah dengan mencari $L_s'(z)$ dan $L_d'(z)$ kemudian menentukan $L_s'(1)$ dan $L_d'(1)$.

Persamaan (3.23) dapat dituliskan lebih sederhana sebagai berikut:

$$L_s(z) = \frac{(1-\rho)}{1 - z \frac{\lambda}{\mu_b} (\bar{A}(z))}$$

$$\text{dimana } \bar{A} = \frac{1-A(z)}{1-z}$$

Turunan pertama dari $L_s(z)$ adalah

$$\begin{aligned} L_s'(z) &= \frac{-(1-\rho) \left(-\frac{\lambda}{\mu_b} \bar{A}(z) - \frac{\lambda}{\mu_b} z \bar{A}'(z) \right)}{\left(1 - z \frac{\lambda}{\mu_b} (\bar{A}(z)) \right)^2} \\ &= \frac{(1-\rho) \left(\frac{\lambda}{\mu_b} \bar{A}(z) + \frac{\lambda}{\mu_b} z \bar{A}'(z) \right)}{\left(1 - z \frac{\lambda}{\mu_b} (\bar{A}(z)) \right)^2} \end{aligned}$$

sehingga

$$L_s'(1) = \frac{-(1-\rho) \left(-\frac{\lambda}{\mu_b} \bar{A}(1) - \frac{\lambda}{\mu_b} \bar{A}'(1) \right)}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu_b} (\bar{A}(1)) \right)^2} \quad (3.25)$$

untuk memperoleh $L_s'(1)$ terlebih dulu harus dihitung $\bar{A}'(1)$, dengan

$$\bar{A}'(z) = \frac{1 - A(z)}{1 - z}$$

Turunan pertama dari $\bar{A}'(z)$ adalah

$$\bar{A}'(z) = \frac{-(1 - z)A'(z) + 1 - A(z)}{(1 - z)^2}$$

$$\bar{A}'(1) = \frac{-(1 - 1)A'(1) + 1 - A(1)}{(1 - 1)^2} = 0$$

Karena $\bar{A}'(1) = \frac{0}{0}$, maka berdasarkan teorema 2.1 penyelesaiannya

menggunakan l'Hopital sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned} \bar{A}'(1) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-(1 - z)A'(z) + 1 - A(z)}{(1 - z)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z)A''(z)}{2(1 - z)} \\ &= \frac{A''(1)}{2} \end{aligned}$$

dari Definisi (2.9) dan Persamaan (2.62), diperoleh

$$A''(1) = E(X^2) - E(X)$$

dengan demikian

$$\bar{A}'(1) = \frac{E(X^2)}{2} - \frac{E(X)}{2} \quad (3.26)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (3.26) ke Persamaan (3.25), maka diperoleh

$$L_s'(1) = \frac{(1 - \rho) \left(\frac{\lambda}{\mu_b} E(X) + \frac{\lambda}{\mu_b} \left(\frac{E(X^2)}{2} - \frac{E(X)}{2} \right) \right)}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu_b} (E(X)) \right)^2}$$

$$= \frac{(1 - \rho) \left(\rho + \frac{\lambda}{\mu_b} \left(\frac{E(X^2)}{2} - \frac{\rho}{2} \right) \right)}{(1 - \rho)^2}$$

dengan $\rho = \frac{\lambda}{\mu} E(X)$

$$= \frac{\rho + \frac{\lambda}{\mu_b} E(X^2)}{2(1 - \rho)}$$

Jadi banyak pelanggan dalam sistem pada model antrian $M^X/M/1$ dengan ukuran kelompoknya berupa variabel acak X dinyatakan dengan

$$L_s = E(X) = \frac{\rho + \frac{\lambda}{\mu_b} E(X^2)}{2(1 - \rho)} \quad (3.27)$$

Dari Persamaan (2.67) diketahui peluang kedatangan suatu kelompok berukuran k dinyatakan dengan $P(X = k) = a_k$. Jika diasumsikan bahwa dalam antrian *batch arrival* kelompok yang datang tepat berukuran K , maka peluang bahwa suatu kedatangan berukuran K adalah satu, dan peluang suatu kedatangan untuk ukuran kelompok lainnya adalah nol. Pernyataan tersebut dapat dituliskan sebagai berikut.

$$a_k = \begin{cases} 1, & X = K \\ 0, & X \neq K \end{cases}$$

dengan K adalah suatu nilai yang menyatakan ukuran kelompok sehingga

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \\ &= 1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + K a_K + \cdots \\ &= K \end{aligned} \quad (3.28)$$

dan

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k \\
 &= 1^2 a_1 + 2^2 a_2 + 3^2 a_3 + \cdots + K^2 a_K + \cdots \\
 &= K^2
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

substitusi Persamaan (3.29) ke Persamaan (3.27) didapatkan:

$$L_s = \frac{\rho + \frac{\lambda}{\mu_b} E(X^2)}{2(1 - \rho)} = \frac{\rho + K\rho}{2(1 - \rho)} = \frac{\lambda(K^2 + K)}{2\mu_b(1 - \rho)}$$

Jadi banyak pelanggan dalam sistem, pada model antrian $M^K/M/1$ yaitu dengan rata – rata ukuran kelompok adalah K dinyatakan dengan:

$$L_s = \frac{\lambda(K^2 + K)}{2\mu_b(1 - \rho)} \tag{3.30}$$

Kemudian menentukan panjang sistem tambahan (L_d) yang memiliki PGF sebagai berikut

$$L_d(z) = \frac{\sigma(z)}{\delta\{(\lambda + \mu_v + \theta)z - \mu_v - \lambda z A(z)\}}$$

dimana

$$\sigma(z) = \mu_b\{(\lambda + \mu_v + \theta)z - \mu_v - \lambda z A(z)\} + \lambda z\{A(z) - A(\alpha)\}(\mu_b - \mu_v)$$

turunan pertama dari $L_d(z)$ adalah

$$\begin{aligned}
 L_d'(z) &= \\
 &= \frac{\sigma'(z)[\delta\{(\lambda + \mu_v + \theta)z - \mu_v - \lambda z A(z)\}]}{[\delta\{(\lambda + \mu_v + \theta)z - \mu_v - \lambda z A(z)\}]^2} \\
 &\quad - \frac{\sigma(z)[\delta(\lambda + \mu_v + \theta) - \delta\lambda A(z) - \delta\lambda z A'(z)]}{[\delta\{(\lambda + \mu_v + \theta)z - \mu_v - \lambda z A(z)\}]^2}
 \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
L_d'(1) &= \\
&= \frac{\sigma'(1)[\delta\{(\lambda + \mu_v + \theta) - \mu_v - \lambda A(1)\}]}{[\delta\{(\lambda + \mu_v + \theta) - \mu_v - \lambda A(1)\}]^2} \\
&\quad - \frac{\sigma(1)[\delta(\lambda + \mu_v + \theta) - \delta\lambda A(1) - \delta\lambda A'(1)]}{[\delta\{(\lambda + \mu_v + \theta) - \mu_v - \lambda A(1)\}]^2} \\
&= \frac{\sigma'(1)\delta\theta - \sigma(1)[\delta(\mu_v + \theta - \delta\lambda A'(1))]}{[\delta\theta]^2} \\
&= \frac{\sigma'(1)\theta - \sigma(1)[\mu_v + \theta - \lambda A'(1)]}{\delta\theta^2} \tag{3.31}
\end{aligned}$$

untuk memperoleh $L_d'(1)$ terlebih dulu dihitung $\sigma'(1)$ dan $\sigma(1)$

$$\begin{aligned}
\sigma'(z) &= \mu_b\{(\lambda + \mu_v + \theta) - \lambda z A(z) - \lambda A'(z)\} + (\lambda\mu_b - \lambda\mu_v)(A(z) + \\
&\quad zA'(z) - A(\alpha)) \\
\sigma'(1) &= \mu_b\{(\lambda + \mu_v + \theta) - \lambda A(1) - \lambda A'(1)\} + (\lambda\mu_b - \lambda\mu_v)(A(1) + \\
&\quad zA'(1) - A(\alpha)) \\
\sigma'(1) &= \mu_b(\mu_v + \theta - \lambda A'(1)) + (\lambda\mu_b - \lambda\mu_v)(1 + A'(1) - A(\alpha)) \tag{3.32}
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\sigma(z) &= \mu_b\{(\lambda + \mu_v + \theta)z - \mu_v - \lambda z A(z)\} + \lambda z\{A(z) - A(\alpha)\}(\mu_b - \mu_v) \\
\sigma(1) &= \mu_b\{(\lambda + \mu_v + \theta) - \mu_v - \lambda\} + \lambda\{1 - A(\alpha)\}(\mu_b - \mu_v) \\
\sigma(1) &= \mu_b\theta + \lambda\{1 - A(\alpha)\}(\mu_b - \mu_v) \tag{3.33}
\end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (3.32) dan Persamaan (3.33) ke

Persamaan (3.31), maka diperoleh

$$\begin{aligned}
L_d'(1) &= \\
&= \frac{[\mu_b(\mu_v + \theta - \lambda A'(1)) + (\lambda\mu_b - \lambda\mu_v)(1 + A'(1) - A(\alpha))]\theta}{\delta\theta^2} \\
&\quad - \frac{\mu_b\theta + \lambda\{1 - A(\alpha)\}(\mu_b - \mu_v)[\mu_v + \theta - \lambda A'(1)]}{\delta\theta^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\theta[\mu_b(\mu_v + \theta - \lambda K) + (\lambda\mu_b - \lambda\mu_v)(1 + K - A(\alpha))]}{\delta\theta^2} \\
&\quad - \frac{\mu_b\theta + \lambda\{1 - A(\alpha)\}(\mu_b - \mu_v)[\mu_v + \theta - \lambda K]}{\delta\theta^2} \\
&= \frac{\lambda(\mu_b - \mu_v)[K\theta + (\lambda K - \mu_v)\{1 - A(\alpha)\}]}{\delta\theta^2} \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Sehingga berdasarkan Definisi 2.3, Persamaan (3.34) merupakan nilai harapan panjang sistem saat *working vacation*

$$E(L_d) = L_d'(1)$$

Subtitusikan Persamaan (3.30) dan Persamaan (3.34) ke Persamaan (3.22), diperoleh

$$L = \frac{\lambda(K^2 + K)}{2\mu_b(1 - \rho)} + \frac{\lambda(\mu_b - \mu_v)[K\theta + (\lambda K - \mu_v)\{1 - A(\alpha)\}]}{\delta\theta^2} \tag{3.35}$$

b. Nilai harapan waktu tunggu pelanggan dalam sistem $M^X/M/1$ (WV)

Berdasarkan Persamaan (2.62) waktu tunggu dalam sistem dapat diperoleh dari rumus *Little Law* yaitu

$$W = \frac{L}{\lambda} \tag{3.36}$$

Dalam model antrian $M^X/M/1$, laju kedatangan pelanggan adalah $\lambda E(X)$ dengan $E(X)$ adalah rata – rata dari ukuran kelompok yang masuk ke dalam sistem antrian.

Waktu tunggu pelanggan dalam sistem diperoleh dari substitusi Persamaan (3.35) ke Persamaan (3.36) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{\lambda E(X)} \left[\frac{\lambda(K^2 + K)}{2\mu_b(1 - \rho)} + \frac{\lambda(\mu_b - \mu_v)[K\theta + (\lambda K - \mu_v)\{1 - A(\alpha)\}]}{\delta\theta^2} \right] \\
W &= \frac{1}{\lambda K} \left[\frac{\lambda(K^2 + K)}{2\mu_b(1 - \rho)} + \frac{\lambda(\mu_b - \mu_v)[K\theta + (\lambda K - \mu_v)\{1 - A(\alpha)\}]}{\delta\theta^2} \right] \tag{3.37}
\end{aligned}$$

- c. Nilai harapan waktu tunggu pelanggan dalam antrian $M^X/M/1$ (WV)

Waktu tunggu pelanggan dalam antrian adalah selisih antara waktu tunggu pelanggan dalam sistem dan waktu pelayanan. Laju pelayanan per satuan waktu adalah μ_b maka waktu pelayanan untuk seorang pelanggan adalah $\frac{1}{\mu_b}$. Sehingga waktu tunggu dalam antrian adalah sebagai berikut

$$W_q^{(v)} = W - \frac{1}{\mu_b} \quad (3.38)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (3.37) ke Persamaan (3.38), maka diperoleh

$$\begin{aligned} W_q^{(v)} &= \\ &= \frac{1}{\lambda K} \left[\frac{\lambda(K^2 + K)}{2\mu_b(1 - \rho)} + \frac{\lambda(\mu_b - \mu_v)[K\theta + (\lambda K - \mu_v)\{1 - A(\alpha)\}]}{\delta\theta^2} \right] - \frac{1}{\mu_b} \end{aligned} \quad (3.39)$$

- d. Nilai harapan banyak pelanggan dalam antrian $M^X/M/1$ (WV)

Berdasarkan Persamaan (2.63) banyak pelanggan dalam antrian dapat diperoleh dari rumus *Little Law* sebagai berikut

$$\begin{aligned} L_q^{(v)} &= \lambda E(X) W_q^{(v)} \\ L_q^{(v)} &= \lambda K W_q^{(v)} \end{aligned} \quad (3.40)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (3.39) ke Persamaan (3.40), maka diperoleh

$$\begin{aligned} L_q^{(v)} &= \lambda K \left[\frac{1}{\lambda K} \left\{ \frac{\lambda(K^2 + K)}{2\mu_b(1 - \rho)} + \frac{\lambda(\mu_b - \mu_v)[K\theta + (\lambda K - \mu_v)\{1 - A(\alpha)\}]}{\delta\theta^2} \right\} - \frac{1}{\mu_b} \right] \\ L_q^{(v)} &= \left\{ \frac{\lambda(K^2 + K)}{2\mu_b(1 - \rho)} + \frac{\lambda(\mu_b - \mu_v)[K\theta + (\lambda K - \mu_v)\{1 - A(\alpha)\}]}{\delta\theta^2} \right\} - \rho \end{aligned} \quad (3.41)$$

e. Persentase *server* sibuk

Persentase kesibukan *server* berarti memperlihatkan seberapa besar pemanfaatan dari suatu sarana pelayanan. Nilai harapan jumlah *server* yang sibuk sama dengan selisih antara jumlah pelanggan dalam sistem dan jumlah pelanggan dalam antrian. Sehingga persentase *server* yang sibuk adalah

$$\bar{c} = (L - L_q^{(v)}) \times 100\% \quad (3.42)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (3.35) dan Persamaan (3.41) ke Persamaan (3.42), maka diperoleh

$$\bar{c} = \rho \times 100\%$$

Jadi, persentase kesibukan *server* pada model antrian $M^X/M/1$ (WV) sama dengan persentase kesibukan *server* model antrian pada umumnya.

Dari Persamaan (L), (W), ($W_q^{(v)}$), ($L_q^{(v)}$), dan (\bar{c}) dapat diringkas ukuran keefektifan dari model antrian $M^X/M/1$ (WV) dalam tabel 3.5 berikut ini

Tabel 3.5 Ukuran Keefektifan Model Antrian $M^X/M/1 (WV)$

No.	Ukuran keefektifan	Formula
1.	Banyak pelanggan dalam sistem	$L =$ $= \frac{\lambda(K^2 + K)}{2\mu_b(1 - \rho)}$ $+ \frac{\lambda(\mu_b - \mu_v)[K\theta + (\lambda K - \mu_v)\{1 - A(\alpha)\}]}{\delta\theta^2}$
2.	Banyak pelanggan dalam antrian	$L_q^{(v)} =$ $= \left\{ \frac{\lambda(K^2 + K)}{2\mu_b(1 - \rho)} \right.$ $\left. + \frac{\lambda(\mu_b - \mu_v)[K\theta + (\lambda K - \mu_v)\{1 - A(\alpha)\}]}{\delta\theta^2} \right\} - \rho$
3.	Waktu tunggu pelanggan dalam sistem	$W =$ $= \frac{1}{\lambda K} \left[\frac{\lambda(K^2 + K)}{2\mu_b(1 - \rho)} \right.$ $\left. + \frac{\lambda(\mu_b - \mu_v)[K\theta + (\lambda K - \mu_v)\{1 - A(\alpha)\}]}{\delta\theta^2} \right]$
4.	Waktu tunggu pelanggan dalam antrian	$W_q^{(v)} =$ $= \frac{1}{\lambda K} \left[\frac{\lambda(K^2 + K)}{2\mu_b(1 - \rho)} \right.$ $\left. + \frac{\lambda(\mu_b - \mu_v)[K\theta + (\lambda K - \mu_v)\{1 - A(\alpha)\}]}{\delta\theta^2} \right] - \frac{1}{\mu_b}$
5.	Persentase kesibukan server	$\bar{c} = \rho \times 100\%$

E. Implementasi

Diberikan contoh ilustrasi antrian yang terjadi di sebuah kantor pajak dengan satu orang petugas dalam perekaman surat pemberitahuan (SPT). Dalam kasus ini petugas berperan sebagai *server*. Beberapa berkas SPT yang telah disortir diserahkan sekaligus kepada staf yang bertugas untuk direkam. Berarti SPT tersebut masuk ke dalam sistem secara berkelompok dan jumlahnya acak. Apabila petugas selesai merekam SPT dalam sistem dan tidak ada SPT yang mengantri untuk direkam dalam sistem, maka petugas menganggur akan melakukan tugas lainnya. Pada saat petugas melakukan tugas lainnya disebut dengan *vacation*. Apabila ada SPT yang masuk ke dalam sistem, maka petugas kembali dari *vacation* dan mulai merekam SPT yang ada dalam sistem.

Pada simulasi diperlukan data lama pelayanan dan ukuran kelompok. Data tersebut dibangun dengan *software* minitab yang distribusi waktu pelayanan memenuhi distribusi Eksponensial dan distribusi ukuran kelompok mengikuti distribusi Poisson. Data lama pelayanan dapat dilihat dalam lampiran 1 dan data ukuran kelompok dapat dilihat dalam Tabel 3.6. Waktu kedatangan pelanggan sesuai dengan jam kerja kantor dimulai yaitu pukul 07:30:00 dan pada saat itu sudah ada berkas SPT yang menumpuk. Kemudian petugas mulai mengaktifkan scanner, sehingga waktu mulai dilayani pertaman kali adalah 07:37:00. Data waktu kedatangan pelanggan, waktu mulai dilayani, dan waktu selesai dilayani dapat dilihat dalam lampiran 2.

Kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson dan terdapat satu orang *server* dengan waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial. Karena *vacation* dapat dilakukan beberapa kali oleh petugas, maka kondisi tersebut memenuhi asumsi dari model antrian $M^X/M/1$ (WV). Karakteristik – karakteristik dari sistem antrian tersebut antara lain

1. Laju kedatangan

Laju kedatangan yaitu banyaknya kedatangan tiap satuan waktu. Pada skripsi ini, formula yang telah didapatkan hanya sesuai untuk distribusi kedatangan Poisson. Data waktu kedatangan pelanggan, waktu mulai dilayani, dan waktu selesai dilayani dapat dilihat pada lampiran 2. Uji distribusi kedatangan pelanggan dapat dilihat dalam lampiran 3.

Tabel 3.6 Ukuran Kelompok dan Waktu Antar Kedatangan Tiap Kelompok

Kedatangan ke-	Ukuran kelompok	Waktu antar kedatangan
1	16	
2	19	0:30:00
3	31	1:05:00
4	22	1:25:20
5	22	0:34:30
Jumlah	110	3:34:50 atau 3,6 jam

Dari tabel tersebut diketahui bahwa selama $3,6 \approx 4$ jam ada 5 kali kedatangan, jadi laju kedatangan atau banyaknya kedatangan tiap jam adalah $5/4 = 1,25$, jadi $\lambda = 1,25$ kelompok per jam.

2. Nilai harapan ukuran kelompok

Surat – surat pemebritahuan yang akan direkam masuk ke dalam sistem antrian secara berkelompok, dengan ukuran setiap kedatangannya tidak pasti banyaknya. Sehingga akan dicari nilai harapan ukuran kelompok tersebut. Berdasarkan Persamaan (2.64), nilai harapan ukuran kelompok yang masuk ke dalam sistem adalah

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k$$

dari Persamaan (2.67) diketahui

$$a_k = \frac{\lambda_k}{\lambda},$$

berdasarkan tabel 3.6, maka diperoleh a_k sebagai berikut

$$a_{16} = (X = 16) = \frac{1}{5}$$

$$a_{19} = (X = 19) = \frac{1}{5}$$

$$a_{22} = (X = 22) = \frac{2}{5}$$

$$a_{31} = (X = 31) = \frac{1}{5}$$

maka

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k = 16 \cdot \frac{1}{5} + 19 \cdot \frac{1}{5} + 22 \cdot \frac{2}{5} + 31 \cdot \frac{1}{5} = \frac{110}{5} \\ &= 22 \end{aligned}$$

Jadi rata – rata atau nilai harapan ukuran kelompok yang masuk ke dalam sistem antrian adalah $K = 22$.

3. Laju pelayanan

Laju pelayanan yaitu banyaknya pelanggan yang dilayani tiap satuan waktu. Pada skripsi ini, formula yang telah didapatkan hanya sesuai untuk distribusi pelayanan Eksponensial. Tabel lama waktu pelayanan pelanggan pada ilustrasi ini dapat dilihat pada lampiran 1. Karena data lama waktu pelayanan pelanggan tersebut merupakan data yang dibangkitkan yang memenuhi distribusi Eksponensial, maka tidak perlu dilakukan pengujian data. Namun, uji distribusi pelayanan pelanggan dapat dilihat dalam lampiran 3.

Dari tabel lama waktu pelayanan pelanggan pada lampiran 2, diketahui total waktu pelayanan untuk 110 pelanggan adalah 2:20:27 atau 2,341 jam, sehingga laju pelayanan atau banyaknya pelayanan tiap jam adalah $\mu_b = 110/2,341 = 46,99 \approx 47$ SPT.

4. Waktu *vacation*

Waktu *vacation* adalah rata – rata waktu yang diperlukan dalam satu kali *vacation* yang dilakukan oleh *server*. Pada skripsi ini, formula yang telah didapatkan hanya sesuai untuk distribusi waktu *vacation* Eksponensial. Uji distribusi waktu *vacation* dapat dilihat dalam lampiran 3.

Tabel 3.7 Lama Waktu *Vacation*

<i>Vacation</i> ke-	Mulai	Selesai	Waktu <i>vacation</i>
1	8:27:12	9:05:59	0:38:47
2	9:52:18	10:31:19	0:39:01
Jumlah			1:17:48 atau 1,297 jam

Dari tabel 3.7 diketahui bahwa total waktu *vacation* bagi *server* adalah 1,297 jam. *Server* melakukan dua kali *vacation*. Dengan demikian rata – rata waktu *vacation* bagi *server* adalah $\theta = \frac{1,297}{2} = 0,6485 \approx 0,65$ jam.

5. Faktor utilitas sistem atau peluang *server* sibuk

$$\rho \frac{K\lambda}{\mu_b} = \frac{22(1.25)}{47} = 0,585$$

6. Ukuran keefektifan sistem

Sesuai pembahasan, ukuran keefektifan sistem yang akan dianalisis adalah nilai harapan banyak pelanggan dalam sistem (L), nilai harapan banyak pelanggan dalam antrian ($L_q^{(v)}$), nilai harapan waktu tunggu pelanggan dalam sistem (W), nilai harapan waktu tunggu pelanggan dalam antrian ($W_q^{(v)}$), dan persentase *server* sibuk (\bar{c}). Perhitungan dilakukan dengan menggunakan dua metode, yaitu dengan menggunakan formula yang telah didapatkan dari penelusuran dan menggunakan *software* MATLAB. Selain itu nilai keefektifan sistem antrian juga dicari dengan menggunakan *software* WINQSB untuk model antrian $M^X/M/1$ tanpa *vacation*. Ketiga hasil perhitungan tersebut dibandingkan untuk mengetahui model antrian mana yang lebih realitis jika diaplikasikan dalam kehidupan nyata.

a. Analisis berdasarkan formula

i) Nilai harapan banyaknya pelanggan dalam sistem (L)

Dari tabel 3.5 no. 1 didapatkan nilai harapan banyak pelanggan dalam sistem

$$L = \frac{\lambda(K^2 + K)}{2\mu_b(1 - \rho)} + \frac{\lambda(\mu_b - \mu_v)[K\theta + (\lambda K - \mu_v)\{1 - A(\alpha)\}]}{\delta\theta^2}$$

dengan $\delta = \mu_b + \frac{\lambda}{\theta} \{1 - A(\alpha)\}(\mu_b - \mu_v)$

$$L = \frac{1,25(22^2 + 22)}{2(47)(1 - 0,585)} + \frac{1,25(47 - 0)[22(0,65) + (1,25(22) - 0)\{1 - A(1)\}]}{47(0,65)^2}$$

$$= 16,214 + 42,31 = 58,524$$

Jadi banyaknya pelanggan dalam sistem sekitar 58 SPT.

ii) Nilai harapan banyak pelanggan dalam antrian ($L_q^{(v)}$)

Dari tabel 3.5 no. 2 didapatkan nilai harapan banyak pelanggan dalam antrian

$$L_q^{(v)} = \left\{ \frac{\lambda(K^2 + K)}{2\mu_b(1 - \rho)} + \frac{\lambda(\mu_b - \mu_v)[K\theta + (\lambda K - \mu_v)\{1 - A(\alpha)\}]}{\delta\theta^2} \right\} - \rho$$

$$L_q^{(v)} = 58 - 0,585 = 57,415$$

Jadi banyaknya pelanggan dalam antrian sekitar 57 SPT.

iii) Nilai harapan waktu tunggu pelanggan dalam sistem (W)

Dari tabel 3.5 no. 3 didapatkan nilai harapan waktu tunggu pelanggan dalam sistem

$$W = \frac{1}{\lambda K} \left[\frac{\lambda(K^2 + K)}{2\mu_b(1 - \rho)} + \frac{\lambda(\mu_b - \mu_v)[K\theta + (\lambda K - \mu_v)\{1 - A(\alpha)\}]}{\delta\theta^2} \right]$$

$$W = \frac{1}{1,25(22)} (58,524) = 2,128$$

Jadi waktu tunggu pelanggan dalam sistem sekitar 2,128 jam.

iv) Nilai harapan waktu tunggu pelanggan dalam antrian ($W_q^{(v)}$)

Dari tabel 3.5 no. 4 didapatkan nilai harapan waktu tunggu pelanggan dalam antrian

$$W_q^{(v)} = \frac{1}{\lambda K} \left[\frac{\lambda(K^2 + K)}{2\mu_b(1 - \rho)} + \frac{\lambda(\mu_b - \mu_v)[K\theta + (\lambda K - \mu_v)\{1 - A(\alpha)\}]}{\delta\theta^2} \right] - \frac{1}{\mu_b}$$

$$W_q^{(v)} = 2,128 - \frac{1}{47} = 2,1067$$

Jadi waktu tunggu pelanggan dalam antrian sekitar 2,1067 jam.

v) Persentase *server* sibuk

Dari tabel 3.5 no. 5 didapatkan persentase kesibukan *server* adalah

$$\bar{c} = \rho \times 100\%$$

$$\bar{c} = 0.585 \times 100\%$$

$$\bar{c} = 58,5\% \approx 58,5\%$$

Jadi persentase kesibukan *server* adalah 58,5% sehingga dapat dikatakan *server* pada sistem tidak terlalu sibuk.

Dari analisis tersebut diketahui $\lambda = 1,25$ kelompok/jam, $\mu = 47$ per jam, $\theta = 0,65$ jam, dan ukuran kelompok yang masuk ke dalam sistem adalah 22, terlihat bahwa *server* tidak terlalu sibuk yaitu dengan persentase 58,5%. Sehingga persentase *server* menganggur cukup besar yaitu 41,5%. Ukuran keefektifan sistem tersebut adalah $L = 58$ SPT, $L_q^{(v)} = 57$ SPT, $W = 2,128$ jam, dan $W_q^{(v)} = 2,1067$ jam. Artinya di dalam antrian diperkirakan terdapat 58 berkas SPT yang mengantri, termasuk berkas SPT yang sedang direkam. Setiap berkas SPT diperkirakan berada di dalam sistem antrian selama 2,128 jam, dimulai dari saat berkas memasuki sistem sampai dengan selesai dilayani.

Pada lampiran 2, dapat dilihat bahwa waktu *vacation* terjadi ketika tidak ada pelanggan yang masuk dalam sistem, saat *server* selesai melayani pelanggan terakhir yang mengantri. Dan *vacation* terjadi dua kali selama waktu pelayanan berlangsung. Hal itu menunjukkan bahwa *server* tidak terlalu sibuk.

Dari hasil analisis dapat disimpulkan bahwa pelayanan pada perekaman berkas SPT di kantor pajak tersebut sudah cukup optimal, sehingga tidak terjadi penumpukan berkas SPT dalam sistem antrian.

b. Analisis berdasarkan hasil perhitungan dengan *software* MATLAB

Pada proses perhitungan nilai keefektifan menggunakan rumus, langkah – langkah yang ditempuh terlalu panjang dan rumit jika perhitungan dilakukan secara manual. Oleh karena itu, langkah – langkah tersebut dikonversikan ke dalam bahasa pemrograman pada *software* MATLAB agar perhitungan dapat dilakukan lebih cepat. Algoritma pemrograman yang digunakan dalam perhitungan nilai keefektifan sistem antrian $M^X/M/1(WV)$ dan *output*-nya dapat dilihat pada lampiran 5 halaman 112.

Pada program tersebut laju kedatangan (λ) adalah 1,25 kelompok dan laju pelayanan (μ_b) adalah 47 serta rata – rata waktu *vacation* (θ) adalah 0,65 jam. Dari hasil perhitungan menggunakan *software* MATLAB diperoleh nilai keefektifan yang sama dengan menggunakan formula secara manual. Ukuran keefektifan sistem tersebut adalah $L = 58$ SPT, $L_q^{(v)} = 57$ SPT, $W = 2,128$ jam, dan $W_q^{(v)} = 2,1067$ jam.

c. Analisis berdasarkan hasil perhitungan dengan *WINQSB* pada antrian $M^X/M/1$ tanpa *vacation*

Langkah – langkah menggunakan *software* *WINQSB* dapat dilihat dalam lampiran 4. Output dari *WINQSB* dapat dilihat pada tabel 3.8 berikut

Tabel 3.8 Output Penyelesaian Masalah Antrian Pada Model ($M^{22}/M/1$) dengan WINQSB

09-28-2015	Performance Measure	Result
1	System: M(b)/M/1	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hour =	1.2500
3	Service rate per server (mu) per hour =	47.0000
4	Overall system effective arrival rate per hour =	27.5000
5	Overall system effective service rate per hour =	27.5000
6	Overall system utilization =	58.5106 %
7	Average number of customers in the system (L) =	16.2179
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	15.6328
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	26.7180
10	Average time customer spends in the system (W) =	0.5897 hours
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0.5685 hours
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0.9716 hours
13	The probability that all servers are idle (Po) =	41.4894 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	58.5106 %
15	Average number of customers being balked per hour =	0
16	Total cost of busy server per hour =	\$0
17	Total cost of idle server per hour =	\$0
18	Total cost of customer waiting per hour =	\$0
19	Total cost of customer being served per hour =	\$0
20	Total cost of customer being balked per hour =	\$0
21	Total queue space cost per hour =	\$0
22	Total system cost per hour =	\$0

Hasil perhitungan yang diperoleh menggunakan *software WINQSB* pada model antrian ($M^{22}/M/1$) tanpa *vacation* menunjukkan hasil $L = 16$, $L_q = 15$, $W_s = 0,5897$ jam, dan $W_q = 0,5685$ jam. Hasil tersebut lebih kecil dibandingkan dengan hasil pada model ($M^{22}/M/1 (WV)$). Hal itu disebabkan karena pada model antrian $M^{22}/M/1$ biasa waktu penundaan pelayanan diabaikan, sedangkan pada model ($M^{22}/M/1 (WV)$) waktu penundaan pelayanan diperhatikan.

BAB IV PENUTUP

A. Simpulan

Dari pembahasan skripsi dengan judul “Analisis Model Antrian dengan *Working Vacation* Pada Pola Kedatangan Berkelompok (*Batch Arrival*) Satu *Server*”, dapat disimpulkan sebagai berikut

1. Model menggambarkan sistem antrian dengan pola kedatangan pelanggan secara berkelompok yang berdistribusi Poisson, pelayanan pelanggan secara individu oleh satu *server* dengan waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial dan *vacation* yang dilakukan *server* dengan waktu *vacation* berdistribusi Eksponensial. Model antrian tersebut dinotasikan dengan $M^X/M/1 (WV)$, dengan X adalah variabel acak yang menyatakan ukuran kelompok yang masuk ke dalam sistem antrian dan (WV) menyatakan *server* melakukan *vacation* pada saat sistem kosong atau tidak ada pelanggan yang mengantri dalam sistem. Dasar untuk menganalisis model antrian dengan *working vacation* pada pola kedatangan berkelompok adalah dengan menentukan matriks generator infinitesimal, kemudian menentukan *probability generating function (PGF)* dari banyak pelanggan dalam sistem saat *server* sibuk dan saat *server vacation*, yang dinyatakan dengan

$$L_s(z) = \frac{\mu(1 - \rho)(z - 1)}{(\lambda + \mu)z - \mu - \lambda zA(z)}$$

dan

$$L_d(z) = \frac{\sigma(z)}{\delta\{(\lambda + \mu_v + \theta)z - \mu_v - \lambda zA(z)\}}$$

2. Ukuran keefektifan sistem antrian dengan *working vacation* pada pola kedatangan berkelompok satu *server* yang diperoleh dari penelusuran sebagai berikut

- a. Nilai harapan banyak pelanggan di dalam sistem dinyatakan dengan

$$L = \frac{\lambda(K^2 + K)}{2\mu_b(1 - \rho)} + \frac{\lambda(\mu_b - \mu_v)[K\theta + (\lambda K - \mu_v)\{1 - A(\alpha)\}]}{\delta\theta^2}$$

- b. Nilai harapan banyak pelanggan di dalam antrian dinyatakan dengan

$$L_q^{(v)} = \left\{ \frac{\lambda(K^2 + K)}{2\mu_b(1 - \rho)} + \frac{\lambda(\mu_b - \mu_v)[K\theta + (\lambda K - \mu_v)\{1 - A(\alpha)\}]}{\delta\theta^2} \right\} - \rho$$

- c. Nilai harapan waktu tunggu pelanggan di dalam sistem dinyatakan dengan

$$W = \frac{1}{\lambda K} \left[\frac{\lambda(K^2 + K)}{2\mu_b(1 - \rho)} + \frac{\lambda(\mu_b - \mu_v)[K\theta + (\lambda K - \mu_v)\{1 - A(\alpha)\}]}{\delta\theta^2} \right]$$

- d. Nilai harapan waktu tunggu pelanggan dalam antrian dinyatakan dengan

$$W_q^{(v)} = \frac{1}{\lambda K} \left[\frac{\lambda(K^2 + K)}{2\mu_b(1 - \rho)} + \frac{\lambda(\mu_b - \mu_v)[K\theta + (\lambda K - \mu_v)\{1 - A(\alpha)\}]}{\delta\theta^2} \right] - \frac{1}{\mu_b}$$

- e. Persentase pemanfaatan sarana pelayanan dinyatakan dengan

$$\bar{c} = \rho \times 100\%$$

3. Pada implementasi model antrian $M^X/M/1(WV)$, yaitu dengan *server vacation*, diberikan contoh penerapan antrian pada pelayanan di suatu kantor pajak tertentu dengan satu orang petugas yang merekam SPT dan dapat melakukan tugas sekunder saat tidak ada SPT yang mengantri dalam

sistem. Dari hasil analisis diperoleh ukuran keefektifan dari model antrian, yaitu $L = 58$ SPT, $L_q^{(v)} = 57$ SPT, $W = 2,128$ jam, dan $W_q^{(v)} = 2,1067$ jam, dan $\bar{c} = 58,5\%$.

Apabila kasus tersebut dianalisis menggunakan model $M^X/M/1$ tanpa *vacation*, hasil yang diperoleh yaitu $L_s = 16$ SPT, $L_q = 15$ SPT, $W_s = 0,5897$ jam, dan $W_q = 0,5685$ jam. Hasil yang diperoleh lebih kecil dibandingkan dengan perhitungan pada sistem $M^X/M/1$ (WV). Hal tersebut disebabkan karena pada model antrian $M^X/M/1$ biasa waktu penundaan pelayanan diabaikan. Sedangkan pada perhitungan menggunakan model $M^X/M/1$ (WV) waktu penundaan pelayanan diperhatikan.

B. Saran

Dari hasil pengkajian model antrian kedatangan berkelompok satu *server* dengan lebih dari satu kali *vacation* dapat dikembangkan lebih lanjut sampai dengan tingkat pengambilan keputusan, misalnya dengan model biaya. Selain itu juga dapat dikembangkan variasi dari model antrian dengan *vacation*, yaitu model antrian kedatangan berkelompok multiserver dengan beberapa kali *vacation*, model antrian kedatangan berkelompok satu *server* dengan satu kali *vacation*, model antrian kedatangan berkelompok multiserver dengan satu kali *vacation*, serta model antrian kedatangan berkelompok multiserver dengan *vacation* beberapa kali secara bersamaan oleh semua *server*.

DAFTAR PUSTAKA

- Adan, Ivo & Resing, Jacques. (2011). *Queueing Theory*. Netherlands: MB Eindhoven.
- Alvi Syahrini Utami. (2013). Simulasi Antrian Satu Chanel dengan Tipe Kedatangan Berkelompok. *Jurnal Ilmiah Generic Volume 4* (Nomor 1, Januari 2009). Hlm. 49-56.
- Bain, L, & Engelhardt. (1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. California: Wadsworth Publishing Company.
- Bartle, R. G, & Sherbert, D. R. (2006). *Introduction to Real Analysis*. New York: John Wiley & Sons.
- Bhat, U. Narayan. (2008). *An Introduction to Queueing Theory, Modeling and Analysis in Applications*. New York: Springer Science and Business Media.
- Bronson, R. (1996). *Teori dan Soal-Soal Operations Research*. (Terjemahan Hans Wospakrik). Jakarta: Erlangga.
- Breuer, L, & Baum, D. (2005). *An Intoduction to Queueing Theory and Matrix-Analytic Methods*. Netherlands : Springer.
- Bunday, B. D. (1996). *An Intoduction to Queueing Theory*. New York: John Wiley & Sons.
- Cooper, R. B. (1981). *Introduction to Queueing Theory*. 2nd. Ed. New York: Elseveir North Holland, Inc.
- Desi Nur Faizah dan Laksmi Prita Wardhani. (2014). Analisis Sifat – Sifat Antrian $M/M/1$ dengan *Working Vacation*. *Jurnal Sains dan Seni Pomits Volume 2* (Nomor 1). Hlm. 1-6.
- Dimyati, A, & tarliyah, T. (1999). *Operation Research “Model – Model Pengambilan Keputusan ”*. Bandung: PT Sinar Baru Algesindo.
- Djauhari, M. (1997). *Statistika Matematika*. Bandung: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, ITB.
- Doshi, B. T. (1986). *Queueing Systes*. New Jersey: Scientific Publishing Company.

- Ecker, J, & Kupferschimd, M. (1988). *Introduction to Operation Research*. New York: John Wiley & Sons.
- Gross, D, & Harris, C. M. (1998). *Fundamental of Queuing Theory 3rd*. New York: John Wiley & Sons.
- Hiller, F. S, & Lieberman, G. J. (2005). *Introduction to Operations Research*. New York: McGraw-Hill.
- Hogg, R. V, & Tanis, E. A. (2001). *Probability and Statistical Inference*. 6th. ed. New Jersey: Prentice Hall International, Inc.
- Kreeyszig, E. (2003). *Advance Engineering Mathematics*. New York: John Wiley & Sons.
- Medhy, J. (1991). *Stochastic Processes*. New York: John Wiley & Sons.
- M. Tabari, Y. Gholipour-Kanani, M. Seifi-Divkolaii and Reza Tavakkoli-Moghaddam. (2012). *Application of the Queuing Theory to Human Resource Management*. *World Applied Sciences Journal Volume 17* (Nomor 9). Hlm. 1211-1218.
- Nai-shuo Tian, Ji-hong Li, Zhe George Zhang. (2009). *Matrix Analytic Method and Working Vacation Queues – A Survey*. *International Journal of Information and Management Sciences, Volume 20* (Nomor 4 tahun 2009). Hlm. 603-633.
- Ross, S. M. (1983). *Stochastic Processes*. New York: John Wiley & Sons.
- Sinalungga, S. (2008). *Pengantar Teknik Industri*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Siswanto. (2007). *Operations Research*. Jakarta: Erlangga.
- Taha, A. H. (2007). *Operations Research an Introduction*. New Jersey: Pearson Education, Inc.
- Taha, A. H. (1997). *Riset Operasi*. (Terjemahan Daniel Wirajaya). Jakarta: Bina Rupa Aksara.
- Varberg, D, & Purcell, E. J. (2001). *Kalkulus Jilid 1*. (Terjemahan 1 Nyoman Susila). Batam: Interaraksa.
- Wagner, H. (1972). *Principles of Operations Research “With Applications to Manegerial Decisions*. London: Prentice-Hall.

- Wospakrik, H. (1996). *Teori dan Soal-Soal Operations research*. Bandung: Erlangga.
- Winston, W. L. (1994). *Operations Research*. California: Duxbury Press.
- Yutaka Baba. (2012). The $M^X/M/1$ Queue with Multiple Working Vacation. *American Journal of Operations Research* (Nomor 2) Hlm. 217-224
- Yue, Wuyi dkk. (2009). *Advances in Queueing Theory and Network Applications*. New York: Springer Science and Business Media.

Lampiran 1. Tampilan hasil *generate* Data Waktu Pelayanan Pelanggan**Tabel 4.1 Hasil *generate* Data Waktu Pelayanan Pelanggan**

No.	Hasil Generate (lama pelayanan)	No.	Hasil Generate (lama pelayanan)
1	1.47	56	3.95
2	1.15	57	0.88
3	0.04	58	0.10
4	2.07	59	0.14
5	2.31	60	1.81
6	2.67	61	0.60
7	0.62	62	1.38
8	0.26	63	0.21
9	2.62	64	0.52
10	0.86	65	1.05
11	1.60	66	1.26
12	0.77	67	0.27
13	2.49	68	2.09
14	1.83	69	0.10
15	0.88	70	0.38
16	1.16	71	2.59
17	0.13	72	0.33
18	2.89	73	0.69
19	0.33	74	0.93
20	2.08	75	0.27
21	0.27	76	0.03
22	1.00	77	1.20
23	0.41	78	1.45
24	2.36	79	0.67
25	0.97	80	0.82
26	1.30	81	3.30
27	1.64	82	0.22
28	0.71	83	3.50
29	1.22	84	2.04
30	0.26	85	0.23
31	0.76	86	4.63
32	0.66	87	0.89
33	2.38	88	3.64
34	0.87	89	5.46

35	1.32	90	0.75
36	1.87	91	0.53
37	1.74	92	0.64
38	3.15	93	1.19
39	0.12	94	0.03
40	4.63	95	1.36
41	0.21	96	0.61
42	3.78	97	1.07
43	1.78	98	1.28
44	0.06	99	0.70
45	1.01	100	1.00
46	0.23	101	0.12
47	1.63	102	1.34
48	3.31	103	0.54
49	1.12	104	0.65
50	0.25	105	0.33
51	1.31	106	0.25
52	0.11	107	1.32
53	1.38	108	0.59
54	1.47	109	1.84
55	0.24	110	3.84

Selanjutnya hasil *generate* data *dicopy-paste* ke Microsoft Excel, kemudian dikonversi ke dalam format jam:menit:detik (hh:mm:ss) menjadi seperti berikut

No.	Hasil Generate	Lama Pelayanan	No.	Hasil Generate	Lama Pelayanan
1	1.47	0:01:28	56	3.95	0:03:57
2	1.15	0:01:08	57	0.88	0:00:52
3	0.04	0:00:02	58	0.10	0:00:05
4	2.07	0:02:04	59	0.14	0:00:08
5	2.31	0:02:18	60	1.81	0:01:48
6	2.67	0:02:40	61	0.60	0:00:35
7	0.62	0:00:37	62	1.38	0:01:22
8	0.26	0:00:15	63	0.21	0:00:12
9	2.62	0:02:37	64	0.52	0:00:30
10	0.86	0:00:51	65	1.05	0:01:03
11	1.60	0:01:35	66	1.26	0:01:15
12	0.77	0:00:46	67	0.27	0:00:15
13	2.49	0:02:29	68	2.09	0:02:05
14	1.83	0:01:49	69	0.10	0:00:05
15	0.88	0:00:52	70	0.38	0:00:22
16	1.16	0:01:09	71	2.59	0:02:35
17	0.13	0:00:07	72	0.33	0:00:19
18	2.89	0:02:53	73	0.69	0:00:41
19	0.33	0:00:19	74	0.93	0:00:55
20	2.08	0:02:04	75	0.27	0:00:16
21	0.27	0:00:16	76	0.03	0:00:01
22	1.00	0:01:00	77	1.20	0:01:12
23	0.41	0:00:24	78	1.45	0:01:26
24	2.36	0:02:21	79	0.67	0:00:40
25	0.97	0:00:58	80	0.82	0:00:49
26	1.30	0:01:18	81	3.30	0:03:18
27	1.64	0:01:38	82	0.22	0:00:13
28	0.71	0:00:42	83	3.50	0:03:30
29	1.22	0:01:13	84	2.04	0:02:02
30	0.26	0:00:15	85	0.23	0:00:13
31	0.76	0:00:45	86	4.63	0:04:37
32	0.66	0:00:39	87	0.89	0:00:53
33	2.38	0:02:22	88	3.64	0:03:38

34	0.87	0:00:52	89	5.46	0:05:27
35	1.32	0:01:19	90	0.75	0:00:44
36	1.87	0:01:52	91	0.53	0:00:31
37	1.74	0:01:44	92	0.64	0:00:38
38	3.15	0:03:09	93	1.19	0:01:11
39	0.12	0:00:06	94	0.03	0:00:01
40	4.63	0:04:37	95	1.36	0:01:21
41	0.21	0:00:12	96	0.61	0:00:36
42	3.78	0:03:46	97	1.07	0:01:03
43	1.78	0:01:46	98	1.28	0:01:16
44	0.06	0:00:03	99	0.70	0:00:42
45	1.01	0:01:00	100	1.00	0:01:00
46	0.23	0:00:13	101	0.12	0:00:07
47	1.63	0:01:38	102	1.34	0:01:20
48	3.31	0:03:18	103	0.54	0:00:32
49	1.12	0:01:07	104	0.65	0:00:39
50	0.25	0:00:15	105	0.33	0:00:19
51	1.31	0:01:18	106	0.25	0:00:15
52	0.11	0:00:06	107	1.32	0:01:19
53	1.38	0:01:22	108	0.59	0:00:35
54	1.47	0:01:28	109	1.84	0:01:50
55	0.24	0:00:14	110	3.84	0:03:50

Lampiran 2. Data Waktu Kedatangan Pelanggan, Waktu Mulai Dilayani, Waktu

Selesai Dilayani, dan Lama Waktu Pelayanan Pelanggan

No	Waktu Kedatangan	Mulai Dilayani	Selesai Dilayani	Lama Pelayanan
1	7:30:00	7:37:00	7:38:28	0:01:28
2	7:30:00	7:38:48	7:39:56	0:01:08
3	7:30:00	7:40:01	7:40:03	0:00:02
4	7:30:00	7:40:11	7:42:15	0:02:04
5	7:30:00	7:42:24	7:44:42	0:02:18
6	7:30:00	7:44:52	7:47:32	0:02:40
7	7:30:00	7:47:37	7:48:14	0:00:37
8	7:30:00	7:48:21	7:48:36	0:00:15
9	7:30:00	7:48:46	7:51:23	0:02:37
10	7:30:00	7:51:29	7:52:20	0:00:51
11	7:30:00	7:52:27	7:54:02	0:01:35
12	7:30:00	7:54:11	7:54:57	0:00:46
13	7:30:00	7:55:04	7:57:33	0:02:29
14	7:30:00	7:57:43	7:59:32	0:01:49
15	7:30:00	7:59:45	8:00:37	0:00:52
16	7:30:00	8:00:45	8:01:54	0:01:09
17	8:00:00	8:02:01	8:02:08	0:00:07
18	8:00:00	8:02:16	8:05:09	0:02:53
19	8:00:00	8:05:19	8:05:38	0:00:19
20	8:00:00	8:05:46	8:07:50	0:02:04
21	8:00:00	8:08:02	8:08:18	0:00:16
22	8:00:00	8:08:28	8:09:28	0:01:00
23	8:00:00	8:09:43	8:10:07	0:00:24
24	8:00:00	8:10:21	8:12:42	0:02:21
25	8:00:00	8:12:52	8:13:50	0:00:58
26	8:00:00	8:14:02	8:15:20	0:01:18
27	8:00:00	8:15:29	8:17:07	0:01:38
28	8:00:00	8:17:18	8:18:00	0:00:42
29	8:00:00	8:18:20	8:19:33	0:01:13
30	8:00:00	8:19:45	8:20:00	0:00:15
31	8:00:00	8:20:33	8:21:18	0:00:45
32	8:00:00	8:21:29	8:22:08	0:00:39
33	8:00:00	8:22:22	8:24:44	0:02:22
34	8:00:00	8:24:52	8:25:44	0:00:52

Lanjutan lampiran 2

35	8:00:00	8:25:52	8:27:11	0:01:19
36	9:05:00	9:06:00	9:07:52	0:01:52
37	9:05:00	9:08:01	9:09:45	0:01:44
38	9:05:00	9:09:52	9:13:01	0:03:09
39	9:05:00	9:13:10	9:13:16	0:00:06
40	9:05:00	9:13:26	9:18:03	0:04:37
41	9:05:00	9:18:13	9:18:25	0:00:12
42	9:05:00	9:18:34	9:22:20	0:03:46
43	9:05:00	9:22:28	9:24:14	0:01:46
44	9:05:00	9:24:22	9:24:25	0:00:03
45	9:05:00	9:24:32	9:25:32	0:01:00
46	9:05:00	9:25:45	9:25:58	0:00:13
47	9:05:00	9:26:02	9:27:40	0:01:38
48	9:05:00	9:27:53	9:31:11	0:03:18
49	9:05:00	9:31:21	9:32:28	0:01:07
50	9:05:00	9:32:41	9:32:56	0:00:15
51	9:05:00	9:33:07	9:34:25	0:01:18
52	9:05:00	9:34:35	9:34:41	0:00:06
53	9:05:00	9:34:50	9:36:12	0:01:22
54	9:05:00	9:36:34	9:38:02	0:01:28
55	9:05:00	9:38:29	9:38:43	0:00:14
56	9:05:00	9:38:53	9:42:50	0:03:57
57	9:05:00	9:42:57	9:43:49	0:00:52
58	9:05:00	9:43:59	9:44:04	0:00:05
59	9:05:00	9:44:25	9:44:33	0:00:08
60	9:05:00	9:44:45	9:46:33	0:01:48
61	9:05:00	9:46:44	9:47:19	0:00:35
62	9:05:00	9:47:22	9:48:44	0:01:22
63	9:05:00	9:48:55	9:49:07	0:00:12
64	9:05:00	9:49:15	9:49:45	0:00:30
65	9:05:00	9:49:53	9:50:56	0:01:03
66	9:05:00	9:51:02	9:52:17	0:01:15
67	10:30:20	10:31:20	10:31:35	0:00:15
68	10:30:20	10:31:42	10:33:47	0:02:05
69	10:30:20	10:34:00	10:34:05	0:00:05
70	10:30:20	10:35:10	10:35:32	0:00:22
71	10:30:20	10:35:41	10:38:16	0:02:35
72	10:30:20	10:38:25	10:38:44	0:00:19
73	10:30:20	10:38:51	10:39:32	0:00:41
74	10:30:20	10:39:39	10:40:34	0:00:55

Lanjutan lampiran 2

75	10:30:20	10:40:40	10:40:56	0:00:16
76	10:30:20	10:41:01	10:41:02	0:00:01
77	10:30:20	10:41:09	10:42:21	0:01:12
78	10:30:20	10:42:29	10:43:55	0:01:26
79	10:30:20	10:44:01	10:44:41	0:00:40
80	10:30:20	10:44:49	10:45:38	0:00:49
81	10:30:20	10:45:43	10:49:01	0:03:18
82	10:30:20	10:49:09	10:49:22	0:00:13
83	10:30:20	10:49:32	10:53:02	0:03:30
84	10:30:20	10:53:11	10:55:13	0:02:02
85	10:30:20	10:55:23	10:55:36	0:00:13
86	10:30:20	10:55:42	11:00:19	0:04:37
87	10:30:20	11:00:29	11:01:22	0:00:53
88	10:30:20	11:01:35	11:05:13	0:03:38
89	11:04:50	11:05:20	11:10:47	0:05:27
90	11:04:50	11:10:55	11:11:39	0:00:44
91	11:04:50	11:11:47	11:12:18	0:00:31
92	11:04:50	11:12:29	11:13:07	0:00:38
93	11:04:50	11:13:14	11:14:25	0:01:11
94	11:04:50	11:14:33	11:14:34	0:00:01
95	11:04:50	11:14:44	11:16:05	0:01:21
96	11:04:50	11:16:13	11:16:49	0:00:36
97	11:04:50	11:16:59	11:18:02	0:01:03
98	11:04:50	11:18:20	11:19:36	0:01:16
99	11:04:50	11:19:45	11:20:27	0:00:42
100	11:04:50	11:20:35	11:21:35	0:01:00
101	11:04:50	11:21:47	11:21:54	0:00:07
102	11:04:50	11:22:03	11:23:23	0:01:20
103	11:04:50	11:23:33	11:24:05	0:00:32
104	11:04:50	11:24:14	11:24:53	0:00:39
105	11:04:50	11:25:02	11:25:21	0:00:19
106	11:04:50	11:25:33	11:25:48	0:00:15
107	11:04:50	11:25:59	11:27:18	0:01:19
108	11:04:50	11:27:30	11:28:05	0:00:35
109	11:04:50	11:28:15	11:30:05	0:01:50
110	11:04:50	11:30:13	11:34:03	0:03:50
	Jumlah			2:20:27 atau 2,34 jam

Lampiran 3. Uji Kesesuaian Distribusi Kedatangan Pelanggan, Waktu Pelayanan Pelanggan, dan Waktu *Vacation* Menggunakan *One – Sample Kolmogorov Smirnov Test*.

1. Uji Distribusi Kedatangan Pelanggan

a. Ukuran Kelompok yang Masuk Sistem Antrian

Tabel Ukuran Kelompok dan Waktu Antar Kedatangan Tiap

Kelompok

Kedatangan ke-	Ukuran kelompok	Waktu antar kedatangan
1	16	
2	19	0:30:00
3	31	1:05:00
4	22	1:25:20
4	22	0:34:30
Jumlah	110	3:34:50 atau 3,6 jam

Langkah – langkah pengujian:

1. H_0 : Ukuran kelompok berdistribusi Poisson
2. H_1 : Ukuran kelompok tidak berdistribusi Poisson
3. $\alpha = 0,05$
4. Wilayah kritik: H_0 ditolak jika angka signifikan $< \alpha$

Lanjutan lampiran 3.

5. Perhitungan dengan *software SPSS*

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test		
		ukuran kel
N		5
Poisson Parameter ^{a, b}	Mean	22.0000
Most Extreme Differences	Absolute	.244
	Positive	.244
	Negative	-.159
Kolmogorov-Smirnov Z		.545
Asymp. Sig. (2-tailed)		.928

a. Test distribution is Poisson.

b. Calculated from data.

6. Keputusan

Hasil pengujian kesesuaian ukuran kedatangan pelanggan diperoleh angka signifikan lebih besar dari α yaitu $0,928 > 0,05$ jadi H_0 diterima. Simpulannya bahwa ukuran kelompok yang masuk ke dalam sistem antrian berdistribusi Poisson, dengan rata – rata 22.

b. Laju Kedatangan Pelanggan

Laju kedatangan pelanggan		
No	Waktu	Jumlah Kedatangan
1	07.30-08.29	2
2	08.30-09.29	1
3	09.30-10.29	0
4	10.30-11.29	2

Lanjutan lampiran 3.

Langka – langkah pengujian:

1. H_0 : Laju kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson
2. H_1 : Laju kedatangan pelanggan tidak berdistribusi Poisson
3. $\alpha = 0,05$
4. Wilayah kritik: H_0 ditolak jika angka signifikan $< \alpha$
5. Perhitungan dengan *software SPSS*

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		jml kedatangan
N		4
Poisson Parameter ^{a,b}	Mean	1.2500
Most Extreme Differences	Absolute	.145
	Positive	.132
	Negative	-.145
Kolmogorov-Smirnov Z		.289
Asymp. Sig. (2-tailed)		1.000

a. Test distribution is Poisson.

b. Calculated from data.

6. Kesimpulan

Dari output tersebut angka signifikan lebih besar dari α yaitu 1,000 $> 0,05$ jadi H_0 diterima, simpulanya bahwa laju kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson dengan rata – rata 1,25.

2. Uji Distribusi Waktu Pelayanan

Berdasarkan lama waktu pelayanan pada tabel dalam lampiran 1, dilakukan uji distribusi waktu pelayanan sebagai berikut

Langkah – langkah pengujian:

1. H_0 : Waktu pelayanan pelanggan berdistribusi Eksponensial
2. H_1 : Waktu pelayanan pelanggan tidak berdistribusi Eksponensial
3. $\alpha = 0,05$
4. Wilayah kritik: H_0 ditolak jika angka signifikan $< \alpha$
5. Perhitungan dengan *software SPSS*

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		lamapelayana n
N		110
Exponential parameter. ^a ..b	Mean	0:01:16.609
Most Extreme Differences	Absolute	.076
	Positive	.030
	Negative	-.076
Kolmogorov-Smirnov Z		.795
Asymp. Sig. (2-tailed)		.552

a. Test Distribution is Exponential.

b. Calculated from data.

6. Kesimpulan:

Dari output tersebut angka signifikan lebih besar dari α yaitu 0,552 $> 0,05$ jadi H_0 diterima, simpulannya bahwa waktu pelayanan pelanggan berdistribusi Eksponensial dengan rata – rata waktu pelayanan tiap pelanggan adalah 00:01:16,609 $\approx 1,276$ menit.

Jadi $\frac{1}{\mu} = 1,276$ menit = 0,02126 jam, berarti $\mu = 47$ pelanggan/jam.

3. Uji Distribusi Waktu *Vacation*

Berikut ini data lama waktu *vacation* yang dilakukan petugas

<i>Vacation</i> ke-	Lama <i>vacation</i>
1	0:38:47
2	0:39:01

Langkah – langkah pengujian:

1. H_0 : Waktu *vacation* berdistribusi Eksponensial
2. H_1 : Waktu *vacation* tidak berdistribusi Eksponensial
3. $\alpha = 0,05$
4. Wilayah kritik: H_0 ditolak jika angka signifikan $< \alpha$
5. Perhitungan dengan *software SPSS*

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test		
		lama vacation
N		2
Exponential parameter. ^a	Mean	0:38:54.000
Most Extreme Differences	Absolute	.631
	Positive	.367
	Negative	-.631
Kolmogorov-Smirnov Z		.892
Asymp. Sig. (2-tailed)		.403

a. Test Distribution is Exponential.

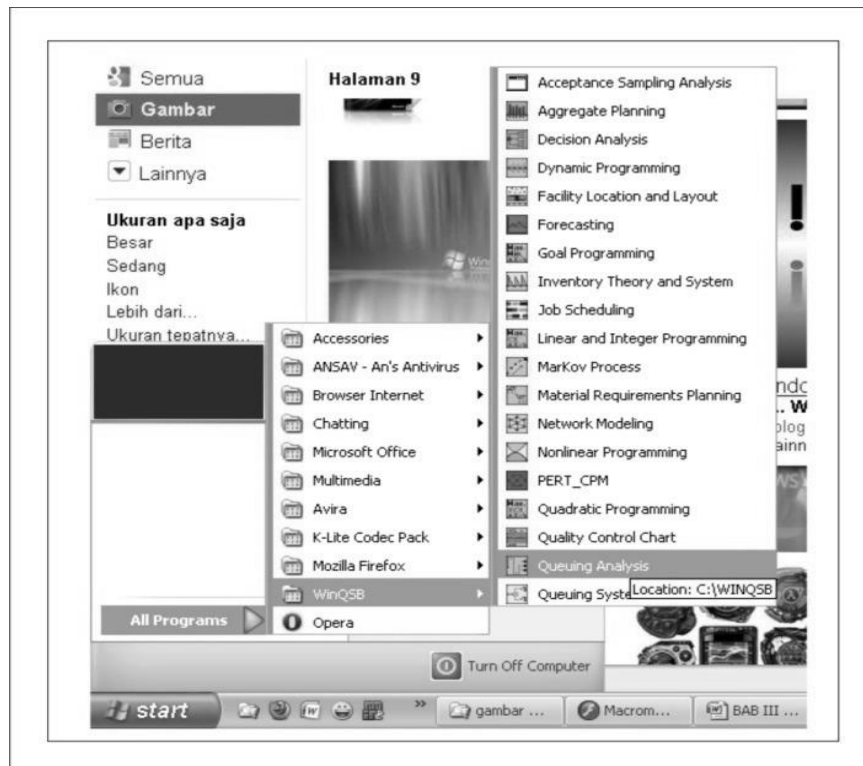
b. Calculated from data.

6. Kesimpulan:

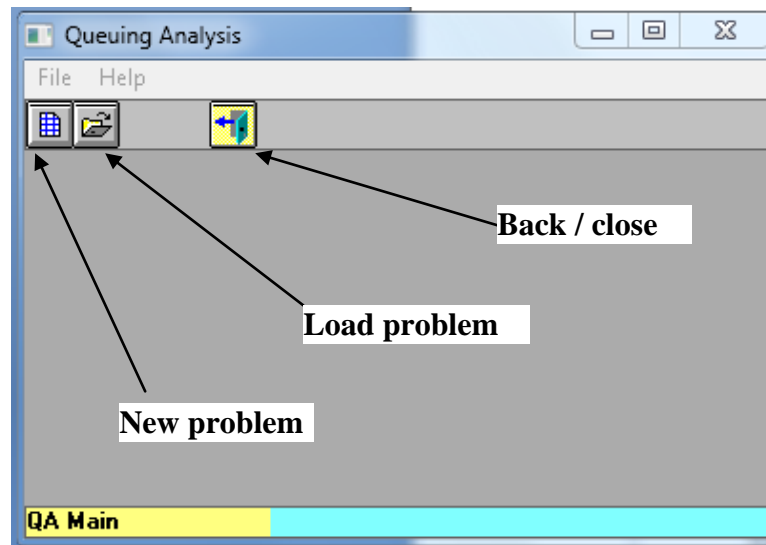
Dari output tersebut angka signifikan lebih besar dari α yaitu 0,403 $> 0,05$ jadi H_0 diterima. Simpulannya waktu *vacation* berdistribusi Eksponensial dengan rata – rata waktu *vacation* $\theta = 00:38:54 = 38,9$ menit $= 0,648 \approx 0,65$ jam.

Lampiran 4. Tampilan Langkah – Langkah Penggunaan Software WINQSB
Untuk Penyelesaian Masalah Atrian Dengan Pola Kedatangan
Berkelompok

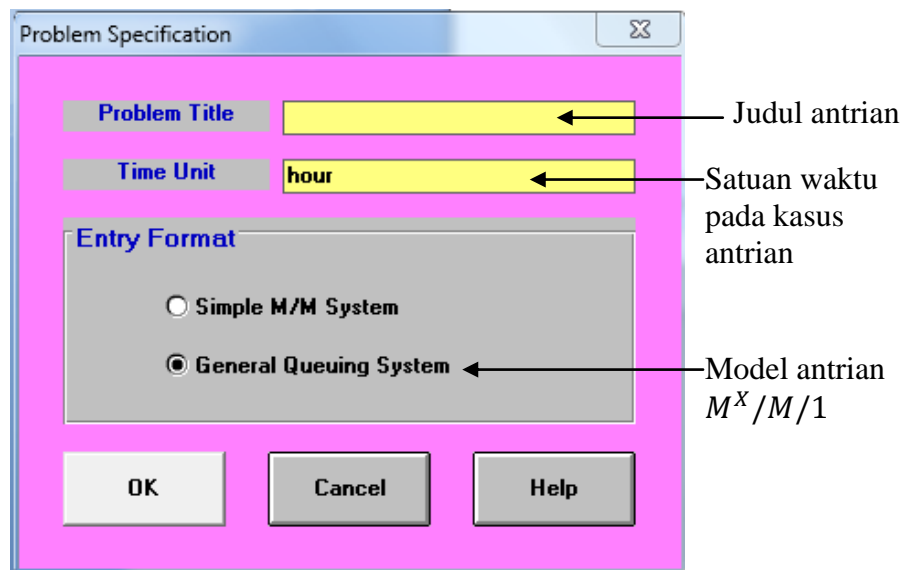
1. Tampilan Membuka Aplikasi Dengan Cara Klik *Start* – All Program – *WinQSB – Queueing Analysis*



2. Tampilan awal dari *WinQSB*



3. Tampilan pilihan menu *Simple M/M system* dan *General Queuing System*



4. Tampilan kolom yang harus diisi

Data Description	ENTRY	
Number of servers		Banyak server
Service time distribution (in hour)	Exponential	Distribusi waktu pelayanan
Location parameter (a)		
Scale parameter (b>0) (b=mean if a=0)		Diisi $1/\mu$
(Not used)		
Service pressure coefficient		
Interarrival time distribution (in hour)	Exponential	Distribusi waktu kedatangan
Location parameter (a)		
Scale parameter (b>0) (b=mean if a=0)		Diisi $1/\lambda$
(Not used)		
Arrival discourage coefficient		
Batch (bulk) size distribution	Constant	
Constant value	1	Ukuran kelompok
(Not used)		
(Not used)		
Queue capacity (maximum waiting space)	M	
Customer population	M	
Busy server cost per hour		
Idle server cost per hour		
Customer waiting cost per hour		
Customer being served cost per hour		
Cost of customer being balked		
Unit queue capacity cost		

5. Tampilan setelah kolom diisi

Queuing Analysis		
File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help		
QA Problem		
Number of servers : ENTRY	1	
Data Description	ENTRY	
Number of servers	1	
Service time distribution (in hour)	Exponential	
Location parameter (a)		
Scale parameter (b>0) (b=mean if a=0)	1/47	
(Not used)		
Service pressure coefficient		
Interarrival time distribution (in hour)	Exponential	
Location parameter (a)		
Scale parameter (b>0) (b=mean if a=0)	1/1.25	
(Not used)		
Arrival discourage coefficient		
Batch (bulk) size distribution	Constant	
Constant value	22	
(Not used)		
(Not used)		
Queue capacity (maximum waiting space)	M	
Customer population	M	
Busy server cost per hour		
Idle server cost per hour		
Customer waiting cost per hour		
Customer being served cost per hour		
Cost of customer being balked		
Unit queue capacity cost		

Kemudian klik *Solve and Analyze – Solve the Performance*

6. Tampilan hasil analisis *WINQSB*

09-28-2015	Performance Measure	Result
1	System: M(b)/M/1	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hour =	1.2500
3	Service rate per server (mu) per hour =	47.0000
4	Overall system effective arrival rate per hour =	27.5000
5	Overall system effective service rate per hour =	27.5000
6	Overall system utilization =	58.5106 %
7	Average number of customers in the system (L) =	16.2179
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	15.6328
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	26.7180
10	Average time customer spends in the system (W) =	0.5897 hours
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0.5685 hours
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0.9716 hours
13	The probability that all servers are idle (Po) =	41.4894 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	58.5106 %
15	Average number of customers being balked per hour =	0
16	Total cost of busy server per hour =	\$0
17	Total cost of idle server per hour =	\$0
18	Total cost of customer waiting per hour =	\$0
19	Total cost of customer being served per hour =	\$0
20	Total cost of customer being balked per hour =	\$0
21	Total queue space cost per hour =	\$0
22	Total system cost per hour =	\$0

Lampiran 5. Program untuk Menghitung Ukuran Keefektifan Sistem Antrian

 $M^X/M/1$ (WV) dengan *software* MATLAB

```

disp('Program Menghitung Nilai Keefektifan Sistem
Antrian M^X/M/1 (WV) ');
disp(' ');
disp(' ');
lambda=input('masukkan laju kedatangan (lambda)=');
miu1=input('masukkan laju pelayanan (miu1)=');
miu2=input('masukkan laju pelayanan saat server
vacation (miu2)=');
teta=input('masukkan rata-rata waktu vacation
(teta)=');
k=input('rata-rata ukuran kelompok (k)=');
c=input('banyak server (c)=');
disp('alpha=interval (0,1)');
disp('jika alpha=1 maka akan sama dengan alpha=0');
alpha=1;
A(alpha)=alpha;
rho=(lambda*k)/miu1;
delta=miu1+(lambda/teta)*(1-A(alpha))*(miu1-miu2);
disp(' ');
disp('nilai harapan banyak pelanggan dalam sistem pada
model M^X/M/1');
Ls=(lambda*(k^2+k))/((2*miu1)*(1-rho))
disp('panjang sistem tambahan saat server vacation')
Ld=((lambda*(miu1-miu2))*(k*teta+((lambda*k)-miu2)*(1-
A(alpha))))/(delta*teta^2)
disp('-----')
disp('nilai harapan banyak pelanggan dalam sistem')
L=Ls+Ld
disp('nilai harapan banyak pelanggan dalam antrian')
Lq_vacation=L-rho
disp('nilai harapan waktu tunggu pelanggan dalam sistem
(dalam jam)')
W=L*(1/(lambda*k))
disp('nilai harapan waktu tunggu pelanggan dalam
antrian (dalam jam)')
Wq_vacation=W-(1/miu1)

```

Apabila program tersebut dijalankan, hasilnya sebagai berikut

Program Menghitung Nilai Keefektifan Sistem Antrian $M^X/M/1(WV)$

masukkan laju kedatangan (λ)=1.25
 masukkan laju pelayanan (μ_1)=47
 masukkan laju pelayanan saat server vacation (μ_2)=0
 masukkan rata-rata waktu vacation (θ)=0.65
 rata-rata ukuran kelompok (k)=22
 banyak server (c)=1
 alpha=interval (0,1)
 jika alpha=1 maka akan sama dengan alpha=0

nilai harapan banyak pelanggan dalam sistem pada model $M^X/M/1$
 $L_s =$

16.2179

panjang sistem tambahan saat server vacation
 $L_d =$

42.3077

 nilai harapan banyak pelanggan dalam sistem
 $L =$

58.5256

nilai harapan banyak pelanggan dalam antrian
 $L_q_{\text{vacation}} =$

57.9405

nilai harapan waktu tunggu pelanggan dalam sistem (dalam jam)
 $W =$

2.1282

nilai harapan waktu tunggu pelanggan dalam antrian (dalam jam)
 $W_q_{\text{vacation}} =$

2.1069