BAB II

KAJIAN TEORI

A. Profil PT Madubaru Yogyakarta

PT (Perseroan Terbatas) Madubaru Yogyakarta adalah sebuah PT yang memproduksi gula dan spritus di Yogyakarta. Berdasarkan undang-undang Nomor 40 tahun 2007 tentang Perseroan Terbatas dalam pasal 1, Perseroan Terbatas, yang selanjutnya disebut Perseroan adalah badan hukum yang merupakan persekutuan modal, didirikan berdasarkan perjanjian, melakukan kegiatan usaha dengan modal dasar yang seluruhnya terbagi dalam saham dan memenuhi persyaratan yang ditetapkan dalam Undang-Undang ini serta peraturan pelaksanaannya.

Mungkin tidak banyak yang mengetahui bahwa di Daerah Istimewa Yogyakarta dahulu kala terdapat banyak pabrik gula, Dengan luasan daerah yang tidak begitu besar wilayah ini memiliki 17 Pabrik gula yakni PG. Randugunting, PG. Tanjungtirto, PG Kedaton Pleret, PG Wonocatur, PG padokan, PG Bantul, PG Barongan, PG Sewu Galur, PG Gondanglipuro, PG Pundong, PG Gesikan, PG Rewulu, PG Demakijo, PG Cebongan, PG Beran, PG Medari, dan PG Sendangpitu, namun pada jaman mallaise atau lebih disebut jaman meleset yakni supply gula dunia berlebih maka banyak pabrik tersebut yang tutup. Setelah ada kesepakatan perdagangan tahun 1931 yang terkenal dengan *Charbourne Agreement* yang berdampak pada pengurangan produksi gula termasuk di Yogyakarta dari sekitar 3 juta ton menjadi 1,4 juta ton per tahun. Akhirnya dari 17 hanya tersisa 8 pabrik gula yakni PG. Tanjungtirto, PG Kedaton Pleret, PG Padokan, PG Gondanglipuro, PG Gesikan, PG Beran, PG Medari, namun saying saat agresi militer ke II tahun 1948 semua bangunan pabrik tersebut dibumi hanguskan dan rata dengan tanah tapi masih ada beberapa yang menyisakan temboknya saja. Pada tahun 1955 di atas bangunan Pabrik gula Padokan yang turut dibumi hanguskan dibangun PG-PS Madukismo atas prakarsa Sri Sultan Hamengku Buwono ke IX dan diresmikan oleh Presiden RI I yakni Ir. Soekarno dan mulai berproduksi tahun itu juga.

Pabrik gula Madukismo yang beralamat di Desa Padokan Tirtonirmolo Kasihan Bantul ini berdiri sejak 14 Juni 1955 dan diberi nama PT Madubaru yang kemudian dibagi menjadi dua pabrik yaitu pabrik gula (PG Madukismo) dan pabrik spritus (PS Madukismo). Pabrik ini mengemban tugas untuk mensukseskan program pengadaan pangan nasional, khusunya gula pasir.

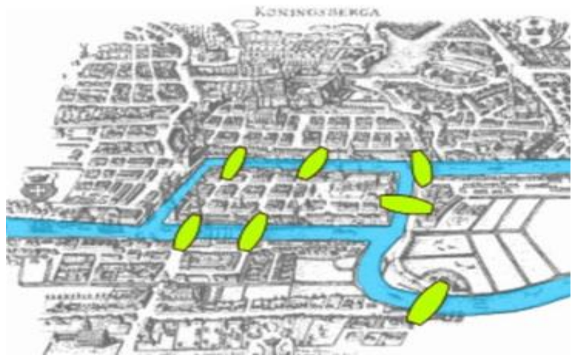
PT Madubaru memiliki 1000 karyawan untuk memproduksi gula merk MK (Madukismo) dengan rincian 200 adalah karyawan tetap dan 800 merupakan buruh yang dipekerjakan hanya pada saat proses penggilingan tebu. PT Madubaru dipimpin oleh seorang Direktur dan dibantu oleh kepala bagian dan staf yang terdapat dalam struktur organisasi PT Madubaru. Kepala bagian ini memimpin dan bertanggung jawab dalam suatu bagian kerja. Pada setiap bagian kerja terdapat kepala bagian, staf serta karyawan-karyawan lain sebagai pelaksana.

Setiap bagian kerja pada PT Madubaru Yogyakarta memiliki struktur organisasi yang jelas dan juga telah memiliki alur kerja. Masing-masing karyawan di

PT Madubaru Yogyakarta telah mempunyai deskripsi kerja di bidang penempatan mereka. Seiring dengan besarnya *demand* dari pelanggan dan terus berkembangnya perusahaan ini maka hubungan-hubungan atau koordinasi antar karyawanpun semakin kompleks sehingga pola koordinasi yang teroganisir ini dikhawatirkan tidak terbentuk seperti apa yang ada dalam struktur secara formal. Untuk mengetahui lebih lanjut tentang jejaring sosial pada PT Madubaru Yogyakarta maka dalam penelitian ini akan dilakukan analisis jejaring sosial yang terbentuk menggunakan graf berarah.

B. Sejarah Graf

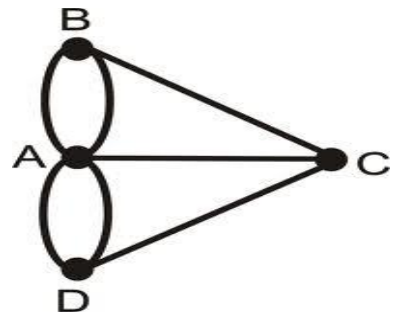
Salah satu cabang ilmu matematika yang terus berkembang hingga saat ini dan sangat berguna di berbagai bidang adalah teori graf. Menurut catatan sejarah, teori graf berawal dari upaya untuk menyelesaikan permasalahan jembatan *Konigsberg*. Kota *Konigsberg* yang sekarang bernama *Kalinigrad* dan terletak di sebelah timur *Prussia* ini dahulunya memiliki sungai yang bernama *Pregal*. Sungai *Pregal* mengalir mengitari pulau *Kneiphof* lalu bercabang menjadi dua anak sungai. Untuk memungkinkan warga kota *Konigsberg* berpergian dengan mudah dari satu bagian kota ke bagian yang lain maka terdapat tujuh jembatan yang tersebar di atas sungai *Pregal* (Biggs, Lloyd, Wilson, 1976:1) seperti yang digambarkan pada gambar 2.1.



Gambar 2.1 Ilustrasi Kota Konigsberg Beserta Tujuh Jembatannya

Permasalahan muncul ketika penduduk sekitar ingin melakukan penyeberangan dimana mereka harus melewati ketujuh jembatan tersebut tepat satu kali dan kembali ketempat semula. Para penduduk mencoba-coba untuk berjalan melalui tujuh jembatan tersebut tepat satu kali dan kembali ketempat dimana mereka memulai. Setelah beberapa kali mencoba dan gagal, sebagian penduduk kota *Konigsberg* sepakat bahwa hal tersebut tidak dapat dilakukan. Namun mereka juga tidak dapat memberikan alasan yang tepat.

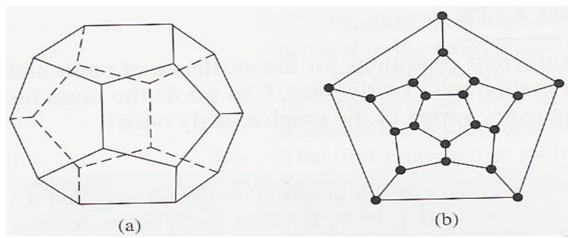
Akhirnya pada tahun 1736 seorang matematikawan asal Swiss, Leonard Euler dapat memecahkan persoalan jembatan *Konigsberg* tersebut. Pemecahan persoalan jembatan *Konigsberg* tersebut ditulis dalam sebuah artikel yang berjudul "*Solutio Problematis ad Geometrian Situs Pertinentis*" (Harju, 2012:2). Dalam artikel tersebut, Euler memodelkan persoalan jembatan *Konigsberg* dengan menggunakan graf, dimana daerah yang dihubungkan oleh jembatan dinotasikan sebagai simpul (*vertex*) dan ketujuh jembatan tersebut dinyatakan sebagai rusuk (*edge*). Artikel ini sangat penting bagi perkembangan ilmu teori graf dan perkembangan matematika secara keseluruhan.



Gambar 2.2 Graf yang Merepresentasikan Jembatan Konigsberg

Lebih dari satu abad kemudian setelah artikel Euler tentang jembatan *Konigsberg*, tepatnya pada tahun 1847, teori graf mulai dikaji lagi oleh G. R Krichoff yang berhasil mengembangkan teori pohon (*theory of trees)* yang digunakan dalam persoalan jejaring listrik. Kemudian pada tahun 1850-an A. Cayley juga menggunakan teori pohon untuk menjelaskan masalah hidrokarbon dalam ilmu kimia. Pada tahun 1875, Cayley berhasil menuliskan metode yang sistematis tentang "*carbon-tree*" yang dibacakan pada *British Association* (Biggs, Lloyd, Wilson, 1976:63).

Menurut Ed Pegg Jr (2009), pada tahun 1857 Sir William Rowan Hamilton menemukan sebuah permainan yang berbentuk *dodecahedron* beraturan, yaitu sebuah *polihedron* dengan 12 muka dan 20 pojok. Setiap pojok dari *dodecahedron* tersebut diberi label dengan nama-nama kota terkenal seperti New York, Paris, London, dll. Permasalahan dari permainan ini adalah pencarian rute melalui sisi-sisi dari *dodecahedron* tersebut, dimana pemain harus melalui 20 kota yang terdapat pada sisi *dedocahedron* tersebut tepat satu kali. Permasalahan dalam permainan ini sangat mirip dengan masalah jembatan *Konigsberg*, dan dapat diselesaikan dengan cara merepresentasikan *dodecahedron* tersebut kedalam sebuah sebuah graf. Sehingga pencarian rute dalam permainan tersebut dapat diselesaikan dengan menggambarkan graf dan membuat gelang (*loop*) untuk melewati semua simpul di dalam graf tersebut. Pemecahan masalah ini dikenal dengan nama *Hamiltonian Cycle* seperti yang ditunjukan pada gambar 2.3.



Gambar 2.3 (a) *Dedocahedron* dan (b) *Hamiltonian Cycle*

Setelah masa Hamilton, teori graf kembali berkembang pada tahun 1920-an. Seorang ahli matematika bernama Konig berupaya mengumpulkan hasil-hasil pemikiran para ahli matematika yang lain yang berkaitan dengan teori graf untuk kemudian dijadikan sebuah buku yang diterbitkan pada tahun 1926. Semakin mendekati masa kini, semakin banyak penelitian dalam teori graf yang dilakukan oleh para ahli matematika. Banyak sekali buku-buku dan artikel yang telah diterbitkan untuk menunjang pembelajaaran lebih lanjut terkait teori graf.

C. Pengertian Graf

Sebuah graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E) , dengan V adalah himpunan tak kosong dari simpul-simpul (*vertices*) pada G. Sedangkan E adalah himpunan rusuk (*edge*) pada G yang menghubungkan sepasang simpul.

Himpunan simpul pada *G* dinotasikan sebagai *V*, dan himpunan rusuk pada *G* dinotasikan sebagai *E*. Jadi *G=(V, E)* (Harju, 2012:4).

Menurut Siang (2002:187), suatu graf *G* terdiri dari 2 himpunan yang berhingga, yaitu himpunan titik-titik tidak kosong (*V(G)*) dan himpunan garis-garis (*E(G)*).

Jadi, suatu graf *G* adalah pasangan himpunan *V* dan *E*, dituliskan *G* = (*V*,*E*), dengan *V* adalah suatu himpunan berhingga dan *E* adalah suatu himpunan rusuk yang bersisian dengan *V*.

D. Terminologi Graf

Pada saat mempelajari graf, terdapat beberapa terminologi (istilah) yang sering digunakan. Istilah-istilah tersebut antara lain adalah sebagai berikut.

1. Gelang (*Loop*)

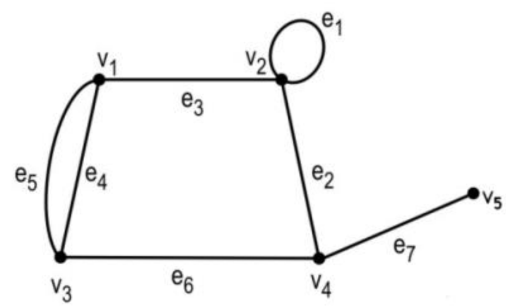
   Menurut Munir (2005), suatu rusuk dikatakan gelang apabila ujung rusuknya berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

2. Rusuk Ganda (*Multiple Edges*)

   Pada sebuah graf, terdapat kemungkinan bahwa terdapat lebih dari satu rusuk yang bersisian dengan sepasang simpul. Rusuk tersebut dinamakan rusuk ganda.

3. Bertetangga (*Adjacent*)

   Dua buah simpul pada graf tak berarah *G* dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah rusuk. (Harju, 2012). Dengan kata lain, *u* bertetangga dengan *v* jika (*u*, *v*) adalah sebuah rusuk pada graf.



Gambar 2.4 Graf *A*

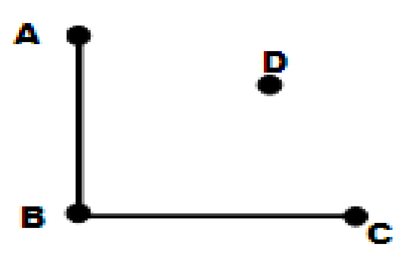
Pada Gambar 2.4, simpul v_1 bertetangga dengan simpul v_2, e_1 merupakan gelang, dan antara v_1 dan v_3 terdapat rusuk ganda e_5 dan e_4.

4. Bersisian (*Incident*)

   Untuk sembarang rusuk $e = (u, v)$, rusuk e dikatakan bersisian dengan simpul u dan simpul v. Pada Gambar 2.4 rusuk e_7 bersisian dengan v_4 dan v_5. Sedangkan e_2 tidak bersisian dengan v_1 maupun v_2.

5. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)

   Simpul terpencil ialah simpul yang tidak mempunyai rusuk yang bersisian dengannya atau dapat juga dinyatakan bahwa simpul terpencil adalah simpul yang tidak satupun bertetangga dengan simpul-simpul lainnya, seperti yang ditunjukan pada gambar 2.5.



Gambar 2.5 Graf *G* dengan Simpul Terpencil *D*

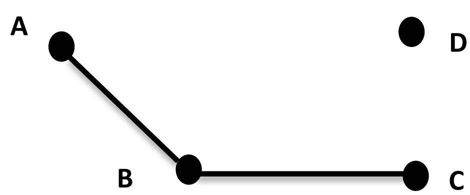
Simpul D dikatakan terpencil karena tidak mempunyai rusuk yang bersisian dengannya.

6. Graf Kosong (*Null Graph* atau *Empty Graph*)

   Graf kosong adalah graf yang himpunan rusuknya merupakan himpunan kosong. Graf kosong dapat dinotasikan dalam N_n, dimana n adalah banyaknya simpul.

7. Derajat (*Degree*)

   Derajat suatu simpul pada graf tak berarah adalah banyaknya ujung rusuk bersisian dengan simpul tersebut. Derajat suatu simpul dinotasikan dengan d, $d(v)$ menyatakan derajat simpul v. Pada Gambar 2.6 derajat simpul-simpulnya adalah d(A)=1, d(B)=2, d(C)=1, d(D)=0. d(A) dan d(D) dapat disebut sebagai anting-anting. Anting-anting (*pendant vertex*) adalah simpul yang berderajat satu.



Gambar 2.6 Contoh Graf N_3

Secara umum, jika terdapat g buah gelang dan e buah rusuk bukan gelang yang bersisian dengan simpul v, maka derajat simpul v dapat dinyatakan dengan rumus dibawah ini.

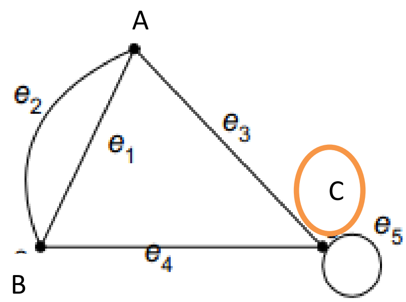
$$d(v) = 2g + e. \qquad (2.1)$$

Rusuk gelang mengkontribusikan dua untuk derajat simpulnya karena gelang direpresentasikan sebagai (v, v) dan simpul v bersisian dua kali pada rusuk (v,

v). Gambar 2.7 menunjukkan bahwa simpul 3 berderajat 4. Jika dihitung menggunakan persamaan (2.1) adalah sebagai berikut.

$$d(3) = 2.1 + 2 = 4.$$

Simpul 3 memiliki $d(3)$ = 4 karena memiliki 4 ujung rusuk bersisian dengan simpul 3, yaitu simpul 1, simpul 2 dan 1 loop pada simpul .



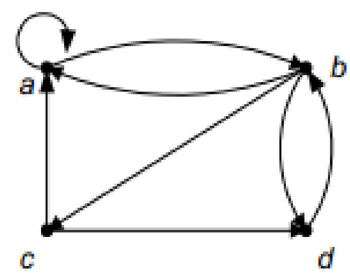
Gambar 2.7 Graf *E*

Pada graf berarah, derajat suatu simpul dibedakan menjadi dua macam untuk mencerminkan jumlah busur dengan simpul tersebut sebagai simpul asal, dan jumlah busur dengan simpul tersebut sebagai simpul terminal.

Secara umum, pada graf berarah derajat simpul v dapat dinyatakan dengan $d_{in}(v)$ dan $d_{out}(v)$. Dalam hal ini $d_{in}(v)$ atau derajat masuk (*in degree*) adalah banyaknya busur yang masuk ke simpul v. Sedangkan $d_{out}(v)$ atau derajat keluar (*out degree*) adalah banyaknya busur yang keluar dari simpul v. Jadi, derajat simpul v pada graf berarah merupakan penjumlahan dari derajat masuk dan derajat keluar.

$$d(v) = d_{in}(v) + d_{out}(v) \qquad (2.2)$$

Rusuk gelang pada graf berarah menyumbangkan satu untuk derajat masuk, dan satu untuk derajat keluar.



Gambar 2.8 Graf *H*

Gambar 2.8 adalah sebuah graf berarah, dimana derajat simpul-simpulnya dapat dinyatakan sebagai berikut.

$d_{in}(a) = 3$; $d_{out}(a) = 2$; $d(a) = 5$

$d_{in}(b) = 2$; $d_{out}(b) = 3$; $d(b) = 5$

$d_{in}(c) = 1$; $d_{out}(c) = 2$; $d(c) = 3$

$d_{in}(d) = 2$; $d_{out}(d) = 1$; $d(d) = 3$

Pada graf berarah $G = (V, E)$ selalu berlaku hubungan jumlahan dari banyaknya seluruh derajat masuk dari semua simpul pada graf G sama dengan jumlahan dari banyaknya seluruh derajat keluar dari semua simpul pada graf G sama dengan banyaknya rusuk pada graf G.

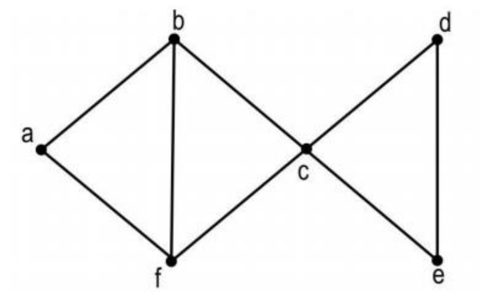
$$\sum_{v \in V} d_{in}(v) = \sum_{v \in V} d_{out}(v) = |E| \qquad (2.3)$$

Seperti pada Gambar 2.8 di atas jumlah rusuknya dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (2.3) seperti di bawah ini.

$$\sum_{v \in V} d_{in}(v) = 3 + 2 + 1 + 2 = 8 = \sum_{v \in V} d_{out}(v) = 2 + 3 + 2 + 1 = 8 = |E|$$

8. Perjalanan (*Walk*)

Perjalanan u-v di G dengan u,v merupakan simpul-simpul pada graf G adalah barisan berganti-ganti antara simpul dan rusuk dari G, diawali dengan simpul u dan diakhiri dengan simpul v.



Gambar 2.9 Graf D

Contoh perjalanan (*Walk*) dari simpul a ke simpul e pada Gambar 2.9 adalah a,f,c,e

9. Lintasan (*Path*)

Menurut Munir (2005), lintasan yang panjangnya n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_n di dalam graf G ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan rusuk-rusuk yang berbentuk v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., v_{n-1}, e_n, v_n sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2)$, ..., $e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah rusuk-rusuk dari graf G.

Lintasan pada graf merupakan perjalanan tanpa simpul dan rusuk berulang. Barisan c, cb, b, bf, f, pada Gambar 2.9 merupakan sebuah lintasan (*Path*) dari simpul c ke simpul f.

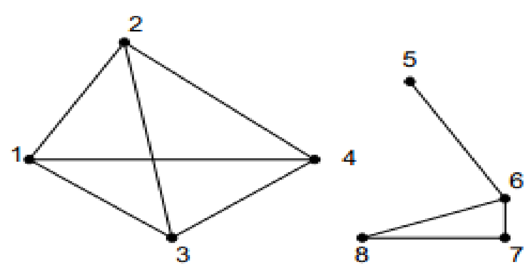
10. Siklus (*Cycle*) atau Sirkuit (*Circuit*)

Sirkuit atau siklus adalah lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama. Sebuah sirkuit dikatakan sirkuit sederhana (*simple sirkuit*) jika setiap rusuk yang dilalui berbeda. Contoh lintasan dari graf pada Gambar 2.9 adalah a-b-c-f-a.

11. Terhubung (*Connected*)

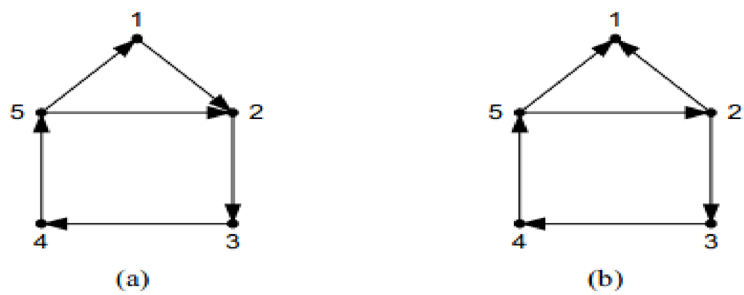
Dua buah simpul dalam graf, simpul *u* dan simpul *v* dikatakan terhubung jika terdapat lintasan dari *u* ke *v*. Jika setiap dua simpul di dalam graf terhubung, maka graf tersebut disebut sebagai graf terhubung (Siang:2002). Definisi mengenai graf terhubung dibagi menjadi dua, yaitu untuk graf tak berarah dan untuk graf berarah.

a. Menurut Munir (2005), graf tak berarah *G* disebut graf terhubung (*connected graph*) jika untuk setiap pasang simpul *u* dan *v* di dalam himpunan *V* terdapat lintasan dari *u* ke *v* (yang juga harus berarti ada lintasan dari *v* ke *u*). Jika tidak, maka *G* disebut graf tak terhubung (*disconnected graph*). Gambar 2.10 adalah contoh dari graf tak berarah yang tidak terhubung.



Gambar 2.10 Graf Tak Berarah Tidak Terhubung

b. Graf berarah *G* dikatakan terhubung jika graf tak berarahnya terhubung. Graf tak berarah G disebut graf tidak terhubung jika ada pasangan simpul u dan v di dalam himpunan V yang tidak memiliki lintasan. (Munir, 2005). Pada graf berarah, keterhubungan dua buah simpul dibedakan menjadi dua, yaitu terhubung kuat dan terhubung lemah.



Gambar 2.11 Graf Berarah Terhubung

Graf pada Gambar 2.11 (a) merupakan graf terhubung kuat, karena untuk sebarang sepasang simpul di dalam graf tersebut terdapat lintasan. Sedangkan graf pada Gambar 2.11 (b) merupakan graf terhubung lemah, karena tidak semua pasangan simpul mempunyai lintasan arah, contohnya adalah simpul 4 dan 2.

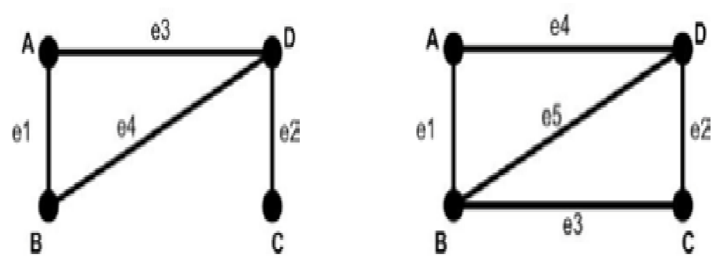
E. Jenis-Jenis Graf

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa jenis sesuai dengan sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya rusuk ganda, berdasarkan jumlah simpul, atau berdasarkan orientasi arah pada rusuk (Munir, 2005:357).

Berdasarkan ada tidaknya gelang (*loop*) yaitu rusuk yang menghubungkan sebuah simpul dengan dirinya sendiri atau rusuk ganda pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis, graf sederhana dan graf tak sederhana.

1. Graf Sederhana (*Simple Graph*)

Graf sederhana adalah graf yang tidak mempunyai rusuk ganda dan atau, gelang. Pada graf sederhana, rusuk adalah pasangan tak terurut (*unordered pairs*) (Harju:2012). Jadi rusuk (u, v) sama dengan (v, u). Menurut Munir (2005) graf sederhana juga dapat didefinisikan sebagai $G = (V, E)$, terdiri dari V, himpunan tidak kosong simpul-simpul dan E, himpunan pasangan tak terurut yang berbeda yang disebut rusuk. Gambar 2.12 berikut adalah contoh graf sederhana.

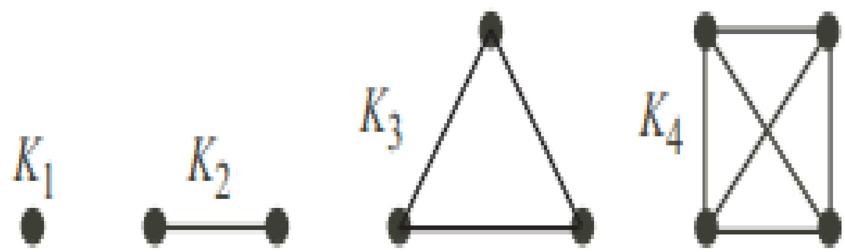


Gambar 2.12 Contoh Graf Sederhana

Menurut Siang (2002) beberapa graf sederhana khusus yang sering digunakan adalah sebagai berikut.

a. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

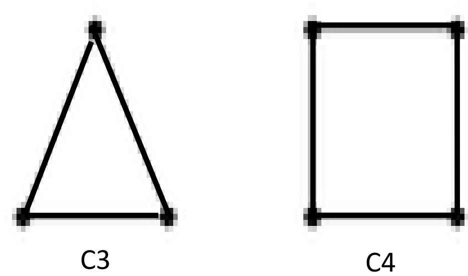
Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap dua simpulnya bertetangga. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n. Setiap simpul pada K_n berderajat $n - 1$. Banyaknya rusuk pada graf lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah $n(n - 1)/2$.



Gambar 2.13 Graf Lengkap (*Complete Graph*)

b. Graf Lingkaran

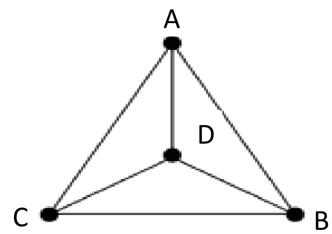
Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n.



Gambar 2.14 Graf Lingkaran C_3 dan C_4

c. Graf Teratur (*Regular Graph*)

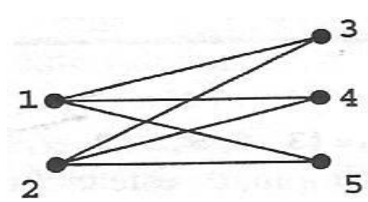
Graf teratur adalah graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama. Apabila derajat setiap simpul adalah *r*, maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur derajat *r*.



Gambar 2.15 Graf Teratur Derajat 3

d. Graf Bipartit (*Bipartite Graph*)

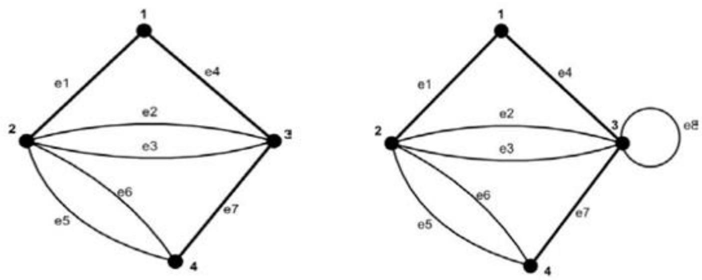
Graf *G* yang himpunan simpulnya dapat dikelompokkan menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2, sedemikian sehingga setiap rusuk di dalam *G* menghubungkan sebuah simpul di V_1 ke sebuah simpul di V_2 disebut graf bipartit dan dinyatakan sebagai G (V_1, V_2).



Gambar 2.16 Graf Bipartit (*Bipartite Graph*)

2. Graf Tak Sederhana (*Unsimple Graph*)

Graf yang mengandung rusuk ganda atau gelang dinamakan graf tak sederhana (*unsimple graph*) (Harju:2012). Ada dua macam graf tak sederhana, yaitu graf ganda (*multigraph*) atau graf semu (*pseudograph*). Graf ganda adalah graf yang mengandung rusuk ganda. Graf semu adalah graf yang mengandung gelang (*loop*).



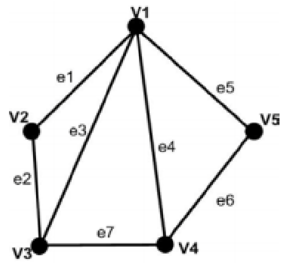
Gambar 2.17 Contoh Graf Tak Sederhana

(Graf Ganda dan Graf Semu)

Selain berdasarkan ada tidaknya rusuk ganda dan jumlah simpul pada suatu graf, graf juga dapat dikelompokkan berdasarkan orientasi arah pada rusuknya.Pengelompokan berdasarkan orientasi arah pada rusuknya digolongkan menjadi dua yaitu graf tak berarah dan graf berarah (Bondy, Murty :1982).

1. Graf Tak Berarah (*Undirected Graph*)

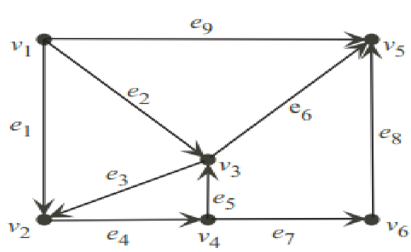
Graf tak berarah adalah graf yang rusuknya tidak mempunyai orientasi arah. Urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh rusuk tidak diperhatikan (Siang, 2002:194). Jadi $(V_1, V_2) = (V_2, V_1)$ adalah rusuk yang sama.



Gambar 2.18 Contoh Graf Tak Berarah

2. Graf Berarah (*Directed Graph*)

Menurut Harju (2012:5), graf berarah adalah graf yang setiap rusuknya memiliki orientasi arah. Rusuk pada graf berarah disebut busur (*arc*). Pada graf berarah, (*u, v*) dan (*v, u*) menyatakan dua buah busur yang berbeda. Jadi (*u*, *v*) ≠ (*v, u*). Untuk busur (*u*, *v*), simpul *u* dinamakan simpul asal (*initial vertex*) dan simpul *v* dinamakan simpul terminal (*terminal vertek*). Graf berarah ini seringkali di jadikan dasar dalam pembentukan model mengenai aliran proses, peta lalu lintas, sistem jaringan listrik, jaringan telepon, analisis jejaring sosial, dan lain sebagainya. Pada graf berarah, adanya gelang diperbolehkan, tetapi rusuk ganda tidak.



Gambar 2.19 Graf Berarah

F. Representasi Graf dalam Matriks

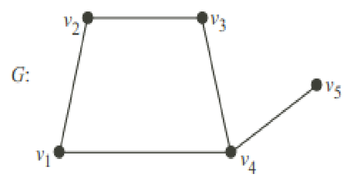
Matriks dapat digunakan untuk menyatakan suatu graf dengan tujuan untuk membantu dalam pengolahan graf melalui program pada komputer. Dengan merepresentasikan graf ke dalam matriks, maka perhitungan-perhitungan yang diperlukan dapat dilakukan dengan mudah.

Kesulitan utama merepresentasikan graf dalam matriks adalah keterbatasan matriks untuk mencakup semua informasi yang ada di dalam graf. Akibatnya ada bermacam-macam matriks untuk menyatakan suatu graf tertentu. Tiap-tiap matriks tersebut mempunyai keuntungan yang berbeda-beda dalam menyaring informasi yang dibutuhkan graf (Siang, 2002:233).

Jenis-jenis representasi graf dalam matriks yang sering digunakan ada 3, yaitu matriks ketetanggaan, matriks bersisian, dan senarai ketetanggaan.

1. Matriks Ketetanggaan (*Adjacency Matrix*)

   Matriks ketetanggaan digunakan untuk merepresentasikan graf dengan cara menyatakannya dalam banyak rusuk yang menghubungkan simpul-simpulnya. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dengan n simpul, $n \geq 1$, maka matriks ketetanggaan G adalah matriks dwimatra yang berukuran n x n. Bila matriks tersebut diberi nama $A = [a_{ij}]$, maka $a_{ij} = 1$ jika simpul i dan j bertetangga, dan berlaku sebaliknya $a_{ij} = 0$ jika simpul i dan j tidak bertetangga. Karena matriks ketetanggaan hanya berisi 0 dan 1, 1 menyatakan dua simpul yang berikatan dan 0 menyatakan dua simpul yang tidak berikatan.maka matriks tersebut juga dinamakan matriks nol-satu (*zero-one*) (Munir, 2005:382). Jumlah elemen matriks ketetanggaan untuk graf dengan n simpul adalah n^2. Berikut contoh graf pada Gambar 2.26 yang akan dibentuk matriks ketetanggaannya.



Gambar 2.20 Graf *Y*

Graf pada Gambar 2.20 dapat direpresentasikan ke dalam matriks ketetanggaan sebagai berikut : $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Menurut Siang (2002:235-237), dengan merepresentasikan graf ke dalam matriks ketetanggaan, terdapat beberapa keuntungan, yaitu:

a. Elemen matriksnya dapat diakses langsung melalui indeks.
b. Dengan melihat matriks ketetanggaan sebuah graf, dapat diketahui secara langsung apakah simpul *i* dan simpul *j* bertetangga.
c. Derajat setiap simpul *i* dapat dihitung dari matriks ketetanggaan. Pada graf tak berarah dapat dilakukan dengan cara:

$$d(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ix} \qquad (2.5)$$

sedangkan untuk graf berarah dapat dicari dengan cara:

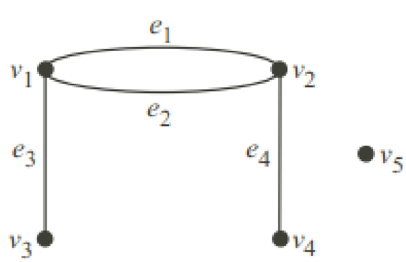
$$d_{in}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ix} \quad ; \quad d_{out}(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{xj} \qquad (2.6)$$

dengan $d_{in}(x)$ adalah jumlah nilai pada kolom j dan $d_{out}(v_i)$ adalah jumlah nilai pada baris ke i.

2. Matriks Bersisian (*Incidency Matrix*)

Matriks bersisian dapat diartikan sebagai matriks representasi dari suatu graf yang menyatakan kebersisian simpul dan rusuk. Misalkan G = (V, E) adalah graf dengan n simpul dan m buah sisi. Matriks bersisian G adalah matriks dwimatra yang berukuran n x m. Baris pada matriks ini menunjukkan simpul dari graf, sedangkan kolom menunjukkan rusuknya. Jika matriks bersisian ini dinamakan dengan $A = [a_{ij}]$, maka $a_{ij} = 1$ jika simpul i bersisian dengan rusuk j, dan berlaku sebaliknya, $a_{ij} = 0$ jika simpul i tidak bersisian dengan rusuk j.

Derajat suatu simpul dari suatu graf yang direpresentasikan dengan matriks bersisian dapat dihitung dengan menghitung jumlah seluruh elemen pada baris i. Namun perlu diperhatikan bahwa hal tersebut tidak berlaku untuk graf yang mengandung gelang.



$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}$$

Gambar 2.21 Graf (kiri) dan Matriks Bersisiannya (kanan)

G. Jejaring Sosial

Menurut Barnes (Fiqru dan Nining,2013), jejaring sosial merupakan struktur sosial yang terdiri dari elemen-elemen individual atau organisasi. Jejaring ini menunjukkan jalan dimana mereka berhubungan karena kesamaan sosialitas, mulai dari mereka yang dikenal sehari-hari sampai dengan keluarga. Analisis jejaring sosial (*Social Network Analysis*) adalah sebuah ilmu yang memandang hubungan sosial sebagai simpul dan ikatan. Simpul adalah aktor di dalam jaringan, sedangkan ikatan adalah hubungan antar aktor tersebut. Penelitian dalam berbagai bidang akademik telah menunjukkan bahwa jaringan jejaring sosial beroperasi pada banyak tingkatan, mulai dari keluarga hingga negara, dan memegang peranan penting dalam menentukan cara memecahkan masalah, menjalankan organisasi, serta derajat keberhasilan seorang individu dalam mencapai tujuannya.

Menurut Tsvetovat dan Kouznetsov (2001:1), analisis jejaring sosial dapat dideskripsikan sebagai studi tentang hubungan manusia dengan menggunakan teori graf. Secara psikologi, analisis jejaring sosial adalah ilmu yang cukup ampuh untuk mendeskripsikan hubungan antar aktor yang sesuai dengan kebiasaan mereka (Butts, 2008:11). Selain itu, menurut Abraham (2010:27) analisis jejaring sosial terdiri dari studi hubungan, ikatan, pola komunikasi, dan kinerja perilaku dalam kelompok-kelompok sosial. Dalam analisis jejaring sosial pada umumnya para aktor dan hubungannya dimodelkan dengan graf yang terdiri dari simpul dan rusuk.

Dalam buku *Social Network Analysis Theory and Application* dituliskan bahwa analisis jejaring sosial sudah berkembang mulai tahun 1800 yang dipelopori oleh Emile Durkheim dan Ferdinand Tonnie. Mereka berdua mulai mengemukakan pendapatnya tentang hubungan sosial antar kelompok ataupun antar individu. Kemudian memasuki abad berikutnya, seorang sarjana bernama Georg Simmel menuliskan essay tentang jejaring sosial. Setelah itu, ilmu analisis jejaring sosial terus berkembang.

Pada tahun 1930, J.L. Moreno mengenalkan sosiogram yang dapat dilihat sebagai representasi grafis dari sebuah jejaring. Setelah mengembangkan sosiogram, J.L. Moreno juga mengembangkan sebuah metode kualitatif untuk mengukur hubungan sosial. Selanjutnya, pada tahun 1948 seseorang bernama Alex Bavelas melakukan penelitian tentang jaringan komunikasi untuk memperoleh gelar sarjana di MIT. Eksperimen Bavelas yang terkenal yaitu konsep sentralitas (*centrality*) yang diaplikasikan pada jejaring komunikasi dan merupakan awal dari analisis jejaring sosial modern (Freeman, 2005:378). Pengembangan teori graf untuk menganalisis sentralitas dilanjutkan oleh Sabiddusi. Sabiddusi merancang aktor berdasarkan peringkat sesuai dengan posisinya di jejaring dan menafsirkan keunggulan-keunggulan aktor dalam struktur sosial (Brandes, 2001). Pada sekitar tahun 1970, Freeman mengelompokkan dasar sentralitas menjadi empat bagian yaitu derajat (*degree*), kedekatan (*closeness*), keantaraan (*betweenness*), dan sentralitas vektor eigen (*eigenvector centrality*).

Analisis jejaring sosial semakin berkembang dengan didirikannya sebuah asosiasi yang bernama *International Network for Social Network Analysis* (INSNA). INSNA adalah sebuah asosiasi *non-profit* profesional bagi para peneliti yang tertarik untuk mendalami analisis jejaring sosial. Asosiasi ini didirikan pada tahun 1977 oleh Barry Wellman di negara bagian Delaware (http://www.insna.org/). Selain berdirinya organisasi yang berkecimpung didalam jejaring sosial, pada tahun 1980-an banyak pula lahir perangkat lunak yang dapat digunakan untuk mempermudah menganalisis sebuah jaringan sosial.

Memasuki era millenium, jejaring sosial identik dengan berbagai macam sosial media di internet seperti *friendster*, *twitter*, *facebook*, dan lain sebagainya. Selain pada sosial media, pengembangan ilmu analisis jejaring sosial terus dilakukan oleh para ahli untuk berbagai macam penelitian tentang hubungan antar individu maupun antar kelompok. Seperti dalam dunia militer, ilmu ini dapat digunakan untuk menganalisis C4ISR (*Command*, *Control*, *Communications, Computers, and Intelligence*, *Surveillance,& Reconnaissance)* (Dekker, 2002:1). Analisis jejaring sosial juga dapat diterapkan dibidang politik untuk menganalisis perilaku antar ormas maupun partai, di bidang ilmu teknologi untuk mengetahui situs yang sedang sering dikunjungi masyarakat, dibidang ekonomi untuk menelusuri pola koordinasi antar perusahaan, atau bahkan pola koordinasi antar karyawan dalam perusahan tersebut.

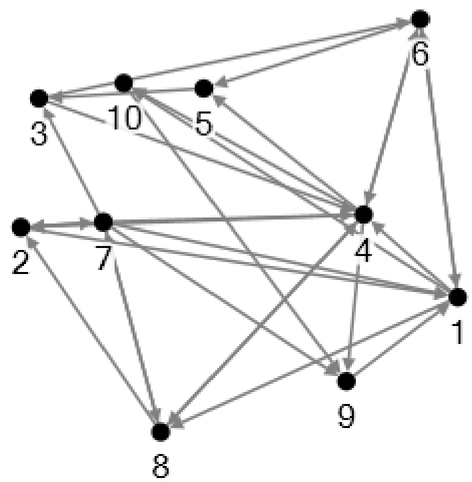
Secara spesifik, analisis jejaring sosial mempelajari berbagai macam hubungan antar individu. Hubungan tersebut antara lain keantaraan (*betweenness*), kedekatan (*closeness*), derajat (*degree*), jarak (*range*), konektivitas (*connectivity*), bintang (*star*), sentralitas vektor eigen (*eigenvector centrality*), dan lain sebagainya. Analisis jejaring sosial dapat divisualisasikan dengan dua cara, yaitu dengan menggunakan matriks dan menggunakan graf berarah.

Contoh 2.1

Diketahui sebuah jejaring sosial yang beranggotakan 10 aktor. Hubungan antar aktor tersebut dapat di visualisasikan dengan matriks ketetanggaan 10 *x* 10 seperti di bawah ini.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Jejaring sosial tersebut juga dapat di visualisasikan dengan graf berarah berikut ini.



Gambar 2.22 graf ketetanggaan contoh 2.1

H. Terminologi Pengukuran dalam Analisis Jejaring Sosial

Beberapa macam istilah atau terminologi pengukuran dalam analisis jejaring sosial menurut Kusumawhardana (2009) yaitu

1. Sentralitas (*Centrality*)

Sentralitas merupakan ukuran untuk memberikan indikasi kekuatan sosial suatu simpul dalam sebuah jejaring sosial berdasarkan seberapa baik mereka "terhubung" dalam jejaring sosial tersebut. Sentralitas itu sendiri meliputi keantaraan, kedekatan, derajat, dan sentralitas vektor eigen.

a. Keantaraan (*Betweenness*)

Pada analisis jejaring sosial, keantaraan mengukur banyaknya koneksi suatu aktor dalam suatu jejaring sosial. Aktor yang memiliki nilai keantaraan yang tinggi akan memiliki pengaruh yang kuat dalam jejaring sosial tersebut. Berlaku juga sebaliknya, aktor yang memiliki nilai keantaraan rendah, berarti hanya memiliki sedikit pengaruh dalam jejaring sosial tersebut.

b. Kedekatan (*Closeness*)

Kedekatan muncul dari gagasan bahwa pada jejaring sosial yang telah direpresentasikan kedalam graf terdapat aktor yang memiliki jarak terdekat dengan aktor-aktor yang lainnya. Dengan kata lain aktor tersebut dapat menyebarkan informasi kepada aktor-aktor lain dalam waktu yang lebih singkat (Beauchamp 1965; Sabdidussi 1966).

c. Derajat (*Degree*)

Seperti derajat pada teori graf, derajat pada analisis jejaring sosial juga merupakan banyaknya hubungan suatu aktor ke aktor lain. Semakin tinggi derajat suatu aktor akan semakin banyak rekan dalam jejaring sosial tersebut. Dengan demikian, aktor yang berderajat tinggi dapat dikatakan aktor yang aktif, sehingga memiliki banyak koneksi dengan aktor lain.

d. Sentralitas Vektor Eigen (*Eigen Vector Centrality*)

Sentralitas vektor eigen digunakan untuk mengukur seberapa penting sebuah simpul dalam suatu jaringan.

2. Jembatan (*Bridge*)

Jembatan pada analisis jejaring sosial memiliki konsep yang sama seperti jembatan pada graf, yang dimaksud jembatan pada analisis jejaring sosial adalah suatu hubungan (dalam hal ini rusuk) yang apabila hubungan tersebut diputus maka akan menimbulkan pemisahan terhadap jejaring sosial tersebut.

3. Koefisien *Cluster* (*Clustering Coefficient*)

Koefisien ini merupakan ukuran sejauh mana simpul dalam suatu jejaring sosial cenderung mengelompok bersama.

4. Kepadatan

Kepadatan adalah tingkat bagaiamana suatu jejaring sosial kenal semua anggota di dalamnya. Semakin banyak rusuk yang terdapat pada suatu graf, dalam hal ini jejaring, maka graf dikatakan semakin padat (*dense*).

5. Kohesi Struktural

Kohesi struktural adalah banyaknya simpul minimal yang apabila dihilangkan menjadi graf tak terhubung. Bisa diartikan sebagai individu penghubung antar komunitas atau organisasi.

I. Sentralitas (*Centrality*)

Sentralitas adalah konsep yang paling banyak dipelajari dalam analisis jejaring sosial (Borgatti : 56, 2005). Sentralitas merupakan ukuran untuk memberikan indikasi kekuatan sosial suatu simpul dalam sebuah jejaring sosial berdasarkan seberapa baik mereka "terhubung" dalam jejaring sosial tersebut. Menurut Cornwell (2005), ukuran sentralitas berupaya untuk menunjukkan aktor “paling penting” atau bisa disebut dengan aktor sentral dalam suatu jejaring sosial. Sejumlah langkah telah dikembangkan untuk mempelajari lebih lanjut tentang sentralitas yang meliputi sentralitas keantaraan, sentralitas kedekatan, sentralitas derajat, dan sentralitas vektor eigen.

1. Sentralitas Keantaraan (*Betweenness Centrality*)

Pada analisis jejaring sosial, sentralitas keantaraan mengukur banyaknya koneksi suatu aktor dalam suatu jejaring sosial. Hal ini identik dengan "kekuatan" atau "pengaruh" aktor tersebut.

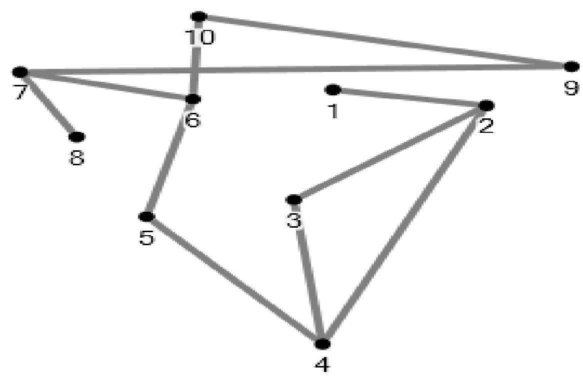
Menurut Freeman (1979) sentralitas keantaraan berguna sebagai kontrol dalam komunikasi. Semakin sering sebuah simpul terletak di lintasan terpendek diantara dua simpul yang lainnya, semakin besar kontrol dan semakin banyak interaksi yang dimiliki simpul tersebut bila dibandingkan dengan dua simpul yang tidak berdekatan itu (Wassermant & Fraust, 1994). Sentralitas keantaraan dalam suatu jejaring sosial dapat diartikan sebagai "kemampuan simpul *i* membutuhkan simpul *a* untuk mencapai simpul *j* melalui lintasan terpendek" (Borgatti, 2005:60). Berdasarkan definisi tersebut, maka sentralitas keantaraan untuk aktor *x* pada suatu jejaring sosial yang dilambangkan dengan $\sigma_B(x)$ dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\sigma_B(x) = \sum_{i=1, i\neq x}^{n} \sum_{j=1, j<i, j\neq x}^{n} \frac{g_{ij}\ (x)}{g_{ij}} \qquad (2.7)$$

dengan g_{ij} adalah banyaknya lintasan terpendek dari simpul *i* ke simpul *j*, dan $g_{ij}\ (x)$ adalah banyaknya lintasan terpendek dari simpul *i* ke simpul *j* yang memuat simpul *x*.

Contoh 2.2

Diberikan sebuah jejaring sosial dengan graf seperti gambar di bawah ini. Dengan menggunakan persamaan 2.7, hitunglah nilai-nilai sentralitas keantaraan dari sepuluh aktor yang ada, dan tentukan aktor mana yang paling memiliki pengaruh dalam jejaring sosial tersebut.



Gambar 2.23 graf ketetanggan contoh 2.2

Perhitungan sentralitas keantaraan gambar 2.24 dapat dihitung sebagai berikut.

$$\sigma_B(2) = \sum_{i=1, i\neq x}^{10} \sum_{j=1, j<i, j\neq x}^{10} \frac{g_{ij}\ (2)}{g_{ij}}$$

$$= \frac{1}{1}+\frac{0}{1}+\frac{0}{1}+\frac{0}{1}+\frac{0}{1}+\frac{0}{1}+\frac{0}{1}+\frac{0}{1}+\frac{1}{1}+\frac{0}{1}+\frac{0}{1}+\frac{0}{1}+\frac{0}{1}+\frac{0}{1}+\frac{0}{1}$$

$$+\frac{1}{1}+\frac{0}{1}+\frac{0}{1}+\frac{0}{1}+\frac{0}{1}+\frac{0}{1}+\frac{1}{1}+\frac{0}{1}+\frac{0}{1}+\frac{0}{1}+\frac{0}{1}+\frac{1}{1}+ +\frac{0}{1}+\frac{0}{1}$$

$$+\frac{0}{1}+\frac{1}{1}+\frac{0}{1}+\frac{0}{1}+\frac{1}{1}+\frac{0}{1}+\frac{1}{1}+\frac{0}{1}$$

$$= 8$$

Jadi nilai sentralitas keantaraan untuk aktor *2* adalah 8. Dengan cara yang sama, dapat diperoleh nilai sentralitas keantaran dari aktor-aktor lain yang ada pada tabel berikut ini.

Tabel 2.1 Hasil Perhitungan Sentralitas Keantaraan

Aktor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sentralitas Keantaraan	0	8	0	18	20	21	11	0	1	3

Dari hasil perhitungan yang terlihat pada tabel di atas, dapat disimpulkan bahwa aktor 6 adalah aktor yang paling berpengaruh karena memiliki nilai sentralitas keantaraan yang paling tinggi pada jejaring sosial tersebut.

Untuk graf berarah, nilai sentralitas keantaraan dapat diperoleh dengan cara yang sama, hanya saja hasil dari persamaan (2.7) dikali dengan dua. Nilai sentralitas keantaraan untuk graf berarah dapat dituliskan kedalam persamaan berikut ini.

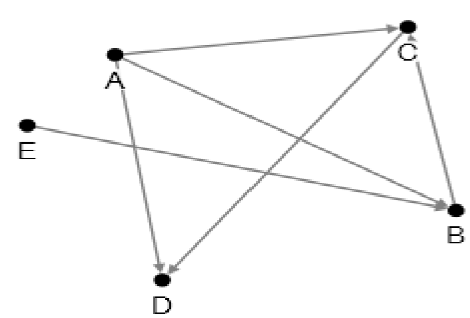
$$\sigma_B(x) = \left(\sum_{i=1, i \neq x}^{n} \quad \sum_{j=1, j<i, j \neq x}^{n} \frac{g_{ij}\,(x)}{g_{ij}} \right) \qquad (2.8)$$

2. Sentralitas Kedekatan (*Closeness Centrality*)

Sentralitas kedekatan atau dapat dinotasikan dengan $\sigma_C(x)$ muncul dari gagasan bahwa pada jejaring sosial yang telah direpresentasikan kedalam graf terdapat aktor yang memiliki jarak terdekat dengan aktor-aktor yang lainnya. Dengan kata lain aktor tersebut dapat menyebarkan informasi kepada aktor-aktor lain dalam waktu yang lebih singkat (Beauchamp 1965; Sabdidussi 1966). Untuk menghitung sentralitas kedekatan $\sigma_C(x)$ dari aktor x dapat dilakukan dengan cara menjumlahkan jarak antara aktor *x* dengan seluruh aktor yang lain dalam jejaring sosial tersebut (Sabdidussi, 1966;583). Nilai sentralitas kedekatan akan meningkat saat jarak ke lain aktor lebih sedikit, dapat diartikan bahwa aktor tersebut memiliki integritas yang lebih tinggi terhadap jaringan. Menurut Freeman (1979) sentralitas kedekatan dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\sigma_C(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} d_G(x,i)} \qquad (2.9)$$

dengan $\sum_{i=1}^{n} d_G(x,i)$ adalah jumlahan dari panjang lintasan terpendek dari seluruh aktor lain menuju ke aktor *x*. Sebagai contoh sebuah jejaring sosial dengan graf berarah seperti pada gambar di bawah ini, akan dicari nilai sentralitas kedekatannya untuk masing-masing aktor A, B, C, D, dan E.



Gambar 2.24 Contoh Jejaring sosial dengan aktor A, B, C, D, dan E.

Berdasarkan persamaan (2.8), diperoleh nilai sentralitas kedekatan sebagai berikut.

$$\sigma_C(A) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{5} d_G(A,i)} = \frac{1}{0+1+1+1+0} = \frac{1}{3} = 0{,}33$$

Dengan cara yang sama, diperoleh hasil perhitungan dari nilai sentralitas kedekatan dapat dilihat pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2 Hasil Perhitungan Sentralitas Kedekatan dari Gambar 2.25

Aktor	A	B	C	D	E
Sentralitas Kedekatan	0,33	0,33	1	0,143	0,167

Dari hasil pada tabel di atas,aktor A, B, dan C merupakan aktor yang memiliki nilai sentralitas kedekatan tertinggi yang berarti ketiga aktor tersebut dapat memberikan informasi dengan cepat kepada aktor-aktor lainnya.

3. Sentralitas Derajat (*Degree Centrality*)

Seperti derajat pada teori graf, sentralitas derajat pada analisis jejaring sosial juga merupakan jumlah hubungan suatu aktor ke aktor lain. Secara umum, sentralitas derajat dapat digunakan untuk menunjukkan tingkat "popularitas" atau "ketenaran" suatu aktor. Semakin tinggi sentralitas derajat suatu aktor akan semakin banyak rekan dalam jejaring sosial tersebut. Dengan demikian, aktor yang memiliki sentralitas derajat tinggi dapat dikatakan aktor yang aktif, sehingga memiliki banyak koneksi dengan aktor lain.

Menurut Nieminen (1974), sentralitas derajat merupakan ukuran sentralitas yang paling mudah dan sederhana, sentralitas derajat dapat dinonatasikan dengan $\sigma_D(x)$. Dengan menggunakan matriks ketetanggaan A= (a_{ij}), sentralitas derajat dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\sigma_D(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ix} \qquad (2.10)$$

dengan $\sum_{i=1}^{n} a_{ix}$ adalah jumlahan nilai dari matriks ketetanggaan pada baris ke-1 sampai *n* (banyaknya baris pada matriks ketetanggan *A*) dan kolom ke-*x*. Nilai $\sigma_D(x)$ yang tertinggi dapat diartikan bahwa simpul *x* memiliki banyak hubungan paling banyak didalam jejaring sosial tersebut.

Contoh 2.3

Diberikan sebuah jejaring sosial dengan 10 aktor. Jejaring sosial tersebut telah direpresentasikan kedalam sebuah graf. Berdasarkan gambar 2.29 akan dihitung nilai sentralitas derajat dari 10 aktor dalam jejaring sosial tersebut.

Banyaknya sentralitas derajat pada aktor 1, $\sigma_D(1) = 1$, karena aktor 1 hanya memiliki hubungan dengan aktor 2. Sedangkan $\sigma_D(7) = 3$, karena aktor 7 memiliki hubungan dengan aktor 6, 8, dan 9. Untuk melihat hasil sentralitas derajat semua aktor pada gambar di atas, dapat dilihat pada table 2.3 berikut ini.

Tabel 2.3 Hasil Perhitungan Sentralitas Derajat

Aktor (*x*)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sentralitas Derajat	1	3	2	3	2	3	3	1	2	2

Tabel di atas merupakan hasil perhitungan sentralitas derajat pada 10 aktor yang ada pada jejaring sosial Contoh 2.3. Dapat dilihat bahwa aktor 2, 4, 6, dan 7 memiliki nilai sentralitas derajat tertinggi yaitu 3. Dengan demikian keempat aktor tersebut adalah aktor yang memiliki tingkat “popularitas” tertinggi pada jejaring tersebut.

Pada jejaring sosial yang direpresentasikan kedalam graf berarah terdapat dua macam sentralitas derajat yaitu, sentralitas derajat masuk (*indegree centrality*) yang disimbolkan dengan $\sigma_{D_{in}}(x)$ dan sentralitas derajat keluar (*outdegree centrality*) yang disimbolkan dengan $\sigma_{D_{out}}(x)$. Sentralitas derajat masuk dan sentralitas derajat keluar dapat dirumuskan sebagai berikut.

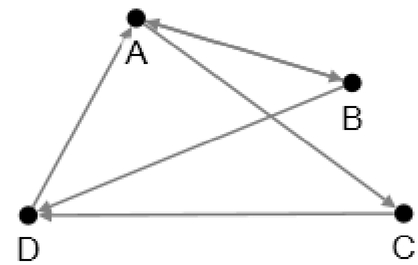
$$\sigma_{D_{in}}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ix} \qquad (2.11)$$

$$\sigma_{D_{out}}(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{xj} \qquad (2.12)$$

Sentralitas derajat masuk merupakan hasil penjumlahan dari kolom aktor x pada matriks ketetanggaan $A=(a_{ij})$. Sedangkan sentralitas derajat keluar merupakan hasil penjumlahan dari baris aktor x pada matriks ketetanggaan $A=(a_{ij})$.

Contoh 2.4

Berikut ini terdapat sebuah jejaring sosial yang telah digambarkan kedalam graf berarah dengan empat aktor. Carilah nilai-nilai sentralitas derajat masuk dan sentralitas derajat keluarnya dengan menggunakan persamaan (2.11) dan persamaan (2.12).



Gambar 2.25 Contoh jejaring sosial dengan 4 aktor A, B, C, D.

Sentralitas derajat masuk dan sentralitas derajat keluar dari aktor-aktor pada graf di atas akan dicari derajat dengan menggunakan persamaan (2.11) dan persamaan (2.12).

$$\sigma_{D_{in}}(A) = \sum_{i=1}^{4} a_{iA} = 2$$

$$\sigma_{D_{out}}(A) = \sum_{j=1}^{4} a_{Aj} = 1$$

Untuk hasil perhitungan sentralitas derajat masuk dan sentralitas derajat keluar dari graf di atas dapat dilihat pada tabel di berikut ini.

Tabel 2.4 Hasil Perhitungan Sentralitas Derajat Masuk dan Sentralitas Derajat Keluar

Aktor	A	B	C	D
$\sigma_{D_{in}}(x)$	2	1	1	2
$\sigma_{D_{out}}(x)$	1	1	1	1

Dengan melihat tabel di atas, dapat dilihat bahwa aktor *A* adalah aktor yang paling aktif dalam jejaring sosial tersebut, disusul oleh aktor *B* dan *D* dan yang paling terakhir adalah aktor *C*.

4. Sentralitas Vektor Eigen (*Eigen Vector Centrality*)

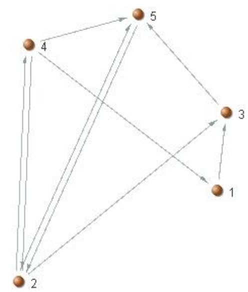
Sentralitas vektor eigen digunakan untuk mengukur seberapa penting sebuah simpul dalam suatu jaringan. Menurut Bonacich dan Lloyd (2001), pentingnya sebuah simpul didasarkan pada besarnya kontribusi yang diberikan serta komunikasi yang telah melekat dari aktor tersebut terhadap jejaring sosial yang dimaksud apabila dibandingkan dengan aktor-aktor yang lainnya. Untuk sebuah aktor *x* pada suatu jejaring sosial dengan matriks ketetanggaan *A*, sentralitas vektor eigen dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\sigma_E(x) = v_x = \frac{1}{\lambda_{max}(A)} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{jx} \cdot v_j \qquad (2.13)$$

dimana $\sigma_E(x) = v_x$ adalah sentralitas vektor eigen, $\lambda_{max}(A)$ adalah nilai eigen yang paling besar dari matriks ketetanggaan *A*, dan $\sum_{j=1}^{n} a_{jx} \cdot v_j$ adalah jumlah dari elemen matriks ketetanggaan *A* pada kolom ke-1 sampai *n* (banyaknya kolom pada matriks ketetanggan *A*) yang dikalikan dengan elemen ke-j pada vektor eigen dari $\lambda_{max}(A)$.

Contoh 2.5

Berikut ini terdapat sebuah jejaring sosial yang telah digambarkan ke dalam graf berarah dengan lima aktor. Representrasikan graf tersebut ke dalam matriks ketetanggaan dan carilah nilai-nilai sentralitas vektor eigennya dengan menggunakan persamaan (2.13).



Gambar 2.26 graf ketetangaan

Graf di atas akan direpresentasikan kedalam matriks ketetanggaan *A*, sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks ketetanggaan A , dapat diperoleh nilai eigen terbesar beserta vektor eigennya. Perhitungan nilai eigen dan vektor eigen tersebut akan dibantu dengan menggunakan perangkat lunak Matlab. Dengan menggunakan Matlab, diperoleh nilai eigen terbesarnya adalah 1,8094, dan berikut ini adalah vektor eigennya.

$$v = \begin{bmatrix} 0{,}1105 \\ 0{,}6548 \\ 0{,}2000 \\ 0{,}6230 \\ 0{,}3619 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh nilai eigen dan vektor eigennya, maka dengan menggunakan persamaan (2.14) perhitungan sentralitas vektor eigen untuk aktor 1 adalah sebagai berikut.

$$\sigma_E(1) = v_1 = \frac{1}{\lambda_{max}(A)} . \sum_{j=1}^{n} a_{j1}.v_j$$

$$= \frac{1}{1,8094} . [(0 \times 0,1105) + (0 \times 0,6548) + (0 \times 0,2000)$$

$$+(1 \times 0,6230) + (0 \times 0,3619)]$$

$$= \frac{1}{1,8094} \times 0,6230$$

$$= 0,3443$$

Jadi, nilai sentralitas vektor eigen untuk aktor 1 adalah 0,3443. Dengan menggunakan cara yang sama, maka sentralitas vektor eigen untuk aktor-aktor yang lain dapat dilihat pada tabel 2.5 di bawah ini.

Tabel 2.5 Hasil Perhitungan Sentralitas Vektor Eigen

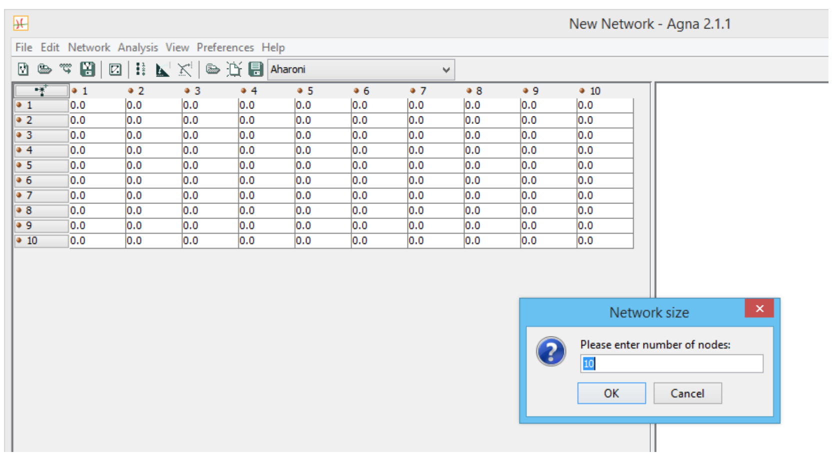
Aktor	1	2	3	4	5
$\sigma_E(x)$	0,3443	0,5443	0,1716	0,1105	0,8167

Tabel 2.5 menunjukkan bahwa nilai sentralitas vektor eigen terbesar diperoleh dari aktor 5, yang kemudian diikuti oleh aktor 2, aktor 1, aktor 3, dan yang terakhir adalah aktor 4. Hal tersebut dapat diartikan bahwa aktor 5 adalah aktor yang berkontribusi paling banyak terhadap jejaring sosial yang ada pada Contoh 2.5.

J. Perangkat Lunak Jejaring Sosial

Perangkat lunak dalam analisis jejaring sosial berfungsi untuk memvisualisasikan hasil dari identifikasi dan analisis suatu data dalam sebuah jaringan sosial. Perangkat lunak untuk analisis jejaring sosial ini sudah tersedia sangat banyak sekali, dan sebagian besar bisa didapatkan secara gratis dengan mengunduhnya di internet. Menurut Mark Huisman (2005) perangkat lunak untuk analisis jejaring sosial memiliki berbagai macam fitur, dan beberapa dari perangkat lunak ini memiliki keunggulan tersendiri. Ada perangkat lunak yang hanya dapat digunakan untuk memvisualisasikan graf dari suatu jejaring sosial, ada pula yang telah dilengkapi dengan menu untuk mencari sentralitas. Banyak sekali perangkat lunak untuk analisis jejaring sosial yang dikembangkan beberapa tahun terakhir ini. Perangkat lunak tersebut antara lain Agna, Blanche, FATCAT, Gradap, InFlow, Pajek, UCINET, NodeXL, dan lain sebagainya.

Perangkat lunak (*software*) yang digunakan dalam penelitian ini adalah Agna. Agna (*Applied Graph and Network Analysis)* adalah grafik terapan dan analisis jaringan, yaitu suatu aplikasi platform *independent freeware* yang dirancang untuk ilmuan dan peneliti yang memperkerjakan perawatan data spesifik matematis, seperti analisis jejaring social, *sociometry* atau analisa percontohan, ini dapat digunakan untuk melakukan analisis jejaring sosial dan sekaligus menggambarkannya kedalam bentuk graf. Agna dapat dijalankan melalui beberapa langkah, pertama kita install dulu aplikasi *java*, kemudian setelah terinstal kita masuk dalam program Agna setelah masuk kita bisa menentukan berapa *node* yang kita inginkan dengan memilijh menu *new network*. Dalam menu Agna tersebut terdapat beberapa menu pilihan seperti *network*, *analysis*, *view* dimana dalam menu tersebut juga terdapat beberapa sub menu *add nodes, delete nodes, view all shortpat, in degree, out degree, closeness, betwenness, fareness, network viewer* dan lain sebagainya. Setelah memasukkan data atas jejaring sosial yang akan dianalisis, graf dapat ditampilkan dengan cara melakukan *klik* pada sub menu *network viewer*. Visualisasi graf dari jejaring sosial tersebut akan muncul pada lembar kerja *Network viewer*. Untuk mempercantik graf yang dihasilkan, Agna juga memiliki beberapa pilihan untuk warna rusuk, warna simpul, nama rusuk, nama simpul, bentuk simpul, dan lain-lain.



Gambar 2.27 Lembar Kerja Agna

Selain memvisualisasikan jaringan kedalam bentuk graf, Agna juga dapat menganalisis sentralitas yang meliputi derajat masuk (*indegree*), derajat keluar (*outdegree*), keantaraan (*betweenness*), kedekatan (*closeness*) dan ongkos (*fareness)*

K. Langkah-Langkah Analisis Jejaring Sosial

Ada beberapa langkah-langkah yang harus dilakukan terlebih dahulu sebelum melakukan suatu analisis jejaring sosial, yaitu:

1. Persiapan
   a. Menentukan kelompok yang akan diteliti.
   b. Melakukan pendekatan singkat terhadap kelompok yang dipilih untuk dasar pembuatan kuisioner.
   c. Membuat kuisioner yang sesuai dengan kondisi dalam kelompok tersebut yang kemudian akan divalidasi oleh validator ahli.
   d. Menyerahkan kuisioner kepada validator ahli, setelah dinyatakan tervalidasi, kuisioner dapat dibagikan kepada responden.
2. Pelaksanaan
   a. Mengenalkan secara ringkas tentang analisis jejaring sosial kepada kelompok yang telah dipilih.
   b. Membagikan kuisioner kepada responden dan mendampingi responden saat mengisi kuisioner.
   c. Mengumpulkan kuisioner yang sudah di isi.
3. Analisis Hasil
   a. Memeriksa hasil kuisioner.
   b. Membuat matriks untuk merepresentasikan hasil kuisioner.

c. Melakukan analisis sentralitas derajat masuk, sentralitas derajat keluar, sentralitas kedekatan, sentralitas keantaraan, dan sentralitas eigenvektor baik secara manual maupun dengan menggunakan perangkat lunak.
d. Membuat kesimpulan dari hasil analisis.