

## **BAB II**

### **KAJIAN TEORI**

Pada bab II ini akan dibahas tentang materi dasar yang digunakan untuk mendukung pembahasan pada bab-bab berikutnya, yaitu variabel random, ekspektasi, varians dan kovarians, korelasi, distribusi normal, matriks, investasi, portofolio, saham, Jakarta Islamic Index (JII), Model mean variance markowitz, CAPM (Capital Assets Pricing Model), Model Black Litterman, metode Indeks Sharpe dan Peramalan.

#### **A. Variabel Random**

##### **Definisi 2. 1 (Bain & Engelhardt, 1992: 53)**

Variabel random  $X$  adalah suatu fungsi yang dikenakan pada ruang sampel  $S$ , yang menghubungkan setiap anggota pada ruang sampel  $S$  dengan suatu bilangan real. Variabel random  $X$  dapat dinyatakan dengan

$$X(e) = x, \text{ dengan } e \in S \text{ dan } e \in R. \quad (2. 1)$$

Variabel random dinotasikan dengan huruf kapital misalnya  $X, Y$  dan  $Z$ , sedangkan nilai yang mungkin dari setiap hasil observasi pada ruang sampel dinotasikan dengan huruf kecil misal  $x, y$  dan  $z$ .

#### **B. Ekspektasi**

##### **Definisi 2. 2 (Bain & Engelhardt, 1992: 61)**

Jika  $X_1, X_2, \dots, X_n$  menyatakan suatu variabel random diskrit yang mempunyai fungsi probabilitas  $p(X_1), p(X_2), \dots$ , dan  $p(X_n)$  dengan  $\sum p(x_i) = 1$ ,

maka nilai harapan atau ekspektasi dari  $X$  yang dinyatakan dengan  $E(X)$  dapat didefinisikan

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i). \quad (2.2)$$

Menggunakan prinsip yang sama, untuk suatu variabel random kontinu  $X$  yang mengambil nilai  $x$  dan memiliki fungsi densitas peluang  $f(x)$ , nilai harapan dapat dinyatakan dengan (Harinaldi, 2005)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx. \quad (2.3)$$

### C. Varians dan Kovarians

#### Definisi 2.4 (Bain & Engelhardt, 1992:73)

Varians dari variabel random  $X$  didefinisikan dengan

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2]. \quad (2.4)$$

Notasi varians yang lain adalah  $\sigma^2, \sigma_x^2$ , atau  $V(X)$ . Standar deviasi dari  $X$  didefinisikan sebagai akar positif dari varians yaitu  $\sigma = \sigma_x = \sqrt{Var(X)}$ .

#### Teorema 2.1 (Bain & Engelhardt, 1992:74)

Jika  $X$  adalah variabel random, maka

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2. \quad (2.5)$$

Bukti:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[(X - \mu)^2] \\ &= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2. \end{aligned}$$

Nilai ekspektasi  $X$  adalah  $\mu = E(X)$  maka

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

**Teorema 2. 2 (Bain & Engelhardt, 1992:74)**

Jika  $X$  adalah variabel random,  $a$  dan  $b$  adalah konstanta, maka

$$\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X). \quad (2. 6)$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \text{Var}(aX + b) &= E[(aX + b - a\mu_X - b)^2] \\ &= E[(aX - a\mu_X)^2] \\ &= E[a(X - \mu_X)^2] \\ &= a^2 E[(X - \mu_X)^2] \\ &= a^2\text{Var}(X). \end{aligned}$$

**Definisi 2. 5 (Bain & Engelhardt, 1992:174)**

Kovarians dari pasangan variabel random  $X$  dan  $Y$  didefinisikan sebagai

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]. \quad (2. 7)$$

Notasi kovarians yang lain adalah  $\sigma_{xy}$ .

Jika  $X$  dan  $Y$  variabel random diskret, maka

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ &= \sum_x \sum_y (X - \mu_X)(Y - \mu_Y) f(x, y). \end{aligned} \quad (2. 8)$$

Jika  $X$  dan  $Y$  variabel random kontinu, maka

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu_X)(Y - \mu_Y) f(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (2. 9)$$

Jika  $X$  dan  $Y$  adalah variabel random dan  $a$  dan  $b$  konstan, maka berlaku

1.  $Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$ .
2.  $Cov(X + a, Y + b) = Cov(X, Y)$ .
3.  $Cov(X + aX + b) = a \text{ var}(X)$ .
4.  $Cov(X, Y) = 0$ , jika  $X$  dan  $Y$  independen.

#### D. Korelasi

##### Definisi 2.6 (Bain & Engelhardt, 1992:178)

Jika  $X$  dan  $Y$  variabel random dengan varians  $\sigma_X^2$  dan  $\sigma_Y^2$  dan kovarians  $\sigma_{XY} = Cov(X, Y)$ , maka koefisien korelasi dari  $X$  dan  $Y$  adalah

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}. \quad (2.10)$$

#### E. Distribusi Normal

##### 1. Definisi Distribusi Normal

##### Definisi 2.7 (Bain & Engelhardt, 1992: 118)

Variabel random  $X$  dikatakan berdistribusi normal yang dinotasikan  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  dengan *mean*  $\mu$  dan varians  $\sigma^2$  mempunyai fungsi densitas probabilitas (pdf) yaitu:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\{(x-\mu)/\sigma\}^2/2} \quad (2.11)$$

untuk  $-\infty < x < \infty$ , dengan  $-\infty < \mu < \infty$  dan  $0 < \sigma < \infty$ .

Distribusi normal sering juga disebut dengan distribusi Gauss (Bain & Engelhardt, 1992).

Uji normalitas dalam hal investasi digunakan untuk mengetahui *return* saham berdistribusi normal, karena *return* saham yang berdistribusi normal akan mengantisipasi kestabilan harga, maka kemungkinan kecil terjadi penurunan harga yang signifikan sehingga merugikan investor (Bain & Engelhardt, 1992).

Uji normalitas dapat menggunakan bantuan *software* SPSS 16 menggunakan pengujian *Kolmogorov-Smirnov* atau *p-value* pada Minitab. Uji ini digunakan karena konsep dasar dari *Kolmogorov-Smirnov* adalah membandingkan distribusi data (yang akan diuji normalitasnya) dengan distribusi normal baku. Distribusi normal baku adalah data yang telah ditransformasikan ke dalam bentuk *Z-Score* dan diasumsikan normal.

## 2. Uji *Kolmogorov-Smirnov*

### a. Hipotesis

$H_0$ : data *return* saham mengikuti distribusi normal.

$H_1$ : data *return* saham tidak mengikuti distribusi normal.

### b. Tingkat signifikansi $\alpha$ .

### c. Statistik uji

$$\text{Kolmogorov-Smirnov } D = \sup_x |F^*(X) - S(X)|.$$

$F^*(X)$  adalah distribusi kumulatif data sampel.

$S(X)$  adalah distribusi kumulatif yang dihipotesiskan.

### d. Kriteria uji

$$H_0 \text{ ditolak jika } D \geq D_{Tabel} \text{ atau } p\text{-value } KS < \alpha.$$

### e. Perhitungan.

### f. Kesimpulan.

## F. Matriks

### Definisi 2.8 (Anton, 2010:26)

Sebuah matriks adalah susunan persegi dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan tersebut dinamakan entri dari matriks. Ukuran matriks dideskripsikan dengan banyaknya baris (garis horisontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks. Entri yang terdapat pada baris  $i$  dan kolom  $j$  dari matriks  $A$  dapat dinyatakan dengan  $a_{ij}$ . Secara umum bentuk matriks berukuran  $m \times n$  yaitu:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

### 1. Perkalian matriks

#### Definisi 2.9 (Anton, 2010:28)

Jika  $A$  adalah suatu matriks dan  $c$  adalah skalar, maka hasil kali (*product*)  $cA$  adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari  $A$  oleh  $c$ . Jika  $A = [a_{ij}]$ , maka perkalian matriks ini dinotasikan sebagai  $(cA)_{ij} = (cA)_{ij} = [ca_{ij}]$ .

Jika  $A = [a_{ij}]$  sebuah matriks berukuran  $m \times r$  dan  $B = [b_{ij}]$  sebuah matriks berukuran  $r \times n$ , maka hasil kali  $A$  dengan  $B$  yaitu  $C = AB$  adalah matriks yang entrinya didefinisikan dengan

$$c_{mn} = \sum_{l=1}^r a_{il} b_{lj} \quad (2.13)$$

dengan matriks  $C$  berukuran  $m \times n$ .

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Maka, } AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

## 2. Transpose Matriks

### Definisi 2. 10 (Anton, 2010: 34)

Jika  $A$  adalah sebarang matriks  $m \times r$ , maka transpose  $A$  dinyatakan oleh  $A'$  yang merupakan matriks berukuran  $m \times r$  dengan mengubah baris dari  $A$  menjadi kolom pada  $A'$ . Transpose matriks  $A$  dapat dinyatakan dengan

$$(A')_{ij} = (A)_{ji}. \quad (2. 14)$$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ maka, } A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

## 3. Minor dan Kofaktor Matriks

### Definisi 2. 11 (Anton, 2010: 94)

Jika  $A$  merupakan matriks berukuran  $n \times n$ , maka minor dari entri  $a_{ij}$  dinotasikan dengan  $M_{ij}$  yaitu determinan dari submatriks  $A$  yang didapat dengan menghapus baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$ . Nilai  $(-1)^{i+j} M_{ij}$  dinotasikan dengan  $c_{ij}$

disebut kofaktor dari entri  $a_{ij}$ . Sehingga matriks kofaktor dari  $A$  dapat dinyatakan

dengan

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

maka, minor dari entri  $a_{11}$  yaitu

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (-4) \cdot (-2) - 3 \cdot 4 = 8 - 12 = -4,$$

kofaktor dari entri  $a_{11}$  yaitu

$$c_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1 \cdot (-4) = -4.$$

#### 4. Determinan Matriks

##### Definisi 2.12 (Anton, 2010: 96)

Determinan matriks  $A$  berukuran  $n \times n$  dapat dihitung dengan mengalikan entri pada suatu baris ke- $i$  atau kolom ke- $j$  dengan masing-masing kofaktor dan menjumlahkan hasil perkalian tersebut. Determinan matriks  $A$  dinyatakan sebagai berikut:

$$|A| = a_{1j} \cdot c_{1j} + a_{2j} \cdot c_{2j} + \cdots + a_{nj} \cdot c_{nj} \quad (2.16)$$

atau

$$|A| = a_{i1} \cdot c_{i1} + a_{i2} \cdot c_{i2} + \dots + a_{in} \cdot c_{in}. \quad (2.17)$$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

maka,

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3.[(-4).(-2) - 3.4] + 2.[1.(-2) - 0.4] + 5.[1.3 - 0.(-4)] \\ &= 3.(-4) + 2.(-2) + 5.3 \\ &= -12 - 4 + 15 \\ &= -1. \end{aligned}$$

## 5. Invers Matriks

### Definisi 2. 13 (Anton, 2010: 111)

Jika  $A$  matriks persegi dan jika terdapat suatu matriks  $B$  dengan ukuran yang sama sedemikian sehingga  $AB=BA=I$  dengan  $I$  merupakan matriks identitas, maka  $A$  *invertible* (dapat dibalik) dan  $B$  adalah *invers* dari  $A$ . *Invers* dari  $A$  dinotasikan dengan  $A^{-1}$ , sehingga  $AA^{-1} = I$  dan  $A^{-1}A = I$

Jika matriks  $A$  berukuran  $n \times n$  maka invers adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} [adj(A)] \quad (2.18)$$

dengan,

Adj (**A**): matriks adjoin dari **A** yaitu transpose dari matriks kofaktor **A**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Minor dari  $a_{11}$

$$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Kofaktor dari  $a_{11}$  adalah

$$c_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^{1+1} a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32} \cdot \quad (2.21)$$

Kofaktor dan minor hanya berbeda tanda  $c_{ij} = \pm M_{ij}$  untuk membedakan

kofaktor pada  $ij$  adalah + atau - seperti matrik dibawah

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \cdot \quad (2.22)$$

Contoh:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \text{ kof } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \text{ adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 6 + 0 \cdot 2 \cdot 2 - 6 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 2$$

maka,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{|\mathbf{A}|} [\text{adj}(\mathbf{A})] \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

## G. Analisis Multivariat

### Definisi 2.14 (Johnson & Wichern, 2007: 5)

Analisis statistik multivariat merupakan metode statistik untuk menganalisis hubungan antara lebih dari dua variabel secara bersamaan. Data sampel analisis multivariat secara umum dapat digambarkan dalam bentuk matriks dengan  $n$  objek dalam  $p$  variabel sebagai berikut:

	Variabel 1	Variabel 2	...	Variabel $k$	...	Variabel $p$
Objek 1	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1k}$	...	$x_{1p}$
Objek 2	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2k}$	...	$x_{2p}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Objek $j$	$x_{j1}$	$x_{j2}$	...	$x_{jk}$	...	$x_{jp}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Objek $n$	$x_{n1}$	$x_{n2}$	...	$x_{nk}$	...	$x_{np}$

atau dapat ditulis dalam bentuk matriks  $X$  dengan  $n$  baris dan  $p$  kolom

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{j1} & x_{j2} & \cdots & x_{jk} & \cdots & x_{jp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}.$$

## 1. Multivariat Berdistribusi Normal

### Definisi 2. 15 (Johnson & Wichern, 2007: 150)

Fungsi distribusi multivariat normal merupakan perluasan dari fungsi distribusi univariat normal dengan rata-rata  $\mu$  dan varians-kovarians matriks  $\Sigma$ , dimana

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p1} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}.$$

Maka fungsi densitas multivariat normal adalah

$$f(X) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)\Sigma^{-1}(X-\mu)} \quad (2. 23)$$

dengan  $-\infty < X_i < \infty, i = 1, 2, \dots, p$ .

## 2. Vektor random dan matriks random

### Definisi 2. 16 (Johnson & Wichern, 2007:66)

Vektor random adalah vektor yang elemen-elemennya berupa variabel random. Jika suatu unit eksperimen hanya memiliki satu variabel terukur maka variabel tersebut disebut variabel random, sedangkan jika terdapat lebih dari satu

variabel terukur, misalkan  $n$  variabel maka variabel-variabel tersebut disebut vektor random dengan  $n$  komponen. Sedangkan matriks random adalah matriks yang mempunyai elemen variabel random.

### 3. Mean dan Kovarians Vektor Random

#### Definisi 2. 17 (Johnson & Wichern, 2007: 68)

Dimisalkan  $X$  adalah variabel random dengan mean  $\mu = E(X)$  dan matriks kovarians  $\Sigma$ . Mean vektor random  $X$  dengan ordo  $p \times 1$  dapat dinyatakan dengan

$$E(X) = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \mu. \quad (2. 24)$$

Sedangkan kovarians vektor random  $X$  dengan ordo  $p \times 1$  adalah  $\Sigma = E(X - \mu)(X - \mu)'$

$$\begin{aligned} &= E \left( \begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \\ \vdots \\ X_p - \mu_p \end{bmatrix} (X_1 - \mu_1 \quad X_2 - \mu_2 \quad \cdots \quad X_p - \mu_p) \right) \\ &= E \begin{bmatrix} (X_1 - \mu_1)^2 & (X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2) & \cdots & (X_1 - \mu_1)(X_p - \mu_p) \\ (X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1) & (X_2 - \mu_2)^2 & \cdots & (X_2 - \mu_2)(X_p - \mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_p - \mu_p)(X_1 - \mu_1) & (X_p - \mu_p)(X_2 - \mu_2) & \cdots & (X_p - \mu_p)^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E(X_1 - \mu_1)^2 & E(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2) & \cdots & E(X_1 - \mu_1)(X_p - \mu_p) \\ E(X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1) & E(X_2 - \mu_2)^2 & \cdots & E(X_2 - \mu_2)(X_p - \mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(X_p - \mu_p)(X_1 - \mu_1) & E(X_p - \mu_p)(X_2 - \mu_2) & \cdots & E(X_p - \mu_p)^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Atau dapat dinyatakan  $\Sigma = Cov(X) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p1} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$ .

(2. 25)

Dengan  $\sigma_{ij}$ : kovarian dari  $X_i$  dan  $X_j, i = 1, 2, \dots, p$  dan  $j = 1, 2, \dots, p$ .

Kovarians untuk sampel dinyatakan  $S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p1} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}$ .

(2. 26)

Dengan  $s_{ij}$ : kovarian dari  $\hat{X}_i$  dan  $\hat{X}_j, i = 1, 2, \dots, p$  dan  $j = 1, 2, \dots, p$

## H. Investasi

Investasi adalah komitmen atas sejumlah dana atau sumber daya lainnya yang dilakukan pada saat ini, dengan tujuan memperoleh sejumlah keuntungan di masa datang (Tandelilin, 2010: 10). Menginvestasikan sejumlah dana pada aset riil (tanah, emas, atau bangunan) maupun aset finansial (deposito, saham, ataupun obligasi) merupakan aktivitas investasi yang umumnya dilakukan. Pelaku investasi atau investor harus memahami dasar-dasar investasi untuk membuat keputusan berinvestasi agar meminimumkan risiko yang terjadi. Tahap-tahap keputusan investasi menurut Tandelilin (2010: 12) yaitu:

### 1. Penentuan tujuan investasi

Tahap pertama dalam proses keputusan investasi untuk menentukan tujuan investasi yang akan dilakukan. Tujuan investasi untuk masing-masing investor bisa berbeda tergantung pada investor yang membuat keputusan tersebut.

## 2. Penentuan kebijakan investasi

Tahap penentuan kebijakan investasi dilakukan dengan penentuan keputusan alokasi aset. Keputusan ini menyangkut pendistribusian dana yang dimiliki pada berbagai kelas aset yang tersedia (saham, obligasi, bangunan maupun sekuritas luar negeri).

## 3. Pemilihan strategi portofolio

Strategi portofolio yang bisa dipilih yaitu strategi portofolio aktif dan strategi portofolio pasif. Strategi portofolio aktif meliputi kegiatan penggunaan informasi yang tersedia untuk mencari kombinasi portofolio yang lebih baik. Strategi portofolio pasif meliputi aktivitas investasi pada portofolio yang seiring dengan kinerja indeks pasar.

## 4. Pemilihan aset

Pemilihan aset yang dilakukan untuk membentuk suatu portofolio. Tahap ini memerlukan pengevaluasian setiap sekuritas yang ingin dimasukkan dalam portofolio untuk mencari kombinasi portofolio yang efisien oleh perusahaan. Apabila kinerja keuangan perusahaan cukup bagus dan sudah mampu membayar kewajiban keuangan lainnya.

### **I. Portofolio**

Portofolio didefinisikan sebagai kumpulan dari beberapa sekuritas (Amnec & Sourd, 2003: 6). Portofolio dapat diartikan sebagai kombinasi beberapa sekuritas yang diinvestasi oleh investor, baik perorangan maupun lembaga. Pembentukan portofolio bertujuan untuk melakukan diversifikasi pada investasi sehingga mampu memaksimalkan keuntungan dengan risiko yang minimal.

## 1. Return Portofolio

Return dalam portofolio dibagi menjadi dua, yaitu *realized return* portofolio dan *expected return* portofolio. *Realized return* portofolio merupakan rata-rata tertimbang dari *realized return* masing-masing sekuritas tunggal di dalam portofolio tersebut (Jogiyanto, 2003: 147).

*Realized return* portofolio dapat dirumuskan

$$R_p = \sum_{i=1}^n (w_i \cdot R_i). \quad (2.27)$$

keterangan:

$R_p$  : *realized return* portofolio,

$w_i$  : proporsi dana investor pada sekuritas ke- $i$ ,

$R_i$  : *realized return* dari sekuritas ke- $i$ ,

$n$  : banyaknya sekuritas.

Return suatu sekuritas dapat dihitung menggunakan rumus

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}. \quad (2.28)$$

keterangan:

$P_t$  : harga sekuritas pada periode ke- $t$ ,

$P_{t-1}$  : harga sekuritas pada periode ke- $(t-1)$ .

Return suatu sekuritas untuk sampel dinyatakan dengan rumus

$$R_t = \frac{\bar{P}_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{\bar{P}_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}. \quad (2.29)$$

*Expected return* portofolio merupakan rata-rata tertimbang dari *expected return* masing-masing sekuritas dalam portofolio. *Expected return* portofolio dapat dirumuskan sebagai berikut

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n (w_i \cdot E(R_i)). \quad (2.30)$$

keterangan:

$E(R_p)$ : *expected return* dari portofolio,

$w_i$ : proporsi dana investor pada sekuritas ke- $i$ ,

$E(R_i)$ : *expected return* dari sekuritas ke- $i$ ,

$n$ : banyaknya sekuritas.

Nilai *expected return* pada Persamaan (2.26) secara matematis dapat dibentuk dalam matriks adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E(R_p) &= w_1(E(R_1)) + w_2(E(R_2)) + \dots + w_n(E(R_n)) \\ &= [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n] \begin{bmatrix} E(R_1) \\ E(R_2) \\ \vdots \\ E(R_n) \end{bmatrix} = W' E(R). \end{aligned} \quad (2.31)$$

keterangan:

$W$ : matriks bobot tiap sekuritas dalam portofolio,

$E(R)$ : matriks *expected return* tiap sekuritas dalam portofolio.

## 2. Risiko Portofolio

Risiko dalam portofolio dapat diartikan sebagai tingkat kerugian pembentukan portofolio. Salah satu pengukur risiko yaitu varians (Jogiyanto, 2003: 150). Jika semakin besar nilai varians, maka risiko yang ditanggung akan semakin

tinggi. Banyaknya sekuritas dalam suatu portofolio dapat mempengaruhi nilai varians dari risiko. Pembentukan suatu portofolio diperlukan minimal dua sekuritas.

Varians dengan dua sekuritas adalah sebagai berikut (Jogiyanto, 2003: 150)

$$\begin{aligned}
 Var(R_p) &= \sigma_p^2 \\
 &= E[R_p - E(R_p)]^2 \\
 &= E[(w_1R_1 + w_2R_2) - E(w_1R_1 + w_2R_2)]^2 \\
 &= E[(w_1R_1 + w_2R_2) - E(w_1R_1) - E(w_2R_2)]^2 \\
 &= E[(w_1R_1 + w_2R_2) - w_1E(R_1) - w_2E(R_2)]^2 \\
 &= E[w_1(R_1 - E(R_1)) + w_2(R_2 - E(R_2))]^2 \\
 &= E[w_1^2(R_1 - E(R_1))^2 + 2w_1w_2(R_1 - E(R_1))(R_2 - E(R_2)) + w_2^2(R_2 - E(R_2))^2] \\
 &= w_1^2E((R_1 - E(R_1))^2) + 2w_1w_2E((R_1 - E(R_1))(R_2 - E(R_2))) + w_2^2E((R_2 - E(R_2))^2) \\
 &= w_1^2\sigma_1^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} + w_2^2\sigma_2^2.
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Selanjutnya varians dengan  $n$  sekuritas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \sigma_p^2 &= [w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + \dots + w_n^2\sigma_n^2] + [2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_1w_3\sigma_{13} + \dots + 2w_{n-1}w_n\sigma_{n-1n}] \\
 &= \sum_{i=1}^n w_i^2\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^n w_iw_j\sigma_{ij}.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Persamaan (2.30) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks yaitu:

$$\sigma_p^2 = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = w'\Sigma w. \tag{2.34}$$

keterangan:

$\Sigma$  : matriks varians kovarians  $n \times n$ ,

$w$ : matriks bobot tiap sekuritas  $n \times 1$ .

Risiko portofolio dihitung menggunakan rumus standar deviasi sebagai berikut:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} \quad (2.35)$$

keterangan:

$\sigma_p$ : standar deviasi portofolio.

Risiko portofolio untuk sampel dinyatakan sebagai berikut:

$$S_p = \sqrt{\hat{w}' S \hat{w}} \quad (2.36)$$

keterangan:

$S$ : matriks varians kovarians sampel  $n \times n$ ,

$w$ : matriks bobot sampel tiap sekuritas  $n \times 1$ .

## **J. Saham**

Saham adalah surat berharga yang menunjukkan kepemilikan perusahaan sehingga pemegang saham memiliki hak klaim atas dividen atau distribusi lain yang dilakukan perusahaan kepada pemegang saham lainnya. Menurut Husnan (2005: 25), "Saham merupakan secarik kertas yang menunjukkan hak pemodal (yaitu pihak yang memiliki kertas tersebut) untuk memperoleh bagian dari prospek atau kekayaan organisasi yang menerbitkan sekuritas tersebut dan berbagai kondisi yang memungkinkan pemodal tersebut menjalankan haknya". Saham merupakan salah satu di antara beberapa alternatif yang dapat dipilih untuk berinvestasi.

Pada dasarnya saham dapat digunakan untuk mencapai tiga tujuan investasi utama sebagaimana yang dikemukakan oleh Kertonegoro (2000: 47) yaitu:

1. Sebagai gudang nilai, berarti investor mengutamakan keamanan prinsipal, sehingga mereka akan mencari saham *blue chips* dan saham *non-spekulatif* lainnya.
2. Untuk pemupukan modal, berarti investor mengutamakan investasi jangka panjang, sehingga mereka akan mencari saham pertumbuhan untuk memperoleh *capital gain* atau saham sumber penghasilan untuk mendapat *dividen*.
3. Sebagai sumber penghasilan, berarti investor mengandalkan pada penerimaan dividen sehingga mereka akan mencari saham penghasilan yang bermutu baik dan hasil tinggi.

#### **K. Jakarta Islamic Index (JII)**

Jakarta Islamic Index (JII) dibuat oleh BEI bekerjasama dengan PT Danareksa Investment Management. JII menggunakan basis tanggal Januari 1995 dengan nilai awal sebesar 100. JII diperbarui setiap 6 bulan sekali, yaitu pada awal bulan Januari dan Juli.

Jakarta Islamic Index (JII) merupakan indeks yang berisi 30 saham perusahaan terdapat di lampiran 5 yang memenuhi kriteria investasi berdasarkan Syariah Islam (metode keuangan dalam islam), dengan prosedur berikut ini:

1. Saham yang dipilih harus sudah tercatat paling tidak 3 bulan terakhir, kecuali saham yang termasuk dalam 10 kapitalisasi terbesar.
2. Mempunyai rasio utang terhadap aktiva tidak lebih dari 90% di laporan keuangan tahunan atau tengah tahun.

3. Dari yang masuk kriteria nomer 1 dan 2, dipilih 60 saham dengan rata-rata kapitalisasi pasar terbesar selama satu tahun terakhir. Kemudian dipilih 30 saham dengan urutan tingkat likuiditas rata-rata nilai perdagangan reguler selama satu tahun terakhir.

#### **L. Model *Mean Variance* Markowitz**

Model *Mean Variance* Markowitz pertama kali diperkenalkan tahun 1952 oleh Harry Markowitz dalam artikel yang berjudul *portfolio selection* tentang pemilihan portofolio optimal secara kuantitatif. Artikel tersebut, Harry Markowitz mengidentifikasi *expected return* dan risiko menggunakan varians *return*, varians tersebut kemudian diminimalkan untuk tingkat ekspektasi tertentu.

Teori portofolio optimal menggunakan model Markowitz (Jogiyanto, 2003: 204) didasarkan pada empat asumsi yaitu:

1. Waktu yang digunakan hanya satu periode,
2. Tidak ada biaya transaksi,
3. Preferensi investor hanya didasarkan pada *expected return* dan risiko dari portofolio,
4. Tidak adanya pinjaman dan simpanan bebas risiko.

Pada asumsi ketiga dinyatakan bahwa preferensi investor hanya didasarkan pada *expected return* dan risiko dari portofolio. Hal ini menunjukkan bahwa untuk mendapatkan portofolio optimal menggunakan model Markowitz dapat dilakukan dengan mengoptimalkan portofolio efisien dengan preferensi investor yang dirumuskan dalam bentuk sebagai berikut:

- a. Meminimumkan risiko (2.35) untuk tingkat *return* tertentu (2.28)

$$\min_w W^T \Sigma W \text{ dengan batasan } W^T \mu = \mu$$

atau,

- b. Memaksimumkan *return* (2.28) untuk tingkat risiko tertentu (2.35)

$$\max_w W^T \mu \text{ dengan batasan } W^T \Sigma W = \sigma^2.$$

Kedua preferensi investor di atas, preferensi investor dengan memaksimumkan *return* untuk tingkat risiko tertentu dapat digunakan untuk mendapatkan rumusan bobot masing-masing saham dengan cara mengoptimalkan  $W^T = [W_1 \dots W_n]$ . Permasalahan optimisasi tersebut dapat diselesaikan menggunakan fungsi Lagrange dengan satu pengali sebagai berikut:

$$L = W^T \mu - \lambda(W^T \Sigma W - \sigma^2). \quad (2.37)$$

Untuk mengoptimalkan  $W$  maka fungsi Lagrange (2.37) harus memenuhi

syarat ekstrim  $\frac{\partial L}{\partial W} = 0$  menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial W} &= \frac{\partial(W^T \mu - \lambda(W^T \Sigma W - \sigma^2))}{\partial W} = 0 \\ &= \mu - 2\lambda \Sigma W = 0 \end{aligned}$$

$$W = (\delta \Sigma)^{-1} \mu \quad (2.38)$$

dengan  $\lambda = \frac{\delta}{2}$  maka diperoleh  $\mu - \delta \Sigma W = 0$ .

Sehingga rumusan bobot masing-masing saham untuk portofolio model Markowitz dapat dituliskan  $W_m = (\delta \Sigma)^{-1} \mu$ . Untuk mendapatkan risiko portofolio

model Markowitz dapat dicari menggunakan persamaan risiko portofolio (2.35) yang diaplikasikan pada model Markowitz menjadi

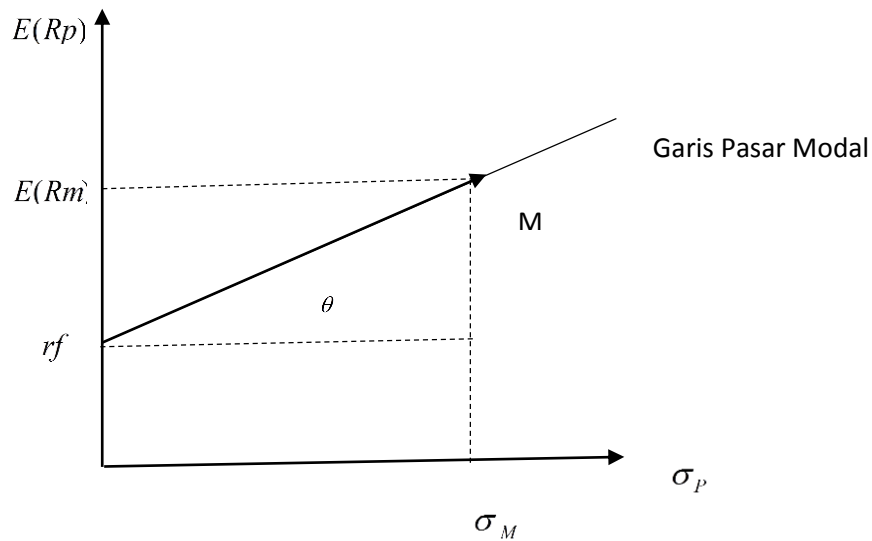
$$\sigma_m^2 = W_m' \Sigma W_m.$$

#### **M. *Capital Assets Pricing Model (CAPM)***

*Capital Assets Pricing Model (CAPM)* pertama kali diperkenalkan oleh Sharpe, Lintner dan Mossin pada tahun 1964. Model CAPM dibentuk berdasarkan hubungan antara *expected risk* dan *expected return* (Strong, 2009: 168). Model ini dibentuk dari sekuritas pada kondisi pasar yang seimbang. Asumsi-asumsi yang dibangun dalam model CAPM menurut Strong (2009: 169) adalah sebagai berikut:

1. Varians *return* dan *mean return* menjadi keputusan investor.
2. Investor sebagai pengambil harga dan tidak dapat mempengaruhi harga saham.
3. Investor mempunyai probabilitas tingkat *return* di masa depan yang sama dan akses harga yang sama untuk informasi yang relevan.
4. Tidak terdapat pajak atau biaya transaksi.
5. Semua investor mengamati dalam periode investasi yang sama.
6. Setiap orang mempunyai keahlian yang sama dalam menganalisis sekuritas dan menginterpretasikan berita.

Jika semua asumsi tersebut dipenuhi, maka akan terbentuk kondisi pasar yang ekuilibrium. Hubungan *expected return* dan risiko dalam keadaan ekuilibrium pasar dapat digambarkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 *Capital Market Line*.

*Slope* dalam garis pasar modal disimbolkan  $\theta$  merupakan harga pasar dari risiko untuk portofolio yang dinyatakan dengan rumus sebagai berikut:

$$\theta = \frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M} \quad (2.39)$$

Perubahan  $\theta$  yang semakin kecil mengakibatkan risiko portofolio semakin besar dan sebaliknya. Garis pasar modal menunjukkan semua kemungkinan kombinasi portofolio efisien yang terdiri sekuritas-sekuritas berisiko dan sekuritas bebas risiko (Jogiyanto, 2003: 57). Garis pasar modal terbentuk sepanjang titik *expected return* sekuritas bebas risiko ( $r_f$ ) sampai titik *M*. *Expected return* sekuritas bebas risiko didekati dengan tingkat *return* suku bunga bank sentral, di Indonesia umumnya diambil dari tingkat *return* suku bunga bank Indonesia. Portofolio CAPM diharapkan memberikan keuntungan lebih besar dibandingkan sekuritas yang di investasikan pada bank (Jogiyanto, 2003: 59). *Expected return* dalam portofolio CAPM berdasarkan Gambar 2. 1 dapat dirumuskan dengan

$$E(R_p) = r_f + \frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M} \sigma_p. \quad (2.40)$$

keterangan:

$E(R_p)$  : *expected return* portofolio

$r_f$  : *return* sekuritas bebas risiko

$E(R_M)$  : *expected return* portofolio pasar

$\sigma_M$  : standar deviasi dari *return* portofolio pasar

$\sigma_p$  : standar deviasi dari *return* portofolio.

Kontribusi masing-masing sekuritas terhadap risiko portofolio pasar tergantung dari besarnya kovarians *return* sekuritas dengan portofolio pasar. Mensubstitusikan kontribusi risiko sekuritas terhadap risiko pasar untuk sekuritas

ke- $i$  yaitu  $\frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M}$  pada Persamaan (2.35) dan diperoleh:

$$\begin{aligned} E(r_i) &= r_f + \frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M} \cdot \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M} \\ &= r_f + \frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M^2} \cdot \sigma_{i,M} \\ &= r_f + \beta_i [E(R_M) - r_f] \end{aligned} \quad (2.41)$$

dengan  $\beta_i = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} = \frac{\text{cov}(R_i, R_M)}{\text{var}(R_M)}$  sebagai pengukur tingkat risiko dari suatu

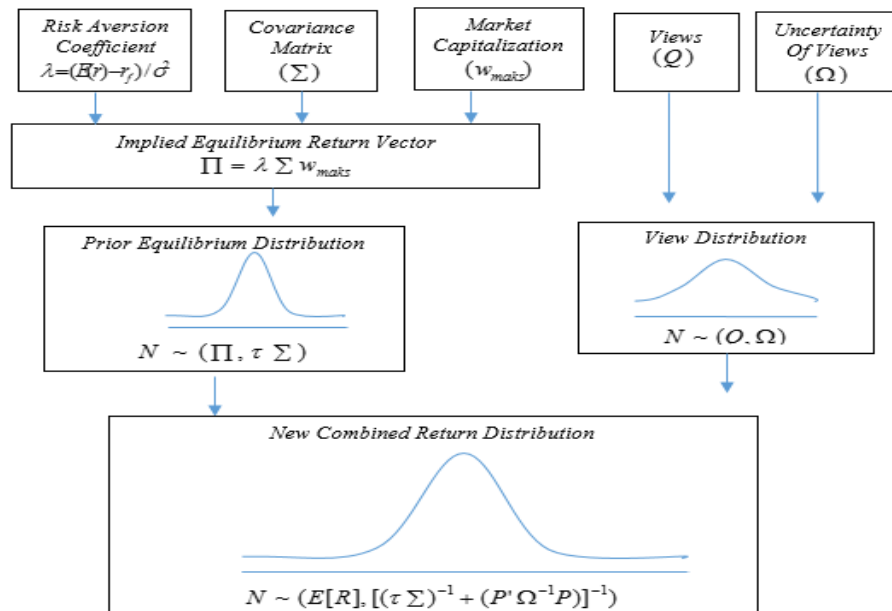
sekuritas terhadap risiko pasar dan  $E(r_i)$  sebagai *expected return* CAPM masing-masing sekuritas. *Expected return* CAPM untuk suatu sampel dapat dinyatakan dengan persamaan (2.38).

$$\overline{E}(r_i) = r_f + \beta_i [\overline{E}(R_M) - r_f]. \quad (2.42)$$

Indeks Harga Saham Gabungan (IHSG) merupakan penggambaran secara keseluruhan keadaan harga-harga saham. Pasar dalam model ini yaitu indeks harga saham gabungan (IHSG) disebut juga *Jakarta Composite Index (JCI)* atau *JSX Composite* yang merupakan salah satu indeks pasar saham yang digunakan oleh Bursa Efek Indonesia (BEI).

#### N. Model Black Litterman

Dasar untuk pembentukan rumus umum model Black Litterman adalah teori bayes. Pendekatan bayes digunakan untuk menggabungkan nilai *expected return* dan *equilibrium return* yang diamati oleh pasar dengan pandangan investor yang subjektif. Berikut merupakan proses kombinasi dua sumber informasi menggunakan pendekatan bayes digambarkan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Proses kombinasi dua sumber informasi menggunakan pendekatan bayes ( Satchell & Scowcroft, 2000)

Gambar 2.2 dapat dijelaskan bahwa Black dan Litterman mengansumsikan bahwa *expected return*  $E(r)$  berdistribusi normal dengan mean  $\pi$  dan varian  $\tau\Sigma$  yaitu  $E(r) | \pi \sim N(\pi, \tau\Sigma)$  dan model *expected return* terbentuk dari dua jenis informasi yang berdistribusi normal. Dua informasi tersebut adalah *return* ekuilibrium yang berasal dari CAPM dan pandangan investor. Black dan Litterman mengungkapkan pandangan dan *return* ekuilibrium ke dalam distribusi probabilitas. Pada Gambar 2.2  $E(r)$  merupakan informasi prior yang menyatakan *views* investor dan  $(\pi | E(r))$  merupakan informasi sampel dari data ekuilibrium *return*, yang diketahui perkiraan yang dimiliki investor. Pada pembentukan model Black Litterman digunakan pendekatan bayes untuk menggabungkan *return* ekuilibrium CAPM sebagai informasi sampel dengan informasi prior dari pandangan investor, untuk membentuk distribusi posterior baru dari *return*.

Investor diberikan kesempatan untuk menyertakan tinjauannya dengan Model Black Litterman tentang saham-saham yang akan dipilihnya baik dengan tujuan pasti maupun relatif (Black and Litterman, 1992) yaitu:

1. Tinjauan pasti (*absolute view*)

Ketika seorang investor memberikan prediksinya tentang dua buah saham, maka investor tersebut akan yakin dengan nominal *return* yang akan diberikan masing-masing saham tersebut sebesar x%. Contoh: “Saya memprediksi sekuritas B akan memberikan *return* sebesar x%”

2. Tinjauan relatif (*relatif view*)

Ketika seorang investor memberikan prediksinya tentang dua buah saham, maka investor tersebut akan melakukan perbandingan antara *return* yang akan

diberikan kedua saham tersebut. Contoh: “Saya memprediksi bahwa *return* yang diberikan sekuritas A akan melampaui *return* yang diberikan sekuritas C sebesar  $y\%$ ”.

Contoh :

Suatu portofolio terbentuk dari 4 sekuritas, yaitu sekuritas A, B, C dan D. Investor dapat menyatakan tinjauannya (*feeling*) terhadap keempat saham tersebut maupun hanya pada beberapa saham yang menjadi perhatian investor. Pada contoh ini, investor hanya menyatakan keempat sekuritas tersebut dalam 3 tinjauan sebagai berikut:

Tinjauan 1: “Saya yakin sekuritas C akan memberikan *return* 3% melampaui sekuritas A”.

Tinjauan 2: “Saya yakin sekuritas B akan memberikan *return* 5%”.

Tinjauan 3: “Saya yakin sekuritas D akan memberikan *return* 0,5%”.

Jika  $E(r)$  adalah estimasi *return* investor dengan 4 sekuritas, yaitu A , B , C dan D, maka ketiga tinjauan investor tersebut dapat dinyatakan dengan:

$$E(r_C) - E(r_A) = 0,03 ;$$

$$E(r_B) = 0,05 ;$$

$$E(r_D) = 0,005 .$$

Matriks tinjauan dapat disusun dengan:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E(r) = \begin{bmatrix} E(r_{ITMG}) \\ E(r_{GGMR}) \\ E(r_{INTP}) \\ E(r_{AKRA}) \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} 0,03 \\ 0,05 \\ 0,005 \end{bmatrix} .$$

P adalah matriks tinjauan dari *return* dimana tiap baris matriks menyatakan satu tinjauan pada suatu portofolio. Jika investor memiliki tinjauan yang pasti maka jumlah bobot saham dalam tinjauan akan bernilai satu. Sedangkan jika investor memiliki tinjauan yang relatif maka jumlah bobot saham dalam tinjauan akan bernilai nol.

Pendekatan Bayes digunakan untuk menggabungkan nilai *expected return* dari *equilibrium return* yang diamati oleh pasar dengan pandangan investor yang subjektif. Melakukan penurunan estimasi likelihood gabungan, data *equilibrium return* CAPM dapat dikombinasikan dengan *views* seorang manajer investasi untuk membentuk opini/*views* yang baru (Christodoulakis, 2002)

Aturan Bayes menyatakan bahwa distribusi probabilitas dari suatu kejadian B terjadi apabila kejadian A diketahui, maka

$$\Pr(B | A) = \frac{\Pr(A | B) \Pr(B)}{\Pr(A)}. \quad (2.43)$$

Aturan Bayes diatas lebih sering diungkapkan dalam bentuk berikut:

$$\Pr(B | A) \propto \Pr(A | B) \Pr(B). \quad (2.44)$$

dengan notasi  $\propto$  menyatakan “proporsional terhadap”

$\Pr(B | A)$ : probabilitas bersyarat A, bila B diketahui. Disebut juga dengan distribusi posterior.

$\Pr(A | B)$ : probabilitas bersyarat B, bila A diketahui. Disebut juga dengan distribusi bersyarat.

$\Pr(B)$ : probabilitas B, disebut juga informasi prior.

$\Pr(A)$ : probabilitas A, disebut juga normalisasi konstan.

Untuk membentuk model Black-Litterman dibutuhkan dua jenis informasi yaitu *expected return equilibrium* CAPM dan *views* investor. Kedua informasi tersebut kemudian dikombinasikan dengan menggunakan aturan Bayes, dengan mengganti kejadian A adalah *equilibrium return* CAPM dan kejadian B adalah *expected return*, menggunakan persamaan bayes dapat diperoleh

$$\Pr(E(r) | \pi) = \frac{\Pr(\pi | E(r)) \Pr(E(r))}{\Pr(\pi)} \quad (2.45)$$

dengan,  $r$ : vektor excess return ukuran  $n \times 1$

$E(r)$ : vektor *expected return* investor ukuran  $n \times 1$

$\pi$ : equilibrium return CAPM

Diasumikan bahwa keyakinan prior  $\Pr(E(r))$  dinyatakan sebagai  $P E(r)$ , yang mempunyai bentuk  $k$  kendala linear dari vektor *expected return*  $E(r)$  dan ditulis dengan matriks  $P$  berukuran  $k \times n$  sehingga

$$PE(r) = q + v \quad (2.46)$$

Notasi  $v$  adalah vektor *error*  $n \times 1$  yang menandakan adanya *views* yang masih belum pasti serta diasumsikan  $v$  berdistribusi normal dengan *mean*nya nol dan variasinya  $\Omega$ , atau  $v \sim N(0, \Omega)$  dimana  $\Omega$  atau dapat ditulis  $v \sim N(0, \Omega)$  dimana  $\Omega$  adalah matriks diagonal kovarians dari *views*. He&Litterman (1999) merumuskan kovarians dari *views* adalah sebagai berikut:

$$\Omega = P(\tau \Sigma)P' \quad (2.47)$$

Skalar  $\tau$  merupakan kuantitas yang diketahui oleh manajer investasi untuk mengukur skala matriks kovarians historis ( $\Sigma$ ). Kebanyakan peneliti menggunakan nilai  $\tau$  yang berbeda. Satchell & Scowcroft (2000) menentukan nilai  $\tau$  sama dengan

1, He & Litterman (1999) menggunakan nilai  $\tau$  yaitu 0,025. Nilai  $\tau$  tergantung dari tingkat keyakinan investor terhadap *views*, sehingga nilai untuk  $\tau$  akan berkisar antara 0 sampai 1.

$$P E(r) \sim N(q, \Omega) \quad (2.48)$$

Fungsi densitas dari data equilibrium return dengan syarat informasi prior, diasumsikan sebagai

$$\pi | E(r) \sim N(E(r), \tau\Sigma) \quad (2.49)$$

Dapat diperhatikan bahwa  $E(\pi) = E(r)$ , artinya terdapat asumsi bahwa *mean equilibrium return* sama dengan *mean return pasar* yang dapat diperoleh melalui CAPM. Ketika informasi prior yang dimiliki investor memiliki tingkat *views* yang tidak pasti, hal ini diindikasikan dengan nilai matriks kovarians *views* ( $\Omega$ ) adalah bukan nol.

Teorema. Model Black Litterman (Anissa Salomons, 2007).

Menggunakan asumsi  $P E(r) \sim N(q, \Omega)$  dan  $\pi | E(r) \sim N(E(r), \tau\Sigma)$  dan densitas posterior  $f(E(r) | \pi)$  adalah berdistribusi multivariat normal dengan *mean*  $E(r) = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}P]$  dan variansnya adalah  $[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}$

Bukti:

A1.  $PE(r) | E(r)$  adalah distribusi normal dengan rata-rata  $q$  dan simpangan baku

$\Omega$ . Maka,  $PE(r) | E(r) \sim N(q, \Omega)$ .

A2. *Expected return*  $E(r)$  adalah variabel bebas, yang berdistribusi normal dengan *mean*  $\pi$  dan variansi  $\tau\Sigma$ . Maka,  $E(r) \sim N(\pi, \tau\Sigma)$ .

Pada asumsi A1 dinyatakan bahwa fungsi kepadatan probabilitas dari  $PE(r) | E(r)$  adalah distribusi multivariat normal dengan  $PE(r) | E(r) \sim N(q, \Omega)$ :

$$\mathbb{P} ( PE(r) | E(r) ) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \det(\Omega)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (PE(r) - q)' \Omega^{-1} (PE(r) - q) \right] \quad (2.50)$$

Pada asumsi A2 dinyatakan bahwa fungsi kepadatan probabilitas dari  $E(r)$  adalah distribusi multivariat normal dengan  $E(r) \sim N(\pi, \tau\Sigma)$ :

$$\mathbb{P} ( PE(r) ) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\tau\Sigma)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (E(r) - \pi)' (\tau\Sigma)^{-1} (E(r) - \pi) \right] \quad (2.51)$$

Teorema Bayes dalam konteks ini dapat dinyatakan sebagai:

$$\mathbb{P} ( E(r) | PE(r) ) = \frac{\mathbb{P} ( PE(r) | E(r) ) \mathbb{P} ( E(r) )}{\mathbb{P} ( PE(r) )} \quad (2.52)$$

$$\mathbb{P} ( PE(r) )$$

Distribusi ini dapat diganti dalam persamaan (2.52) untuk mendapatkan posterior

distribusi. Sesuai dengan persamaan (2.44) didapatkan:

$$\mathbb{P} ( E(r) | PE(r) ) = \infty \mathbb{P} ( PE(r) | E(r) ) \mathbb{P} ( E(r) )$$

Mengganti distribusi ke dalam rumus yaitu:

$$P(E(r) | PE(r)) \propto \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \det(\Omega)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (PE(r) - q)' \Omega^{-1} (PE(r) - q) \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\tau\Sigma)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (E(r) - \pi)' (\tau\Sigma)^{-1} (E(r) - \pi) \right]$$

Dengan menghilangkan semua konstanta dan yang tersisa adalah

$$PE(r) | PE(r) = \infty \exp \left[ -\frac{1}{2} (PE(r) - q)' \Omega^{-1} (PE(r) - q) - \frac{1}{2} (E(r) - \pi)' (\tau \Sigma)^{-1} (E(r) - \pi) \right]$$

$$\mathbb{P} ( E(r) | PE(r) ) = \infty \exp \left[ -\frac{1}{2} \varphi \right]$$

Menggunakan fungsi kepadatan probabilitas dari multivariat yang terdistribusi normal variabel  $X \in R^n$  dengan mean  $\mu$  dan variansi  $\Sigma$  dapat direpresentasikan sebagai

$$\mathbb{P} ( X ) \propto \exp \left[ -\frac{1}{2} (X - \mu)' \Sigma^{-1} (X - \mu) \right]. \quad (2.53)$$

Diketahui bahwa  $\mu$  sama dengan rata-rata dari model Black Litterman dan  $\Sigma$  adalah variansnya. Untuk mendapatkan hasilnya maka dapat dirumuskan dengan bentuk:  $(X - \mu)' \Sigma^{-1} (X - \mu)$

sehingga diperoleh densitas posterior yang sebanding:

$$\begin{aligned} \varphi &= E(r)' P' \Omega^{-1} PE(r) - E(r)' P' \Omega^{-1} q - q' \Omega^{-1} PE(r) + q' \Omega^{-1} q \\ &\quad + E(r)' (\tau \Sigma)^{-1} E(r) - E(r)' (\tau \Sigma)^{-1} \pi - \pi' (\tau \Sigma)^{-1} E(r) + \pi' (\tau \Sigma)^{-1} \pi. \\ &= E(r)' P' \Omega^{-1} PE(r) - 2q' \Omega^{-1} PE(r) + q' \Omega^{-1} q + E(r)' (\tau \Sigma)^{-1} E(r) \\ &\quad - 2\pi' (\tau \Sigma)^{-1} E(r) + \pi' (\tau \Sigma)^{-1} \pi. \\ &= E(r)' [P' \Omega^{-1} P + (\tau \Sigma)^{-1}] E(r) - 2[q' \Omega^{-1} P + \pi' (\tau \Sigma)^{-1}] E(r) \\ &\quad - q' \Omega^{-1} q + \pi' (\tau \Sigma)^{-1} \pi. \end{aligned}$$

Untuk,

$$C = (\tau \Sigma)^{-1} \pi + P' \Omega^{-1} q,$$

$H = (\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P$ , dimana  $H$  simetris dengan  $H = H'$ ,

$$A = q'\Omega^{-1}q + \pi'(\tau\Sigma)^{-1}\pi.$$

Menggunakan notasi di atas, maka dapat ditulis kembali mejadi:

$$\begin{aligned}\varphi &= E(r)'HE(r) - 2C'E(r) + A \\ &= E(r)'H'E(r) - 2C'E(r) + A \\ &= (HE(r))'H^{-1}HE(r) - 2C'H^{-1}HE(r) + A \\ &= (HE(r) - C)'H^{-1}(HE(r) - C) + A - C'H^{-1}C \\ &= (E(r) - H^{-1}C)'H(E(r) - H^{-1}C) + A - C'H^{-1}C\end{aligned}$$

Dengan demikian  $A - C'H^{-1}C$  akan menjadi konstanta dalam berdistribusi posterior

$$\mathbb{P}(E(r) | PE(r)) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(E(r) - H^{-1}C)'H(E(r) - H^{-1}C)\right]$$

Dengan  $E(r) | PE(r)$  adalah mean posterior yaitu

$$H^{-1}C = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}q]$$

variansinya, yaitu

$$H^{-1} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}$$

Jadi  $(E(r))$  atau distribusi return kombinasi yang baru sebagai distribusi posterior berdistribusi normal.

$$(E(r)) \sim N([(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}q], [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1})$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
\mu_{BL} &= [(\pi \Sigma)^{-1} + P' \Omega^{-1} P]^{-1} [(\pi \Sigma)^{-1} \pi + P' \Omega^{-1} q] \\
&= [(\pi \Sigma)^{-1} + P' \Omega^{-1} P]^{-1} (\pi \Sigma)^{-1} (\pi \Sigma) [(\pi \Sigma)^{-1} \pi + P' \Omega^{-1} q] \\
&= [I + \tau \Sigma P' \Omega^{-1} P]^{-1} [\tau \Sigma P' \Omega^{-1} q] \\
&= [I + \tau \Sigma P' \Omega^{-1} P]^{-1} [(I + \tau \Sigma P' \Omega^{-1} P) \pi + \tau \Sigma P' \Omega^{-1} (q - P \pi)] \\
&= \pi + (I + \tau \Sigma P' \Omega^{-1} P)^{-1} (\tau \Sigma P' \Omega^{-1} (q - P \pi)) \\
&= \pi + (I + \tau \Sigma P' \Omega^{-1} P)^{-1} (\tau \Sigma P' \Omega^{-1} \{ (q + P' \tau \Sigma P) (\Omega + P' \tau \Sigma P)^{-1} \} (q - P \pi)) \\
&= \pi + (I + \tau \Sigma P' \Omega^{-1} P)^{-1} (\tau \Sigma P' + \tau \Sigma P' \Omega^{-1} P' \tau \Sigma P) (\Omega + P' \tau \Sigma P)^{-1} (q - P \pi) \\
&= \pi + [(I + \tau \Sigma P' \Omega^{-1} P)^{-1} (I + \tau \Sigma P' \Omega^{-1} P)] \tau \Sigma P' (\Omega + P' \tau \Sigma P)^{-1} (q - P \pi) \\
&= \pi + \tau \Sigma P' (\Omega + \tau \Sigma P')^{-1} (q - P \pi).
\end{aligned}$$

Karena ketidakpastian investor berkurang (investor menjadi lebih yakin atau pasti terhadap *views*), maka *expected return* akan mendekati kasus tertentu, yaitu:

$$\mu_{BL} = E(r_{BL}) = \pi + \tau \Sigma P' (\Omega + P \tau \Sigma P')^{-1} (q - P \pi) \quad (2.54)$$

dengan,

$E(r_{BL})$  : *expected return* model Black Litterman

$\pi$  : vektor  $k \times 1$  untuk *return equilibrium* CAPM

$\tau$  : skala tingkat keyakinan dalam pandangan/*views* (*range* 0-1)

$\Sigma$  : matriks varians kovarians *return*

$\Omega$  : matriks diagonal kovarians dari *views*

$P$  : matriks  $k \times n$  untuk *views* yang berkaitan dengan *return*

$q$  : vektor  $k \times 1$  untuk *views return* yang diberikan investor.

Pembobotan portofolio model Black Litterman dihitung menggunakan model *mean variance* Markowitz, sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$w_{BL} = (\delta \Sigma)^{-1} \mu_{BL} \quad (2.55)$$

dengan,

$w_{BL}$  : bobot sekuritas pada model Black Litterman

- $\delta$  : koefisien *risk aversion*
- $\Sigma$  : matriks varians kovarians *return*
- $\mu_{BL}$  : *expected return* Black Litterman.

#### O. Metode Indeks Sharpe

Investor dapat menghitung kinerja portofolio yang dibentuk. Salah satu metode untuk menghitung kinerja portofolio adalah dengan menggunakan indeks sharpe  $S_p$ . Menurut Tandelilin (2007: 324) portofolio optimal yang dipilih berdasarkan perhitungan indeks sharpe adalah portofolio yang memiliki nilai ratio maksimum antara *return* ( $R_p$ ) terhadap risiko ( $\sigma_p$ ). Perhitungan indeks sharpe tanpa aset bebas risiko menggunakan persamaan

$$S_p = \frac{R_p}{\sigma_p}. \quad (2.56)$$

keterangan:

- $S_p$  : indeks sharpe
- $R_p$  : *return* portofolio
- $\sigma_p$  : risiko portofolio.

#### P. Peramalan (John E. Hanke and Dean Wichern, 2005)

Peramalan adalah menaksir sesuatu besaran yang diperkirakan akan terjadi pada saat tertentu di masa mendatang dengan batasan waktu yang jelas. Runtut waktu adalah serangkaian pengamatan terhadap suatu peristiwa, kejadian, gejala, atau variabel yang diambil dari waktu ke waktu, dicatat secara teliti menurut urutan-urutan waktu terjadinya, dan kemudian disusun sebagai data statistik. Analisis runtut waktu adalah analisis terhadap hasil pengamatan pada data statistik masa

lampau yang diurutkan berdasarkan urutan kejadian. Salah satu metode analisis runtut waktu yang dapat digunakan adalah model ARIMA.

### 1. **ARIMA (*Autoregressive Integrated Moving Average*)**

ARIMA disebut juga sebagai metode analisis runtut waktu Box-Jenkins. ARIMA sangat baik ketepatannya untuk peramalan jangka pendek, sedangkan untuk peramalan jangka panjang ketepatan peramalannya kurang baik. ARIMA merupakan model yang mengabaikan independen variabel dalam membuat peramalan. ARIMA menggunakan nilai masa lampau dan sekarang dari variabel dependen untuk menghasilkan peramalan jangka pendek yang akurat.

ARIMA merupakan model ARMA(p,q) nonstasioner. Pada model ARMA(p,q) nonstasioner, proses pembedaan dilakukan supaya stasioner. Setelah model ARMA mengalami proses pembedaan sebanyak d kali hingga stasioner, maka model ARMA(p,q) menjadi model ARIMA(p,d,q).

Model ARIMA(p,d,q) ditulis dalam persamaan berikut:

$$\phi(B)(1-B)^d Y_t = \omega(B)e_t. \quad (2.57)$$

keterangan:

$$\phi(B) = \text{AR}(p)$$

$$(1-B)^d Y_t = \text{Pembedaan Periode (d)}$$

$$\omega(B)e_t = \text{MA}(q).$$

### 2. **Tahapan Peramalan Menggunakan Metode ARIMA**

Model ARIMA terdiri dari enam langkah dasar, yaitu tahap pemeriksaan kestasioneran data, tahap identifikasi model sementara, tahap estimasi parameter,

tahap pengujian model, pemilihan model terbaik, dan tahap peramalan (John E. Hanke and Dean Wichern, 2005: 389).

a. Pengujian Stasioneritas Data

Untuk melakukan suatu peramalan menggunakan metode ARIMA maka data runtut waktu yang dianalisis harus data yang stasioner. Pengujian stasioner data dapat berdasarkan analisis autokorelasi dan partial autokorelasi data maupun dilihat dari rata-rata serta variansnya.

Jika rata-rata dan variansnya konstan maka data tersebut stasioner, sedangkan jika rata-rata dan variansnya tidak konstan maka data tidak stasioner. Untuk data dengan varians tidak konstan maka dapat distasionerkan menggunakan transformasi logaritma dan untuk data dengan rata-rata tidak konstan, maka dapat distasionerkan dengan melakukan *differencing*. *Differencing* adalah menghitung perubahan atau selisih nilai observasi.

b. Identifikasi Model Sementara

Jika data sudah stasioner, maka dilakukan analisis terhadap autokorelasi dan partial autokorelasi dari data tersebut untuk memperoleh model sementara yang sesuai.

c. Estimasi Parameter

Terdapat dua cara yang dapat digunakan untuk mendapatkan parameter dalam model. Cara pertama adalah dengan mencoba semua kemungkinan parameter (*trial and error*). Cara ini menguji beberapa parameter yang berbeda dan memilih salah satu parameter yang meminimumkan jumlah kuadrat nilai sisa (*sum of squared*

*residual*). Cara kedua adalah perbaikan secara bertahap dengan memilih taksiran awal.

#### d. Pengujian Model

Pengujian model dapat dilakukan dengan pengujian masing-masing parameter model secara parsial (*t-test*) maupun pengujian model secara keseluruhan (*overall F test*).

#### e. Pemilihan Model Terbaik

Pada tahap ini, dari model-model sementara yang telah diuji dan memenuhi asumsi maka dilakukan pemilihan model terbaik dengan menggunakan nilai standar deviasi peramalan *Mean Standard Error (MSE)* dan prinsip parsimoni, yaitu memilih model terbaik dengan parameter paling sedikit dapat juga digunakan sebagai bahan pertimbangan dalam menentukan model yang terbaik.

#### f. Peramalan

Jika model terbaik telah ditetapkan, maka model siap digunakan untuk peramalan. Untuk data yang mengalami *differencing*, bentuk selisih harus dikembalikan pada bentuk awal dengan melakukan proses integral karena yang diperlukan adalah ramalan *time series* asli.