BAB II
LANDASAN TEORI

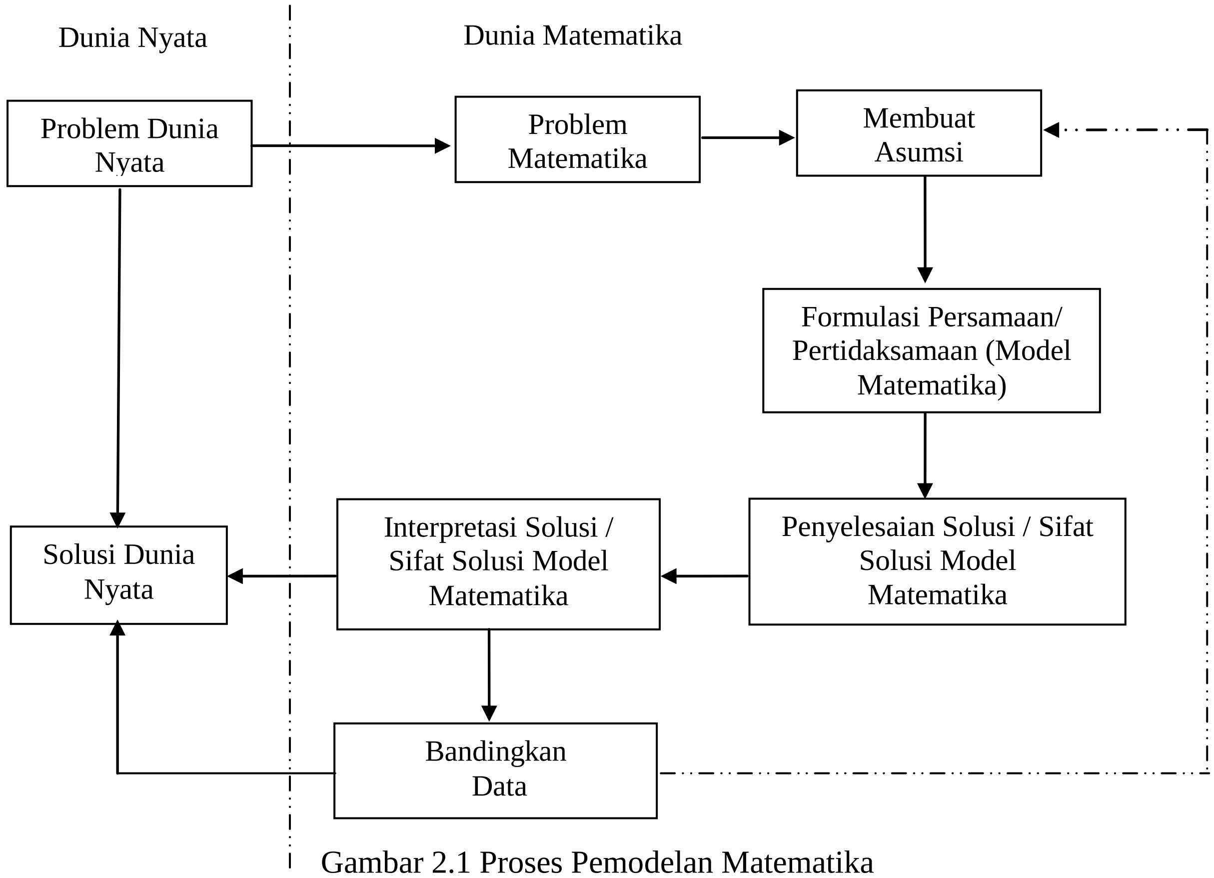
Pada bab ini akan dibahas teori – teori pendukung yang akan digunakan pada bab selanjutnya, antara lain model matematika, model epidemik SIR klasik, nilai eigen, persamaaan diferensial, sistem persamaan diferensial, titik kesetimbangan, linearisasi, bilangan reproduksi dasar, analisa kestabilan, kriteria Routh Hurwitz, optimal kontrol, *Prinsip Minimum Pontryagin*.

A. Model Matematika

1. Pengertian model matematika

Widowati dan Sutimin (2007: 1) menjelaskan model matematika adalah representasi bidang ilmu tertentu ke dalam pernyataan matematika yang diperoleh dari salah satu bidang matematika yaitu pemodelan matematika. Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang merepresentasikan dan menjelaskan sistem – sistem fisik atau problem pada dunia nyata dalam pernyataan matematika, sehingga diperoleh pemahaman dari dunia nyata yang lebih tepat.

Widowati dan Sutimin (2007: 3) juga menyatakan proses pemodelan matematika dalam alur diagram berikut.



Gambar 2.1 Proses Pemodelan Matematika

Gambar 2.1 menggambarkan suatu permasalahan nyata ilmu tertentu yang dibawa ke dalam bentuk matematika dengan mencari asumsi - asumsi yang tepat sesuai masalah di dunia nyata, sehingga dapat dibentuk suatu model matematika. Model matematika dibentuk oleh sistem persamaan atau pertidaksamaan sesuai asumsi yang digunakan. Sistem tersebut dapat digunakan untuk mencari penyelesaian solusi / sifat solusi dari model matematika. Selanjutnya, uji kelayakan dengan menginterpretasi solusi / sifat solusi model matematika tersebut dalam kehidupan nyata. Langkah selanjutnya, solusi model tersebut dibandingkan dengan suatu data untuk melihat ketepatan model yang dibuat.

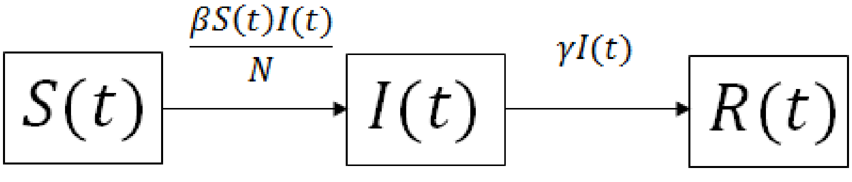
2. Model Epidemik SIR Klasik

Model matematika yang akan dibahas dalam tugas akhir adalah model epidemik SIR. Kermack W.O dan McKendrick (Brauer, 2008: 25) menyatakan secara umum dalam model epidemi SIR klasik. Populasi terbagi atas tiga kelas yaitu kelas *susceptible* (S) menyatakan populasi individu yang sehat dan rentan terhadap penyakit, kelas *infected* (I) menyatakan populasi individu yang terinfeksi penyakit dan dapat sembuh, dan kelas *recover* (R) menyatakan populasi individu yang sembuh dan kebal terhadap penyakit tersebut.

Selanjutnya $S(t)$ untuk menyatakan populasi kelas individu S pada saat t, $I(t)$ untuk menyatakan populasi kelas individu I pada saat t, $R(t)$ untuk menyatakan populasi kelas individu R pada saat t.

Didefinisikan parameter β menyatakan laju kontak antara populasi kelas individu S dan populasi kelas individu I per satuan waktu t, dan γ menyatakan laju kesembuhan per satuan waktu t.

Diasumsikan tidak ada kelahiran dan kematian, masa inkubasi singkat, setelah sembuh dari penyakit maka tidak kembali rentan. Berikut merupakan diagram transfer untuk model SIR klasik.



Gambar 2.2 Diagram Transfer Model Epidemik SIR Klasik

Gambar 2.2 menunjukkan laju perubahan $S(t)$ proporsional dengan berkurangnya rata – rata setiap individu dalam populasi terjadi kontak untuk menularkan infeksi pada $S(t)$ oleh $I(t)$ per satuan waktu t sebesar $\frac{\beta S(t)I(t)}{N}$. Jadi diperoleh persamaan,

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\beta S(t)I(t)}{N}. \tag{2.1a}$$

Laju perubahan $I(t)$ proposional dengan bertambahnya laju infeksi $S(t)$ sebesar $\frac{\beta S(t)I(t)}{N}$, tetapi akan berkurang karena laju populasi memperoleh kesembuhan sebesar $\gamma I(t)$. Jadi diperoleh persamaan,

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t). \tag{2.1b}$$

Laju perubahan $R(t)$ proposional dengan bertambahnya populasi memperoleh kesembuhan sebesar $\gamma I(t)$. Jadi persamaan diperoleh,

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t). \tag{2.1c}$$

Sistem (2.1) dilengkapi dengan nilai awal $S(0) = S_0 \geq 0$, $I(0) = I_0 \geq 0$ $R(0) = R_0 \geq 0$, dimana N menyatakan total populasi.

B. Nilai Eigen

Definisi 2.1 (Howard, 1997: 277)

Diberikan matriks A berukuran nxn. Vektor tak nol $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dinamakan vektor eigen dari A. Jika $A\mathbf{x}$ adalah kelipatan skalar dari $\mathbf{x}$ maka diperoleh

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

untuk suatu skalar λ. *Skalar* λ *disebut nilai eigen dari* A.

Berdasarkan Definisi 2.1, maka untuk mencari nilai eigen pada matriks A yang berukuran nxn adalah

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

$$\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \lambda I_n\mathbf{x}$$

$$\Leftrightarrow A\mathbf{x} - \lambda I_n\mathbf{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x}(A - \lambda I_n) = 0 \tag{2.2}$$

dengan I_n adalah matriks identitas.

Selanjutnya, nilai eigen akan dicari menggunakan Persamaan (2.2). Menurut Howard (1997: 278), agar λ menjadi nilai eigen, maka haruslah ada solusi taknol dari persamaan tersebut. Persamaan (2.2) mempunyai solusi taknol jika dan hanya jika

$$\left|A - \lambda I_n\right| = 0. \tag{2.3}$$

Persamaan (2.3) dinamakan persamaan karakteristik dari A, sedangkan skalar λ yang digunakan disebut nilai eigen. Jika diperluas, Persamaan karakteristik (2.3) merupakan polinom λ yang dinamakan polinom karakteristik matriks A, sehingga polinom karakteristik matriks A adalah

$$\left|A - \lambda I_n\right| = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n, a_i \neq 0, i = 0,1,\ldots,n. \tag{2.4}$$

Diberikan contoh untuk mencari nilai eigen dari suatu matriks.

Contoh 2.1

Misalkan jika terdapat matriks $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dengan $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

diperoleh persamaan karakteristik,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 = 0,$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0, \qquad (2.5)$$

Persamaan karakteristik (2.5), maka diperoleh solusi

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(-2)}}{2}$$
$$= \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$$

Akar – akar Persamaan karakteristik (2.5) adalah

$\lambda_1 = \dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$ dan $\lambda_2 = \dfrac{5-\sqrt{33}}{2}$.

Selanjutnya, λ_1 dan λ_2 merupakan nilai eigen dari matriks A.

C. Persamaan Diferensial

Diberikan definisi persamaan diferensial biasa sebagai berikut.

Definisi 2.2 (Ross, 1984: 4)

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

Definisi 2.3 (Ross, 1984: 4)

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap lebih dari satu variabel bebas.

Contoh 2.2

Persamaan – persamaan berikut ini disebut sebagai persamaan diferensial biasa.

a) $\frac{dx}{dt} = x + 1$

b) $\frac{dx}{dy} = e^{y}$

Persamaan – persamaan berikut ini disebut sebagai persamaan diferensial parsial.

c) $\frac{\partial^2 p}{\partial^2 r} - \frac{\partial^2 p}{\partial^2 q} = 0$

d) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

D. Sistem Persamaaan Diferensial

Diberikan vektor $\mathbf{x} \in E \subseteq \mathbb{R}^n$, dengan $\mathbf{x} = \left(x_1, x_2, x_3, ..., x_n\right)^T$, $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^n$, E adalah himpunan terbuka dan $\mathbf{f} \in C'(E)$ dengan $C'(E)$ adalah himpunan semua fungsi yang mempunyai turunan pertama yang kontinu di E, dimana $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)^T$. Jika $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ menyatakan turunan $\mathbf{x}$ terhadap t. Sistem persamaan diferensial dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, ..., x_n),\\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, ..., x_n),\\
&\vdots\\
\dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, ..., x_n),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

atau

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, ..., x_n),\\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, ..., x_n),\\
&\vdots\\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, ..., x_n).
\end{aligned}$$

Sistem (2.6) dapat ditulis dengan

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{2.7}$$

Selanjutnya, diberikan solusi dari Sistem (2.7) sebagai berikut.

Definisi 2.4 (Perko, 2001: 71)

Diberikan $\mathbf{f} \in C(E), E \subseteq \mathbb{R}$ *dimana* $C(E)$ *adalah fungsi – fungsi yang kontinue di* E *, dengan* E *adalah himpunan terbuka dari* $\mathbb{R}^n$*. Vektor* $\mathbf{x}(t)$ *disebut solusi dari Sistem (2.7) dengan interval* (a,b)*, jika* $\mathbf{x}(t)$ *dapat diturunkan pada* (a,b) *dan untuk setiap* $t \in (a,b), \mathbf{x}(t) \in E,$ *berlaku*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)).$$

Diberikan $\mathbf{f} \in C(E)$ *yang dilengkapi nilai awal* $\mathbf{x}_0 \in E$ *dan diberikan sistem persamaan diferensial,*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \tag{2.8}$$

Vektor $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\mathbf{x_0}(t))$ *disebut solusi Sistem (2.8) jika* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *dengan* $t_0 \in (a,b).$

1. Sistem Persamaan Diferensial Linear

Didefinisikan persamaan yang menggambarkan persamaan diferensial linear secara umum.

Definisi 2.5 (Ross, 1984: 264)

Persamaan diferensial linear orde n *dengan variabel tak bebas* y *dan* x *serta variabel bebas* t *sebagai berikut.*

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + b_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + b_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{d^n y}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^n x}{dt^n} + a_n y + b_n x = P(t) \tag{2.9}$$

dengan $a_0, b_0 \neq 0, a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}^n$ *dan* $P(t)$ *kontinu pada interval* $(a,b), \forall t \in (a,b).$

Persamaan (2.9) dinamakan bentuk nonhomogeneous jika $P(t) \neq 0.$ Akan dibahas sistem persamaan diferensial linear nonhomogeneus orde satu dengan variabel tak bebas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dan variabel bebas t sebanyak n buah persamaan berikut.

$$c_{11} \frac{dx_1}{dt} + c_{12} \frac{dx_2}{dt} + \ldots + c_{1n} \frac{dx_n}{dt} + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = P_1(t)$$

$$c_{21}\frac{dx_1}{dt}+c_{22}\frac{dx_2}{dt}+...+c_{2n}\frac{dx_n}{dt}+b_{21}x_1+b_{22}x_2+...+b_{2n}x_n=P_2(t)$$ (2.10)

$\vdots$ (sebanyak n kali)

$$c_{n1}\frac{dx_1}{dt}+c_{n2}\frac{dx_2}{dt}+...+c_{nn}\frac{dx_n}{dt}+b_{n1}x_1+b_{n2}x_2+...+b_{nn}x_n=P_n(t)$$

Sistem (2.10) dapat ditulis sebagai persamaan diferensial bentuk biasa berikut.

$$\frac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n+p_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n+p_1(t)$$ (2.11)

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n+p_n(t)$$

Sistem (2.11) dapat dinyatakan sebagai

$$\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+P(t)$$ (2.12)

dimana $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ merupakan variabel tak bebas, serta A adalah matriks ukuran nxn. Matriks A dengan $a_{ij}\in\mathbb{R}^n, i=1,2,3,...,n,\ j=1,2,3,...,n$ dan P dengan ukuran matriks $nx1$ dalam fungsi t. Jadi diperoleh,

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_1(t)\\ p_2(t)\\ \vdots\\ p_n(t)\end{bmatrix},$$

Jika pada Sistem (2.12) didefinisikan $P(t)=0$ dan $\dot{\mathbf{x}}=\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ dimana vektor $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}=\left(x_1,x_2,x_3,...,x_n\right)^T$ dan $x_1,x_2,x_3,...,x_n\in\mathbb{R}$, maka diperoleh sistem persamaan diferensial linear homogen,

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{2.13}$$

dengan A adalah matriks berukuran *nxn.*

2. **Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear**

Suatu persamaan diferensial dikatakan nonlinear, jika persamaan diferensial memenuhi salah satu sebagai berikut (Ross, 1984: 5).

a. Terdapat variabel tak bebas dan/atau turunannya yang berpangkat selain satu.
b. Terdapat fungsi transedental dari variabel tak bebas dan turunan - turunannya.
c. Terdapat perkalian pada variabel tak bebas dan/atau turunan- turunannya.

Contoh 2.3

Persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut:

$$(5+y)\frac{dy}{dx} + xy = e^y \qquad \text{(PD nonlinear orde 1)} \tag{2.14a}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \qquad \text{(PD nonlinear orde 2)} \tag{2.14b}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0 \qquad \text{(PD nonlinear orde 4)} \tag{2.14c}$$

Persamaan (2.14a) merupakan nonlinear, karena terdapat transedental dan perkalian pada variabel tak bebas y. Persamaan (2.14b) merupakan nonlinear, karena terdapat variabel tak bebas dan turunannya variabel bebas yang berpangkat dua. Persamaan (2.14c) merupakan nonlinear, karena terdapat perkalian variabel tak bebas.

Suatu sistem persamaan diferensial dikatakan nonlinear, jika persamaan diferensial yang membentuknya merupakan persamaan diferensial nonlinear.

Contoh 2.4

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 x_2 - 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1^2 - x_2 \end{aligned} \qquad (2.15)$$

Sistem (2.15) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear dengan variabel bebas t dan variabel tak bebas x_1 dan x_2. Sistem (2.15) dikatakan sistem persamaan diferensial nonlinear karena terdapat perkalian antar variabel tak bebas.

E. Titik Kesetimbangan

Berikut akan diberikan definisi tentang titik kesetimbangan.

Definisi 2.6 (Stephen Wiggins, 1990: 5)

Titik $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ *adalah titik kesetimbangan Sistem (2.7), jika dipenuhi*

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0. \qquad (2.16)$$

Contoh 2.5

Diberikan contoh untuk mencari titik kesetimbangan Sistem (2.15) menggunakan Definisi (2.6). Misalkan $\bar{\mathbf{x}}$ adalah titik kesetimbangan dari Sistem (2.15).

Misal $f_1 = x_1x_2 - 2x_1$ dan $f_2 = x_1^2 - x_2$. Akan dicari titik kesetimbangan $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$ sedemikian sehingga $f_1\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2\right)^T = 0,$ dan $f_2\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2\right)^T = 0.$ Untuk $f_1 = 0,$ maka

$$\begin{aligned}
&x_1x_2 - 2x_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x_2\left(x_1 - 2\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow x_2 = 0 \vee x_1 = 2.
\end{aligned}$$

Jika $x_2 = 0$ disubstitusi ke $f_2 = 0,$ diperoleh

$$\begin{aligned}
&x_1^2 - x_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x_1^2 - 0 = 0 \\
&\Leftrightarrow x_1 = 0.
\end{aligned}$$

Jadi, titik kesetimbangan pertama diperoleh $\bar{\mathbf{x}}_1 = \left(0,0\right)^T$. Sementara, jika $x_1 = 2$ dan disubstitusi ke $f_2 = 0,$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
&x_1^2 - x_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow 4 - x_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x_2 = 4.
\end{aligned}$$

Jadi, titik kesetimbangan kedua diperoleh $\bar{\mathbf{x}}_2 = \left(2,4\right)^T$. Disimpulkan bahwa, Sistem (2.15) memiliki dua titik kesetimbangan yaitu $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \left(0,0\right)^T \\ \left(2,4\right)^T \end{bmatrix}.$

F. Linearisasi

Linearisasi adalah proses mengubah sistem persamaan diferensial nonlinear ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial linear.

Berikut teorema tentang matriks Jacobian.

Teorema 2.1 (Perko, 2001: 67)

Jika $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *diferensiabel di* x_0, *maka diferensial parsial* $\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x_i}, i, j = 1,...n,$ *di* x_0 *ada untuk semua* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *dan,*

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)x_j.$$

Bukti:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)x_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0)x_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0)x_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0)x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0)x_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0)x_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0)x_2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0)x_n \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0)x_n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0)x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{1n}}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= D\mathbf{f}(x_0)\mathbf{x}$$

■

Matriks $D\mathbf{f}(x_0)$ disebut matriks Jacobian, selanjunya dinotasikan $J\mathbf{f}(x_0)$.

Diberikan sistem persamaan berikut.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{2.17}$$

dimana $\mathbf{x} \in E \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}$ adalah fungsi nonlinear dan kontinu.

Sistem (2.17) akan dilinearisasikan. Diberikan $\mathbf{x} = \left(x_1, x_2, x_3, ..., x_n\right)^T$, $\mathbf{f} = \left(f_1, f_2, f_3, ..., f_n\right)^T$ dan $\mathbf{f} \in C^n(E)$. Misal $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T$ adalah titik kesetimbangan Sistem (2.17). Deret Taylor dari fungsi $\mathbf{f}$ disekitar titik kesetimbangan $\bar{\mathbf{x}}$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, ..., x_n)^T &= f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T (x_1 - \bar{x}_1) + \\
&\quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T (x_2 - \bar{x}_2) + ... + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T (x_n - \bar{x}_n) + R_{f_1} \\
f_2(x_1, x_2, ..., x_n)^T &= f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T (x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T (x_2 - \bar{x}_2) + ... \\
&\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T (x_n - \bar{x}_n) + R_{f_2} \\
&\vdots \\
f_n(x_1, x_2, ..., x_n)^T &= f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T (x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T (x_2 - \bar{x}_2) + ... \\
&\quad + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T (x_n - \bar{x}_n) + R_{f_n}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

dengan $R_{f_1}, R_{f_2}, ..., R_{f_n}$ diabaikan, karena nilainya $R_{f_1}, R_{f_2}, ..., R_{f_n}$ mendekati nol.

Sementara, titik kesetimbangan $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T$ Sistem (2.18), maka $f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T = ... = f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T = 0$, sehingga diperoleh

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T (x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T (x_2 - \bar{x}_2) + ... + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T (x_n - \bar{x}_n),$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T (x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T (x_2 - \bar{x}_2) + ... + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T (x_n - \bar{x}_n),$$

$$\vdots \qquad (2.19)$$

$$\dot{x}_n = \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T (x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T (x_2 - \bar{x}_2) + ... + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T (x_n - \bar{x}_n).$$

dengan n variabel. Persamaan (2.19) dapat dibentuk matriks berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \\ \vdots \\ x_n - \bar{x}_n \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Misalkan $q_1 = x_1 - \bar{x}_1, q_2 = x_2 - \bar{x}_2, ..., q_n = x_n - \bar{x}_n,$ maka Sistem (2.20) menjadi

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Persamaan (2.21) diperoleh matriks Jacobian yaitu

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)^T \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Matriks Jacobian (2.22) dapat dilihat kestabilan disekitar titik kesetimbangan.

Didefinisikan jika J memiliki nilai eigen yang bernilai bagian realnya tidak nol, sehingga kestabilannya dari persamaan akan dapat dilihat sebagai berikut.

$$\dot{\mathbf{q}} = J\mathbf{q} \tag{2.23}$$

Sistem (2.23) dinamakan hasil linearisasi pada Sistem (2.17).

Setelah linearisasi dilakukan, maka pada Sistem (2.17) dilihat kestabilan sistem nonlinear di sekitar titik kesetimbangan. Kestabilan Sistem (2.17) di sekitar titik kesetimbangan $\bar{\mathbf{x}}$ dapat dilihat dari kestabilan hasil linearisasi yaitu Sistem (2.23), hanya jika $\bar{\mathbf{x}}$ hiperbolik. Berikut definisi untuk titik kesetimbangan hiperbolik.

Definisi 2.7 (Perko, 2001: 102)

Titik kesetimbangan $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ *disebut titik kesetimbangan hiperbolik dari Sistem (2.17), jika bagian real nilai eigen* $J\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) \neq 0$. *Sedangkan, jika* $J\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$ *mempunyai bagian real nol, maka disebut titik kesetimbangan nonhiperbolik.*

Contoh 2.6

Diberikan Sistem (2.15) yang akan dicari matriks $J\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$ dengan $\bar{\mathbf{x}}_1 = (0,0)^T$ dan $\bar{\mathbf{x}}_2 = (2,4)^T$. Sistem (2.15) akan dilakukan identifikasi titik kesetimbangan berikut

$$\begin{aligned} J\mathbf{f} &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(x_1x_2 - 2x_1)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial(x_1x_2 - 2x_1)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial(x_1^2 - x_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial(x_1^2 - x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_2 & x_1 - 2 \\ 2x_1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Untuk $\bar{\mathbf{x}}_1 = (0,0)^T$

$$J\mathbf{f}\left(0,0\right)^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari $J\mathbf{f}\left(0,0\right)^T$ diperoleh,

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & -2 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(-\lambda\right)\left(-1-\lambda\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = -1$$

Bagian real nilai eigen nol, maka titik kesetimbangan $\bar{\mathbf{x}}_1 = \left(0,0\right)^T$ adalah titik kesetimbangan nonhiperbolik. Selanjutnya $\bar{\mathbf{x}}_2 = \left(2,4\right)^T$

$$J\mathbf{f}\left(2,4\right)^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari $J\mathbf{f}\left(2,4\right)^T$ diperoleh,

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 5\lambda - 12 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{-5 + \sqrt{73}}{2} \vee \lambda_2 = \frac{-5 - \sqrt{73}}{2}$$

sehingga tidak terdapat bagian real nilai eigen nol, maka titik kesetimbangan $\bar{\mathbf{x}}_2 = \left(2,4\right)^T$ adalah titik kesetimbangan hiperbolik.

G. Analisa Kestabilan

Kestabilan titik kesetimbangan secara umum dibagi menjadi tiga jenis yaitu stabil, stabil asimtotik, tidak stabil. Berikut definisi kestabilan

Definisi 2.8 (Olsder, 2004: 57)

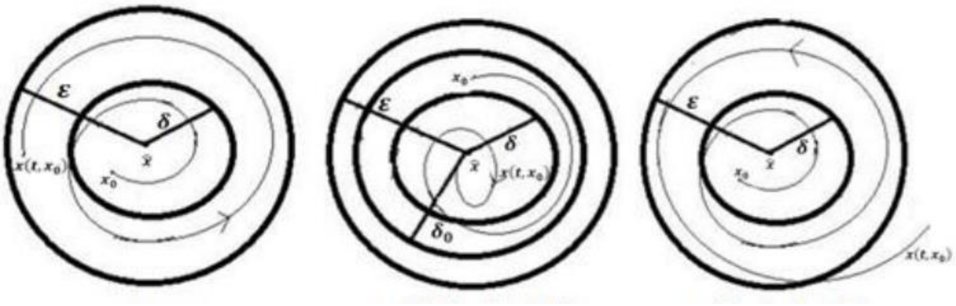
Diberikan titik kesetimbangan $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ *dari sistem* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *dikatakan,*

a. *Stabil jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $\delta > 0$, *sedemikian sehingga jika* $\|x_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$ *maka* $\|x(t, x_0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$ *untuk setiap* $t \geq t_0$

b. *Stabil asimtotik jika untuk setiap titik kesetimbangan* $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ *terdapat* $\delta_0 > 0$ *sedemikian sehingga jika* $\|x_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta_0$ *berlaku* $\lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0) - \bar{\mathbf{x}}\| = 0.$

c. *Tidak stabil jika titik kesetimbangan* $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ *tidak memenuhi (a)*

Definisi (2.8) disajikan gambar berikut.



Stabil　　Stabil asimtotik　　Tidak stabil

Definisi (2.8) terlalu sulit untuk menemukan kestabilan titik kesetimbangan. Selanjutnya, teorema kestabilan diberikan agar memudahkan dalam menganalisa kestabilan model di sekitar titik kesetimbangan dengan melihat nilai eigen.

Teorema 2.2 (Olsder, 2004: 58)

Diberikan persamaan diferensial $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$*, dengan* A *adalah matriks berukuran* *nxn, mempunyai* w *nilai eigen yang berbeda* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_w$ *dengan* $w \leq n$*.*

a. *Titik kesetimbangan* $\bar{\mathbf{x}} = 0$ *adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika* $\Re e(\lambda_i) < 0, \forall i = 1, 2, 3, ..., w.$

b. *Titik kesetimbangan* $\bar{\mathbf{x}} = 0$ *adalah stabil jika dan hanya jika* $\Re e(\lambda_i) \leq 0,$ *untuk semua* $i = 1, 2, ..., w$ *dan untuk setiap nilai eigen* λ_i *imajiner dengan* $\Re e(\lambda_i) = 0,$ *yang multisiplisitas aljabar dan multisiplisitas geometri untuk nilai eigen sama.*

c. *Titik kesetimbangan* $\bar{\mathbf{x}} = 0$ *tidak stabil jika dan hanya jika* $\Re e(\lambda_i) > 0, \forall i = 1, 2, ..., w$ *atau jika ada* λ_i *imajiner dengan* $\Re e(\lambda_i) = 0,$ *maka multisiplisitas aljabar dan multisiplisitas geometri untuk nilai eigen tidak sama.*

Bukti:

a. Akan dibuktikan bahwa

($\Rightarrow$)

Jika titik kesetimbangan $\bar{\mathbf{x}} = 0$ adalah stabil asimtotik maka $\Re e(\lambda_i) < 0, \forall i = 1, 2, 3, ..., w.$

Menurut Definisi (2.8), titik kesetimbangan $\bar{\mathbf{x}} = 0$ disebut stabil asimtotik, jika $\lim_{t\to\infty} \|x(t,x_0) - \bar{\mathbf{x}}\| = 0.$ Artinya untuk $t \to \infty, x(t,x_0)$ menuju $\bar{\mathbf{x}} = 0$

Solusi $x(t,x_0)$ dari sistem persamaan diferensial $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x},$ maka $x(t,x_0)$ selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$. Artinya untuk $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ yang menuju $\bar{\mathbf{x}} = 0$ maka $\Re e(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1,2,3,...,w.$

$(\Leftarrow)$

Jika $\Re e(\lambda_i) < 0, \forall i = 1,2,3,...,w$ maka titik kesetimbangan $\bar{\mathbf{x}} = 0$ adalah stabil asimtotik.

Solusi $x(t,x_0)$ selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$, jika $\Re e(\lambda_i) < 0$ maka untuk $t \to \infty$, $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ menuju $\bar{\mathbf{x}} = 0.$ Berdasarkan Definisi (2.8) titik kesetimbangan $\bar{\mathbf{x}} = 0$ stabil asimtotik.

b. Akan dibuktikan bahwa

$(\Rightarrow)$

Jika titik kesetimbangan $\bar{\mathbf{x}} = 0$ adalah stabil, maka $\Re e(\lambda_i) \leq 0, \forall i = 1,2,...,w.$

Andaikan jika ada $\Re e(\lambda_i) > 0,$ maka titik kesetimbangan tidak stabil. Jika $\Re e(\lambda_i) > 0,$ maka $x(t,x_0)$ yang selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ untuk $t \to \infty$ akan menuju ∞ artinya menjauhi $\bar{\mathbf{x}} = 0.$ Jadi, sistem tidak stabil. Kontradiksi dari bukti tersebut menyimpulkan bahwa $\Re e(\lambda_i) \leq 0.$ Jadi terbukti bahwa jika titik kesetimbangan $\bar{\mathbf{x}} = 0$ stabil, maka

$\Re e(\lambda_i) \leq 0, \forall i = 1,2,...,w.$

$(\Leftarrow)$

Jika $\Re e(\lambda_i) \le 0, \forall i = 1, 2, ..., w,$ maka titik kesetimbangan $\bar{\mathbf{x}} = 0$ adalah stabil dan jika $\Re e(\lambda_i) = 0,$ maka multisiplisitas aljabar dan multisiplisitas geometri untuk nilai eigen harus sama.

Solusi $x(t, x_0)$ yang selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$. Jika $\Re e(\lambda_i) < 0,$ maka $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ akan menuju $\bar{\mathbf{x}} = 0,$ artinya stabil asimtotik. Titik kesetimbangan yang stabil asimtotik pastilah stabil. Jika $\Re e(\lambda_i) = 0,$ maka nilai eigen berupa bilangan kompleks murni. Menurut Luenberger (1979:85), multiplisitas aljabar berhubungan dengan nilai eigen dan multiplisitas geometri berhubungan dengan vektor eigen. Akan dibuktikan bahwa banyak nilai eigen dan vektor eigen adalah sama. Misalkan diberikan sebarang sistem $\mathbb{R}^2$ yang mempunyai nilai eigen kompleks murni.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -c \\ e & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ dengan } c > 0, e > 0. \tag{2.24}$$

Akan dicari nilai eigen sistem (2.24).

$$\left| \begin{bmatrix} 0 & -c \\ e & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{bmatrix} 0 & -c \\ e & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0,$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -c \\ e & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + ce = 0. \tag{2.25}$$

Akar dari persamaan (2.25) adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4ce}}{2} = \frac{\pm 2\sqrt{ce}}{2} i = \pm i\sqrt{ce}$$

didapat $\lambda_1 = i\sqrt{ce}$ dan $\lambda_2 = -i\sqrt{ce}$

Vektor eigen untuk $\lambda_1 = i\sqrt{ce}$ adalah

$$\begin{bmatrix} -i\sqrt{ce} & -c \\ e & -i\sqrt{ce} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$\left[\begin{array}{cc|c} -i\sqrt{ce} & -c & 0 \\ e & -i\sqrt{ce} & 0 \end{array}\right] R_1 \sim R_2 \left[\begin{array}{cc|c} e & -i\sqrt{ce} & 0 \\ -i\sqrt{ce} & -c & 0 \end{array}\right] \frac{1}{e} R_1 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -i\frac{\sqrt{ce}}{e} & 0 \\ -i\sqrt{ce} & -c & 0 \end{array}\right]$$

$$R_2 + i\sqrt{ce}R_1 \begin{bmatrix} 1 & -i\frac{\sqrt{ce}}{e} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh,

$$v_1 - i\frac{\sqrt{ce}}{e} v_2 = 0$$
$$v_1 = i\frac{\sqrt{ce}}{e} v_2,$$

misal $v_2 = t$ maka $v_1 = i\dfrac{\sqrt{ce}}{e} t$ dan diambil $t = 1$ diperoleh

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\frac{\sqrt{ce}}{e} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya vektor eigen untuk $\lambda_2 = -i\sqrt{ce}$ adalah

$$\begin{bmatrix} i\sqrt{ce} & -c \\ e & i\sqrt{ce} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$\left[\begin{array}{cc|c} i\sqrt{ce} & -c & 0 \\ e & i\sqrt{ce} & 0 \end{array}\right] R_1 \sim R_2 \left[\begin{array}{cc|c} e & i\sqrt{ce} & 0 \\ i\sqrt{ce} & -c & 0 \end{array}\right] \frac{1}{e} R_1 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & i\dfrac{\sqrt{ce}}{e} & 0 \\ i\sqrt{ce} & -c & 0 \end{array}\right]$$

$$R_2 - i\sqrt{ce}R_1 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & i\dfrac{\sqrt{ce}}{e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

sehingga

$$\begin{bmatrix} 1 & i\dfrac{\sqrt{ce}}{e} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

diperoleh

$$v_1 + i\frac{\sqrt{ce}}{e} v_2 = 0,$$

misal $v_2 = t$ maka $v_1 = -i\dfrac{\sqrt{ce}}{e}t$ dan diambil $t = 1$ diperoleh

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\dfrac{\sqrt{ce}}{e} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Terbukti jumlah nilai eigen sama dengan jumlah vektor eigen sebanyak 2 buah.

c. Jika titik kesetimbangan $\bar{\mathbf{x}} = 0$ tidak stabil, maka $\Re e(\lambda_i) > 0, \forall i = 1, 2, ..., w$

Titik kesetimbangan tidak stabil, untuk $t \to \infty, x(t, x_0)$ menuju ∞ hanya apabila $\Re e(\lambda_i) > 0.$

$(\Leftarrow)$

Jika $\Re e(\lambda_i) > 0, \forall i = 1, 2, ..., w$ maka titik kesetimbangan $\bar{\mathbf{x}} = 0$ tidak stabil. Diberikan $\Re e(\lambda_i) > 0, x(t, x_0)$ yang selalu memuat $e^{\Re e(\lambda_i)t}$ akan selalu menuju ∞. Jadi titik kesetimbangan $\bar{\mathbf{x}} = 0$ tidak stabil■.

Disimpulkan bahwa untuk melihat kestabilan suatu nilai eigen dari Sistem (2.17) digunakan sistem linearisasi agar menjadi sistem linear $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$**,** dimana $A = J\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$ adalah matriks Jacobian. Teorema kestabilan sistem linear didapat sebagai berikut.

Teorema 2.3: (Hale & Kocak, 1991: 267)

Misal $\mathbf{f} \in C'(E)$ *dengan* E *adalah himpunan terbuka. Jika semua nilai eigen dari matriks Jacobian mempunyai bagian real negatif, maka titik kesetimbangan* $\bar{\mathbf{x}}$ *dari Sistem (2.17) stabil asimtotik.*

Teorema 2.4: (Hale & Kocak, 1991: 272)

Misal $\mathbf{f} \in C'(E)$ *dengan* E *adalah himpunan terbuka. Jika terdapat nilai eigen dari matriks Jacobian yang mempunyai bagian real positif, maka titik kesetimbangan* $\bar{\mathbf{x}}$ *dari Sistem (2.17) tidak stabil.*

Selanjutnya, kestabilan yang dimaksud yaitu kestabilan lokal.

H. Bilangan Reproduksi Dasar

Menurut Driessche dan Watmough (2001) bilangan reproduksi dasar adalah jumlah kasus infeksi sekunder pada populasi kelas individu *susceptible* oleh individu yang terinfeksi tunggal, sehingga dari penularan tersebut diharapkan adanya rata – rata durasi menular dan rata - rata tingkat penularan infeksi sekunder. Bilangan reproduksi dasar dilihat dari titik kesetimbangan model, dalam hal ini dinotasikan dengan $\hat{R}_0$.

Selanjutnya, populasi dibagi atas dua kelas yaitu populasi kelas individu yang terinfeksi dan populasi kelas individu yang tidak terinfeksi. Berikut diberikan model kelas populasi tersebut.

$$\dot{I} = P(I,S) - Q(I,S), I \in \mathbb{R}^m \tag{2.26}$$

$$\dot{S} = z(I,S), S \in \mathbb{R}^n. \tag{2.27}$$

dengan

I sebagai populasi kelas individu yang terinfeksi penyakit,

S sebagai populasi kelas individu yang tidak terinfeksi penyakit atau rentan penyakit,

P sebagai matriks dari rata – rata jumlah individu baru dalam populasi kelas individu yang teinfeksi penyakit,

Q sebagai matriks dari rata – rata berkurangnya jumlah individu dalam populasi kelas individu yang teinfeksi penyakit.

Dimisalkan $(0, S_0)$ untuk menyatakan titik kesetimbangan bebas penyakit. Sementara, bilangan $\hat{R}_0$ menyatakan jumlah kasus infeksi sekunder pada populasi, maka melihat ada atau berkurangnya infeksi hanya menggunakan Persamaan (2.26) pada titik kesetimbangan bebas penyakit. Persamaan (2.26) dapat ditulis sebagai berikut

$$M = P(I,S) \text{ dan } V = Q(I,S)$$

Hasil dari linearisasi $M = P(I,S)$ dan $V = Q(I,S)$ di $(0,S_0)$ berikut

$$B = \left[\frac{\partial M}{\partial I}(0,S_0) \right] \text{dan } D = \left[\frac{\partial V}{\partial I}(0,S_0) \right]$$

dengan B dan D merupakan matriks *mxm.*

Didefinisikan $W = BD^{-1}$ sebagai *next generation matrix,* sehingga bilangan reproduksi dasar diperoleh dari nilai eigen terbesar dari matriks W.

I. Kriteria Routh Hurwitz

Analisa kestabilan titik kesetimbangan $\bar{\mathbf{x}}$ dapat menggunakan kriteria Routh Hurwitz sebagai alternatif menentukan tanda bagian real dari nilai – nilai eigen.

Diberikan suatu persamaan polinomial berikut

$$r(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0,\, a_i \neq 0, i = 0,1,\ldots,n. \qquad (2.28)$$

Menurut Olsder (2004) kriteria Routh Hurwitz dipakai untuk mengecek langsung kestabilan tanpa menghitung akar – akar dari Persamaan (2.28). Koefisien dari Persamaan (2.28) disusun sebagai berikut.

$$\begin{array}{lll} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \cdots \\ b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} \cdots \\ c_{n-3} & c_{n-5} & c_{n-7} \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

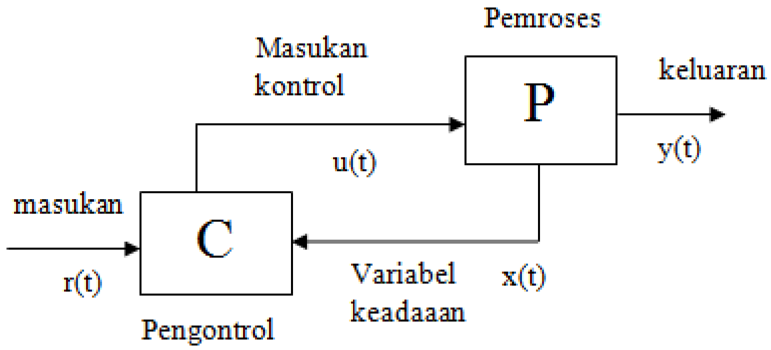
dengan nilai $b_{n-2}, b_{n-4}, c_{n-3}, c_{n-5}$ adalah,

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad c_{n-3} = \frac{b_{n-2}a_{n-3} - b_{n-4}a_{n-1}}{b_{n-2}}, \cdots$$
$$b_{n-4} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \quad c_{n-5} = \frac{b_{n-2}a_{n-5} - b_{n-6}a_{n-1}}{b_{n-2}}, \cdots$$

Nilai tersebut berhenti ketika hasil dari perhitungan adalah nol. Jika kolom pertama pada susunan tersebut semua bertanda positif atau semua bertanda negatif, maka bagian real dari polinom $r(\lambda)$ adalah negatif.

J. Optimal Kontrol

Menurut Naidu (2002: 6) tujuan utama dari optimal kontrol adalah menentukan kontrol yang akan menyebabkan sistem memenuhi beberapa konstrain fisik dan pada waktu yang sama dapat ditentukan ekstrim (maksimum/ minimum) yang sesuai dengan fungsi tujuan atau *performance index* yang diketahui. Berikut proses kontrol melalui alur kontrol



Gambar 2.3 Alur Kontrol

Gambar 2.3 diperoleh notasi kontrol yaitu $u(t)$ sehingga dinotasikan pula untuk optimal kontrol yaitu $u^*(t)$ yang menandakan kondisi yang optimal. Selanjutnya, $u^*(t)$ akan diproses kedalam P dengan beberapa konstrain yang dimulai dari keadaan awal hingga keadaan akhir. Kontrol yang digunakan dengan keadaan dan waktu ekstrim yang sama sesuai fungsi tujuan.

Formulasi yang dapat diberikan pada permasalahan optimal kontrol menurut Naidu (2002: 6) adalah:

a. Diskripsi matematika atau model matematika artinya diperoleh metode matematika dari proses terjadinya pengendalian (secara umum dalam bentuk variabel keadaan),
b. Spesifikasi dari fungsi tujuan,
c. Menentukan kondisi batas dari konstrain fisik pada keadaan *(state)* dan atau kontrol.

Tujuan mencari kontrol $\mathbf{u}(t)$ dengan memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan. Didefinisikan fungsi tujuan sebagai berikut

$$K = \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)dt \tag{2.29}$$

dengan kendala

$$\dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \tag{2.30}$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

Fungsi tujuan (2.29) dikatakan bentuk *Lagrange jika* $\theta(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0$ dan dikatakan bentuk *Mayer* jika $F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = 0$.

Saat $\mathbf{u}^*(t)$ menjadi optimal kontrol melalui substitusi ke Sistem (2.30), sehingga *state* akan diperoleh yang optimal $\mathbf{x}^*(t)$ dan fungsi tujuan (2.29) juga akan optimal. (Naidu, 2002: 10)

K. Prinsip Minimum Pontryagin

Prinsip Minimum Pontryagin adalah suatu kondisi sehingga dapat diperoleh penyelesaian optimal kontrol yang sesuai dengan fungsi tujuan yaitu meminimumkan fungsi tujuan.

Berikut tahap – tahap penyelesaian optimal kontrol suatu model akan dibahas dengan *Prinsip Minimum Pontryagin*, khusus untuk fungsi tujuan bentuk *Lagrange*.

Didefinisikan notasi vektor kontrol kontinu yaitu $\mathbf{u}(t) = \left(u_1(t), ..., u_m(t)\right)^T$ dan vektor keadaan yaitu $\mathbf{x(t)} = \left(x_1(t), ..., x_n(t)\right)$ pada interval tertutup $\left[t_0, t_1\right]$. Selanjutnya, menurut Naidu (2002: 257) diperoleh fungsi tujuan yang diminimumkan berikut.

$$K(u) = \min \int_{t_0}^{t_1} F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)dt \tag{2.31}$$

dengan fungsi kendala,

$$\dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \tag{2.32}$$

$$a \le \mathbf{u}(t) \le b$$
$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \tag{2.33}$$

Berikut persamaan Lagrangian dibentuk:

$$L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \tag{2.34}$$

Selanjutnya, persamaan Hamiltonian yang dibentuk yaitu penjumlahan antara Persamaan (2.34) dan perkalian pengali *Lagrange* dengan kendala :

$$H\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{l}(t), t\right) = F\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\right) + \boldsymbol{l}^{\boldsymbol{T}} g\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\right) \tag{2.35}$$

dimana $\boldsymbol{l}$ adalah variabel co- *state*.

Persamaan (2.32) dinamakan pula sebagai sistem persamaan *state*. Penyelesaian *state* dan co *state* dinyatakan sebagai berikut

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial H\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{l}(t)\right)}{\partial \boldsymbol{l}}, \tag{2.36}$$

$$\dot{\boldsymbol{l}}(t) = -\frac{\partial H\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{l}(t)\right)}{\partial \mathbf{x}}. \tag{2.37}$$

penyelesaian didapat untuk mencari kondisi setimbang menggunakan Sistem (2.35) berikut. (Naidu, 2002: 89)

$$\frac{\partial H\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{l}(t)\right)}{\partial \mathbf{u}} = 0 \tag{2.38}$$

dengan kondisi batas variabel kontrol $a \le \mathbf{u}(t) \le b$.

Berdasarkan Persamaan (2.38) dan kondisi batas variabel kontrol $a \leq \mathbf{u}(t) \leq b,$ solusi $\mathbf{u}(t)$ yang optimal diperoleh berikut

$$\mathbf{u}^*(t) = \begin{cases} a, \text{ jika } \mathbf{u}(t) \leq a \\ \mathbf{u}(t), \text{ jika } a < \mathbf{u}(t) < b \\ b, \text{ jika } \mathbf{u}(t) \geq b \end{cases} \tag{2.39}$$

Bentuk (2.39) dapat ditulis sebagai berikut

$$\mathbf{u}^*(t) = maks\left\{\min\left[\mathbf{u}(t), b\right], a\right\}. \tag{2.40}$$