MODEL INVESTASI HARGA SAHAM TIPE EROPA DENGAN MENGGUNAKAN MODEL BLACK-SCHOLES

SKRIPSI

Diajukan kepada
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
untuk memenuhi sebagian persyaratan
guna memperoleh gelar Sarjana Sains

Disusun Oleh:
Andriyanto
04305141039

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2009

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Investasi merupakan hal yang menarik untuk dilakukan. Ramainya perdagangan sekuritas di pasar modal mencerminkan minat investasi yang besar dari masyarakat. Sekuritas merupakan selembar kertas yang menunjukkan hak pemegang surat (pemodal) untuk memperoleh bagian dari prospek atau kekayaan lembaga yang menerbitkan sekuritas tersebut (Husnan, 1998: 3). Investasi di dalam efek atau sekuritas merupakan hal yang menarik karena menjanjikan keuntungan yang cukup besar. Di samping itu, investasi pada sekuritas mempunyai daya tarik lain, yaitu pada kemudahan yang diperoleh dari menanamkan dana di pasar modal.

Investasi dapat dikatakan sebagai sumber pendapatan dengan penempatan sejumlah dana pada saat ini dengan harapan untuk memperoleh keuntungan di kemudian hari (Luenberger, 1998: 1). Umumnya investasi dibedakan menjadi dua (Abdul Halim, 2005: 4), yaitu: investasi pada aset-aset finansial (*financial assets*) dan investasi pada aset-aset riil (*real assets*). Investasi dapat dikaitkan dengan berbagai macam aktivitas. Menginvestasikan sejumlah dana pada *real asset* (tanah, emas, mesin, bangunan, dan sebagainya) maupun *financial asset* (deposito, saham, atau obligasi) merupakan aktivitas investasi yang biasa dilakukan.

Investor yang lebih jeli dalam menganalisis dan lebih berani menanggung risiko, aktivitas investasi yang mereka lakukan akan mencakup investasi pada aset-aset finansial lainnya yang lebih kompleks seperti *warrants, option*, dan *future*. Instrumen finansial tersebut tergolong instrumen finansial yang berisiko tinggi, tetapi juga mempunyai tingkat keuntungan investasi (*return*) yang tinggi pula. Dalam penulisan ini, penulis lebih memfokuskan bahasan tentang investasi pada instrumen finansial berupa opsi saham.

Opsi saham menurut David G. Luenberger (1998: 319) pada bukunya yang berjudul *Investment Science*, merupakan suatu kontrak pemberian hak, bukan kewajiban, dimana adanya jaminan untuk membeli atau menjual suatu *asset* dari pihak pemegang opsi saham kepada pembeli opsi saham dalam menjalankan haknya. Hak pembeli opsi saham dapat berupa hak untuk membeli suatu aset yang sering disebut dengan opsi beli dan hak untuk menjual aset kepada pemegang opsi saham dengan harga yang disepakati disebut dengan opsi jual. Opsi saham juga dapat dikelompokkan berdasarkan aturan waktu pelaksanaannya (*expiration date*). Pengelompokkan tipe opsi saham ini yang sangat terkenal adalah opsi saham tipe Amerika dan opsi saham tipe Eropa. Opsi saham yang dilaksanakan kapan saja sampai tanggal jatuh temponya disebut dengan opsi saham tipe Amerika. Sedangkan opsi saham yang hanya dapat dilaksanakan pada saat tanggal jatuh temponya disebut dengan opsi saham tipe Eropa.

Ada beberapa manfaat yang dapat diperoleh investor dalam berinvestasi di opsi saham. Opsi saham memberikan fungsi lindung nilai terhadap saham acuan. Dengan dana investasi yang sama atau relatif kecil, persentase keuntungan yang diperoleh relatif lebih besar dibandingkan dengan saham. Dengan adanya produk opsi saham ini, investor mempunyai pilihan untuk menempatkan dananya dalam berbagai jenis instrumen yang bertujuan mengurangi tingkat risiko. Hal yang menarik tentang opsi di pasar saham adalah tentang penetapan harga opsi saham. Harga opsi saham merupakan refleksi dari nilai intrinsik opsi. Nilai intrinsik opsi adalah nilai ekonomis opsi saham jika opsi tersebut dilaksanakan, yaitu sebesar selisih antara harga saham saat pelaksanaan opsi dengan harga opsi saham yang telah dibayarkan. Penetapan harga opsi saham bertujuan untuk menentukan harga yang seimbang antara pembeli opsi dan penjual opsi sehingga tidak ada pihak yang terlalu diuntungkan atau dirugikan. Karena keuntungan/kerugian pada opsi saham dipengaruhi oleh kenaikan atau penurunan dari harga saham di pasar.

Pada opsi beli, nilai intrinsik akan positif apabila harga aset yang berlaku lebih besar daripada harga pelaksanaan. Namun, apabila harga pelaksanaan lebih besar atau sama dengan harga aset yang berlaku, maka nilai intrinsik opsi saham tersebut akan bernilai nol. Hal inilah yang menarik dari opsi saham karena kerugian dari pembeli opsi saham terhadap penurunan harga saham hanya sebesar harga opsi saham yang dibayarkan. Sedangkan untuk penjual opsi saham, keuntungan/kerugiannya merupakan kebalikan dari pembeli opsi saham.

Demikian juga pada opsi jual, nilai intrinsik akan benilai positif apabila harga aset yang berlaku lebih kecil daripada harga pelaksanaan. Namun, apabila harga pelaksanaan lebih kecil atau sama dengan harga aset yang berlaku, maka nilai intrinsik opsi tersebut akan bernilai nol. Untuk menetapkan harga opsi saham dapat digunakan berbagai model, salah satu diantaranya penetapan harga opsi saham dengan menggunakan model Black-Scholes.

Model Black-Scholes pertama kali diperkenalkan oleh Fisher Black dan Myron Scholes pada tahun 1973 bersamaan dengan dibukanya pasar opsi terbesar di dunia yang berada di *Chicago Board Options Exchange* (*CBOE*). Model Black-Scholes merupakan model pertama yang digunakan dalam penetapan harga opsi saham. Model ini penggunaannya terbatas karena hanya dapat digunakan pada penetapan opsi saham tipe Eropa dimana opsi hanya dilaksanakan pada saat jatuh tempo. Sedangkan untuk opsi saham tipe Amerika, model Black-Scholes tidak dapat digunakan karena opsi saham tipe Amerika dijalankan setiap saat sampai waktu jatuh tempo. Sehingga pelaksanaan opsi sebelum waktunya tidak akan menguntungkan karena tindakan menjual opsi akan menyebabkan pemegang opsi saham kehilangan premi waktu dari opsi tersebut. Selain itu, harga opsi saham yang diturunkan dengan menggunakan model ini cukup mendekati harga opsi saham yang diperdagangkan di pasar saham.

Dalam model Black-Scholes, harga saham S yang berisiko diasumsikan bergerak secara acak dan mengikuti proses Wiener. Selain itu, model ini mempunyai beberapa asumsi lain yang harus dipenuhi, yaitu jenis opsi saham yang digunakan adalah opsi saham tipe Eropa, variansi harga saham diketahui dan konstan sepanjang usia opsi (volatilitasnya konstan), tidak ada pemberian dividen selama usia opsi, dan tingkat suku bunga konstan.

Dalam menganalisa saham turunan seperti opsi digunakan penilaian dengan asumsi risiko netral. Harga saham, waktu, volatilitas harga saham, dan bunga bebas risiko tidak tergantung pada risiko. Risiko netral dari ekspektasi return saham merupakan bunga bebas risiko. Hal ini disebabkan karena investor dengan risiko netral tidak membutuhkan biaya dan juga menunjukkan bahwa harga opsi saham saat ini yang tidak berisiko (netral) diperoleh dengan penyesuaian nilai ekspektasi dari nilai bebas risiko. Nilai ekspektasi disesuaikan untuk waktu saat ini dengan nilai penyesuaian r. Dengan asumsi risiko netral di atas, maka harga suatu opsi saham merupakan nilai ekspektasi pada waktu t dimana $t < T$, dengan risiko netral dan penyesuaiannya merupakan bunga bebas risiko.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan, dapat dirumuskan permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini, yaitu

1. Bagaimana menentukan model investasi harga saham tipe Eropa dengan menggunakan Model Black-Scholes?
2. Bagaimana aplikasi model investasi harga saham tipe Eropa dengan menggunakan Model Black-Scholes?

C. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah

1. Menjelaskan model investasi harga saham tipe Eropa dengan menggunakan Model Black-Scholes.
2. Menjelaskan aplikasi model investasi harga saham tipe Eropa dengan menggunakan Model Black-Scholes.

D. Manfaat Penulisan

Manfaat yang ingin dicapai dari penulisan skripsi ini adalah

1. Bagi penulis dan mahasiswa Matematika, yaitu menambah dan meningkatkan pengetahuan tentang aplikasi model investasi harga saham tipe Eropa dengan menggunakan Model Black-Scholes.
2. Bagi Perpustakaan Jurdik Matematika FMIPA UNY, yaitu menambah referensi tentang permasalahan menetapkan model investasi harga saham (khususnya harga opsi) dan menjadi acuan pertimbangan pada penelitian-penelitian yang sejenis.

BAB II

LANDASAN TEORI

A. Konsep Dasar Investasi

Konsep dasar investasi yang digunakan dalam skripsi ini adalah pengertian dasar investasi, instrumen pasar modal, konsep dasar opsi saham, dasar dari model penetapan harga opsi saham, dan definisi return.

1. Pengertian Dasar Investasi

Definisi 2.1 (Luenberger, 1998: 1)

Investasi didefinisikan sebagai sumber pendapatan dengan penempatan sejumlah dana pada saat ini dengan harapan untuk memperoleh keuntungan di kemudian hari.

Umumnya investasi dibedakan menjadi dua (Abdul Halim, 2005: 4), yaitu: investasi pada aset-aset finansial (*financial assets*) dan investasi pada aset-aset riil (*real asset*). Investasi pada aset-aset finansial dilakukan di pasar uang, misalnya berupa sertifikat deposito, *commercial paper*, surat berharga pasar uang, dan lainnya. Investasi dapat juga dilakukan di pasar modal, misalnya berupa saham, obligasi, waran, opsi, dan lain-lain. Sedangkan investasi pada aset-aset riil dapat berbentuk pembelian aset produktif, pendirian pabrik, pembukaan pertambangan, pembukaan perkebunan, dan lain-lain.

2. Instrumen Pasar Modal

Beberapa sekuritas yang umumnya diperdagangkan di pasar modal antara lain saham, obligasi, reksadana, dan instrumen turunan. Masing-masing sekuritas tersebut memberikan *return* dan risiko yang berbeda-beda. Pada skripsi ini akan membahas instrumen turunan berupa opsi pada saham suatu perusahaan.

Menurut buku *Panduan Pemodal* (2008: 3–4), saham adalah surat berharga (surat bukti) kepemilikan atas aset-aset perusahaan yang menerbitkan saham. Dengan memiliki saham suatu perusahaan, maka investor akan mempunyai hak terhadap pendapatan dan kekayaan perusahaan setelah dikurangi dengan pembayaran semua kewajiban perusahaan. Saham merupakan salah satu jenis sekuritas yang cukup populer diperjualbelikan di pasar modal. Karena jika dibandingkan dengan investasi lainnya, saham memungkinkan pemodal untuk mendapatkan tingkat pengembalian (*return*) atau keuntungan yang lebih besar dalam waktu relatif singkat (*high return*).

Selain *high return*, saham juga memiliki sifat *high risk* yaitu suatu ketika harga saham dapat juga turun secara cepat atau sahamnya di *delist* (dihapuskan pencatatannya) dari Bursa sehingga untuk jual beli pemegang saham harus mencari pembeli/penjual sendiri dan juga saham tidak memiliki harga patokan pasar. Dengan karakteristik *high risk* dan *high return* ini maka investor atau pemegang saham perlu terus memantau pergerakan harga saham yang dipegangnya, agar keputusan yang tepat dapat dihasilkan dalam waktu yang tepat pula.

Pada dasarnya semua pilihan investasi mengandung peluang keuntungan di satu sisi dan potensi kerugian atau risiko di sisi yang lain. Misalnya tabungan dan deposito di Bank memiliki risiko kecil karena tersimpan aman di bank, tetapi kelemahannya adalah keuntungan yang lebih kecil dibanding potensi keuntungan dari saham. Investasi di properti (rumah dan tanah) semakin lama harganya semakin tinggi, tetapi juga berisiko apabila tergusur atau terjadi kebakaran, sedangkan usaha sendiri (wiraswasta) berisiko bangkrut atau pailit, sementara investasi dibarang berharga (emas) memiliki risiko jika harga emas turun.

a. Keuntungan Berinvestasi Saham

Keuntungan berinvestasi saham, diantaranya adalah

1) *Capital Gain*, yaitu keuntungan dari hasil jual beli saham berupa kelebihan nilai jual dari nilai beli saham. Misalnya sewaktu membeli nilai saham sebesar Rp2.000 per lembar saham dan kemudian dijual dengan harga Rp2.500 per lembar saham. Sehingga diperoleh selisih sebesar Rp500 per lembar saham, ini disebut *Capital Gain*.
2) Dividen, yaitu keuntungan perusahaan yang dibagikan kepada pemegang saham. Biasanya tidak seluruh keuntungan perusahaan dibagikan kepada pemegang saham, tetapi ada sebagian yang di”tanam” kembali sebagai modal. Besarnya dividen yang diterima ditentukan dalam Rapat Umum Pemegang Saham (RUPS) perusahaan tersebut. Namun yang perlu dicatat adalah bahwa perusahaan tidak selalu membagikan dividen kepada para pemegang saham, ada

beberapa perusahaan yang tidak membagikan dividen. Hal ini tergantung dari kondisi perusahaan yang bersangkutan (khususnya berkaitan dengan keuntungan yang diraih).

b. Kerugian Berinvestasi Saham

Kerugian berinvestasi saham, diantaranya adalah

1) *Capital Loss*, merupakan kebalikan dari *Capital Gain*, yaitu suatu kondisi dimana pemegang saham menjual saham yang dipegangnya dibawah harga belinya. Misalnya Tuan A membeli saham PT.ABC dengan harga Rp2.000 per lembar saham. Kemudian harga saham tersebut terus mengalami penurunan hingga mencapai Rp1.400 per lembar saham. Karena takut harga saham tersebut akan terus mengalami penurunan, maka Tuan A menjualnya pada harga Rp1.400 sehingga Tuan A mengalami kerugian sebesar Rp600 per lembar saham, ini disebut *Capital Loss*.
2) Risiko Likuidasi, yaitu perusahaan yang sahamnya dimiliki pemegang saham dinyatakan bangkrut oleh Pengadilan atau perusahaan tersebut dibubarkan. Dalam hal ini, hak klaim dari pemegang saham mendapat prioritas terakhir setelah seluruh kewajiban perusahaan dapat dilunasi (dari hasil penjualan kekayaan perusahaan). Jika masih terdapat sisa dari hasil penjualan kekayaan perusahaan tersebut, maka sisa tersebut dibagi secara proporsional kepada seluruh pemegang saham. Namun, jika tidak terdapat sisa kekayaan perusahaan, maka pemegang saham tidak akan memperoleh apa-apa. Ini merupakan risiko terberat dari

seorang pemegang saham. Untuk itu seorang pemegang saham dituntut untuk terus menerus mengikuti perkembangan dari perusahaan yang sahamnya dimiliki.

3. Konsep Dasar Opsi Saham

Definisi 2.2 (Luenberger, 1998: 319)

Opsi saham merupakan suatu kontrak, bukan kewajiban, dimana adanya pemberian hak (jaminan) dari pihak pemegang opsi saham kepada pembeli opsi saham dalam menjalankan haknya untuk membeli atau menjual suatu *asset* tertentu pada harga dan waktu yang telah ditetapkan

Karena merupakan hak, maka pemegang opsi saham dapat menggunakan atau tidak menggunakan hak tersebut. Apabila pada jatuh tempo (*expiration date*) pemegang opsi saham tidak menggunakan haknya, maka hak tersebut akan hilang dengan sendirinya (kadaluarsa). Dengan demikian, opsi saham tersebut tidak akan mempunyai nilai lagi (Halim, 2005: 108).

Opsi saham merupakan salah satu instrumen turunan dari saham sehingga nilai instrumen turunan sangat tergantung dari harga sekuritas lain yang ditetapkan sebagai patokan (*underlying*). Dalam hal ini, untuk menentukan harga opsi saham, terlebih dahulu kita harus mengetahui harga saham di pasar sebagai patokan. Ada beberapa manfaat yang dapat diperoleh investor dalam berinvestasi di opsi saham. Opsi saham memberikan fungsi lindung nilai terhadap saham acuan. Dengan dana investasi yang sama atau relatif kecil, persentase keuntungan yang diperoleh relatif lebih besar dibandingkan dengan saham. Dengan adanya produk opsi saham ini, investor mempunyai pilihan untuk menempatkan dananya dalam berbagai jenis instrumen yang bertujuan mengurangi tingkat risiko.

a. Fungsi Opsi Saham

Para investor secara umum menggunakan opsi dalam 5 hal, yaitu:

1) Proteksi nilai *asset* (asuransi nilai saham)

   Salah satu strategi yang umum digunakan dengan opsi saham adalah memproteksi nilai portofolio terhadap jatuhnya harga saham, yaitu dengan membeli Opsi Jual. Dengan membeli Opsi Jual ini, investor berhak menjual sahamnya pada harga tersebut meskipun di pasar harga saham tersebut sudah turun sampai nol sekalipun.

2) Menghasilkan pendapatan tambahan dari asetnya

   Para investor akan menggunakan strategi yang dikenal dengan nama *Covered Call* untuk menghasilkan pendapatan tambahan dari sahamnya. Ini mirip dengan seorang investor menyewakan rumahnya, tetapi dalam hal ini yang disewakan adalah sahamnya. Dengan strategi ini seorang investor akan *Sell Call* (menjual kontrak Opsi Beli) dengan jaminan sahamnya. Ketika ia menjual Opsi Beli berarti investor tersebut Wajib menjual sahamnya pada harga yang disepakati selama kontrak masih berlaku.

3) *Leverage*

   Opsi saham memberikan suatu kesempatan yang besar memperoleh hasil investasi yang tinggi dengan modal yang kecil. Disini opsi saham memberikan *Leverage* bagi investor tersebut. Opsi saham berfungsi sebagai *Leverage* apabila investor hanya membeli opsinya saja tanpa membeli sahamnya.

4) *Discount*

Opsi saham juga dapat berfungsi sebagai *discount* untuk membeli saham. Apabila investor ingin membeli saham, investor dapat menawarnya terlebih dahulu agar saham yang akan investor beli harganya menjadi lebih murah. Dalam penawaran ini investor mendapatkan suatu premi sejumlah tertentu. Strategi ini disebut juga *naked put*. Apabila saham telah menyentuh harga yang investor tawar maka investor harus membeli saham tersebut, tetapi harganya tentu lebih murah karena investor telah melakukan penawaran dan menerima premi di awal.

5) Strategi investasi

Opsi saham juga dapat berfungsi sebagai strategi investasi. Karena banyaknya strategi di opsi saham, maka opsi saham dapat berguna di berbagai situasi market. Baik itu market yang *uptrend*, *sideways* maupun *downtrend*. Strategi-strategi ini apabila dipahami dan dipelajari dengan baik, tentu akan sangat membantu investor memperoleh hasil yang investor inginkan dalam berbagai situasi market. Jadi, setiap saat investor dapat memasuki market dengan strategi yang berbeda-beda.

b. Jenis Opsi Saham

Menurut David G. Luenberger (1998: 320) pada bukunya yang berjudul *Investment Science*, berdasarkan waktu penggunaannya, terdapat dua macam jenis opsi saham, yaitu:

1) Opsi saham tipe Eropa (*European Option*) adalah opsi yang dapat digunakan hanya pada tanggal jatuh tempo. Pada skripsi ini akan lebih membahas tentang opsi tipe Eropa.
2) Opsi saham tipe Amerika (*American Option*) adalah opsi yang dapat digunakan sebelum atau pada tanggal jatuh tempo.

Sedangkan jika dilihat berdasarkan jenis hak yang diberikan kepada pemegangnya, opsi saham dibedakan menjadi dua, yaitu:

1) Opsi Beli (*Call Option*)

   Definisi 2.3 (Higham, 2004: 1)

   Opsi beli tipe Eropa memberi hak (tetapi bukan kewajiban) kepada pemegangnya untuk membeli *asset* tertentu pada harga tertentu dan waktu yang telah ditentukan.

2) Opsi Jual (*Put Option*)

   Definisi 2.4 (Higham, 2004: 2)

   Opsi jual tipe Eropa memberikan hak (tetapi bukan kewajiban) kepada pemegangnya untuk menjual *asset* yang telah ditentukan pada harga tertentu dan pada waktu yang telah ditentukan.

Menurut Abdul Halim (2005: 109), pada dasarnya ada empat hal penting yang perlu diperhatikan oleh investor dalam kontrak opsi saham, yaitu:

1) Perusahaan yang sahamnya akan dibeli atau dijual

   Calon investor perlu mengetahui secara detail mengenai riwayat singkat tentang perusahaan yang sahamnya akan dibeli atau dijual, sehingga calon investor dapat mengetahui sudah berapa lama perusahaan tersebut didirikan dan beroperasi. Dengan demikian dapat memberikan gambaran singkat mengenai prospek investasinya.

2) Jumlah saham yang dapat dibeli atau dijual

   Jika perusahaan menawarkan saham, maka informasi mengenai jumlah saham yang ditawarkan (dapat dibeli atau dijual) juga perlu diketahui oleh calon investor. Karena jumlah saham yang ditawarkan kepada publik menunjukkan berapa besar bagian dari modal disetor yang akan dimiliki oleh publik. Semakin banyak jumlah saham yang ditawarkan, maka perdagangan saham tersebut akan semakin likuid di Bursa.

3) Harga pembelian atau harga penjualan (*exercise price*) saham tersebut

   Harga saham yang akan ditawarkan kepada publik bisa berbeda dengan nilai nominal saham. Nilai nominal adalah nilai yang tertera pada surat saham yang akan dicantumkan pada setiap saham yang diterbitkan oleh perusahaan.

4) Tanggal berakhirnya hak membeli atau menjual (waktu jatuh tempo)

   Batas waktu dimana opsi tersebut dapat dilaksanakan (usia opsi).

4. Dasar dari Model Penetapan Harga Opsi Saham

Dasar dari model penetapan harga opsi saham adalah memodelkan harga opsi saham dalam bentuk persamaan matematis, sehingga nilai intrinsik dari harga opsi saham dapat dimodelkan sebagai berikut:

a. Harga Opsi Beli

Misal, S_T adalah harga saham pada saat jatuh tempo, K adalah harga saham yang ditetapkan atau harga pelaksanaan, dan T adalah waktu jatuh tempo. Jika harga saham pada saat jatuh tempo lebih besar daripada harga pelaksanaan atau $S_T > K$, maka besar keuntungan yang diperoleh yaitu $S_T - K$. Sebaliknya, jika $K \geq S_T$ maka pemegang opsi beli tidak memperoleh keuntungan atau keuntungan yang diperoleh adalah nol (Luenberger, 1998: 322).

Dengan demikian, harga opsi beli tipe Eropa (C) pada saat jatuh tempo adalah

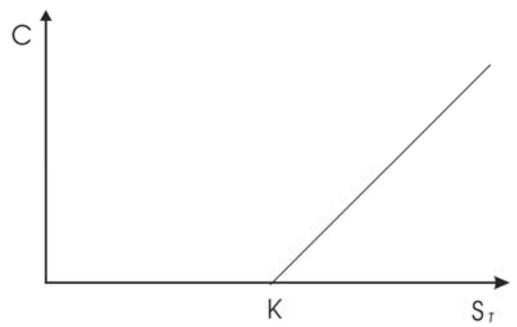
$$C = \begin{cases} S_T - K & ; jika\, S_T > K \\ 0 & ; jika\, S_T \leq K \end{cases}$$

sehingga

$$C = maks(0,\, S_T - K) \tag{2.1}$$

dengan C adalah harga opsi beli pada waktu jatuh tempo, S_T adalah harga saham, dan K adalah harga pelaksanaan.

Formula di atas dapat ditunjukkan melalui gambar berikut:



Gambar 2.1 Grafik Harga Opsi Beli Pada Saat Jatuh Tempo

Gambar di atas menunjukkan bahwa harga opsi beli akan bernilai nol jika harga pelaksanaan lebih tinggi dari harga saham. Sementara jika harga saham lebih tinggi dari harga pelaksanaan, maka harga opsi beli merupakan selisih dari harga saham dengan harga pelaksanaan.

Dari uraian di atas, dapat diketahui bahwa (Halim, 2005: 110)

1) Pada saat harga saham lebih rendah daripada harga pelaksanaan $(S_T < K)$, maka opsi beli bernilai nol dan dikatakan dalam keadaan *out of the money* (*OTM*). Dalam keadaan ini pemegang opsi tidak akan menggunakan haknya dan ia akan mengalami kerugian sebesar premi yang telah dibayarkan.
2) Pada saat harga saham sama dengan harga pelaksanaan $(S_T = K)$, maka opsi beli dikatakan dalam keadaan *at the money* (*ATM*), sehingga opsi ini akan bernilai nol. Kerugian yang diderita pemegang opsi beli adalah sebesar premi yang telah dibayarkan kepada penjual opsi.
3) Pada saat harga saham lebih tinggi dari harga pelaksanaan $(S_T > K)$ dan bernilai positif, maka opsi beli dikatakan dalam keadaan *in the money* (*ITM*). Dalam keadaan ini pemilik opsi akan menggunakan

opsinya karena akan memperoleh keuntungan atau dapat meminimalkan kerugian yang disebabkan karena telah membayar premi kepada penjual opsi.

b. Harga Opsi Jual

Misal, S_T adalah harga saham pada saat jatuh tempo, K adalah harga saham yang ditetapkan atau harga pelaksanaan, dan T adalah waktu jatuh tempo. Jika harga saham pada saat jatuh tempo lebih kecil daripada harga saham yang telah ditentukan (harga pelaksanaan) atau $S_T < K$, maka keuntungan yang diperoleh sebesar $K - S_T$. Sebaliknya, jika $S_T \geq K$ maka pemegang opsi jual tipe Eropa tidak melakukan haknya sehingga keuntungannya adalah nol (Luenberger, 1998: 323). Dengan demikian, harga opsi jual tipe Eropa (P) saat jatuh tempo adalah

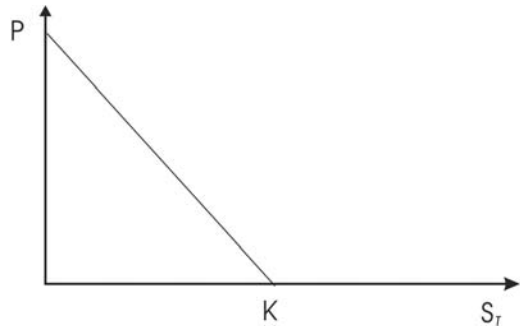
$$P = \begin{cases} K - S_T & ; jika\, S_T < K \\ 0 & ; jika\, S_T \geq K \end{cases}$$

sehingga

$$P = maks(0,\ K - S_T) \tag{2.2}$$

dengan P adalah harga opsi jual pada waktu jatuh tempo, K adalah harga pelaksanaan, dan S_T adalah harga saham.

Formula di atas dapat ditunjukkan melalui gambar berikut:



Gambar 2.2 Grafik Harga Opsi Jual Pada saat Jatuh Tempo

Dari gambar di atas menunjukkan bahwa harga opsi jual akan bernilai nol jika harga saham lebih tinggi dari harga pelaksanaan. Sebaliknya, jika harga saham lebih rendah dari harga pelaksanaan maka harga opsi jual akan bernilai positif, yaitu sebesar selisih antara harga pelaksanaan dengan harga saham.

Dari uraian di atas, dapat diketahui bahwa (Halim, 2005: 112)

1) Pada saat harga saham lebih rendah dari harga pelaksanaan $(S_T < K)$, maka opsi jual akan bernilai positif dan dikatakan dalam keadaan *in the money* (*ITM*). Dalam keadaan ini, pemegang opsi jual akan menggunakan haknya dan nilai opsi ini yaitu sebesar selisih antara harga pelaksanaan dan harga saham.
2) Pada saat harga saham yang bersangkutan memiliki harga di pasar sama dengan harga pelaksanaan $(S_T = K)$, maka opsi jual dikatakan dalam keadaan *at the money* (*ATM*), sehingga opsi ini akan bernilai nol dan pemegang opsi jual akan menanggung kerugian sebesar premi opsi yang telah dibayarkan.

3) Pada saat harga saham lebih tinggi daripada harga pelaksanaan $(S_T > K)$, maka opsi jual dikatakan dalam keadaan *out of the money* (*OTM*). Dalam keadaan ini pemilik opsi tidak akan menggunakan opsinya karena ia dapat menjual saham dengan harga yang lebih tinggi di pasar saham. Kerugian maksimal yang diderita sama dengan harga premi opsi yang telah dibayarkan.

c. Hubungan Kesamaan antara Opsi Jual dan Opsi Beli

Untuk opsi saham tipe Eropa, ada hubungan yang tetap antara harga saham dari opsi jual dan opsi beli dengan harga pelaksanaan pada tanggal jatuh tempo yang sama. Hubungan ini disebut hubungan kesamaan opsi jual dan opsi beli (Andrew Adams *et.al*, 2003: 344) yang dapat dituliskan sebagai berikut

$$C_t - P_t = S_T - K\exp(-r(T-t)) \tag{2.3}$$

dengan S_t merupakan harga saham pada waktu t, K merupakan harga pelaksanaan, r merupakan tingkat bunga bebas risiko, t merupakan waktu sekarang, dan T merupakan waktu jatuh tempo.

Dengan demikian, harga opsi jual tipe Eropa dapat ditentukan dengan menggunakan hubungan kesamaan opsi jika formula opsi beli tipe Eropa sudah ditentukan.

5. Definisi Return

Return adalah hasil yang diperoleh sebagai akibat dari investasi yang dilakukan (pengembalian). Nilai dari return bisa positif maupun negatif tergantung kondisi riil dari aset investasi.

Ada beberapa alasan investor lebih senang terhadap return (Cambell, J. Y., et.al., 1997), yaitu

a. Investor dapat mengetahui perubahan harga suatu sekuritas untuk memutuskan apakah akan berinvestasi dengan sekuritas tersebut.
b. Perilaku return dapat dijelaskan secara teoritis dan melalui penjelasan statistika, karena return memenuhi asumsi-asumsi seperti stasioner, yaitu fluktuasi data berada di sekitar suatu nilai rata-rata yang konstan, tidak bergantung pada waktu dan ragam dari fluktuasi tersebut.

Berikut adalah beberapa jenis return, yaitu

a. *Simple return*

Jika S_t adalah harga saham pada saat t dan tidak terdapat pembayaran dividen, maka *simple net return* didefinisikan sebagai berikut

$$R_t = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1$$

Agar stasioner di titik 1, maka persamaan di atas dijumlahkan dengan 1. Sehingga return jenis ini merupakan *simple gross return* yang dapat digunakan untuk menghitung nilai return *k* periode sebelumnya.

$$1 + R_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

atau dapat dilambangkan dengan $1+R_t(k)$.

$$\begin{aligned}1+R_t(k) &= (1+R_t)(1+R_{t-1})(1+R_{t-2})\ldots(1+R_{t-k+1})\\ &= \frac{S_t}{S_{t-1}}\frac{S_{t-1}}{S_{t-2}}\frac{S_{t-2}}{S_{t-3}}\ldots\frac{S_{t-k+1}}{S_{t-k}}\\ &= \frac{S_t}{S_{t-k}}\end{aligned}$$

disebut sebagai *compound return*.

b. *Continous return*

Return jenis ini lebih sering digunakan dalam analisis keuangan (finansial) karena sifat-sifatnya yang mengikuti distribusi Normal. *Continous return* sering hanya disebut sebagai return saja dan didefinisikan sebagai berikut

$$r_r = \ln(1+R_t) = \ln\left(1+\frac{S_t}{S_{t-1}}-1\right) = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$$

Dalam perhitungan return untuk model aset kontinu, *continously compounding return* (log Retunrn) lebih sering digunakan daripada *simple net return*. Meskipun demikian, hasil yang diperoleh dari keduanya hampir sama. Menurut Higham (2004: 48), selama return mempunyai nilai yang kecil mendekati nol, *continously compounding return* (log Return) akan ekuivalen dengan *simple net return*. Dengan pendekatan $\ln(1+x)\approx x$ dapat diperoleh sebagai berikut

$$r_r = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \ln\left(1+\frac{S_t-S_{t-1}}{S_{t-1}}\right) \approx \frac{S_t-S_{t-1}}{S_{t-1}}$$

B. **Konsep Dasar Kalkulus**

Konsep dasar kalkulus yang digunakan dalam skripsi ini adalah turunan suatu fungsi, integral tak wajar dengan batas tak berhingga, dan deret Taylor.

1. Turunan Suatu Fungsi

Suatu fungsi f dikatakan mempunyai turunan jika

a. fungsi f mempunyai limit

Definisi 2.5 (Spiegel, 1984: 24)

Diberikan f fungsi yang didefinisikan pada interval terbuka yang memuat *c*, kecuali *c* itu sendiri.

Misal Limit fungsi *f* dengan *x* mendekati *c* adalah bilangan L, ditulis

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \qquad (2.4)$$

Jika $\forall \varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $| f(x) - L | < \varepsilon,\ \forall x \in \textit{domain } f$ dan $0 < | x - c | < \delta$.

b. fungsi f kontinu

Definisi 2.6 (Spiegel, 1984: 25)

Fungsi *f* dikatakan kontinu di *x* = *c*, jika

a. $\lim_{x \to c} f(x)$ ada

b. $f(c)$ ada

c. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Jika suatu fungsi *f* tidak memenuhi salah satu aksioma di atas, maka *f* dikatakan tidak kontinu di *x*.

Definisi 2.7 (Spiegel, 1984: 58)

Misal $y = f(x)$ adalah fungsi dan *c* berada pada domain *f*. Turunan fungsi f pada *c* dinyatakan dengan $f'(c)$ adalah

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \tag{2.5}$$

jika limit itu ada.

Teorema 2.1 Aturan Rantai

Jika f dan g fungsi-fungsi yang mempunyai turunan, maka fungsi komposisi $f \circ g$ juga mempunyai turunan.

Jika $y = f(u)$ dan $u = g(x)$, maka turunan $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ adalah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} \tag{2.6}$$

Bukti

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} . \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Jika $u = g(x)$ mempunyai turunan, maka $\Delta u \to 0$ bila $\Delta x \to 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u &= \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x . \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \left(\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \right) \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \\
&= 0 . \frac{du}{dx} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Jadi, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)$

Sehingga $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$ ■

2. Integral Tak Wajar dengan Batas Tak Berhingga

Definisi 2.8 (Baisuni, 1986: 228)

Integral tak wajar adalah suatu integral dimana salah satu atau kedua harga limit batas integralnya adalah tak berhingga untuk suatu harga x dalam interval $[a,b]$.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx \tag{2.7}$$

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_{a}^{b} f(x)dx \tag{2.8}$$

Definisi 2.9 (Baisuni, 1986: 228)

Jika limit pada ruas kanan ada dan bernilai tak hingga, maka dikatakan integral tak wajar yang bersangkutan konvergen dan memiliki nilai. Jika tidak, maka integral tersebut dikatakan divergen.

Jika $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ dan $\int_{0}^{\infty} f(x)dx$ konvergen, maka dikatakan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ konvergen dengan nilai

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx \tag{2.9}$$

3. Deret Taylor

Fungsi $f(x,y)$ kontinu pada daerah tertutup dan mempunyai turunan parsial tingkat $n+1$ maka untuk (x_0, y_0) berlaku

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0)$$
$$+ \ldots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0) + R_n$$

dengan nilai sisa

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k) \text{ dengan } 0 < \theta < 1$$

C. **Konsep Dasar Stokastik**

Konsep dasar stokastik yang digunakan dalam skripsi ini adalah proses stokastik dan proses Wiener sebagai pola dari pergerakan harga saham, formula proses Itô yang merupakan generalisasi proses Wiener, proses terukur (*measurable*), teori Martingale, dan definisi aset sebagai dasar pemodelan harga opsi saham berdasarkan jenis asetnya.

1. Proses Stokastik

Definisi 2.10 (Paul, 1999: 111)

Proses stokastik didefinisikan sebagai barisan peubah acak $X_1, X_2, ..., X_t$ yang dinotasikan $\{X_t \mid t \in T\}$ dengan T adalah himpunan parameter waktu. Jika T adalah himpunan terhitung seperti $T = \{1,2,...\}$, maka proses stokastik $\{X_t \mid t \in T\}$ dikatakan sebagai proses stokastik diskret. Jika T adalah suatu interval seperti $T = \{t \mid -\infty < t < \infty\}$ atau $T = \{t \mid 0 < t < +\infty\}$

maka proses stokastik $\{X_t \mid t \in T\}$ dikatakan sebagai proses stokastik kontinu. Proses stokastik dengan $\{X_t \mid t \in T\}$ dikatakan sebagai proses stokastik order kedua jika memenuhi bahwa $E[X^2(t)] < \infty$ untuk setiap $t \in T$.

2. Proses Wiener

Proses stokastik banyak dikembangkan ahli Matematika, antara lain oleh Nobert Wiener dan Paul Levy. Oleh karena itu, proses Wiener sering juga disebut sebagai Proses Wiener-Levy dan dalam bidang Fisika disebut sebagai gerak Brownian. Proses Wiener merupakan proses stokastik $Z_t, -\infty < t < \infty$ yang memenuhi sifat berikut (Paul, 1999):

a. $Z(0) = 0$

   $Z(0) = 0$ menggambarkan suatu partikel pada posisi awal yaitu $t = 0$ yang akan menghasilkan $P[Z_0 = 0] = 1$.

b. $Z_t - Z_s \sim N(0,(t-s)),\ \forall s \le t$.

   $Z_t - Z_s$ memiliki *mean* 0 yaitu mengacu dari partikel yang bergerak akan bergerak ke atas dan ke bawah dan variansinya akan berkembang sesuai dengan interval $[s,\ t]$.

   Misalkan Z_t dan Z_s merupakan peubah acak yang saling bebas dan memiliki distribusi dengan rata-rata yang sama, maka diperoleh $E\{Z_t - Z_s\} = 0$ dengan demikian didapatkan variansi

$$
\begin{aligned}
E\left\{ \left[Z_t - Z_s\right]^2 \right\} &= E\left\{Z_t^{\ 2} - 2Z_tZ_s + Z_s^{\ 2}\right\} \\
&= E\left\{Z_t^{\ 2}\right\} - 2E\left\{Z_tZ_s\right\} + E\left\{Z_s^{\ 2}\right\} \\
&= (t - 2s + s) \\
&= t - s
\end{aligned}
$$

dengan

$$
\begin{aligned}
E\{Z_tZ_s\} &= E\left\{\left\lfloor Z_t(Z_s - Z_t) + E\left\lfloor Z_s^{\ 2}\right\rfloor\right\rfloor\right\} \\
&= E\{Z_t\}E\{Z_s - Z_t\} + E\left\{Z_s^{\ 2}\right\} \\
&= E\{Z_t\}.0 + s \\
&= s
\end{aligned}
$$

c. $Z_{t_2} - Z_{t_1}$, $Z_{t_3} - Z_{t_2}$, …, $Z_{t_n} - Z_{t_{n-1}}$ adalah saling bebas (*independent*) untuk $t_1 \le t_2 \le ... \le t_n$.

Misalkan jika $t_1 \le t_2$ maka perbedaan antara $Z_{t_2} - Z_{t_1}$ saling bebas terhadap Z_{t_1} yang berakibat bahwa

$$
E\left\{\left\lfloor Z_{t_2} - Z_{t_1}\right\rfloor Z_{t_1}\right\} = E\left\{\left\lfloor Z_{t_2} - Z_{t_1}\right\rfloor\right\}E\left\{Z_{t_1}\right\} = 0
$$

dengan autokorelasi yang ada bahwa Z_t adalah sama dan diperoleh bahwa jika $t_1 \le t_2 \le ... \le t_n$ maka kenaikan dari $Z_{t_2} - Z_{t_1}$, $Z_{t_3} - Z_{t_2}$, …, $Z_{t_n} - Z_{t_{n-1}}$ dari Z_t saling bebas.

Dalam beberapa buku, proses Wiener ini dapat digeneralisasikan pada variabel $x(t)$ yang dapat didefinisikan dengan dZ_t sebagai berikut:

$$
dx(t) = a(x,t)dt + b(x,t)dZ(t) \tag{2.10}
$$

dimana parameter a dan b merupakan suatu fungsi dari nilai-nilai peubah x dan t . Sedangkan $dZ(t)$ merupakan gerak Brown (proses Wiener).

Persamaan (2.10) dapat dinyatakan juga dengan

$$dx(t) = a\,dt + b\,dZ_t \tag{2.11}$$

$$x(0) = b \tag{2.12}$$

dengan a dan b konstan.

Jika $b = 0$, maka $dx(t) = a\,dt$, sehingga $x(t)$ mempunyai ekspektasi drift a per unit waktu.

$$dx(t) = a\,dt \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = a$$

$x(t) = x_0 + a\,t$, x_0 adalah nilai $x(t)$ pada saat $t = 0$.

Dalam interval waktu yang sangat singkat Δt, perubahan Z_t adalah $\Delta Z_t = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ dengan ε merupakan sampel random berdistribusi normal standar, sehingga nilai mean dari ΔZ_t adalah 0, standar deviasi ΔZ_t adalah $\sqrt{\Delta t}$ dan variansinya adalah Δt. Dengan demikian, perubahan $x(t)$ selama periode waktu Δt adalah Δx. Dari persamaan (2.11) dan (2.12) diperoleh

$$\Delta x = a\,\Delta t + b\,\varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{2.13}$$

dengan ε merupakan sampel random berdistribusi normal standar, sehingga Δx berdistribusi normal dengan mean $\Delta x = a\,\Delta t$, standar deviasinya $\Delta x = b\sqrt{\Delta t}$, dan variansinya $b^2\Delta t$.

3. Formula Proses Itô

Lemma 2.1 (Luenberger, 1998: 312)

Suatu $x(t)$ mengikuti proses Itô, jika

$$dx(t) = a(x,t)dt + b(x,t)dZ(t) \tag{2.14}$$

dengan parameter a dan b merupakan suatu fungsi dari nilai-nilai peubah x dan t. Sedangkan $dZ(t)$ merupakan gerak Brown (proses Wiener).

Misalkan F fungsi dari x dan t mengikuti proses

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x} a + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial F}{\partial x} b\, dZ(t) \tag{2.15}$$

maka dapat dikatakan F mengikuti proses Itô dengan mean adalah $\left(\frac{\partial F}{\partial x} a + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} b^2 \right)$ dan variansinya adalah $\left(\frac{\partial F}{\partial x} b \right)^2$.

Bukti

F merupakan fungsi kontinu dan dapat diturunkan pada x. Jika Δx merupakan perubahan kecil yang terjadi pada x dan ΔF merupakan perubahan kecil yang terjadi pada F, maka dapat dinyatakan sebagai

$$\Delta F \approx \frac{dF}{dx} \tag{2.16}$$

dengan menggunakan deret Taylor, maka perluasan ΔF dapat dinyatakan sebagai

$$\Delta F = \frac{dF}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dx^2} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3 F}{dx^3} \Delta x^3 + \ldots$$

Pada fungsi F kontinu dan dapat diturunkan dua kali pada x dan y, hasilnya akan sejalan dengan persamaan (2.16), yaitu

$$\Delta F \approx \frac{dF}{dx} \Delta x + \frac{dF}{dx} \Delta y \tag{2.17}$$

dan perluasan deret Taylornya adalah sebagai berikut

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \Delta y^2 + \ldots \tag{2.18}$$

Limit dari Δx dan $\Delta y \rightarrow 0$ dan Δx^2 diabaikan karena merupakan turunan kedua dan tidak memuat orde Δt, maka persamaan (2.18) menjadi

$$dF \approx \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial x}dy \tag{2.19}$$

Turunan dari harga saham merupakan suatu fungsi stokastik, maka persamaan (2.18) dapat diperluas mengikuti perluasan proses Wiener yang disebut dengan proses Itô pada persamaan (2.14) adalah

$$dx(t) = a(x,t)dt + b(x,t)dZ(t)$$

dan *F* merupakan fungsi *x* pada waktu *t*.

Dengan cara yang sama pada persamaan (2.18) diperoleh

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}\Delta x \Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\Delta t^2 + \ldots \tag{2.20}$$

Dengan notasi pada persamaan (2.13), maka persamaan (2.14) menjadi

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

atau dinyatakan sebagai berikut

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

$$\Leftrightarrow \Delta x^2 = a^2\Delta t^2 + 2ab\varepsilon\sqrt{\Delta t}\,\Delta t + b^2\varepsilon^2\Delta t \tag{2.21}$$

Hal ini menunjukkan bahwa Δx^2 pada persamaan (2.20) merupakan suatu komponen karena memuat orde Δt, maka Δx^2 tidak dapat diabaikan seperti pada persamaan (2.18).

Diketahui variansi pada distribusi normal adalah 1, yang artinya

$$E(\varepsilon^2) - [E(\varepsilon)]^2 = 1$$

dengan E merupakan nilai ekspektasi. Karena mean atau $E(\varepsilon)=0$, maka diperoleh $E(\varepsilon^2)=1$.

Nilai ekspektasi dari $\varepsilon^2\Delta t$ adalah Δt, sehingga variansi $\varepsilon^2\Delta t$ dapat dinyatakan sebagai orde Δt^2. Dari hasil ini menunjukkan bahwa $\varepsilon^2\Delta t$ bukan merupakan variabel stokastik dan sama pada nilai ekspektasi dari Δt, yaitu $\Delta t \to 0$. Persamaan (2.21) mengikuti pengertian di atas, yang artinya persamaan (2.21) menjadi variabel non stokastik dan hasilnya $b^2 dt$, karena Δt menuju nol. Karena limit Δx dan Δt menuju nol dan berdasarkan uraian di atas, maka diperoleh

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}b^2 dt \qquad (2.22)$$

Persamaan (2.22) dikenal dengan rumus proses Itô.

4. Proses Terukur (*Measurable*)

Suatu aset S_T dapat dikatakan mengikuti proses terukur (*measuable*) jika (Lamberton, 2000: 31) :

a. S merupakan *stopping time*, maka S disebut F_S *measurable*.

b. S merupakan *stopping time*, terbatas, dan $(X_t)_{t\geq 0}$ kontinu, maka X_S disebut F_S *measurable*.

c. S dan T merupakan dua *stopping time* dengan $S \leq T$ dalam ruang probabilitas P, maka $F_S \subset F_T$.

d. S dan T merupakan dua *stopping time*, maka $S \wedge T = \inf(S,T)$ disebut *stopping time* dengan S adalah *stopping time* dan t adalah *deterministic time* $S \wedge t$ merupakan *stopping time*.

5. Teori Martingale

Suatu proses stokastik $\{X_n; n = 0,1,...\}$ adalah *martingale* jika untuk setiap $n = 0,1,...$ (kasus diskret) berlaku sebagai berikut (Taylor, 1998) :

a. $E(X_n) < \infty$, dan

b. $E(X_{n+1} \mid X_0,,...,X_n) = X_n$

Berdasarkan *point* (b), jika kedua ruas diekspektasikan, maka akan diperoleh

$$E(E(X_{n+1} \mid X_0,,...,X_n)) = E(X_n)$$

$$E(E(X_n \mid X_1,,...,X_{n-1})) = E(X_{n-1})$$

sehingga

$$E(X_{n-1}) = E(X_n) = E(X_{n+1})$$

Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa untuk suatu proses stokastik dikatakan bersifat *martingale* maka proses tersebut akan memiliki mean yang konstan.

Definisi 2.11 (Lamberton, 2000: 32)

Suatu proses stokastik dengan (Ω, F, P) merupakan ruang probabilitas dengan filtrasi $(F_t)(t \in [0,\infty))$ sehingga

a. Proses tersebut dikatakan *supermartingale* jika

1) $E(X_n) < \infty$, dan

2) $E\left(X_{n+1} \mid F_t\right) \leq X_n$

b. Proses tersebut dikatakan *martingale* jika

1) $E\left(X_n\right) < \infty$, dan

2) $E\left(X_{n+1} \mid F_t\right) = X_n$

c. Proses tersebut dikatakan *sub martingale* jika

1) $E\left(X_n\right) < \infty$, dan

2) $E\left(X_{n+1} \mid F_t\right) \geq X_n$

6. Definisi Aset

Definisi 2.12 (Elliot, 2000: 135)

Dalam model penetapan harga, opsi saham dipengaruhi oleh dua buah jenis aset, yaitu aset yang tidak memiliki risiko (*riskless asset*) yang biasa disebut dengan *bond* dan aset yang memiliki risiko (*risky asset*) atau yang sering disebut dengan *stock*.

Aset yang tidak memiliki risiko (*riskless asset*) hanya dipengaruhi oleh tingkat suku bunga yang dinotasikan dengan *r* yang merupakan konstanta non negatif, sehingga harga aset yang bebas risiko didefinisikan sebagai

$$S_t = \exp(r\,t), \qquad t \geq 0 \tag{2.23}$$

$$dS_t = r\,S_t\,dt \tag{2.24}$$

Sedangkan untuk aset yang memiliki risiko dimodelkan dengan suatu persamaan diferensial stokastik, yaitu

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma B_t\right) \tag{2.25}$$

dengan μ dan $\sigma > 0$ merupakan suatu konstanta dan $B_t, t \geq 0$ merupakan gerak Brownian standar.

Persamaan (2.25) di atas akan diturunkan dengan menggunakan formula Itô sebagai berikut

$$dS_t = S_0\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right]dt + S_0\,\sigma\exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right]dB_t$$

$$+\frac{1}{2}S_0\,\sigma^2\exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right]dt$$

$$= S_0\exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right]\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t + \frac{1}{2}\sigma^2\,dt\right]$$

$$= S_t\left(\mu\,dt + \sigma\,dB_t\right) \tag{2.26}$$

Dengan mengubah persamaan (2.25) ke dalam bentuk logaritmanya, maka akan diperoleh

$$\log(S_t) = \log(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t \tag{2.27}$$

Berdasarkan persamaan (2.26) diketahui S_t berdistribusi log normal, sehingga perlu diubah ke dalam bentuk logaritma seperti persamaan (2.27) agar menjadi berdistribusi normal.

Teorema 2.2 Teorema Girsanov (Elliot, 2000: 138)

Teorema Girsanov digunakan untuk mengubah bentuk dari suatu bentuk gerak Brownian standar ke bentuk gerak Brownian standar yang lain.

Diberikan (θ_t), $0 \le t < T$ dengan $\int_0^T \theta_s^2\, ds < \infty$ adalah proses terukur (*measurable*) dan $A_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2\, ds \right)$ adalah proses Martingale pada (F_t, P).

Akan didapatkan besaran baru Q_s di dalam ruang F_T yang didefinisikan $\frac{dQ_s}{dP}\Big|_{F_t} = A_T$.

Maka proses $Z_t = B_t + \int_0^t \theta_s\, ds$ (2.28)

adalah gerak Brownian standar di dalam (F_t, Q).

Penetapan teorema Girsanov ini digunakan untuk memodelkan diskonto aset berisiko, yaitu

$$\tilde{S}_t = \exp(-r\,t)S_t \tag{2.29}$$

Persamaan (2.29) di atas jika didiferensialkan, maka akan diperoleh

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= -r\exp(-rt)S_t\,dt + \exp(-rt)dS_t \\ &= -r\,\tilde{S}_t\,dt + \exp(-rt)dS_t \\ &= -r\,\tilde{S}_t\,dt + \exp(-rt)S_t\left(\mu\,dt + \sigma\,dB_t\right) \\ &= \tilde{S}_t\left[(\mu - r)dt + \sigma\,dB_t\right] \end{aligned} \tag{2.30}$$

Dengan menggunakan teorema Girsanov dan memisalkan $\theta_t = \frac{\mu - r}{\sigma}$, maka akan diperoleh besaran probabilitas P^{μ} di dalam ruang F_T, yaitu

$$\frac{d\mathrm{P}^{\mu}}{d\mathrm{P}} = A_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s\, ds - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2\, ds \right)$$

Berdasarkan persamaan (2.28), maka akan diperoleh

$$\begin{aligned} Z_t &= B_t + \int_0^t \theta_s \, ds \\ &= B_t + \int_0^t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) ds \\ &= B_t + \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) t \end{aligned} \tag{2.31}$$

disebut dengan persamaan Brownian standar di dalam ruang (F_T, P).

Kemudian persamaan tersebut diturunkan, sehingga diperoleh

$$dZ_t = dB_t + \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) dt \tag{2.32}$$

$$\sigma \, dZ_t = \sigma \, dB_t + (\mu - r)`dt$$

$$\sigma \, dB_t = \sigma \, dZ_t - (\mu - r) dt \tag{2.33}$$

Substitusikan persamaan (2.33) ke persamaan (2.30), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= \tilde{S}_t \left[(\mu - r) dt + \sigma \, dB_t \right] \\ &= \tilde{S}_t \left[(\mu - r) dt + \sigma \, dZ_t - (\mu - r) dt \right] \\ &= \tilde{S}_t \, \sigma \, dZ_t \end{aligned} \tag{2.34}$$

Kemudian untuk mencari $\tilde{S}_t$, substitusikan persamaan (2.25) ke persamaan (2.29) dan dilanjutkan dengan mensubstitusikan persamaan (2.31) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \tilde{S}_t &= \exp(-rt) S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma B_t \right) \\ &= S_0 \exp\left(-rt + \mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma \left[Z_t - \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) t \right] \right) \\ &= S_0 \exp\left(\sigma Z_t - \frac{\sigma^2}{2} t \right) \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t\left(\mu\, dt + \sigma\, dB_t\right) \\ &= S_t\left(\mu\, dt + \sigma\, dZ_t - \left(\mu - r\right)dt\right) \\ &= S_t\left(r\, dt + \sigma\, dZ_t\right) \end{aligned}$$

dengan Z_t adalah gerak Bownian standar (proses Wiener).

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa suatu aset berisiko dapat dimodelkan ke dalam persamaan yang bebas dari variabel μ, yaitu

$$dS_t = S_t\left(r\, dt + \sigma\, dZ_t\right) \tag{2.36}$$

sehingga persamaan (2.25) menjadi

$$S_t = S_0 \exp\left(r\, t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma\, Z_t\right) \tag{2.37}$$

dengan Z_t adalah gerak Bownian standar (proses Wiener).

D. **Konsep Statistika Dasar**

Konsep statistika dasar yang digunakan dalam skripsi ini adalah variabel random kontinu, distribusi probabilitas kontinu, dan motode Penaksir Maksimum Likelihood (PML) yang merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menaksir nilai parameter serta merupakan metode yang paling popular dalam menghasilkan taksiran.

1. Variabel Random Kontinu

Definisi 2.13 (Bain and Engelhardt, 1992: 64)

Varibel random *X* disebut variabel random kontinu jika ada fungsi *f(x)*, disebut fungsi kepadatan probabilitas dari *X* sedemikian sehingga fungsi distribusi komulatifnya dapat ditunjukkan sebagai berikut

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{2.38}$$

a. Ekspektasi Variabel Random Kontinu

Definisi 2.14 (Bain and Engelhardt, 1992: 67)

Jika *X* variabel random kontinu dengan fungsi kepadatan probabilitas *f(x)*, maka nilai ekspektasi *X* didefinisikan oleh

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \tag{2.39}$$

jika integral dalam persamaan di atas konvergen *absolute*. Jika tidak, maka dapat dikatakan bahwa nilai E(*X*) tidak ada.

Teorema 2.3 (Bain and Engelhardt, 1992: 72)

Jika *X* suatu variabel random dengan fungsi kepadatan probabilitas *f(x)*, dengan *a* dan *b* konstanta, *g(x)* dan *h(x)* adalah fungsi real dengan domain nilai-nilai yang mungkin dari *X*, maka

$$E[a.g(x) + b.h(x)] = a.E[g(x)] + b.E[h(x)] \tag{2.40}$$

Bukti

Misalkan *X* kontinu, maka

$$\begin{aligned} E[a.g(x) + b.h(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [a.g(x) + b.h(x)] f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a.g(x) f(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} b.h(x) f(x)dx \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)dx \\ &= a\ E[g(x)] + b\ E[h(x)] \end{aligned}$$

■

b. Variansi Variabel Random Kontinu

Definisi 2.15 (Bain and Engelhardt, 1992: 73)

Variansi dari suatu variabel random *X* diberikan oleh

$$Var(x) = E\left[(x-\mu)^2\right] \tag{2.41}$$

Teorema 2.4 (Bain and Engelhardt, 1992: 74)

Jika *X* adalah suatu variabel random, maka

$$Var(x) = E\left(x^2\right) - \mu^2 \tag{2.42}$$

Bukti

$$\begin{aligned} Var(x) &= E\left[(x-\mu)^2\right] \\ &= E\left(x^2 - 2\mu x + \mu^2\right) \\ &= E\left(x^2\right) - 2\mu E(x) + \mu^2 \\ &= E\left(x^2\right) - \mu^2 \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 2.5 (Bain and Engelhardt, 1992: 74)

Jika *X* suatu variabel random dan *a, b* konstanta, maka

$$Var(aX + b) = a^2\, Var(X) \tag{2.43}$$

Bukti

$$\begin{aligned} Var(aX + b) &= E\left[(aX + b - a\mu_x - b)^2\right] \\ &= E\left[a^2 (X - \mu_x)^2\right] \\ &= a^2\, Var(X) \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

2. Distribusi Probabilitas Kontinu

Distribusi probabilitas kontinu yang digunakan dalam skripsi ini adalah distribusi normal dan disribusi lognormal.

a. Distribusi Normal

Definisi 2.16 (Bain and Engelhardt, 1992: 118)

Variabel random *X* mengikuti distribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2, dinotasikan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{2.44}$$

untuk $-\infty < x < \infty$, dimana $-\infty < \mu < \infty$ dan $0 < \sigma < \infty$.

Definisi 2.17 (Luenberger, 1998: 476)

Sebuah variabel random normal dikatakan *normalized* atau *standard* jika mean-nya sama dengan nol dan variansi-nya sama dengan 1, maka variabel random normal standard mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

dan

$$P(X \le x) = N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \tag{2.45}$$

dengan fungsi $N(x)$ disebut fungsi distribusi dari *X*.

Karena distribusi normal mempunyai sifat simetris, maka untuk $N(x)$ dapat juga dinyatakan $N(x) = 1 - N(-x)$ yang akan digunakan dalam bahasan kemudian.

Nilai mean dari variabel random *X* dapat ditentukan dari

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) dx$$

Jika $g : \Re \rightarrow \Re$ merupakan fungsi *integrable*, maka menurut teorema tranformasi integral, nilai mean dari $Z \sim f(X)$ adalah

$$E(Z) = E[f(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) dx \qquad (2.46)$$

Teorema 2.6 (Bain and Engelhardt, 1992: 119)

Jika $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, maka $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ mengikuti distribusi normal standar dengan fungsi kepadatan probabilitas

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2 \right); \ untuk -\infty < z < \infty \qquad (2.47)$$

Bukti

Digunakan transformasi Jacobian, sebagai berikut:

Misal $z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = w(z) = z\sigma + \mu$

Nilai dari Jacobian $J = w'(z) = \sigma$, sehingga

$$\begin{aligned}
\phi(z) &= f_Y(w(z)) \left\lfloor \frac{d}{dz} w(z) \right\rfloor \\
&= f_Y(z\sigma + \mu) \lfloor \sigma \rfloor \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{z\sigma + \mu - \mu}{\sigma} \right)^2 \right) \sigma \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2 \right)
\end{aligned}$$

■

Sedangkan fungsi distribusi komulatif atau *Comulative Distribution Function* (CDF) dari distribusi normal standar didefinisikan

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(t)\,dt \tag{2.48}$$

b. Distribusi Lognormal

Definisi 2.18 (Luenberger, 1998: 477)

Variabel random Y dikatakan berdistribusi lognormal jika variabel random *ln Y* merupakan distribusi normal. Ekuivalen, jika X dikatakan berdistribusi normal, X ~ $N(\mu,\sigma^2)$, maka $Y = \exp(X)$ merupakan distribusi lognormal, Y ~ $LOGN(\mu,\sigma^2)$ dan Y mempunyai interval $0 < y < \infty$. Dengan fungsi kepadatan probabilitas untuk distribusi lognormal ini dapat dinyatakan sebagai berikut

$$f_Y(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad ; \qquad 0 < y < \infty \tag{2.49}$$

dengan parameter $-\infty < \mu < \infty$ dan $0 < \sigma < \infty$.

Jadi, $Y \sim LOGN(\mu,\sigma^2)$ jika dan hanya jika $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

Fungsi kepadatan probabilitas dari Y adalah

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) & ; \ 0 < y < \infty \\ 0 & ; \ y \le 0 \end{cases}$$

untuk $-\infty < \mu < \infty$ dan $0 < \sigma < \infty$.

Kemudian akan diselidiki mean dan variansi distribusi lognormal.

1) Mean Distribusi Lognormal

Nilai mean dari variabel random *Y* dapat ditentukan sebagai berikut

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(y) - \mu}{\sigma} \right)^2 \right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(y) - \mu}{\sigma} \right)^2 \right) dy$$

Misal $x = \ln(y) \Rightarrow y = \exp(x) \Rightarrow dy = \exp(x)dx$, maka

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right) \exp(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 + x \right) dx$$

Pangkat dari eksponensial persamaan di atas adalah

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 + x = -\frac{(x-\mu)^2 - 2x\sigma^2}{2\sigma^2}$$

$$= -\frac{x^2 - 2x\mu + \mu^2 - 2x\sigma^2}{2\sigma^2}$$

$$= -\frac{x^2 - 2x(\mu + \sigma^2) + \mu^2}{2\sigma^2}$$

$$= -\frac{(x - (\mu + \sigma^2))^2 - 2\mu\sigma^2 - \sigma^4}{2\sigma^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{x - (\mu + \sigma^2)}{\sigma} \right)^2 + \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$$

sehingga diperoleh

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\left(\mu+\sigma^2\right)}{\sigma}\right)^2+\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)dx$$

$$=\exp\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\left(\mu+\sigma^2\right)}{\sigma}\right)^2\right)dx$$

Misal $z=\frac{x-\left(\mu+\sigma^2\right)}{\sigma}\Rightarrow dz=\frac{1}{\sigma}dx$, maka

$$E(Y)=\exp\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)\sigma\,dz$$

$$=\exp\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)dz$$

$$=\exp\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right) \tag{2.50}$$

2) Variansi Distribusi Lognormal

Variansi dari suatu variabel random *Y* diberikan oleh

$$Var(Y)=E(Y^2)-\left(E(Y)\right)^2 \tag{2.51}$$

$$E\left(Y^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}y^2\frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(y)-\mu}{\sigma}\right)^2\right)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(y)-\mu}{\sigma}\right)^2\right)dy$$

Misal $x=\ln y\Rightarrow y=\exp(x)\Rightarrow dy=\exp(x)dx$, maka

$$E\left(Y^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(x)}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)\exp(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2+2x\right)dx$$

Pangkat dari eksponensial persamaan di atas adalah

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2+2x=-\frac{(x-\mu)^2-4x\sigma^2}{2\sigma^2}$$
$$=-\frac{x^2-2x\mu+\mu^2-4x\sigma^2}{2\sigma^2}$$
$$=-\frac{x^2-2x\left(\mu+2\sigma^2\right)+\mu^2}{2\sigma^2}$$
$$=-\frac{\left(x-\left(\mu+2\sigma^2\right)\right)^2-4\mu\sigma^2-4\sigma^4}{2\sigma^2}$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\left(\mu+2\sigma^2\right)}{\sigma}\right)^2+2\mu+2\sigma^2$$

sehingga diperoleh

$$E\left(Y^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\left(\mu+2\sigma^2\right)}{\sigma}\right)^2+2\mu+2\sigma^2\right)dx$$
$$=\exp\left(2\mu+2\sigma^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\left(\mu+2\sigma^2\right)}{\sigma}\right)^2\right)dx$$

Misal $z=\dfrac{x-\left(\mu+2\sigma^2\right)}{\sigma}\Rightarrow dz=\dfrac{1}{\sigma}dx$, maka

$$E\left(Y^2\right)=\exp\left(2\mu+2\sigma^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)\sigma\,dz$$
$$=\exp\left(2\mu+2\sigma^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)dz$$
$$=\exp\left(2\mu+2\sigma^2\right) \tag{2.52}$$

Berdasarkan persamaan (2.50), (2.51), dan (2.52) maka diperoleh

$$Var(Y)=E(Y^2)-\left(E(Y)\right)^2$$
$$=\exp\left(2\mu+2\sigma^2\right)-\exp\left(2\mu+\sigma^2\right)$$
$$=\exp\left(2\mu+\sigma^2\right)\left(\exp\left(\sigma^2\right)-1\right)$$

3. Metode Penaksir Maksimum Likelihood (PML)

Metode Penaksir Maksimum Likelihood merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menaksir nilai parameter serta merupakan metode yang paling popular dalam menghasilkan taksiran.

Definisi 2.19 (Bain and Engelhardt, 1992: 294)

Misal $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah sampel random dari populasi dengan fungsi kepadatan probabilitas bersama $L(\theta) = f(x_1, x_2, ..., x_n;\ \theta),\ \theta \in \Omega$ maka fungsi Likelihood didefinisikan sebagai berikut

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) \text{ yang merupakan fungsi dalam } \theta$$

Untuk sampel random $(x_1, x_2, ..., x_n)$ nilai θ pada Ω yang memaksimumkan $L(\theta)$ disebut Penaksir Maksimum Likelihood (PML) dari θ. Jadi, $\hat{\theta}$ adalah nilai dari θ yang memenuhi

$$f(x_1, x_2, ..., x_n;\ \hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Omega} f(x_1, x_2, ..., x_n;\ \theta)$$

Tujuan dari PML adalah untuk menaksir parameter agar probabilitas dari nilai *X* adalah setinggi mungkin, sehingga nilai fungsi Likelihood dalam persamaan di atas harus dimaksimumkan. Untuk memaksimumkan fungsi tersebut dapat dilakukan diferensiasi atau turunan fungsi tersebut terhadap setiap parameter yang ada dengan setiap turunan fungsi terhadap variabel tertentu sama dengan nol.

Untuk memperoleh nilai θ yang memaksimumkan $L(\theta)$ dapat dicari dengan

$$\frac{d}{d\theta}L(\theta)=0 \qquad (2.53)$$

Tetapi kadang untuk mencari θ yang memaksimumkan $L(\theta)$ akan lebih mudah dengan menggunakan turunan dari $\ln L(\theta)$ terhadap θ yang kemudian dapat disebut sebagai persamaan Likelihood.

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=0 \qquad (2.54)$$

Dengan demikian, jika θ memaksimumkan $L(\theta)$, maka θ juga akan memaksimumkan fungsi logaritma Likelihood atau $ln\, L(\theta)$.

E. Model Black-Scholes dan Karakteristiknya

Upaya untuk merumuskan bagaimana menghitung harga saham yang seharusnya (nilai intrinsik) telah dilakukan dalam setiap analisis dengan tujuan untuk memperoleh tingkat pengembalian (*return*) yang memuaskan. Dalam model Black-Scholes, proses harga saham merupakan generalisasi proses Wiener yang menyebabkan nilai ekspektasi mean dan nilai variansinya konstan. Untuk memodelkan investasi saham, perlu dilakukan pemisalan-pemisalan dari faktor-faktor yang terkait dengan rumus/lambang Matematika. Hal ini bertujuan untuk dapat mengetahui atau mengenali sifat-sifatnya dan keterkaitan dengan unsur-unsurnya serta dalam hal menarik kesimpulan tentang model yang diamati lebih lanjut.

Pada model investasi ini, harga saham dilambangkan dengan S_t dan waktu dilambangkan dengan t. Perubahan harga saham dinyatakan dengan dS_t pada interval waktu yang dinyatakan dengan dt. Model umum *return* dari aset adalah $\frac{dS_t}{S}$ yang dipengaruhi oleh dua faktor, yaitu faktor internal dan faktor eksternal. Faktor internal, misalnya kebijakan pemerintah dalam menentukan nilai dari aset bebas risiko, dilambangkan dengan $\mu\, dt$, dimana μ diasumsikan sebagai nilai aset bebas risiko dan merupakan fungsi dari S_t dan t. Sedangkan faktor eksternal, misalnya berita atau *issue* yang beredar di masyarakat atau kondisi politik suatu negara yang berpengaruh pada model perubahan harga saham secara random, dilambangkan dengan $\sigma\, dZ_t$ dengan σ didefinisikan sebagai volatilitas dari harga saham yang digunakan untuk mengukur standar deviasi dari *return*, berdistribusi nomal dengan *mean* adalah 0, dan merupakan fungsi dari S_t dan t. Sedangkan Z_t dalam dZ_t merupakan gerak Brownian (proses Wiener). Dari pemodelan di atas, diperoleh persamaan differensial stokastik sebagai berikut:

$$\frac{dS_t}{S} = \mu\, dt + \sigma\, dZ_t \qquad (2.55)$$

dengan μ merupakan nilai ekspektasi *return* harga saham, σ merupakan volatilitas harga saham yang merupakan deviasi standar dari *return* harga saham, dan Z_t merupakan pola pergerakan harga saham mengikuti gerak Brownian atau proses Wiener.

Pada persamaan (2.55), jika volatilitasnya nol ($\sigma = 0$), maka modelnya akan menjadi

$$\frac{dS_t}{S} = \mu\, dt$$

Kemudian, jika diketahui μ konstan, maka persamaannya sebagai berikut

$$\int_{S_0}^{S_t} \frac{dS_t}{S} = \int \mu \, dt$$

$$\ln S_t - \ln S_0 = \mu t$$

$$S_t = S_0 \exp(\mu t) \tag{2.56}$$

dengan S_0 adalah harga saham pada saat $t = 0$ dan S_t merupakan harga saham pada saat t.

Dalam menurunkan model investasi harga saham, model Black-Scholes memerlukan asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Jenis opsi yang digunakan adalah opsi tipe Eropa

   Opsi saham tipe Eropa adalah opsi saham yang hanya dapat dilaksanakan pada waktu jatuh temponya (*expiration date*). Sehingga pelaksanaan opsi sebelum waktunya tidak akan menguntungkan karena tindakan mengeksekusi opsi akan menyebabkan pemegang opsi kehilangan premi waktu dari opsi tersebut.

2. Variansi harga saham bersifat konstan sepanjang usia opsi dan diketahui

   Jika asumsi di atas tidak terpenuhi, maka model penetapan harga opsi tidak dapat dikembangkan sehingga memungkinkan perubahan variansi. Jika variansi (volattilitas) tidak konstan, maka dapat digunakan pendekatan dengan model *ARCH* (*Autoreressive Conditional Heterocedasticity*), G*ARCH* (*Generalized Autoreressive Conditional Heterocedasticity*), *E-GARCH* (*Exponential Generalized Autoreressive Conditional*

Heterocedasticity) maupun model-model *ARCH* yang lain. Akan tetapi, pada skripsi ini diasumsikan bahwa variansi (volatilitas) bersifat konstan sepanjang usia opsi dan diketahui.

3. Penetapan harga opsi sangat dipengaruhi oleh adanya kerandoman harga saham mengikuti proses Wiener

   Dalam menetapkan model investasi harga opsi saham, diperlukan suatu asumsi mengenai pola pergerakan harga saham di pasar. Asumsi bahwa harga saham di pasar didasarkan pada suatu proses acak yang disebut proses difusi. Dalam proses difusi, harga saham bergerak dari satu harga ke harga lain (mengalami proses lompatan) atau mengalami perubahan, yaitu harga tidak bergerak melalui proses berkesinambungan, namun melompat dari satu harga ke harga yang lainnya dengan melewati sederetan harga. Pola kerandoman ini mengikuti proses Wiener.

4. Tingkat suku bunga bebas risiko

   Model Black-Scholes menggunakan dua asumsi sehubungan dengan tingkat suku bunga bebas risiko. Asumsi pertama yaitu suku bunga pinjaman dan pemberian pinjaman adalah sama. Asumsi kedua yaitu suku bunga bersifat konstan dan diketahui sepanjang usia opsi. Asumsi pertama cenderung tidak berlaku dikarenakan suku bunga pinjaman umumnya lebih besar daripada suku bunga pemberian pinjaman. Sehingga asumsi yang digunakan adalah asumsi kedua.

5. Saham yang mendasari opsi tidak membayarkan dividen (pembagian keuntungan saham) selama usia opsi

Dividen merupakan sebagian keuntungan perusahaan yang dibagikan kepada pemegang saham. Model Black-Scholes digunakan bagi saham yang tidak memberikan dividen selama usia opsi. Apabila saham tersebut membayar dividen, maka akan mengurangi harga opsi sehingga model akan berubah. Opsi saham sebagai instrumen derivatif memiliki sifat berbeda dengan saham yang biasa dikenal. Pemilik efek derivatif ini (opsi) tidak mendapatkan dividen seperti pemegang saham, tetapi hanya bisa mendapatkan keuntungan dari penurunan atau kenaikan harga aset yang melandasinya (*underlying*).

Perubahan dinamis dari aset S_t tanpa pembayaran dividen selama jangka waktu usia opsi dapat dimodelkan sebagai berikut

$$\frac{dS_t}{S} = \mu\, dt + \sigma\, dZ_t$$

$$\int \frac{dS_t}{S} = \int \mu\, dt + \int \sigma\, dZ_t$$

$$\ln S_t = \mu\, t + \sigma\, Z_t$$

$$S_t = \exp\left(\mu\, t + \sigma\, Z_t\right)$$

6. Tidak ada biaya transaksi untuk membeli atau menjual baik saham maupun opsinya

   Model Black-Scholes mengasumsikan tidak terdapat pajak dan biaya transaksi. Model ini dapat dimodifikasi sehingga turut memperhitungkan pajak dan biaya transaksi, namun masalahnya adalah tingkat pajak dan biaya tidak hanya satu. Biaya transaksi meliputi komisi dan penyebaran (*spread*) permintaan dan penawaran bagi saham dan opsi, serta biaya-biaya lain yang berhubungan dengan opsi.

7. Mean dari harga aset S_t berdistribusi lognormal

   Misal didefinisikan: $F = \ln S_t$

   Maka diperoleh:

$$\frac{\partial F}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t}; \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^{\,2}} = -\frac{1}{S_t^{\,2}}; \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0;$$

   Dengan formula Itô pada (2.15) maka persamaan tersebut menjadi

$$dF = \left(S_t\, \mu \frac{1}{S_t} + 0 + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^{\,2}\left(-\frac{1}{S_t^{\,2}} \right) \right) dt + \frac{1}{S_t} S_t\, \sigma\, dZ_t$$

$$dF = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma\, dZ_t$$

   Karena μ dan σ konstan, maka persamaan di atas merupakan perluasan dari proses Wiener. Persamaan tersebut mempunyai nilai mean adalah $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ konstan dan nilai variansinya σ^2. Artinya bahwa perubahan F dalam waktu sekarang t dan waktu yang akan datang T berdistribusi normal dengan mean $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T - t)$ dan variansinya $\sigma^2 (T - t)$.

   Nilai F pada saat t adalah $\ln S_t$ dan nilainya pada saat T adalah $\ln S_T$ dengan S_T adalah harga saham pada saat T. Perubahan harga saham selama interval waktu $(T-t)$ adalah $\ln S_T - \ln S_t$. Dengan demikian, dapat dinyatakan bahwa harga saham mempunyai distribusi lognormal

$$\ln S_T - \ln S_t \sim LOGN\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t),\ \sigma^2(T-t)\right]$$

Di dalam perkembangannya, persamaan *asset* berisiko masih tergantung pada μ. Dengan teorema Girsanov menghasilkan bentuk persamaan *asset* berisiko bebas (*independent*) terhadap μ, namun hanya bergantung pada suku bunga bebas risiko (r). Dengan demikian, berdasarkan uraian di atas dan persamaan (2.37), proses harga saham, S_T, dari suatu *asset* yang bebas risiko diasumsikan mengikuti Proses Wiener yang dapat dituliskan sebagai berikut

$$S_T = S_t \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\, Z_T\right] \qquad (2.57)$$

dengan *r* merupakan tingkat bunga bebas risiko, variabel σ adalah volatilitas dari harga saham, sedangkan Z_T merupakan pola pergerakan harga saham mengikuti proses Wiener.

Dari persamaan (2.57) kemudian akan diselidiki distribusi dari Z_T, diperoleh

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}Z_T$$

$$Z_T = \frac{\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \sim N(0, T-t)$$

Karena $Z_T \sim N(0, T-t)$, maka S_T dapat diartikan sebagai variabel random dengan $S_T = Y = f(Z_T)$, dan $Z_T = x$ sehingga diperoleh

$$f(x) = S_t \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\, x\right] \tag{2.58}$$

F. **Dasar Penetapan Tingkat Volatilitas Harga Saham**

Volatilitas harga saham merupakan satu-satunya parameter yang nilainya tidak diketahui di dalam model investasi dari harga opsi saham. Volatilitas yang dinyatakan dengan σ adalah standar deviasi dari instrumentasi keuangan (dalam hal ini adalah saham) pada periode waktu tertentu. Volatilitas sering digunakan untuk mengukur tingkat risiko dari aset yang digunakan. Tingkat volatilitas berada pada interval yang positif, yaitu antara 0 sampai dengan tak terhingga $(0 \le \sigma \le \infty)$. Tingkat volatilitas yang tinggi menunjukkan bahwa terjadi perubahan harga saham (naik dan turun) sangat cepat. Sedangkan tingkat volatilitas dikatakan rendah jika harga saham tidak mengalami perubahan yang signifikan atau cenderung konstan.

Dalam menetapkan tingkat volatilitas harga saham terdapat dua cara, yaitu:

1. Volatilitas Tersirat

Dalam model penetapan harga opsi terlihat ada suatu hubungan tertentu antara volatilitas dan harga opsi. Ini memberikan petunjuk bahwa jika harga opsi telah diketahui, maka volatilitas dapat ditentukan dengan model penetapan harga opsi tersebut. Volatilitas tersirat juga dapat digunakan sebagai perbandingan terhadap volatilitas historis dengan tujuan untuk mengetahui atau menilai apakah suatu opsi dapat disebut mahal atau murah. Sebagai contoh, jika volatilitas tersirat lebih besar daripada volatilitas historis maka harga opsi tersebut dapat dikatakan mahal. Karena semakin kecil fluktuasi saham maka harga opsi seharusnya semakin rendah.

2. Volatilitas Historis

Volatilitas ini ditentukan dengan menghitung simpangan baku perubahan harga harian atau return harian harga saham. Ada perbedaan tentang jumlah hari yang digunakan untuk menghitung simpangan baku harian. Menurut Hull (2003: 88 – 99) menyarankan untuk menggunakan data 90 – 180 hari yang lalu, sedangkan menurut Fabozzi (2000: 492) menyarankan untuk menggunakan data 10 – 100 hari saja.

BAB III

PEMBAHASAN

B. Model Investasi Harga Saham Tipe Eropa dengan Menggunakan Model Black-Scholes

Model investasi penetapan harga saham model Black-Scholes adalah model yang dikembangkan oleh Fischer Black dan Myron Scholes pada tahun 1973 untuk menilai opsi pada harga saham. Model Black-Scholes merupakan model yang digunakan dalam menetapkan harga suatu opsi saham, yaitu opsi beli (*call option*) dan opsi jual (*put option*) yang dilaksanakan pada waktu jatuh tempo (tanggal kadaluarsanya).

1. Model Investasi Harga Opsi Beli Tipe Eropa dengan Model Black-Scholes

Model penetapan harga opsi beli tipe Eropa dapat ditentukan dengan cara menurunkan bentuk model harga saham Black-Scholes ke dalam model harga opsi saham berdasarkan nilai intrinsiknya. Untuk memodelkan investasi opsi saham, perlu dilakukan pemisalan-pemisalan dari faktor-faktor yang terkait dengan rumus/lambang Matematika. Hal ini bertujuan untuk dapat mengetahui atau mengenali sifat-sifatnya dan keterkaitan dengan unsur-unsurnya serta dalam hal menarik kesimpulan tentang model yang diamati lebih lanjut. Pembahasan perumusan model investasi opsi beli tipe Eropa sebagai berikut:

Misal, S_T adalah harga saham pada saat jatuh tempo, K adalah harga saham yang ditetapkan atau harga pelaksanaan, dan T adalah waktu jatuh tempo. Jika harga saham pada saat jatuh tempo lebih besar daripada harga pelaksanaan atau $S_T > K$, maka besar keuntungan yang diperoleh yaitu $S_T - K$. Sebaliknya, jika $K \geq S_T$ maka pemegang opsi beli tidak memperoleh keuntungan atau keuntungan yang diperoleh adalah nol. Dengan demikian, diperoleh

$$C = \begin{cases} S_T - K & ; jika\, S_T > K \\ 0 & ; jika\, S_T \leq K \end{cases}$$

sehingga

$$C = maks(0,\ S_T - K)$$

dengan C adalah harga opsi beli pada waku jatuh tempo, S_T adalah harga saham, dan K adalah harga pelaksanaan.

Ekspektasi dari C adalah

$$E[C] = E[maks(0,\ S_T - K)]$$

Dalam menganalisa saham turunan seperti opsi digunakan penilaian dengan asumsi risiko netral. Harga saham, waktu, volatilitas saham, dan bunga bebas risiko tidak tergantung pada risiko. Risiko netral dari ekspektasi *return* semua saham merupakan bunga bebas risiko (r). Hal ini disebabkan karena investor dengan risiko netral tidak membutuhkan biaya dan juga menunjukkan bahwa harga opsi saham saat ini yang tidak berisiko (netral) diperoleh dengan penyesuaian nilai ekspektasi dari nilai bebas risiko. Nilai ekspektasi disesuaikan untuk waktu saat ini dengan nilai penyesuaian r. Harga opsi pada waktu t adalah sama dengan nilai ekspektasi dari harga opsi pada saat T dengan dipengaruhi bunga bebas risiko (r). Dengan asumsi risiko netral di atas, maka harga suatu opsi merupakan nilai ekspektasi pada waktu t dimana $t < T$, dengan risiko netral dan penyesuaiannya merupakan bunga bebas risiko. Sehingga model investasi dari harga opsi beli tipe Eropa dengan menggunakan Model Black-Scholes dipengaruhi oleh asumsi saham tidak membayarkan dividen, secara umum persamaannya adalah

$$C_t = \exp[-r(T-t)]E[maks(0,\ S_T - K)]$$

Model harga opsi beli tipe Eropa model Black-Scholes dengan harga saham (S_T), harga pelaksanaan (K), tingkat bunga bebas risiko (r), dan waktu jatuh tempo (T) pada saat $t = 0$ adalah

$$C_0 = \exp(-rT)E[maks(0,\ S_T - K)] = \exp(-rT)E\left[(S_T - K)^+\right] \qquad (3.1)$$

Kemudian, $(S_T - K)^+ = \left[S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\,\frac{Z_T}{\sqrt{T}} - K\right)^+\right] = g\left(\frac{Z_T}{\sqrt{T}}\right)$

Diketahui $Z_T \sim N(0,T)$, maka $\frac{Z_T}{\sqrt{T}} \sim N(0,1)$. Jadi, untuk menghitung nilai ekspektasi dari persamaan (2.57), dapat kita gunakan persamaan (2.46) dengan $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ dan $X = \frac{Z_T}{\sqrt{T}}$ sehingga diperoleh

$$E\left[(S_T - K)^+\right] = E\left[g\left(\frac{Z_T}{\sqrt{T}}\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\,\frac{Z_T}{\sqrt{T}} - K\right)\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy \qquad (3.2)$$

Untuk

$$
\begin{aligned}
g(y) \geq 0 &\Leftrightarrow S_0 \ \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\,y\right) \geq K \\
&\Leftrightarrow \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\,y \geq \ln\left(\frac{K}{S_0}\right) \\
&\Leftrightarrow y \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \\
&\Leftrightarrow y \geq -\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \approx -d_2
\end{aligned}
$$

Ketika $g(y) \geq 0$ maka $y \geq -d_2$ sehingga batas bawah integral tersebut pada persamaan (3.2) dapat diganti dengan $-d_2$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
E\left[(S_T - K)^+\right] &= \int_{-d_2}^{\infty} \left[S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\,y - K\right)\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\
&= \int_{-d_2}^{\infty} S_0 \ \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\,y\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\
&\quad - \int_{-d_2}^{\infty} K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy
\end{aligned}
$$

Untuk menyelesaikan persamaan di atas,

Misal $\quad A = \int_{-d_2}^{\infty} S_0 \ \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\,y\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$

$$
B = \int_{-d_2}^{\infty} K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy
$$

Penyelesaian dari A diperoleh

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-d_2}^{\infty} S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\,y\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy \\
&= \int_{-d_2}^{\infty} S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\,y - \frac{y^2}{2}\right)dy \\
&= S_0 \exp(rT)\int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(y - \sigma\sqrt{T}\right)^2\right)dy
\end{aligned}
$$

Misalkan $v = y - \sigma\sqrt{T}$

$y = -d_2 \Rightarrow v = -d_2 - \sigma\sqrt{T} \approx -d_1$; $\qquad y = \infty \Rightarrow v = \infty$

sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
A &= S_0 \exp(rT)\int_{-d_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)dv \\
&= S_0 \exp(rT)\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)dv - \int_{-\infty}^{-d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)dv\right] \\
&= S_0 \exp(rT)\left(1 - N\left(-d_1\right)\right) \\
&= S_0 \exp(rT)N(d_1)
\end{aligned}
$$

Penyelesaian dari B diperoleh

$$
\begin{aligned}
B &= \int_{-d_2}^{\infty} K \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy \\
&= K\int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy \\
&= K\left(1 - N\left(-d_2\right)\right) \\
&= KN(d_2)
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, formula model untuk harga opsi beli tipe Eropa Model Black-Scholes adalah

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \exp(-rT)E\left[(S_T - K)^+\right] \\
&= \exp(-rT)\{A - B\} \\
&= \exp(-rT)\{S_0 \exp(rT)N(d_1) - KN(d_2)\} \\
&= S_0 N(d_1) - K\exp(-rT)N(d_2)
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

dengan

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ dan}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

2. Model Investasi Harga Opsi Jual Tipe Eropa dengan Model Black-Scholes

Seperti pada pembahasan penetapan harga opsi beli, model penetapan harga opsi jual tipe Eropa juga dapat ditentukan dengan cara menurunkan bentuk model harga saham Black-Scholes ke dalam model harga opsi saham berdasarkan nilai intrinsiknya. Pembahasan perumusan model investasi opsi jual tipe Eropa sebagai berikut:

Misal, S_T adalah harga saham pada saat jatuh tempo, K adalah harga saham yang ditetapkan atau harga pelaksanaan, dan T adalah waktu jatuh tempo. Jika harga saham pada saat jatuh tempo lebih kecil daripada harga saham yang telah ditentukan (harga pelaksanaan) atau $S_T < K$, maka keuntungan yang diperoleh sebesar $K - S_T$. Sebaliknya, jika $S_T \geq K$ maka pemegang opsi jual tipe Eropa tidak melakukan haknya sehingga keuntungannya adalah nol. Dengan demikian, diperoleh

$$P = \begin{cases} K - S_T & ;\, jika\, S_T < K \\ 0 & ;\, jika\, S_T \geq K \end{cases}$$

sehingga

$$P = maks(0,\ K - S_T)$$

dengan P adalah harga opsi jual pada waktu jatuh tempo, K adalah harga pelaksanaan, dan S_T adalah harga saham.

Ekspektasi dari P adalah

$$E[P] = E[maks(0,\ K - S_T)]$$

Penetapan harga opsi saham dipengaruhi oleh waktu t, dimana t adalah waktu sampai jatuh tempo $(t < T)$. Harga opsi pada waktu t adalah sama dengan nilai ekspektasi dari harga opsi pada saat T dengan dipengaruhi bunga bebas risiko (r). Sehingga model investasi dari harga opsi jual tipe Eropa dengan menggunakan Model Black-Scholes dipengaruhi oleh asumsi saham tidak membayarkan dividen, secara umum persamaannya adalah

$$P_t = \exp[-r(T - t)]E[maks(0,\ K - S_T)]$$

Model harga opsi jual tipe Eropa model Black-Scholes dengan harga saham (S_T), harga pelaksanaan (K), tingkat bunga bebas risiko (r), dan waktu jatuh tempo (T) pada saat $t = 0$ adalah

$$P_0 = \exp(-rT)E[maks(0,\ \ K - S_T)] = \exp(-rT)E\left[(K - S_T)^+\right] \qquad (3.4)$$

Kemudian analog seperti pembahasan pada penetapan model harga opsi beli, sehingga diperoleh

$$E\left[(K-S_T)^+\right]=E\left[g\left(\frac{Z_T}{\sqrt{T}}\right)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[K-S_0\,\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}\,\frac{Z_T}{\sqrt{T}}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy \quad (3.5)$$

Untuk

$$g(y)\geq 0 \Leftrightarrow K\geq S_0\,\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}\,y\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{K}{S_0}\right)\geq\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}\,y$$

$$\Leftrightarrow y\leq\frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$\Leftrightarrow y\leq-\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\approx -d_2$$

Ketika $g(y)\geq 0$ maka $y\leq -d_2$ sehingga batas atas integral tersebut pada persamaan (3.5) dapat diganti dengan $-d_2$, sehingga diperoleh

$$E\left[(K-S_T)^+\right]=\int_{-\infty}^{-d_2}\left[K-S_0\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}\,y\right)\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{-d_2}K\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$-\int_{-\infty}^{-d_2}S_0\,\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}\,y\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy \qquad -$$

Untuk menyelesaikan persamaan di atas,

Misal $\quad A = \int_{-\infty}^{-d_2} K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$

$$B = \int_{-\infty}^{-d_2} S_0 \ \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\,y\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

Penyelesaian dari A diperoleh

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^{-d_2} K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\ &= K \int_{-\infty}^{-d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\ &= KN(-d_2) \end{aligned}$$

Penyelesaian dari B diperoleh

$$\begin{aligned} B &= \int_{-\infty}^{-d_2} S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\,y\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{-d_2} S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\,y - \frac{y^2}{2}\right) dy \\ &= S_0 \exp(rT) \int_{-\infty}^{-d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(y - \sigma\sqrt{T}\right)^2\right) dy \end{aligned}$$

Misalkan $v = y - \sigma\sqrt{T}$

$y = -d_2 \Rightarrow v = -d_2 - \sigma\sqrt{T} \approx -d_1$; $\qquad\qquad y = \infty \Rightarrow v = \infty$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} B &= S_0 \exp(rT) \int_{-\infty}^{-d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv \\ &= S_0 \exp(rT) N(-d_1) \end{aligned}$$

Dengan demikian, formula model untuk harga opsi jual tipe Eropa Model Black-Scholes adalah

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \exp(-rT)E\left[(K - S_T)^+\right] \\
&= \exp(-rT)\{A - B\} \\
&= \exp(-rT)\{KN(-d_2) - S_0 \exp(rT)N(-d_1)\} \\
&= K\exp(-rT)N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

dengan

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ dan}$$

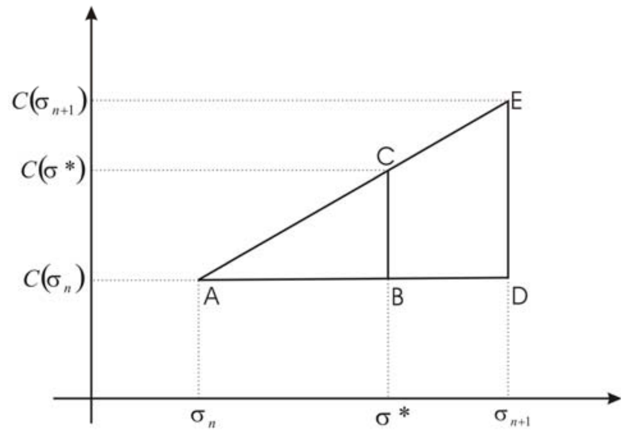
$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Pada bahasan sebelumnya, telah diperoleh formula opsi beli, sehingga model harga opsi jual tipe Eropa pada saat t = 0 dapat ditentukan dengan menggunakan hubungan kesamaan opsi jual dan opsi beli, yaitu

$$
\begin{aligned}
C_t - P_t &= S_T - K\exp(-rT) \\
P_t &= C_t - S_T + K\exp(-rT) \\
P_0 &= C_0 - S_0 + K\exp(-rT) \\
&= S_0 N(d_1) - K\exp(-rT)N(d_2) - S_0 + K\exp(-rT) \\
&= K\exp(-rT)[1 - N(d_2)] - S_0[1 - N(d_1)] \\
&= K\exp(-rT)N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

C. Penaksir Tingkat Volatilitas Tersirat Harga Saham

Implied or implicit volatility atau volatilitas tersirat merupakan metode untuk menaksir tingkat volatilitas yang berdasarkan harga opsi, harga saham, harga pelaksanaan, tingkat suku bunga, dan waktu jatuh tempo opsi. Salah satu cara untuk menaksir volatilitas adalah *metode interpolasi linier.*



Gambar 3.1 Interpolasi Linier sifat 2 segitiga

Berdasarkan sifat 2 segitiga ABC dan ADE di atas, diperoleh :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$$

sehingga diperoleh persamaan :

$$\frac{\sigma_{n+1} - \sigma *}{\sigma_{n+1} - \sigma_n} = \frac{C(\sigma_{n+1}) - C(\sigma *)}{C(\sigma_{n+1}) - C(\sigma_n)} \tag{3.8}$$

dengan

$\sigma *$	: volatilitas tersirat yang dicari
σ_n	: volatilitas perkiraan ke-*n*
σ_{n+1}	: volatilitas perkiraan ke- $n+1$
$C(\sigma *)$	: harga opsi beli pada volatilitas yang dicari
$C(\sigma_n)$	: harga opsi beli pada saat volatilitas ke-*n*
$C(\sigma_{n+1})$	: harga opsi beli pada saat volatilitas ke- $n+1$

Diberikan suatu kasus sebagai berikut:

Diketahui harga opsi beli saham MSFT pada tanggal 30 Desember 2008 adalah \$2,85, dengan harga saham \$19,10, harga pelaksanaan \$17,50, tingkat suku bunga Amerika pada saat itu 4,25%, dan batas waktu opsi sampai 17 April 2009 (108 hari). Dengan menggunakan rumus Black-Scholes diperoleh :

Tabel 3.1 Volatilitas dan Harga Opsi Beli

Volatilitas	**Harga opsi beli**
0,40	2,648509
0,45	2,826796
0,50	3,008162

Dengan menggunakan metode interpolasi diperoleh:

$$\frac{0{,}50-\sigma^*}{0{,}50-0{,}45}=\frac{3{,}008162-2{,}85}{3{,}008162-2{,}826796}$$

$$\frac{0{,}50-\sigma^*}{0.05}=0{,}872059$$

$$\sigma^*=0{,}50-0{,}043603=0{,}456397$$

Jadi, dengan menggunakan metode interpolasi linier diperoleh nilai *implied volatility* dari harga opsi beli saham MSFT pada tanggal 30 Desember 2008 sebesar \$2,85 adalah 0,456397 $\approx 45{,}64\%$.

D. Penaksir Tingkat Volatilitas Historis Harga Saham

Metode yang digunakan dalam menaksir tingkat volatilitas historis harga saham yang berkaitan dengan opsi adalah dengan menganalisis harga-harga saham masa lalu. Pada awalnya, sejumlah $n+1$ harga saham yang bersangkutan harus diketahui dengan baik melalui publikasi finansial atau database komputer. Harga-harga tersebut kemudian digunakan untuk menghitung sejumlah n *return* (tingkat keuntungan yang diperoleh dari akibat melakukan investasi) yang dimajemukkan secara kontinu sebagai berikut

$$R_t = \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \tag{3.9}$$

dengan S_T merupakan harga saham pada waktu T dan S_t merupakan harga saham pada waktu t.

Setelah menghitung *return* dari harga saham, kemudian menaksir *return* rata-rata harga saham

$$\overline{R}_t = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} R_t \tag{3.10}$$

Return rata-rata harga saham kemudian digunakan untuk menaksir variansi tiap periode, yaitu

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left(R_t - \overline{R}_t\right)^2 \tag{3.11}$$

disebut variansi per periode karena besarnya tergantung pada jangka waktu ketika *return* diukur. Variansi yang diperlukan adalah variansi tahunan sehingga variansi tahunan diperoleh dengan mengalikan variansi per periode dengan jumlah periode dalam satu tahun, diperoleh sebagai berikut

$$s = \sqrt{(\textit{jumlah hari perdagangan})\, x\, \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left(R_t - \overline{R}_t\right)^2} \tag{3.12}$$

Jumlah hari yang digunakan dalam persamaan di atas juga mempunyai perbedaan. Menurut Fabozzi (2000: 492) menyatakan bahwa biasanya jumlah hari yang digunakan adalah 250, 260 atau 365 hari. Untuk penggunaan angka 250 dan 260 hari, karena ia mengacu pada jumlah hari perdagangan yang digunakan bagi opsi-opsi tertentu di pasar saham. Sedangkan, menurut Hull (2003: 90) menyatakan cukup 250 hari saja.

Adanya perbedaan dalam memilih jumlah hari ini menyebabkan seorang manager keuangan harus mengambil keputusan tersendiri tentang

1. jumlah hari yang digunakan untuk menghitung simpangan baku *return* harian harga saham.
2. jumlah hari dalam setahun yang digunakan untuk menghitung volatilitas tahunan.

Akibatnya, perhitungan volatilitas historis dapat memberikan nilai yang berbeda-beda, sehingga umumnya jumlah hari yang digunakan adalah 250 hari atau jumlah hari perdagangan yang digunakan bagi opsi-opsi tertentu di pasar saham.

E. Penaksir Parameter

Metode Penaksir Maksimum Likelihood adalah metode yang paling popular dalam menghasilkan taksiran. Oleh karena itu, untuk menaksir mean dan variansi dari *return* harga saham dilakukan dengan menggunakan Metode Penaksir Maksimum Likelihood.

Diketahui:

$$R_t = \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\,Z_T \qquad (3.13)$$

Misalkan

$$\mu\Delta t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$$

$$\sigma\Delta t = \sigma\sqrt{T-t}$$

$$\mu\Delta t = \mu_b \tag{3.14}$$

$$\sigma\sqrt{\Delta t} = \sigma_b \tag{3.15}$$

maka persamaan (3.13) menjadi

$$R_t = \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_T$$

$$R_t = \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = \mu_b + \sigma_b\, Z_T$$

atau

$$R_t = \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \sim N\left(\mu_b, \sigma_b{}^2\right)$$

dengan μ_b dan $\sigma_b{}^2$ keduanya tidak diketahui.

Dalam hal ini dimisalkan, $\theta = \left(\mu_b, \sigma_b{}^2\right)$

$$\begin{aligned}
f\left(R_t \mid \theta\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\left(R_t-\mu_b\right)^2}{\sigma_b{}^2}\right] \\
f\left(R_t \mid \theta\right) &= f\left(R_1, R_2, \ldots, R_n \mid \theta\right) \\
&= \prod_{t=1}^{n} f\left(R_t \mid \theta\right) \\
&= \prod_{t=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\left(R_t-\mu_b\right)^2}{\sigma_b{}^2}\right] \\
&= \frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{n}{2}}\sigma_b{}^n}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{t=1}^{n}\left(R_t-\mu_b\right)^2}{\sigma_b{}^2}\right]\right)
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan Fungsi Likelihood, maka diperoleh

$$L(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \left(\sigma_b{}^2\right)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{\sum_{t=1}^{n} (R_t - \mu_b)^2}{\sigma_b{}^2} \right] \right)$$

$$\ln L(\theta) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma_b{}^2 - \frac{1}{2} \frac{\sum_{t=1}^{n} (R_t - \mu_b)^2}{\sigma_b{}^2}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.54), maka turunan pertama dari persamaan di atas terhadap μ_b dan σ_b menghasilkan persamaan berikut:

(1) $$\frac{d}{d\mu_b} \ln L(\theta) = -\frac{1}{2}(2) \left[\frac{\sum_{t=1}^{n} (R_t - \mu_b)}{\sigma_b{}^2} \right] (-1) = 0$$

$$\frac{\sum_{t=1}^{n} (R_t - \hat{\mu}_b)}{\sigma_b{}^2} = 0 \qquad (persamaan\, Likelihood)$$

$$\sum_{t=1}^{n} (R_t - \hat{\mu}_b) = 0$$

$$\sum_{t=1}^{n} R_t - n\hat{\mu}_b = 0$$

$$\hat{\mu}_b = \frac{\sum_{t=1}^{n} R_t}{n} = \overline{R}_t \qquad (3.16)$$

(2) $$\frac{d}{d\sigma_b} \ln L(\theta) = -\frac{n}{2\sigma_b{}^2} + \frac{1}{2} \frac{\sum_{t=1}^{n} (R_t - \mu_b)^2}{\left(\sigma_b{}^2\right)^2} = 0$$

$$-n\hat{\sigma}_b{}^2 + \sum_{t=1}^{n} (R_t - \mu_b)^2 = 0 \qquad (persamaan\ Likelihood)$$

$$n\hat{\sigma}_b{}^2 = \sum_{t=1}^{n} (R_t - \mu_b)^2$$

$$\sigma_b{}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} (R_t - \mu_b)^2}{n} \qquad (3.17)$$

Dari penyelesaian persamaan (3.16) dan (3.17) diperoleh $\hat{\mu}_b = \overline{R}_t$ dan $\hat{\sigma}_b^{\,2} = \dfrac{\sum_{t=1}^{n}(R_t - \mu_b)^2}{n}$ adalah PML dari $\theta = \left(\mu_b, \sigma_b^{\,2}\right)$.

Dengan demikian, diperoleh

$$R_t \sim N\left(\mu_b, \sigma_b^{\,2}\right)$$
$$\overline{R}_t \sim N\left(\mu_b, \frac{\sigma_b^{\,2}}{n}\right)$$

$$E(R_t) = \mu_b \tag{3.18}$$
$$Var(R_t) = \sigma_b^{\,2} \tag{3.19}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.42) akan dicari $E\left(R_t^{\,2}\right)$, maka

$$Var(R_t) = E\left(R_t^{\,2}\right) - \left[E(R_t)\right]^2$$
$$\sigma_b^{\,2} = E\left(R_t^{\,2}\right) - \mu_b^{\,2}$$
$$E\left(R_t^{\,2}\right) = \mu_b^{\,2} + \sigma_b^{\,2} \tag{3.20}$$

Kemudian

$$E\left(\overline{R}_t\right) = E\left(\frac{\sum_{t=1}^{n} R_t}{n}\right) = \frac{\sum_{t=1}^{n} E(R_t)}{n} = \frac{n\mu_b}{n} = \mu_b \tag{3.21}$$

$$Var\left(\overline{R}_t\right) = Var\left(\frac{\sum_{t=1}^{n} R_t}{n}\right) = \frac{\sum_{t=1}^{n} Var(R_t)}{n^2} = \frac{n\sigma_b^{\,2}}{n^2} = \frac{\sigma_b^{\,2}}{n} \tag{3.22}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.42) akan dicari $E\left(\overline{R}_t^{\,2}\right)$, maka

$$Var\left(\overline{R}_t\right) = E\left(\overline{R}_t^{\,2}\right) - \left[E\left(\overline{R}\right)\right]^2$$

$$\frac{\sigma_b^{\,2}}{n} = E\left(\overline{R}_t^{\,2}\right) - \mu_b^{\,2}$$

$$E\left(\overline{R}_t^{\,2}\right) = \mu_b^{\,2} + \frac{\sigma_b^{\,2}}{n} \qquad (3.23)$$

Dari persamaan (3.16), diketahui $\hat{\mu}_b = \overline{R}_t$ dan karena dari persamaan (3.14) dimisalkan $\mu\Delta t = \mu_b$, maka $\hat{\mu}\Delta t = \hat{\mu}_b$, sehingga diperoleh

$$\hat{\mu}\Delta t = \overline{R}_t$$

$$\hat{\mu} = \frac{\overline{R}_t}{\Delta t} \qquad (3.24)$$

Akan diselidiki apakah PML bias atau tidak.

$$E\left(\hat{\mu}_b\right) = E\left(\overline{R}_t\right) = \mu_b$$

$$E\left(\hat{\mu}\Delta t\right) = E\left(\hat{\mu}_b\right) = \mu_b = \mu\Delta t$$

$$\left(\Delta t\right)E\left(\hat{\mu}\right) = \mu\Delta t$$

$$E\left(\hat{\mu}\right) = \mu \qquad (3.25)$$

Karena $E\left(\hat{\mu}\right) = \mu$ maka $\hat{\mu} = \dfrac{\overline{R}_t}{\Delta t}$ merupakan PML tak bias dari μ .

Selanjutnya, dari persamaan (3.17), diketahui $\hat{\sigma}_b^{\,2} = \dfrac{\sum_{t=1}^{n}\left(R_t - \mu_b\right)^2}{n}$, dan karena dari persamaan (3.15), dimisalkan $\sigma\sqrt{\Delta t} = \sigma_b$, maka $\hat{\sigma}\sqrt{\Delta t} = \hat{\sigma}_b$ atau $\hat{\sigma}^2\Delta t = \hat{\sigma}_b^{\,2}$, maka diperoleh

$$\hat{\sigma}^2\Delta t = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left(R_t - \mu_b\right)^2}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\Delta t}\frac{\sum_{t=1}^{n}\left(R_t - \mu_b\right)^2}{n} \qquad (3.26)$$

Kemudian akan diselidiki apakah PML bias atau tidak.

$$E\left(\hat{\sigma}^2\right) = E\left[\frac{\sum_{t=1}^{n}\left(R_t - \mu_b\right)^2}{n}\right]$$

$$= \frac{E\left[\sum_{t=1}^{n}\left(R_t - \mu_b\right)^2\right]}{n}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{n} E\left(R_t^{\ 2}\right) - nE\left(\overline{R_t}^{\ 2}\right)}{n} \tag{3.27}$$

Substitusikan persamaan (3.20) dan (3.23) ke persamaan (3.27), diperoleh

$$E\left(\hat{\sigma}^2\right) = \frac{n\left(\mu_b^{\ 2} + \sigma_b^{\ 2}\right) - n\left(\mu_b^{\ 2} + \frac{\sigma_b^{\ 2}}{n}\right)}{n}$$

$$= \mu_b^{\ 2} + \sigma_b^{\ 2} - \mu_b^{\ 2} - \frac{\sigma_b^{\ 2}}{n}$$

$$= \sigma_b^{\ 2} - \frac{\sigma_b^{\ 2}}{n} \tag{3.28}$$

Substitusikan persamaan (3.15) ke persamaan (3.28), sehingga diperoleh

$$E\left(\hat{\sigma}^2 \Delta t\right) = \sigma_b^{\ 2}\Delta t - \frac{\sigma_b^{\ 2}\Delta t}{n}$$

$$\left(\Delta t\right)E\left(\hat{\sigma}^2\right) = \left(\Delta t\right)\left[\sigma_b^{\ 2} - \frac{\sigma_b^{\ 2}}{n}\right]$$

$$E\left(\hat{\sigma}^2\right) = \left(\sigma_b^{\ 2} - \frac{\sigma_b^{\ 2}}{n}\right) \tag{3.29}$$

Karena $E\left(\hat{\sigma}^2\right) \neq \sigma^2$, maka PML bias dengan bentuk bias

$$bias\left(\hat{\sigma}^2\right) = E\left(\hat{\sigma}^2\right) - \sigma^2 = -\frac{\sigma_b^{\ 2}}{n}$$

Supaya tak bias, maka bentuk taksiran tak bias dari σ^2 adalah

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2$$

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{\Delta t}\right)\left[\frac{\sum_{t=1}^{n}(R_t - \mu_b)^2}{n}\right] \Leftrightarrow s^2 = \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{\sum_{t=1}^{n}(R_t - \mu_b)^2}{n-1}\right] \qquad (3.30)$$

Kemudian, akan diselidiki persamaan (3.30) bias atau tidak.

$$\begin{aligned} E(s^2) &= \frac{n}{n-1}E(\hat{\sigma}^2) \\ &= \frac{n}{n-1}\left(\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}\right) \\ &= \frac{n}{n-1}\left(\frac{(n-1)\sigma^2}{n}\right) \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Karena $E(s^2) = \sigma^2$, maka s^2 merupakan PML tak bias.

Dengan demikian, untuk menghitung nilai volatilitas harga saham digunakan rumus

$$s^2 = \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{\sum_{t=1}^{n}(R_t - \mu_b)^2}{n-1}\right] \quad ; \Delta t = \frac{1}{jumlah\, hari\ perdagangan}$$

$$= \frac{1}{1/\ jumlah\, hari\ perdagangan}\left[\frac{\sum_{t=1}^{n}(R_t - \mu_b)^2}{n-1}\right]$$

$$= \sqrt{(jumlah\, hari\ perdagangan)\left[\frac{\sum_{t=1}^{n}(R_t - \mu_b)^2}{n-1}\right]} \qquad (3.31)$$

Data pada Lampiran I merupakan data penutupan harga saham Microsoft Corporation (MSFT) pada periode 2 Januari sampai 30 Desember 2008, yaitu sebanyak 252 data. Akan ditentukan nilai volatilitas dari harga saham tersebut.

Dengan menggunakan persamaan (3.31), diperoleh

$$s^2 = \sqrt{(jumlah\, hari\ perdagangan)\left[\frac{\sum_{t=1}^{n}(R_t - \mu_b)^2}{n-1}\right]}$$

$$s^2 = \sqrt{(252)\left[\frac{\sum_{t=1}^{251}(R_t - (\text{-}0.002437951))^2}{251-1}\right]} \quad = \sqrt{(252)\left[\frac{0.229786024}{250}\right]}$$

$$s^2 = \sqrt{0.231624312}$$

$$s = 0.481273635 \approx 48{,}13\%$$

Jika dibandingkan dengan tingkat volatilitas tersirat yang telah diperoleh pada pembahasan sebelumnya, yaitu diperoleh volatilitas tersirat (45,64%) lebih kecil daripada volatilitas historis (48,13%), maka harga opsi beli pada tanggal 30 Desember 2008 dengan harga saham \$19,10, harga pelaksanaan \$17,50, suku bunga Amerika pada saat itu sebesar 4,25%, dan usia opsi sampai tanggal 17 April 2009 (108 hari), dapat dikatakan murah dan opsi tersebut baik untuk dibeli.

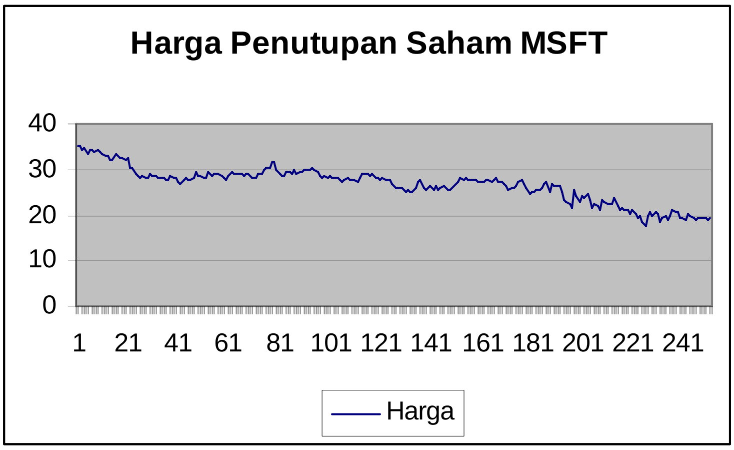
F. Aplikasi Model Investasi Harga Saham Tipe Eropa dengan Menggunakan Model Black-Scholes

Pada aplikasi model investasi harga saham tipe Eropa dengan menggunakan model Black-Scholes ini, penulis mencoba menerapkannya pada saham Microsoft Corporation yang disimbolkan dengan saham MSFT. Ada tiga pemasalahan yang akan dibahas dalam aplikasi model ini. Pertama, bagaimanakah penetapan model harga saham tipe Eropa dengan menggunakan Model Black-Scholes sehingga dapat memprediksi harga opsi saham pada waktu jatuh tempo dan dapat memberikan rekomendasi bagi para investor? Kedua, pada aplikasi model ini, akan diselidiki adakah pengaruh pada harga opsi saham tipe Eropa jika salah satu faktor *inputs* yang bersangkutan dinaikkan, sedangkan faktor yang lain tetap? Kemudian ketiga, bagaimanakah analisis keuntungan dan kerugian investor?

Data pada studi kasus ini merupakan data penutupan harga saham Microsoft Corporation (MSFT) yang dikumpulkan dalam frekuensi harian (kecuali hari libur dan *non trading days*) pada periode 2 Januari sampai dengan 30 Desember 2008 dengan total pengamatan sebanyak 252 data. Data diambil dari www.finance.yahoo.com (Lihat Lampiran I).

Berdasarkan informasi data tersebut akan ditentukan: bagaimanakah penetapan model harga saham tipe Eropa dengan menggunakan Model Black-Scholes sehingga dapat memprediksi harga opsi saham pada waktu jatuh tempo dan dapat memberikan rekomendasi bagi para investor?

Data penutupan harga saham Microsoft Corporation (MSFT) pada Lampiran I dapat ditunjukkan melalui gambar berikut:

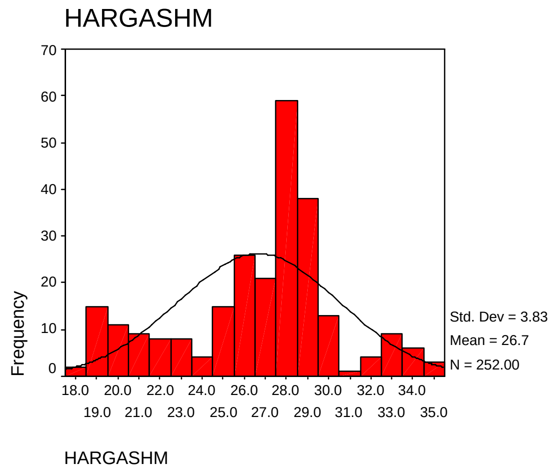


Gambar 3.2 Grafik Garis Data Penutupan Harga Saham Microsoft Corporation Periode 2 Januari sampai 30 Desember 2008

Dari gambar (3.2) di atas, telihat bahwa pergerakan harga saham Microsoft Corporation (MSFT) mengalami penurunan dari harga US$35,22 (pada tanggal 2 Januari 2008) sampai US$19,10 (pada tanggal 30 Desember 2008).

Sebelum dilakukan pengolahan data, terlebih dahulu ditentukan apakah data hasil pengamatan (Lihat Lampiran I) sudah berdistribusi normal ataukah belum?

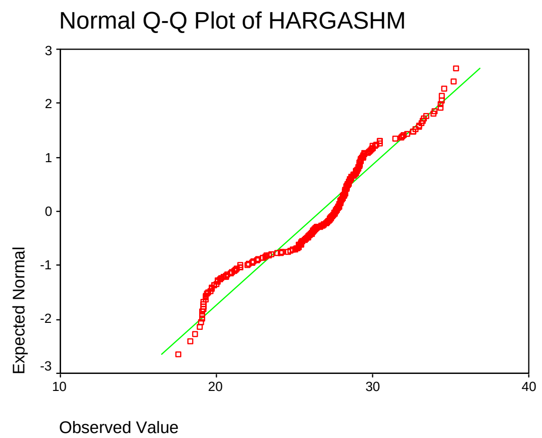
Kenormalan data penutupan harga saham pada Lampiran I dapat ditunjukkan melalui gambar berikut:



Gambar 3.3 Histogram dan Kurva Distribusi Normal Data Penutupan Harga Saham Microsoft Corporation Periode 2 Januari sampai 30 Desember 2008

Dari gambar (3.3) di atas, terlihat bahwa data tidak berdistribusi normal. Hal ini terlihat dari sebaran data yang ditunjukkan oleh bentuk histogram yang masih belum teratur dengan kurva normal.

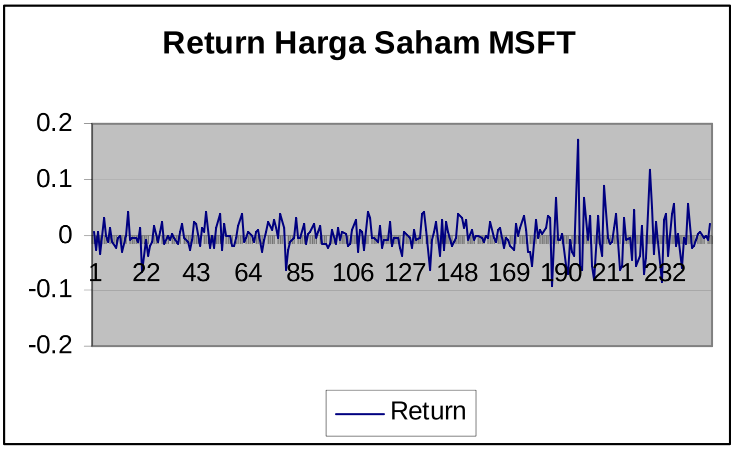
Selain menggunakan gambar (3.3), kenormalan data juga dapat ditunjukkan dengan menggunakan plot normal Q-Q sebagai berikut:



Gambar 3.4 Plot Normal Q-Q Data Penutupan Harga Saham Microsoft Corporation Periode 2 Januari sampai 30 Desember 2008

Dari gambar (3.4) di atas, terlihat bahwa sebaran data pada plot normal Q-Q tidak berkumpul atau mendekati garis regresi dugaan dan cenderung menjauhi garis tersebut (menyebar). Sehingga data dapat dikatakan tidak berdistribusi normal. Hal ini juga terlihat berdasakan hasil uji kenormalan data dengan uji Kolmogorov-Smirnov (Lihat Lampiran VI), menunjukkan bahwa data penutupan harga saham MSFT tidak berdistribusi normal. Oleh karena itu, perlu dilakukan transformasi data dengan menggunakan transformasi *return*, $R_t = \ln \dfrac{S_t}{S_{t-1}}$, sehingga data tersebut berdistribusi normal.

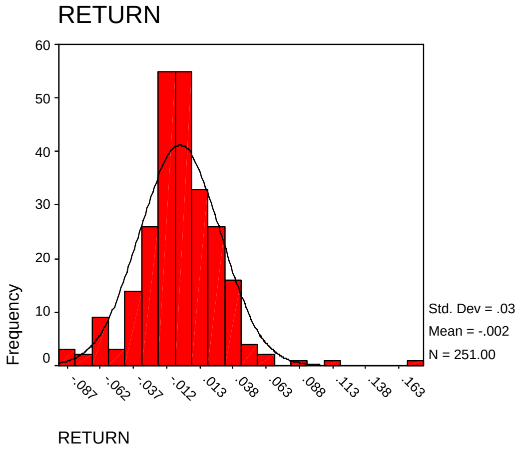
Setelah dilakukan transformasi *return*, data *return* harga saham Microsoft Corporation (MSFT) dapat ditunjukkan melalui gambar berikut:



Gambar 3.5 Grafik Garis Data *Return* Harga Saham Microsoft Corporation Periode 2 Januari sampai 30 Desember 2008

Dari gambar (3.5) di atas, telihat bahwa rataan data *return* harga saham berada di sekitar nol, sehingga data telah stasioner dan dapat dikatakan data berdistribusi normal.

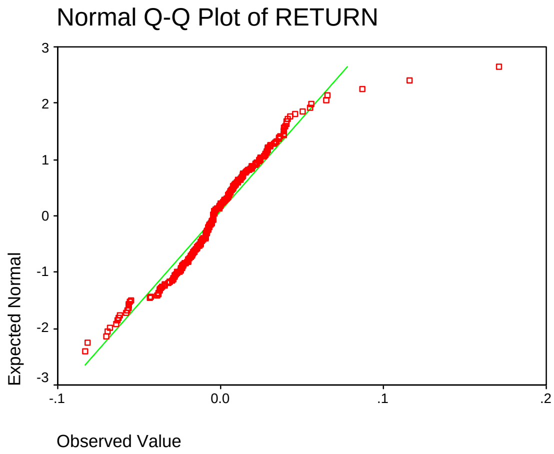
Kenormalan data *return* harga saham pada Lampiran I dapat ditunjukkan melalui gambar berikut:



Gambar 3.6 Histogram dan Kurva Distribusi Normal Data *Return* Harga Saham Microsoft Corporation Periode 2 Januari sampai 30 Desember 2008

Dari gambar (3.6) di atas, terlihat bahwa data berdistribusi normal. Hal ini terlihat dari sebaran data yang ditunjukkan oleh bentuk histogram yang sudah teratur dengan kurva normal (berada di dalam kurva normal).

Selain menggunakan gambar (3.6), kenormalan data juga dapat ditunjukkan dengan menggunakan plot normal Q-Q sebagai berikut:



Gambar 3.7 Plot Normal Q-Q Data *Return* Harga Saham Microsoft Corporation Periode 2 Januari sampai 30 Desember 2008

Dari gambar (3.7) juga terlihat bahwa data berdistribusi normal. Hal ini ditunjukkan oleh sebaran data pada plot normal Q-Q berkumpul atau berada di sekitar garis regresi dugaan. Hal ini juga terlihat berdasakan hasil uji kenormalan data dengan uji Kolmogorov-Smirnov (Lihat Lampiran VII), menunjukkan bahwa data *return* harga saham MSFT berdistribusi normal.

Setelah data berdistribusi normal, maka proses selanjutnya adalah mengaplikasikan model yang telah diperoleh pada bahasan sebelumnya terhadap data pengamatan untuk memprediksi harga opsi saham pada waktu jatuh tempo.

Diketahui harga saham MSFT di pasar pada tanggal 30 Desember 2008 adalah \$19,10, dengan nilai volatilitas harga saham adalah 48,13%, tingkat suku bunga Amerika pada saat itu adalah 4,25%, harga pelaksanaan \$17,50 dan waktu jatuh tempo opsi saham tersebut sampai tanggal 17 April 2009. Maka harga opsi beli dan opsi jual dapat ditentukan dengan model yang telah diperoleh pada persamaan (3.3) dan (3.6).

Untuk menentukan harga opsi beli berdasarkan model gunakan persamaan (3.3) dengan diketahui

S_0 = \$19,10: K = \$17,50; σ = 48,13%; r = 4,25%; $T = \dfrac{108\,hari}{365\,hari} = 0{,}296$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\dfrac{S_0}{K}\right) + \left(r + \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\dfrac{19{,}10}{17{,}50}\right) + \left(0{,}0425 + \dfrac{1}{2}(0{,}4813)^2\right)0{,}296}{0{,}4817\sqrt{0{,}296}} = 0{,}513075$$

$\rightarrow$ $N(d_1) = 0{,}696051$

dan

$$d_2 = \frac{\ln\left(\dfrac{S_0}{K}\right) + \left(r - \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

d_2 = 0,513075 – 0,4813 $\sqrt{0{,}296}$ = 0,251220 $\rightarrow$ $N(d_2)$ = 0,599178

Dengan demikian, diperoleh

$$C_0 = S_0 N(d_1) - K\exp(-rT)N(d_2)$$

$$C_0 = 19{,}10(0{,}696051) - 17{,}50\exp[-0{,}0425(0{,}296)]0{,}599178 = \$2{,}940037$$

Untuk menentukan harga opsi jual berdasarkan model gunakan persamaan (3.6) dengan diketahui

S_0 = \$19,10: K = \$17,50; σ = 48,13%; r = 4,25%; $T = \dfrac{108\,hari}{365\,hari} = 0{,}296$;

$N(d_1) = 0{,}696051 \rightarrow N(-d_1) = 1 - 0{,}696051 = 0{,}303949$; dan

$N(d_2) = 0{,}599178 \rightarrow N(-d_2) = 1 - 0{,}599178 = 0{,}400822$

maka diperoleh

$P_0 = K\exp(-rT)N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$

$P_0 = 17{,}50\exp[-0{,}0425(0{,}296)]0{,}400822 - 19{,}10(0{,}303949)$ =\$1,121266

Jadi, harga opsi beli menurut Model Black-Scholes adalah sebesar \$2,940037 dan harga opsi jual menurut Model Black-Scholes adalah \$1,121266.

.

Rekomendasi bagi investor opsi saham

1. Sikap investor opsi beli

   Berdasarkan data pada Lampiran IV, harga opsi beli di pasar sebesar \$2,85 (<\$2,940037), maka investor hendaknya mempertimbangkan untuk membeli sejumlah opsi beli. Hal ini dikarenakan opsi beli tersebut dalam keadaan *underpriced* (menurut model Black-Scholes), yaitu harga opsi di pasar lebih kecil daripada harga opsi beli yang diturunkan dengan menggunakan Model Black-Scholes.

2. Sikap investor opsi jual

   Berdasarkan data pada Lampiran V, harga opsi jual di pasar sebesar \$1,50(>\$1,121266), maka investor hendaknya mempertimbangkan untuk menjual sejumlah opsi jual dan membeli saham yang mendasari opsi tersebut sehingga menghasilkan profit tanpa risiko. Perdagangan semacam ini akan terjadi sampai harga opsi bergerak turun menjadi \$1,1213. Hal ini dikarenakan opsi jual tersebut dalam keadaan *overpriced*.

Pada Lampiran IV dan V, diberikan rekomendasi dari analisis kasus di atas mengenai sikap investor opsi saham Microsoft Corporation (MSFT) untuk harga pelaksanaan yang berbeda.

Dengan kasus dasar di atas, akan diselidiki adakah pengaruh pada harga opsi saham tipe Eropa jika salah satu faktor *input* dinaikkan sedangkan faktor yang lain tetap pada kasus dasarnya? Disajikan dengan tabel berikut.

Tabel 3.2 Perubahan harga opsi beli terhadap faktor-faktor yang mempengaruhi

Kasus	inputs					C
	S	K	t	r	σ	
Kasus dasar	\$19,10	\$17,50	0,296	4,25%	0,4813	\$2,9400
Kenaikan S sebesar \$5	\$24,10	\$17,50	0,296	4,25%	0,4813	\$7,0764
Kenaikan K sebesar \$5,5	\$19,10	\$23,00	0,296	4,25%	0,4813	\$0,8273
Kenaikan t sampai 17 Juli 2009 (0,545 tahun)	\$19,10	\$17,50	0,545	4,25%	0,4813	\$3,6739
Kenaikan r menjadi 5%	\$19,10	\$17,50	0,296	5%	0,4813	\$2,9631
Kenaikan (σ) menjadi 50%	\$19,10	\$17,50	0,296	4,25%	0,5000	\$3,0082

Tabel 3.3 Perubahan harga opsi jual terhadap faktor-faktor yang mempengaruhi

Kasus	inputs					P
	S	K	t	r	σ	
Kasus dasar	\$19,10	\$17,50	0,296	4,25%	0,4817	\$1,1213
Kenaikan S sebesar \$5	\$24,10	\$17,50	0,296	4,25%	0,4817	\$0,2576
Kenaikan K sebesar \$5,5	\$19,10	\$23,00	0,296	4,25%	0,4817	\$4,4398
Kenaikan t sampai 17 Juli 2009 (0,545 tahun)	\$19,10	\$17,50	0,545	4,25%	0,4817	\$1,6732
Kenaikan r menjadi 5%	\$19,10	\$17,50	0,296	5%	0,4817	\$1,1059
Kenaikan (σ) menjadi 50%	\$19,10	\$17,50	0,296	4,25%	0,5000	\$1,1894

Berdasarkan tabel di atas, terlihat adanya pengaruh pada harga opsi saham jika salah satu faktor *inputs* dinaikkan sementara faktor yang lainnya konstan pada tingkat kasus dasarnya.

Analisis dari kasus di atas adalah

1. Pengaruh terhadap harga opsi beli
   a. **Harga saham di pasar**. Jika harga saham (S) naik sebesar \$5, dari \$19,10 menjadi \$24,10, maka harga opsi beli juga akan naik, tetapi kenaikannya lebih kecil daripada kenaikkan harga saham, yaitu \$4,1364, sedangkan kenaikkan harga saham sebesar \$5. Namun, perhatikan bahwa persentase kenaikkan harga opsi, $\frac{\$7{,}0764 - \$2{,}9400}{\$2{,}9400} \approx 141\%$, jauh melebihi persentase kenaikkan harga saham, yaitu $\frac{\$24{,}10 - \$19{,}10}{\$19{,}10} \approx 26\%$.

   b. **Harga Pelaksanaan**. Jika harga pelaksanaan (K) naik sebesar \$5,5, dari \$17,50 menjadi \$23, maka harga opsi beli akan menurun. Penurunan harga opsi beli lebih kecil daripada harga pelaksanaan, tetapi perubahaan persentase harga opsi beli, yaitu $\frac{\$0{,}8273 - \$2{,}9400}{\$2{,}9400} \approx -72\%$, melebihi perubahan persentase harga pelaksanaan, yaitu $\frac{\$23 - \$17{,}50}{\$17{,}50} \approx 31\%$.

   c. **Waktu jatuh tempo (usia opsi)**. Jika waktu jatuh tempo bertambah dari $t = 108$ hari (0,296 tahun) menjadi $t = 199$ hari (0,545 tahun), yaitu sampai tanggal 17 Juli 2009, maka harga opsi beli naik dari $2,9400 menjadi $3,6739. Hal ini terjadi karena harga opsi tergantung pada probabilitas kenaikkan harga saham yang mendasari, dan semakin lama usia opsi, maka semakin tinggi kenaikkan harga saham. Sehingga harga opsi 199 hari akan lebih tinggi dibanding dengan harga opsi 108 hari.

d. **Suku bunga bebas risiko**. Jika suku bunga bebas risiko (r) naik dari 4,25% menjadi 5%, maka harga opsi beli akan naik juga walaupun kenaikkannya hanya sedikit, yaitu dari $2,9415 menjadi $2,9631. Pada persamaan (3.3), terlihat bahwa pengaruh utama kenaikkan r adalah mengurangi nilai sekarang dari harga pelaksanaan $K\exp(-rT)$, sehingga meningkatkan harga opsi saham tersebut. Suku bunga bebas risiko juga memegang peranan dalam menentukan nilai fungsi distribusi normal $N(d_1)$ dan $N(d_2)$, tetapi pengaruh ini berada pada urutan nomor dua. Dalam kenyataannya, harga opsi saham secara umum tidak sangat sensitif terhadap perubahan suku bunga, setidaknya terhadap perubahan dalam rentang yang biasanya dihadapi (terlihat pada persamaan 2.1)

e. **Volatilitas harga saham atau Variansi**. Jika variansi naik dari 48,13% menjadi 50%, maka harga opsi beli akan meningkat dari $2,9400 menjadi $3,0082. Oleh karena itu, semakin tinggi risiko sekuritas yang mendasari, maka opsinya akan semakin bernilai. Hal ini yang menarik dan masuk akal. Pertama, jika investor mempunyai opsi untuk membeli saham yang dijual dengan harga pelaksanaan K dan jika volatiliasnya atau $\sigma^2 = 0$, maka investor akan mempunyai probabilitas sebesar nol bahwa harga saham akan naik, sehingga probabilitasnya akan nol untuk memperoleh laba dari opsi tersebut. Sebaliknya, jika investor membeli opsi dengan tingkat volatilitasnya yang tinggi, maka investor akan mempunyai probabilitas yang cukup tinggi bahwa saham akan naik, sehingga investor mempunyai probabilitas memperoleh laba yang besar dari opsi tersebut. Dengan demikian, semakin besar nilai volatilitasnya, maka akan semakin besar juga harga opsinya. Hal ini yang membuat opsi atas saham berisiko lebih bernilai daripada opsi atas saham yang tidak berisiko dan bervariansi rendah.

2. Pengaruh terhadap harga opsi jual

   a. **Harga saham di pasar**. Jika harga saham (S) naik sebesar \$5, dari \$19,10 menjadi \$24,10, maka harga opsi jual akan turun sebesar \$0,8637, sedangkan kenaikkan harga saham sebesar \$5. Namun, perhatikan bahwa perubahan persentase harga opsi, $\frac{\$0{,}2576 - \$1{,}1213}{\$1{,}1213} \approx -77\%$, melebihi perubahan persentase harga saham, yaitu $\frac{\$24{,}10 - \$19{,}10}{\$19{,}10} \approx 26\%$.

   b. **Harga Pelaksanaan**. Jika harga pelaksanaan (K) naik sebesar \$5,5, dari \$17,50 menjadi \$23, maka harga opsi jual akan meningkat.

Kenaikkan harga opsi jual lebih kecil daripada harga pelaksanaan, tetapi perubahaan persentase harga opsi jual, yaitu $\frac{\$4,4398 - \$1,1213}{\$1,1213} \approx 296\%$, jauh melebihi perubahan persentase harga pelaksanaan, yaitu $\frac{\$23 - \$17,50}{\$17,50} \approx 31\%$.

c. **Waktu jatuh tempo (usia opsi)**. Jika waktu jatuh tempo bertambah dari $t = 108$ hari (0,296 tahun) menjadi $t = 199$ hari (0,545 tahun), yaitu sampai tanggal 17 Juli 2009, maka harga opsi jual naik dari $1.1213 menjadi $1,6732. Hal ini terjadi karena harga opsi tergantung pada probabilitas kenaikkan harga saham yang mendasari, dan semakin lama usia opsi, maka semakin tinggi kenaikkan harga saham. Sehingga harga opsi 199 hari akan lebih tinggi dibanding dengan harga opsi 108 hari.

d. **Suku bunga bebas risiko**. Jika suku bunga bebas risiko (r) naik dari 4,25% menjadi 5%, maka harga opsi jual akan turun walaupun penurunannya hanya sedikit, yaitu dari $1,1213 menjadi $1,1059. Pada persamaan (3.6), terlihat bahwa jika suku bunga bebas risiko bertambah tinggi sedangkan faktor yang lain tetap, maka perubahan harga opsi akan cenderung menurun. Dalam kenyataannya, harga opsi secara umum tidak sangat sensitif terhadap perubahan suku bunga, setidaknya terhadap perubahan dalam rentang yang biasanya dihadapi (telihat pada persamaan 2.2)

e. **Volatilitas harga saham atau Variansi**. Jika variansi naik dari 48,13% menjadi 50%, maka harga opsi jual akan meningkat dari \$1,1213 menjadi \$1,1894. Oleh karena itu, semakin tinggi risiko sekuritas yang mendasari, maka opsinya akan semakin bernilai. Hal ini yang menarik dan masuk akal. Pertama, jika investor mempunyai opsi untuk membeli saham yang dijual dengan harga pelaksanaan K dan jika volatiliasnya atau $\sigma^2 = 0$, maka investor akan mempunyai probabilitas sebesar nol bahwa harga saham akan naik, sehingga probabilitasnya akan nol untuk memperoleh laba dari opsi tersebut. Sebaliknya, jika investor membeli opsi dengan tingkat volatilitasnya yang tinggi, maka investor akan mempunyai probabilitas yang cukup tinggi bahwa saham akan naik, sehingga investor mempunyai probabilitas memperoleh laba yang besar dari opsi tersebut. Dengan demikian, semakin besar nilai volatilitasnya, maka akan semakin besar juga harga opsinya. Hal ini yang membuat opsi atas saham berisiko lebih bernilai daripada opsi atas saham yang tidak berisiko dan bervariansi rendah.

Kemudian, bagaimanakah analisis keuntungan dan kerugian investor opsi saham jika harga saham Microsoft naik atau turun?

1. Opsi Beli

Diketahui harga saham Microsoft (simbol: MSFT) saat ini (30 Desember 2008) berada pada harga US$ 19.10 per lembar. A ingin membeli saham MSFT dari B sebanyak 100 lembar. Untuk itu, A membayar premi sebesar

US$ 0,6 per lembar. Maka dibuatlah kontrak antara A dan penjual (B) sebagai berikut:

Kontrak opsi beli:

Pembeli opsi beli	: A (hak membeli)
Penjual opsi beli	: B (wajib menjual)
Nama *asset*	: Saham Microsoft (MSFT)
Jumlah kontrak	: 1 kontrak (100 lembar saham)
Masa berlaku	: 2 bulan dari sekarang

A membayar premi kepada B sebesar: US$ 0,6 per lembar *x* 100 lembar = US$ 60

Apa yang terjadi jika kemudian harga saham MSFT naik atau turun?

Analisis keuntungan dan kerugian investor

Skenario pertama: Harga saham MSFT naik

Misalkan Microsoft mengumumkan ke publik akan meluncurkan produk baru yang sangat inovatif, sehingga harga saham Microsoft naik menjadi US$30. Maka sebagai *call option buyer* (pembeli opsi beli), A memperoleh keuntungan, karena mempunyai **hak untuk membeli** saham Microsoft di harga US$ 19,10, sedangkan harga saham Microsoft saat ini di pasar bernilai US$30. dengan kata lain, A dapat membeli saham Microsoft di harga US$19,10 dan kemudian menjualnya dengan harga US$30 (profit = US$10,9 per lembar).

Keuntungan bersih A (net profit) adalah US$10,9 dikurangi premi yang telah dibayar sebesar US$ 0,6 per lembar, maka diperoleh keuntungan sebesar US$ 10,3 per lembar. Karena 1 kontrak opsi mewakili 100 lembar saham, maka total net profit adalah US$10,3 *x* 100 = US$1.030.

Jika harga saham Microsoft semakin naik, A sebagai *call option buyer* akan semakin besar keuntungannya. Sedangkan B sebagai *call option seller* yang menerima premi sebesar US$ 0,6 per lembar mempunyai kewajiban menjual Microsoft di harga US$ 19,10 per lembar. Semakin naik harga saham Microsoft, B akan menanggung kerugian semakin besar.

Skenario kedua: Harga saham MSFT turun

Misalkan harga saham Microsoft turun drastis menjadi US$ 10. Maka sebagai *call option buyer,* A tidak memiliki kewajiban untuk membeli. Karena lebih menguntungkan jika A membeli saham Microsoft di pasar dengan harga US$ 10 daripada membeli dari B dengan harga US$ 19,10. Sehingga A lebih baik membiarkan haknya hangus (*expired worthless*).

Dalam hal ini, kerugian A adalah sebesar premi yang telah dibayarkan, yaitu US$ 0,6 per lembar *x* 100 lembar = US$ 60. Berapapun penurunan harga saham Microsoft, maksimum kerugian yang bisa dialami A adalah sebesar US$ 0,6 per lembar. Sebaliknya, keuntungan maksimum yang bisa diperoleh B adalah sebesar premi yang diterima, sedangkan potensi kerugiannya tak terbatas.

2. Opsi Jual

Misalkan A memperkirakan bahwa harga saham Microsoft (MSFT) akan turun. Oleh karena itu, A membeli opsi jual dari B yang memberikan hak kepadanya untuk menjual saham MSFT di harga US$ 19,10 per lembar selama jangka waktu satu tahun. Untuk itu, A membayar premi sebesar US$ 3 per lembar.

Kontrak opsi jual:

Pembeli opsi jual	: A (hak menjual)
Penjual opsi jual	: B (wajib membeli)
Nama *asset*	: Saham Microsoft (MSFT)
Jumlah kontrak	: 1 kontrak (100 lembar saham)
Masa berlaku	: 1 tahun dari sekarang

A membayar premi kepada B sebesar: US$ 3 per lembar *x* 100 lembar = US$ 300

Apa yang terjadi jika kemudian MSFT naik ataupun turun?

Analisis keuntungan dan kerugian investor

Skenario pertama: Harga saham MSFT turun

Karena suatu alasan harga saham MSFT turun menjadi US$ 10. Maka A sebagai *put option buyer* berhak menjual saham MSFT di harga US$19,10, dimana saat ini harga saham di pasar hanya bernilai US$ 10. Dengan kata lain, A dapat membeli saham MSFT diharga US$10 dan kemudian menjualnya dengan harga US$ 19,10 (profit = US$ 9,10 per lembar).

Keuntungan bersih A (net profit) adalah US$9,10 dikurangi premi yang telah dibayar sebesar US$ 3 per lembar = US$ 6,10 per lembar.

Karena 1 kontak opsi mewakili 100 lembar saham, maka total net profit adalah US$6,10 *x* 100 = US$610.

Jika harga saham MSFT semakin turun, maka A sebagai *put option buyer* akan semakin besar keuntungannya. Sedangkan B sebagai *put option seller* yang menerima premi US$3 per lembar mempunyai kewajiban membeli saham MSFT diharga US$19,10 per lembar. Semakin turun harga saham MSFT, maka B akan menanggung kerugian semakin besar.

Skenario kedua: Harga saham MSFT naik

Misalkan karena perkembangan zaman semakin maju, maka permintaan akan komputerisasi meningkat tajam, sehingga membuat harga saham MSFT sebagai produsen komputer naik tinggi, misalkan menjadi US$ 50 per lembar.

Jika A menggunakan haknya untuk menjual saham MSFT di harga US$19,10 per lembar, sedangkan harga MSFT sekarang di pasar bernilai US$50 lembar, maka A akan mengalami kerugian sebesar US$30,90 per lembar. Oleh karena itu, A lebih baik memutuskan untuk membiarkan haknya hangus (*expired worthless*).

Dapat disimpulkan bahwa maksimum kerugian A sebagai *put option buyer* adalah sebesar premi yang dibayarkan. Sebaliknya, keuntungan maksimum yang bisa diperoleh B adalah sebesar premi yang diterima, sedangkan potensi kerugiannya tak terbatas sampai harga saham MSFT menjadi nol.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Dalam menentukan model investasi harga saham tipe Eropa dengan menggunakan model Black-Scholes, perlu dilakukan pemisalan-pemisalan dari faktor-faktor yang terkait dengan rumus/lambang Matematika. Hal ini bertujuan untuk dapat mengetahui atau mengenali sifat-sifatnya dan keterkaitan dengan unsur-unsurnya serta dalam hal menarik kesimpulan tentang model yang diamati lebih lanjut. Berdasarkan analisis dan pembahasan, diperoleh

1. Model investasi harga saham tipe Eropa dengan menggunakan model Black-Scholes

   Model untuk harga opsi beli tipe Eropa Model Black-Scholes pada saat t = 0 adalah

   $$C_0 = S_0 N(d_1) - K\exp(-rT)N(d_2) \;\; ;$$

   dan model untuk harga opsi jual tipe Eropa Model Black-Scholes pada saat t = 0 adalah

   $$P_0 = K\exp(-rT)N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

   dengan

   $$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ dan}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

dengan

C_0 : harga opsi beli tipe Eropa pada saat $t = 0$
P_0 : harga opsi jual tipe Eropa pada saat $t = 0$
S_0 : harga saham
K : harga pelaksanaan
r : suku bunga bebas resiko
σ : volatilitas harga saham
T : waktu jatuh tempo
$N(.)$: nilai komulatif dari distribusi Normal

2. Aplikasi dari model investasi harga saham tipe Eropa dengan menggunakan Model Black-Scholes, memperlihatkan bahwa
   a. Harga opsi saham yang diturunkan dengan menggunakan model Black-Scholes cukup mendekati harga opsi saham yang diperdagangkan di pasar saham sehingga dapat memberikan rekomendasi bagi investor dalam menentukan sikap. Pada Lampiran IV dan V, terlihat bahwa apabila harga opsi di pasar opsi lebih besar daripada harga opsi Black-Scholes, maka investor seharusnya mempertimbangkan menjual sebagian dari opsi tersebut dan membeli saham yang mendasari opsi tersebut sehingga menghasilkan profit tanpa risiko. ini dikarenakan opsi jual tersebut dalam keadaan *overpriced*. Sebaliknya, apabila harga opsi di pasar opsi lebih kecil daripada harga opsi Black-Scholes, maka investor hendaknya mempertimbangkan untuk membeli sejumlah opsi tersebut. Hal ini dikarenakan opsi tersebut dalam keadaan *underpriced* (menurut model

Black-Scholes), yaitu harga opsi di pasar lebih kecil daripada harga opsi beli yang diturunkan dengan menggunakan Model Black-Scholes.

b. Adanya faktor-faktor yang mempengaruhi harga saham tipe Eropa model Black-Scholes jika salah satu faktor *input* dinaikkan sedangkan faktor *input* yang lain tetap. Disajikan pada tabel berikut:

Tabel 4.1 Pengaruh faktor-faktor *input* terhadap perubahan harga opsi beli tipe Eropa model Black-Scholes

Jika faktor *input* dinaikkan	Dampak terhadap harga opsi beli
1. Harga Saham	Meningkat
2. Harga Pelaksanaan	Menurun
3. Usia Opsi	Meningkat
4. Suku bunga bebas resiko	Meningkat
5. Tingkat volatilitas	Meningkat

Tabel 4.2 Pengaruh faktor-faktor *input* terhadap perubahan harga opsi jual tipe Eropa model Black-Scholes

Jika faktor *input* dinaikkan	Dampak terhadap harga opsi jual
1. Harga Saham	Menurun
2. Harga Pelaksanaan	Meningkat
3. Usia Opsi	Meningkat
4. Suku bunga bebas resiko	Menurun
5. Tingkat volatilitas	Meningkat

c. Keuntungan dan Kerugian Investor Opsi Saham

1) Opsi Beli

Jika harga saham naik:

call option buyer (pembeli opsi beli) semakin untung, sedangkan *call option seller* (penjual opsi beli) semakin rugi.

Rekomendasi: saat yang tepat membeli opsi beli adalah jika memperkirakan harga saham akan naik.

2) Opsi Jual

Jika harga saham turun:

put option buyer (pembeli opsi jual) semakin untung, sedangkan *put option seller* (penjual opsi jual) semakin rugi.

Rekomendasi: saat yang tepat membeli opsi jual adalah jika memperkirakan harga saham akan turun.

B. Saran

Model Black-Scholes dapat dikembangkan dengan melanggar asumsi bahwa variansi bersifat tidak konstan, yaitu dapat digunakan pendekatan dengan model *ARCH* (*Autoreressive Conditional Heterocedasticity*), G*ARCH* (*Generalized Autoreressive Conditional Heterocedasticity*), *E-GARCH* (*Exponential Generalized Autoreressive Conditional Heterocedasticity*) maupun model-model *ARCH* yang lain. Selain itu, dalam memodelkan investasi harga saham, khususnya opsi saham tipe Eropa, tidak hanya menggunakan model Black-Scholes, tetapi dapat juga menggunakan model yang lain, misalnya dengan menggunakan model Binomial.

DAFTAR PUSTAKA

Adams, Andrew T., et.al. (2003). *Investment Mathematics*. Canada: John Wiley & Sons Ltd.

Anonim. (2008). *Panduan Pemodal*. Jakarta: PT. Bursa Efek Indonesia.

Bain, Lee., J., & Engelhardt M. (1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. *Second Edition*. California: Duxbury Press.

Baisuni, (1986). *Kalkulus*. Jakarta: Universitas Indonesia.

Bodie, Zvi., Kane, Alex., & Marcus, Alan J. (2006). *Investasi, Edisi 6 Buku 2*. Jakarta: Salemba Empat.

Brigham, Eugene F., & Houston, Joel F. (2001). *Manajemen Keuangan, Buku II, Edisi Kedelapan*. Jakarta: Erlangga.

Cambell, J., Y., et.al. (1997). *The Econometric of Financial Market*. New Jersey: Princeton University Press.

Elliot, R. J., & Kopp, P. E. (2000). *Mathematics of Financial Market*. New York: Springer.

Fabozzi, Frank J. (2000). *Manajemen Investasi, Buku 2, Edisi Pertama*. Jakarta: Salemba Empat.

Abdul Halim. (2005). *Analisis Investasi, Edisi Kedua*. Jakarta: Salemba Empat.

Higham, Desmond J. (2004). *An Introduction to Financial Option Valuation, Mathematics, Stochastics and Computation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Hull, J., C. (2003). *Options, Futures, and other Derivatives (5th ed.)*. New Jersey: Prentice-Hall.

Said Husnan. (1998). *Dasar-dasar Teori Portofolio dan Analisis Sekuritas, Edisi Ketiga*. Yogyakarta: AMP YKPN Yogyakarta.

Lamberton, D., & Lapeyre, B. (2000). *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Florida: Chapman & Hall/CRC.

Luenberger, David G. (1998). *Investment Science.* New York: Oxford University Press.

Paul, W., & Baschnagel J. (1999). *Stocastic Process from physic to Finance.* Berlin: Springer.

Lani Salim. (2003). *Derivative: Option & Warrant*. Jakarta: PT. Gramedia Elex Media Komputindo.

Spiegel, M., R. (1984). *Seri Buku Schaum: Teori dan Soal-soal Kalkulus Lanjutan*. Jakarta: Erlangga.

Ross, Sheldon M. (2003). *An Elementary Introduction to Mathematical Finance, second edition*. New York: Cambridge University Press.

Taylor, H., M., dan Karlin. (1998). *An Introduction Stochastic Modeling*. San Diego: Academic Press.

www.efinance.org.cn/cn/FEshuo/The%20Pricing%20of%20Options%20and%20Corporate%20Liabilities.pdf tanggal akses 13 Juni 2008, pukul 01:26.

www.finance.yahoo.com.

www.megaoptions.com tanggal akses 12 September 2008, pukul 14:38.

www.sam.sdu.dk/undervis/92218.E04/Black%20Scholes.pdf tanggal akses 13 Juni 2008, pukul 00:53.

LAMPIRAN I

Data Harga Penutupan Saham Harian Microsoft Corporation (MSFT)

Periode 2 Januari – 30 Desember 2008

(Data Harga dalam dollar)

Nama Perusahaan	Tanggal Trading	Harga Penutupan	Nilai Return
MSFT	2-Jan-08	35.22	0.0042499
MSFT	3-Jan-08	35.37	-0.028389003
MSFT	4-Jan-08	34.38	0.006667658
MSFT	7-Jan-08	34.61	-0.034090871
MSFT	8-Jan-08	33.45	0.029166893
MSFT	9-Jan-08	34.44	-0.003199072
MSFT	10-Jan-08	34.33	-0.012309651
MSFT	11-Jan-08	33.91	0.014055868
MSFT	14-Jan-08	34.39	-0.0114053
MSFT	15-Jan-08	34.00	-0.022907442
MSFT	16-Jan-08	33.23	-0.003617731
MSFT	17-Jan-08	33.11	-0.003024806
MSFT	18-Jan-08	33.01	-0.032325425
MSFT	22-Jan-08	31.96	-0.000939114
MSFT	23-Jan-08	31.93	0.04050876
MSFT	24-Jan-08	33.25	-0.009367042
MSFT	25-Jan-08	32.94	-0.006701213
MSFT	28-Jan-08	32.72	-0.003674223
MSFT	29-Jan-08	32.60	-0.012345836
MSFT	30-Jan-08	32.20	0.012345836
MSFT	31-Jan-08	32.60	-0.068226294
MSFT	1-Feb-08	30.45	-0.00857525
MSFT	4-Feb-08	30.19	-0.037804029
MSFT	5-Feb-08	29.07	-0.019101119
MSFT	6-Feb-08	28.52	-0.014124529
MSFT	7-Feb-08	28.12	0.015526071
MSFT	8-Feb-08	28.56	-0.012330612
MSFT	11-Feb-08	28.21	0.004597709
MSFT	12-Feb-08	28.34	0.021641333
MSFT	13-Feb-08	28.96	-0.01601148
MSFT	14-Feb-08	28.50	-0.002810965
MSFT	15-Feb-08	28.42	-0.008835541
MSFT	19-Feb-08	28.17	0.001773365
MSFT	20-Feb-08	28.22	-0.00426137

MSFT	21-Feb-08	28.10	-0.015059446
MSFT	22-Feb-08	27.68	0.005763705
MSFT	25-Feb-08	27.84	0.019210836
MSFT	26-Feb-08	28.38	-0.004237294
MSFT	27-Feb-08	28.26	-0.011745997
MSFT	28-Feb-08	27.93	-0.026484407
MSFT	29-Feb-08	27.20	-0.007750546
MSFT	3-Mar-08	26.99	0.021986961
MSFT	4-Mar-08	27.59	0.019027679
MSFT	5-Mar-08	28.12	-0.019752842
MSFT	6-Mar-08	27.57	0.010822616
MSFT	7-Mar-08	27.87	0.00643779
MSFT	10-Mar-08	28.05	0.042916057
MSFT	11-Mar-08	29.28	-0.02244957
MSFT	12-Mar-08	28.63	-0.000349345
MSFT	13-Mar-08	28.62	-0.023330857
MSFT	14-Mar-08	27.96	0.012086887
MSFT	17-Mar-08	28.30	0.038812911
MSFT	18-Mar-08	29.42	-0.027568941
MSFT	19-Mar-08	28.62	0.019377769
MSFT	20-Mar-08	29.18	-0.000342759
MSFT	24-Mar-08	29.17	-0.001028983
MSFT	25-Mar-08	29.14	-0.020104663
MSFT	26-Mar-08	28.56	-0.018018506
MSFT	27-Mar-08	28.05	-0.005003584
MSFT	28-Mar-08	27.91	0.016699624
MSFT	31-Mar-08	28.38	0.038705592
MSFT	1-Apr-08	29.50	-0.011592356
MSFT	2-Apr-08	29.16	-0.005502077
MSFT	3-Apr-08	29.00	0.005502077
MSFT	4-Apr-08	29.16	0
MSFT	7-Apr-08	29.16	-0.01416014
MSFT	8-Apr-08	28.75	0.004857747
MSFT	9-Apr-08	28.89	0.007586243
MSFT	10-Apr-08	29.11	-0.028926917
MSFT	11-Apr-08	28.28	-0.007809766
MSFT	14-Apr-08	28.06	0.006748383
MSFT	15-Apr-08	28.25	0.024476746
MSFT	16-Apr-08	28.95	0.009283202
MSFT	17-Apr-08	29.22	0.026343975
MSFT	18-Apr-08	30.00	0.013902905
MSFT	21-Apr-08	30.42	-0.005604102
MSFT	22-Apr-08	30.25	0.038902799
MSFT	23-Apr-08	31.45	0.011067307
MSFT	24-Apr-08	31.80	-0.063951691

MSFT	25-Apr-08	29.83	-0.028563656
MSFT	28-Apr-08	28.99	-0.012146601
MSFT	29-Apr-08	28.64	-0.004198747
MSFT	30-Apr-08	28.52	0.030389079
MSFT	1-May-08	29.40	-0.005457039
MSFT	2-May-08	29.24	-0.005486982
MSFT	5-May-08	29.08	0.021096393
MSFT	6-May-08	29.70	-0.016635929
MSFT	7-May-08	29.21	0.002051984
MSFT	8-May-08	29.27	0.00409138
MSFT	9-May-08	29.39	0.020209512
MSFT	12-May-08	29.99	-0.007026966
MSFT	13-May-08	29.78	0.005024295
MSFT	14-May-08	29.93	0.017224672
MSFT	15-May-08	30.45	-0.015222001
MSFT	16-May-08	29.99	-0.017830582
MSFT	19-May-08	29.46	-0.024047878
MSFT	20-May-08	28.76	-0.017892075
MSFT	21-May-08	28.25	0.007757444
MSFT	22-May-08	28.47	-0.014862269
MSFT	23-May-08	28.05	0.013807973
MSFT	27-May-08	28.44	-0.009184098
MSFT	28-May-08	28.18	0.004602593
MSFT	29-May-08	28.31	0.00035317
MSFT	30-May-08	28.32	-0.018532248
MSFT	2-Jun-08	27.80	-0.017783085
MSFT	3-Jun-08	27.31	0.008386558
MSFT	4-Jun-08	27.54	0.027222311
MSFT	5-Jun-08	28.30	-0.029039502
MSFT	6-Jun-08	27.49	0.007971057
MSFT	9-Jun-08	27.71	0.006474843
MSFT	10-Jun-08	27.89	-0.027996739
MSFT	11-Jun-08	27.12	0.04046795
MSFT	12-Jun-08	28.24	0.028967302
MSFT	13-Jun-08	29.07	-0.004827596
MSFT	16-Jun-08	28.93	-0.004503732
MSFT	17-Jun-08	28.80	-0.011875794
MSFT	18-Jun-08	28.46	0.016379526
MSFT	19-Jun-08	28.93	-0.024493877
MSFT	20-Jun-08	28.23	-0.009252735
MSFT	23-Jun-08	27.97	-0.008617648
MSFT	24-Jun-08	27.73	0.022112171
MSFT	25-Jun-08	28.35	-0.02139119
MSFT	26-Jun-08	27.75	-0.004333701
MSFT	27-Jun-08	27.63	-0.004352564

MSFT	30-Jun-08	27.51	-0.023539152
MSFT	1-Jul-08	26.87	-0.037539953
MSFT	2-Jul-08	25.88	0.003856542
MSFT	3-Jul-08	25.98	0.001922708
MSFT	7-Jul-08	26.03	-0.006939118
MSFT	8-Jul-08	25.85	-0.024276838
MSFT	9-Jul-08	25.23	0.00868198
MSFT	10-Jul-08	25.45	-0.007889587
MSFT	11-Jul-08	25.25	-0.003968259
MSFT	14-Jul-08	25.15	0.038991294
MSFT	15-Jul-08	26.15	0.041571236
MSFT	16-Jul-08	27.26	0.009492587
MSFT	17-Jul-08	27.52	-0.06221564
MSFT	18-Jul-08	25.86	-0.008543741
MSFT	21-Jul-08	25.64	0.00622086
MSFT	22-Jul-08	25.80	0.024125237
MSFT	23-Jul-08	26.43	-0.03817699
MSFT	24-Jul-08	25.44	0.027908788
MSFT	25-Jul-08	26.16	-0.025553074
MSFT	28-Jul-08	25.50	0.023639931
MSFT	29-Jul-08	26.11	0.004585411
MSFT	30-Jul-08	26.23	-0.019634895
MSFT	31-Jul-08	25.72	-0.010946161
MSFT	1-Aug-08	25.44	-0.006309169
MSFT	4-Aug-08	25.28	0.036127448
MSFT	5-Aug-08	26.21	0.030436315
MSFT	6-Aug-08	27.02	0.013600651
MSFT	7-Aug-08	27.39	0.026658639
MSFT	8-Aug-08	28.13	-0.008209934
MSFT	11-Aug-08	27.90	0.007854378
MSFT	12-Aug-08	28.12	-0.007496019
MSFT	13-Aug-08	27.91	0
MSFT	14-Aug-08	27.91	-0.003589379
MSFT	15-Aug-08	27.81	-0.004324331
MSFT	18-Aug-08	27.69	-0.013452302
MSFT	19-Aug-08	27.32	-0.0010987
MSFT	20-Aug-08	27.29	-0.004038926
MSFT	21-Aug-08	27.18	0.023992427
MSFT	22-Aug-08	27.84	-0.006486509
MSFT	25-Aug-08	27.66	-0.014200129
MSFT	26-Aug-08	27.27	0.010578249
MSFT	27-Aug-08	27.56	0.013693908
MSFT	28-Aug-08	27.94	-0.023539019
MSFT	29-Aug-08	27.29	-0.006986607
MSFT	2-Sep-08	27.10	-0.007407441

MSFT	3-Sep-08	26.90	-0.020658012
MSFT	4-Sep-08	26.35	-0.026924703
MSFT	5-Sep-08	25.65	0.018157733
MSFT	8-Sep-08	26.12	-0.00076599
MSFT	9-Sep-08	26.10	0.012942701
MSFT	10-Sep-08	26.44	0.033472816
MSFT	11-Sep-08	27.34	0.010189317
MSFT	12-Sep-08	27.62	-0.02939227
MSFT	15-Sep-08	26.82	-0.031436029
MSFT	16-Sep-08	25.99	-0.056185662
MSFT	17-Sep-08	24.57	0.02769593
MSFT	18-Sep-08	25.26	-0.003966685
MSFT	19-Sep-08	25.16	0.009493742
MSFT	22-Sep-08	25.40	0.001573564
MSFT	23-Sep-08	25.44	0.010946161
MSFT	24-Sep-08	25.72	0.034018186
MSFT	25-Sep-08	26.61	0.029255928
MSFT	26-Sep-08	27.40	-0.091267269
MSFT	29-Sep-08	25.01	0.065013219
MSFT	30-Sep-08	26.69	-0.007899232
MSFT	1-Oct-08	26.48	-0.008723742
MSFT	2-Oct-08	26.25	0.002663117
MSFT	3-Oct-08	26.32	-0.055059777
MSFT	6-Oct-08	24.91	-0.069824782
MSFT	7-Oct-08	23.23	-0.009515643
MSFT	8-Oct-08	23.01	-0.031342226
MSFT	9-Oct-08	22.30	-0.036533743
MSFT	10-Oct-08	21.50	0.170625517
MSFT	13-Oct-08	25.50	-0.056466612
MSFT	14-Oct-08	24.10	-0.061610585
MSFT	15-Oct-08	22.66	0.065338069
MSFT	16-Oct-08	24.19	-0.010806423
MSFT	17-Oct-08	23.93	0.032479731
MSFT	20-Oct-08	24.72	-0.056587475
MSFT	21-Oct-08	23.36	-0.081577847
MSFT	22-Oct-08	21.53	0.036035826
MSFT	23-Oct-08	22.32	-0.016260521
MSFT	24-Oct-08	21.96	-0.036165276
MSFT	27-Oct-08	21.18	0.086775277
MSFT	28-Oct-08	23.10	-0.004338402
MSFT	29-Oct-08	23.00	-0.016217756
MSFT	30-Oct-08	22.63	-0.013345394
MSFT	31-Oct-08	22.33	0.012903405
MSFT	3-Nov-08	22.62	0.039441732
MSFT	4-Nov-08	23.53	-0.063603981

MSFT	5-Nov-08	22.08	-0.055880458
MSFT	6-Nov-08	20.88	0.029261172
MSFT	7-Nov-08	21.50	-0.009345862
MSFT	10-Nov-08	21.30	-0.004705891
MSFT	11-Nov-08	21.20	-0.043380296
MSFT	12-Nov-08	20.30	0.045736009
MSFT	13-Nov-08	21.25	-0.057629113
MSFT	14-Nov-08	20.06	-0.037586954
MSFT	17-Nov-08	19.32	0.015408625
MSFT	18-Nov-08	19.62	-0.070194992
MSFT	19-Nov-08	18.29	-0.042440763
MSFT	20-Nov-08	17.53	0.115689193
MSFT	21-Nov-08	19.68	0.0500476
MSFT	24-Nov-08	20.69	-0.034418343
MSFT	25-Nov-08	19.99	0.024704814
MSFT	26-Nov-08	20.49	-0.013264749
MSFT	28-Nov-08	20.22	-0.082973143
MSFT	1-Dec-08	18.61	0.028603645
MSFT	2-Dec-08	19.15	0.036908341
MSFT	3-Dec-08	19.87	-0.038999298
MSFT	4-Dec-08	19.11	0.038999298
MSFT	5-Dec-08	19.87	0.055787458
MSFT	8-Dec-08	21.01	-0.019707439
MSFT	9-Dec-08	20.60	0.000485319
MSFT	10-Dec-08	20.61	-0.057929325
MSFT	11-Dec-08	19.45	-0.004637988
MSFT	12-Dec-08	19.36	-0.016667052
MSFT	15-Dec-08	19.04	0.054675174
MSFT	16-Dec-08	20.11	-0.022631089
MSFT	17-Dec-08	19.66	-0.018481019
MSFT	18-Dec-08	19.30	-0.009370188
MSFT	19-Dec-08	19.12	0.003133162
MSFT	22-Dec-08	19.18	0.00520022
MSFT	23-Dec-08	19.28	-0.005721732
MSFT	24-Dec-08	19.17	-0.002088774
MSFT	26-Dec-08	19.13	-0.008926287
MSFT	29-Dec-08	18.96	0.007356838
MSFT	30-Dec-08	19.10	

LAMPIRAN II

Data Harga Opsi Beli Saham Microsoft Corporation (MSFT) Di Pasar Opsi Pengamatan Tanggal 30 Desember 2008 (Data Harga dalam dollar)

OPTIONS At 10:13AM ET: **19.10** ↑ 0.14 (0.74%)

View By Expiration: Jan 09 | Feb 09 | **Apr 09** | Jul 09 | Jan 10 | Jan 11

CALL OPTIONS Expire at close Fri, Apr 17, 2009

Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int
5.00	MQFDE.X	14.10	0.00	14.10	14.20	5	87
10.00	MQFDB.X	9.30	0.00	9.15	9.25	22	516
13.00	MQFDM.X	6.50	0.00	6.35	6.45	16	144
14.00	MQFDN.X	5.75	0.00	5.55	5.60	50	195
15.00	MQFDC.X	4.60	0.00	4.75	4.85	63	3,108
16.00	MQFDO.X	3.85	0.00	4.00	4.10	119	1,690
17.50	MQFDW.X	2.85	0.00	3.00	3.10	73	4,901
19.00	MQFDS.X	2.15	↑0.06	2.17	2.21	11	5,333
20.00	MQFDD.X	1.73	↑0.11	1.73	1.74	16	31,767
21.00	MQFDU.X	1.34	↑0.09	1.30	1.33	150	13,443
22.00	MSQDN.X	0.98	↑0.08	0.97	1.00	22	34,466
23.00	MSQDQ.X	0.72	↑0.07	0.70	0.72	81	40,866
23.00	RISDW.X	0.49	0.00	0.11	0.36	1	1
24.00	MSQDD.X	0.45	0.00	0.49	0.52	15	24,337
25.00	MSQDE.X	0.33	↑0.02	0.33	0.35	10	14,237
26.00	MSQDR.X	0.22	↑0.01	0.21	0.23	29	11,743
27.00	MSQDS.X	0.14	0.00	0.13	0.15	39	16,249
28.00	MSQDT.X	0.10	0.00	0.08	0.10	6	9,705
29.00	MSQDB.X	0.06	0.00	0.04	0.06	24	15,711
30.00	MSQDF.X	0.04	0.00	0.02	0.05	244	53,281
31.00	MSQDC.X	0.04	0.00	0.01	0.04	5	6,473
32.00	MSQDO.X	0.04	0.00	0.01	0.04	10	7,517
35.00	MSQDG.X	0.01	0.00	0.01	0.03	2	13,969

LAMPIRAN III

Data Harga Opsi Jual Saham Microsoft Corporation (MSFT) Di Pasar Opsi Pengamatan Tanggal 30 Desember 2008 (Data Harga dalam dollar)

OPTIONS At 10:13AM ET: **19.10** ↑ 0.14 (0.74%)

View By Expiration: Jan 09 | Feb 09 | **Apr 09** | Jul 09 | Jan 10 | Jan 11

T OPTIONS Expire at close Fri, Apr 17, 2009

Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int
5.00	MQFPE.X	0.05	0.00	N/A	0.03	1	1,577
10.00	MQFPB.X	0.10	0.00	0.08	0.10	4,142	11,789
13.00	MQFPM.X	0.37	↓0.02	0.35	0.37	37	4,655
14.00	MQFPN.X	0.51	↓0.06	0.51	0.53	2	3,600
15.00	MQFPC.X	0.73	↓0.07	0.72	0.74	30	36,388
16.00	MQFPO.X	0.99	↓0.11	0.98	1.01	20	7,007
17.50	MQFPW.X	1.50	↓0.11	1.49	1.52	20	9,631
19.00	MQFPS.X	2.15	↓0.18	2.15	2.18	19	13,619
20.00	MQFPD.X	2.80	↓0.06	2.67	2.70	1	27,728
21.00	MQFPU.X	3.30	↓0.20	3.25	3.35	29	14,046
22.00	MSQPN.X	4.00	↓0.25	3.90	4.00	44	36,522
23.00	MSQPQ.X	5.00	0.00	4.65	4.75	281	34,538
24.00	MSQPD.X	5.48	↓0.02	5.40	5.50	60	4,736
25.00	MSQPE.X	6.30	↓0.10	6.25	6.35	56	15,624
26.00	MSQPR.X	7.29	0.00	7.10	7.20	25	8,546
27.00	MSQPS.X	8.20	0.00	8.05	8.15	10	8,732
28.00	MSQPT.X	9.45	0.00	9.00	9.10	200	4,609
29.00	MSQPB.X	10.20	0.00	10.00	10.10	13	3,788
30.00	MSQPF.X	10.90	0.00	10.95	11.05	131	16,511
30.00	RISPD.X	0.85	0.00	0.77	1.00	10	10
31.00	MSQPC.X	11.70	0.00	11.90	12.05	10	3,508
31.00	RISPE.X	0.82	0.00	0.77	1.00	5	6
32.00	MSQPO.X	11.30	0.00	12.85	13.05	20	2,139
35.00	MSQPG.X	15.90	0.00	15.85	16.10	10	247

LAMPIRAN IV

Rekomendasi Sikap Investor Opsi Beli Saham Microsoft Corporation
(Data harga dalam dollar)

Diketahui:

Harga saham MSFT di pasar pada tanggal 30 Desember 2008 adalah $19,10, dengan nilai volatilitas harga saham adalah 48,13%, tingkat suku bunga Amerika pada saat itu adalah 4,25%, waktu jatuh tempo opsi saham tersebut sampai tanggal 17 April 2009 (usia opsi = 108 hari), dan harga pelaksanaan sebagai berikut seperti yang terlihat dalam tabel.

Harga Pelaksanaan	Harga Opsi Beli di pasar	Harga Opsi Beli BS	Rekomendasi Sikap Investor
5.00	14.1	14.16251	Beli
10.00	9.30	9.231752	Jual
13.00	6.50	6.377301	Jual
14.00	5.75	5.496127	Jual
15.00	4.60	4.673233	Beli
16.00	3.85	3.920518	Beli
17.50	2.85	2.940037	Beli
19.00	2.15	2.145325	Jual
20.00	1.73	1.71487	Jual
21.00	1.34	1.357031	Beli
22.00	0.98	1.064022	Beli
23.00	0.72	0.827347	Beli
24.00	0.45	0.638499	Beli
25.00	0.33	0.48945	Beli
26.00	0.22	0.372947	Beli
27.00	0.14	0.282665	Beli
28.00	0.10	0.213232	Beli
29.00	0.06	0.16019	Beli
30.00	0.04	0.119908	Beli
31.00	0.04	0.089474	Beli
32.00	0.04	0.066584	Beli
35.00	0.01	0.027098	Beli

LAMPIRAN V

Rekomendasi Sikap Investor Opsi Jual Saham Microsoft Corporation
(Data harga dalam dollar)

Diketahui:

Harga saham MSFT di pasar pada tanggal 30 Desember 2008 adalah $19,10, dengan nilai volatilitas harga saham adalah 48,13%, tingkat suku bunga Amerika pada saat itu adalah 4,25%, waktu jatuh tempo opsi saham tersebut sampai tanggal 17 April 2009 (usia opsi = 108 hari), dan harga pelaksanaan sebagai berikut seperti yang terlihat dalam tabel.

Harga Pelaksanaan	Harga Opsi Jual di pasar	Harga Opsi Jual BS	Rekomendasi Sikap Investor
5.00	0.05	5.46E-08	Jual
10.00	0.10	0.00674	Jual
13.00	0.37	0.114785	Jual
14.00	0.51	0.22111	Jual
15.00	0.73	0.385715	Jual
16.00	0.99	0.620498	Jual
17.50	1.50	1.121266	Jual
19.00	2.15	1.807802	Jual
20.00	2.80	2.364846	Jual
21.00	3.30	2.994506	Jual
22.00	4.00	3.688996	Jual
23.00	5.00	4.43982	Jual
24.00	5.48	5.238471	Jual
25.00	6.30	6.076919	Jual
26.00	7.29	6.947916	Jual
27.00	8.20	7.845132	Jual
28.00	9.45	8.763198	Jual
29.00	10.20	9.697655	Jual
30.00	10.90	10.64487	Jual
31.00	11.70	11.60194	Jual
32.00	11.30	12.56655	Beli
35.00	15.90	15.48956	Jual

LAMPIRAN VI

Uji Normalitas Data Harga Saham dengan Kolmogorov-Smirnov

Hipotesis

H_0 : data berdistribusi normal

H_1 : data tidak berdistribusi normal

Tingkat signifikasi : $\alpha = 0,05$

Daerah kritis : H_0 ditolak jika *p-value* < $\alpha = 0,05$

Statistic uji : Uji Kolmogorov-Smirnov

Perhitungan:

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

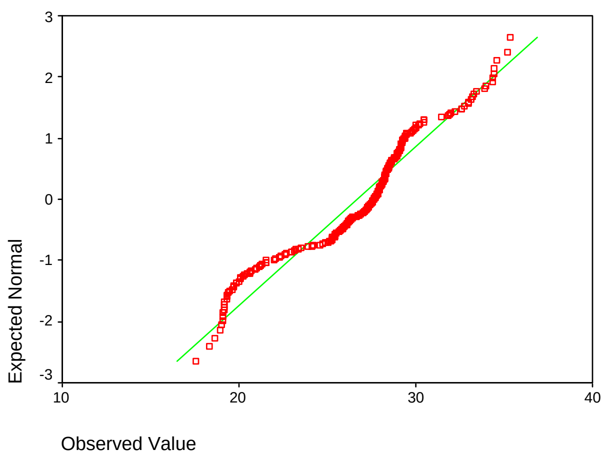
		HARGASHM
N		252
Normal Parameters[a,b]	Mean	26.6750
	Std. Deviation	3.82851
Most Extreme Differences	Absolute	.128
	Positive	.091
	Negative	-.128
Kolmogorov-Smirnov Z		2.035
Asymp. Sig. (2-tailed)		.001

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Kesimpulan : karena *p-value* (asymp. Sig = 0,001) < 0,05 maka dapat diambil kesimpulan bahwa data harga saham tidak berdistribusi normal.

Normal Q-Q Plot of HARGASHM



LAMPIRAN VII

Uji Normalitas Data Return Saham dengan Kolmogorov-Smirnov

Hipotesis

H_0 : data berdistribusi normal

H_1 : data tidak berdistribusi normal

Tingkat signifikasi : $\alpha = 0{,}05$

Daerah kritis : H_0 ditolak jika *p-value* < $\alpha = 0{,}05$

Statistic uji : Uji Kolmogorov-Smirnov

Perhitungan:

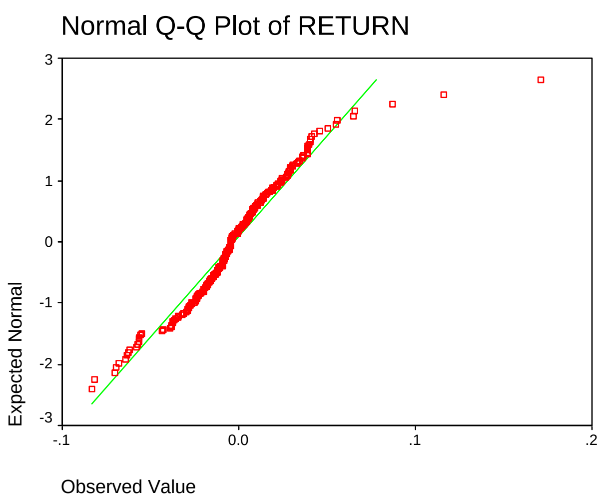
One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		RETURN
N		251
Normal Parameters[a,b]	Mean	-.002
	Std. Deviation	.481
Most Extreme Differences	Absolute	.073
	Positive	.070
	Negative	-.073
Kolmogorov-Smirnov Z		1.154
Asymp. Sig. (2-tailed)		.139

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Kesimpulan : karena *p-value* (asymp. Sig = 0,139) > 0,05 maka dapat diambil kesimpulan bahwa data return saham berdistribusi normal.



MODEL INVESTASI HARGA SAHAM TIPE EROPA DENGAN MENGGUNAKAN MODEL BLACK-SCHOLES

Oleh
Andriyanto
(04305141039)

ABSTRAK

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah untuk menjelaskan model investasi harga saham tipe Eropa dengan menggunakan model Black-Scholes dan aplikasinya pada harga saham suatu perusahaan, sebagai penerapannya pada saham Microsoft Corporation (MSFT).

Model penetapan harga saham tipe Eropa dapat ditentukan dengan cara menurunkan bentuk model harga saham Black-Scholes ke dalam model harga opsi saham yang merupakan instrumen derivatif dari saham berdasarkan nilai intrinsiknya. Model Black-Scholes diterapkan bagi saham yang tidak membayar dividen selama usia opsi dan opsi saham dilaksanakan pada saat tanggal jatuh temponya (opsi tipe Eropa). Selain itu, diperlukan asumsi-asumsi yang lain, yaitu harga saham bergerak secara acak dan mengikuti proses Wiener, tingkat volatilitas harga saham dan tingkat suku bunga bebas risiko diketahui dan konstan sepanjang usia opsi, serta tidak terdapat pajak dan biaya transaksi.

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan, diperoleh model investasi dari harga saham tipe Eropa Model Black-Scholes yang terdiri dari dua model, yaitu model investasi untuk harga opsi beli (C_0) dan model investasi untuk harga opsi jual (P_0). Aplikasi dari model investasi harga saham tipe Eropa dengan menggunakan model Black-Scholes menunjukkan bahwa harga opsi saham yang diturunkan dengan menggunakan model ini cukup mendekati harga opsi saham yang diperdagangkan di pasar saham. Pada kasus yang sama kemudian diberikan perlakuan tertentu, yaitu jika salah satu faktor *input* dinaikkan sedangkan faktor yang lain tetap memperlihatkan bahwa terdapat faktor-faktor yang mempengaruhi perubahan harga saham tipe Eropa. Hal ini dapat memberikan rekomendasi bagi investor opsi saham. Investor dapat mengambil sikap membeli sebagian opsi saham jika harga opsi saham di pasar lebih rendah daripada harga opsi saham yang diturunkan dengan model Black-Scholes dan jika sebaliknya, maka investor dapat mengambil sikap menjual sebagian opsi saham, Kemudian dari aplikasi ini juga dapat memperlihatkan bahwa jika harga saham naik, pembeli opsi beli semakin untung dan penjual opsi beli semakin rugi. Dalam kondisi lain, jika harga saham turun, pembeli opsi jual semakin untung dan penjual opsi jual semakin rugi.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL