BAB II

LANDASAN TEORI

A. Matriks

Matriks memegang peranan penting dalam dunia statistika dan matematika. Dengan matriks penulisan persamaan matematika menjadi lebih singkat dan efektif. Dalam bab ini dibahas mengenai matriks dan beberapa definisinya.

Definisi 1.

Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan (Anton, 1987 : 22-23). Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan *entri* dalam matriks. *Ukuran* (ordo) suatu matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horisontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut.

Notasi nama matriks biasanya menggunakan huruf kapital dan cetak tebal. Jika $\boldsymbol{A}$ adalah sebuah matriks, maka digunakan a_{ij} untuk menyatakan entri atau elemen yang terdapat di dalam baris i dan kolom j dari $\boldsymbol{A}$. Jadi, matriks dengan ukuran $m \times n$ beserta entri-entrinya secara umum dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A}_{(m\times n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ atau } \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$

Sebuah matriks dengan n baris dan n kolom dinamakan *matriks kuadrat berordo n* (*square matrix of order n*), dan entri-entri a_{11}, a_{22}, ... , a_{nn} dikatakan berada pada *diagonal utama* dari $\boldsymbol{A}$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Sebuah matriks berukuran $m \times 1$ disebut sebagai vektor kolom. Sebuah matriks $1 \times n$ disebut sebagai vektor baris (Johnson & Wichern, 2007 : 88). Notasi nama vektor menggunakan huruf kecil dan cetak tebal.

Definisi 2.

Dua matriks $\boldsymbol{A}_{(m\times n)} = \{a_{ij}\}$ dan $\boldsymbol{B}_{(m\times n)} = \{b_{ij}\}$ dikatakan sama, ditulis $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, jika $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$. Jadi, dua matriks adalah sama jika :

a. Ukuran kedua matriks adalah sama.

b. Setiap elemen yang bersesuaian adalah sama.

Definisi 3.

Berdasarkan ukuran dan elemennya terdapat beberapa jenis matriks yaitu sebagai berikut (Anton, 1987: 23-66) :

1. Matriks Bujur Sangkar (Persegi)

   Sebuah matriks dengan n baris dan n kolom dinamakan matriks kuadrat berordo n (matriks bujur sangkar).

2. Matriks Diagonal

   Matriks kuadrat yang semua elemen diatas dan dibawah diagonalnya adalah nol atau elemennya berada pada diagonal utama dinamakan *matriks diagonal*.

3. Matriks Segitiga

   Matriks kuadrat dinamakan *segitiga atas* (*upper triangular*) jika semua entri di bawah diagonal utama adalah nol. Begitu juga matriks kuadrat dinamakan *segitiga bawah* (*lower triangular*), jika semua entri di atas diagonal utama adalah nol. Sebuah matriks baik yang merupakan segitiga atas maupun yang merupakan segitiga bawah dinamakan *segitiga* (*triangular*).

4. Matriks Nol

   Sebuah matriks yang semua elemennya sama dengan nol, dinamakan *matriks nol* (*zero matrix*). Matriks nol dinyatakan oleh $\boldsymbol{0}$; jika ukurannya penting untuk ditekankan, maka dituliskan $\boldsymbol{0}_{m\times n}$ untuk matriks nol $m\times n$.

5. Matriks Identitas

   Matriks kuadrat dengan bilangan 1 terletak pada diagonal utama dinamakan *matriks satuan* (*identity matrix*) dan dinyatakan dengan $\boldsymbol{I}$. Jika ukurannya penting untuk ditekankan maka dituliskan $\boldsymbol{I}_n$ untuk matriks satuan $n \times n$.

6. Matriks Simetri

   Matriks kuadrat yang setiap elemennya selain elemen diagonal adalah simetri terhadap diagonal utama dinamakan *matriks simetri*.

Matriks dapat digunakan untuk menyingkatkan kerja dalam memecahkan sistem persamaan linear. Untuk penerapan dalam hal lain, maka perlu dikembangkan suatu ilmu hitung atau operasi matriks yang mana matriks-matriks tersebut dapat ditambahkan, dikurangkan, dan dikalikan sesuai dengan penggunaannya. Berikut ini adalah pembahasan mengenai operasi matriks dan sifat-sifatnya menurut Kollo & Rosen (2005 : 3).

Definisi 4.

Misal terdapat matriks $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ keduanya berukuran $m \times n$ dengan sebarang elemen a_{ij} dan b_{ij}, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Jumlah dari kedua matriks $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ diperoleh sebagai berikut

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_{ij} + b_{ij}) \qquad i = 1, 2, \dots, m, \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

Penjumlahan matriks hanya terdefinisi pada matriks yang ukurannya sama. Matriks-matriks yang ukurannya berbeda tidak dapat ditambahkan.

Definisi 5.

Jika $\boldsymbol{A}_{(m\times k)} = \{a_{ij}\}$ dan $\boldsymbol{B}_{(m\times k)} = \{b_{ij}\}$ adalah dua matriks yang berukuran sama. Maka selisih antara $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$, ditulis $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$, adalah sebuah matriks $\boldsymbol{C} = \{c_{ij}\}$ berukuran $m\times k$ diperoleh sebagai berikut

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-1)\boldsymbol{B}$$

yaitu $c_{ij} = a_{ij} + (-1)b_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, i = 1,2, \dots, m, j = 1,2, \dots, k$.

Definisi 6.

Hasil kali sebuah matriks $\boldsymbol{A}_{(m\times n)}$ oleh suatu skalar c adalah sebuah matriks $c\boldsymbol{A}$ berukuran $m\times n$, dimana elemen-elemen dari $\boldsymbol{A}$ dikalikan oleh c

$$c\boldsymbol{A} = (ca_{ij}).$$

Saat membahas tentang matriks maka sudah lazim menyebut kuantitas numerik sebagai *skalar*. Pada pembahasan ini semua skalar akan merupakan bilangan real.

Penjumlahan dan perkalian skalar ini memenuhi sifat utama sebagai berikut :

a. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ (*Hukum komutatif untuk penjumlahan*)

b. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ (*Hukum asosiatif untuk penjumlahan)*

c. $\boldsymbol{A}+(-1)\boldsymbol{A}=0$

d. $(c_1+c_2)\boldsymbol{A}=c_1\boldsymbol{A}+c_2\boldsymbol{A}$

e. $c(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=c\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{B}$

f. $c_1(c_2\boldsymbol{A})=(c_1c_2)\boldsymbol{A}$

Definisi 7.

Perkalian matriks dengan matriks mungkin terjadi apabila jumlah kolom pada matriks pertama sama dengan jumlah baris pada matriks kedua. Misalkan $\boldsymbol{A}: m\times n$ dan $\boldsymbol{B}: n\times r$, maka hasil kali $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ dari matriks $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ dan $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ adalah matriks $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ berukuran $m\times r$, dimana :

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\ .$$

Perkalian matriks tidak komutatif pada umumnya, tetapi sifat-sifat berikut berlaku, asalkan ukuran matriks adalah dari urutan yang tepat :

a. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$

b. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$

c. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\mathrm{B}\boldsymbol{C}$

Definisi 8.

Transpose dari suatu matriks $\boldsymbol{A}$ yaitu $\boldsymbol{A}'$ merupakan matriks yang diperoleh dengan menukarkan baris-baris dan kolom-kolomnya (Stevens, 2009 : 44). Baris pertama matriks $\boldsymbol{A}$ menjadi kolom pertama dari matriks $\boldsymbol{A}'$ dan baris kedua matriks $\boldsymbol{A}$ menjadi kolom kedua dari matriks $\boldsymbol{A}'$. Secara umum, jika matriks $\boldsymbol{A}$ berukuran

$r \times s$, maka ukuran dari matriks $\boldsymbol{A}'$ adalah $s \times r$. Biasanya transpose $\boldsymbol{A}$ juga dapat dinyatakan oleh $\boldsymbol{A}^t$.

Operasi transpose memenuhi hubungan dasar berikut :

a. $(\boldsymbol{A}^t)^t = \boldsymbol{A}$

b. $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^t = \boldsymbol{A}^t + \boldsymbol{B}^t$

c. $(k\boldsymbol{A})^t = k\boldsymbol{A}^t$, *dengan k adalah sebarang skalar*.

d. $(\boldsymbol{AB})^t = \boldsymbol{B}^t\boldsymbol{A}^t$

Definisi 9.

Determinan dari matriks kuadrat berukuran $k \times k$ yaitu $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}$, dinotasikan oleh $|\boldsymbol{A}|$ atau det($\boldsymbol{A}$), adalah skalar

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{cases} a_{11}, & jika\ k = 1 \\ \sum_{j=1}^{k} a_{1j}\left|\boldsymbol{A}_{1j}\right|(-1)^{1+j}, & jika\ k > 1 \end{cases}$$

dengan $\boldsymbol{A}_{1j}$ adalah matriks $(k - 1) \times (k - 1)$ yang diperoleh dengan menghapus baris pertama dan kolom ke-j dari $\boldsymbol{A}$ (Johnson & Wichern, 2007 : 93). Demikian juga, $|\boldsymbol{A}| = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\left|\boldsymbol{A}_{ij}\right|(-1)^{i+j}$, dengan baris ke-$i$ ditempatkan di baris pertama.

Definisi 10.

Matriks $\boldsymbol{B}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$ dinamakan *invers* dari $\boldsymbol{A}$ dan dinotasikan dengan $\boldsymbol{A}^{-1}$.Pada kenyataannya, jika $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$ atau $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$,maka $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$, dan hasil kali keduanya harus sama dengan $\boldsymbol{I}$.

Secara umum, invers $\boldsymbol{A}$ diperoleh dari

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} adj(\boldsymbol{A})$$

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah sebarang matriks $n \times n$ dan C_{ij} adalah kofaktor a_{ij}, maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

dinamakan *matriks kofaktor* $\boldsymbol{A}$ (Anton, 1987 : 81). C_{ij} diperoleh dari $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dengan M_{ij} merupakan *minor* dari a_{ij} dan didefinisikan menjadi determinan submatriks setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihapus dari $\boldsymbol{A}$. Transpose dari matriks kofaktor inilah yang dinamakan dengan *adjoin* $\boldsymbol{A}$ dan dinotasikan dengan $adj(\boldsymbol{A})$.

Misalkan $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ matriks kuadrat berukuran sama, dan misal mempunyai invers, maka

a. $(\boldsymbol{A}^{-1})^t = (\boldsymbol{A}^t)^{-1}$

b. $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

Determinan mempunyai sifat-sifat sebagai berikut.

Misalkan $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ matriks kuadrat berukuran $k \times k$.

a. $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^t|$

b. Jika setiap elemen dari sebuah baris atau kolom dari $\boldsymbol{A}$ adalah nol, maka $|\boldsymbol{A}| = 0$

c. Jika ada dua baris atau kolom dari $\boldsymbol{A}$ yang identik, maka $|\boldsymbol{A}| = 0$

d. Jika $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, maka $\boldsymbol{A}$ dikatakan *nonsingular*

e. Jika $\boldsymbol{A}$ *nonsingular*, maka $|\boldsymbol{A}| = 1/|\boldsymbol{A}^{-1}|$; yaitu $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}| = 1$

f. $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$

g. $|c\boldsymbol{A}| = c^k\,|\boldsymbol{A}|$, dimana c adalah skalar.

Definisi 11.

Menurut Kollo & Rosen (2005 : 8), vektor-vektor $v_1, v_2, \cdots, v_r$ dikatakan bebas linear, jika persamaan

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r = 0,$$

hanya memiliki solusi trivial, yaitu $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_r = 0$. Selain itu, maka dikatakan tidak bebas linear.

Definisi 12.

Misalkan $\boldsymbol{A}$ merupakan sebuah matriks berukuran $m \times n$. Rank matriks $\boldsymbol{A}$ dilambangkan $r(\boldsymbol{A})$ adalah banyaknya vektor baris atau kolom yang bebas linear dalam matriks $\boldsymbol{A}$. Untuk matriks $\boldsymbol{A}$ berukuran $m \times n$ maka $r(\boldsymbol{A}) \leq \min(m,n)$.

Definisi 13.

Misal $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}$, *trace* dari sebuah matriks $\boldsymbol{A}$ berukuran $n \times n$, ditulis tr($\boldsymbol{A}$), adalah jumlah dari elemen-elemen diagonal, yaitu $tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (Rencher, 1998 : 410).

Jika $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ matriks $n \times n$ dan c adalah skalar.

a. tr $(c\boldsymbol{A}) = c$ tr $(\boldsymbol{A})$

b. tr $(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B})$ = tr $(\boldsymbol{A}) \pm$ tr $(\boldsymbol{B})$

c. tr $(\boldsymbol{AB})$ = tr $(\boldsymbol{BA})$

d. jika $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{pmatrix}$,maka $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AA}') = \sum_{i=1}^{n} a_i' a_i$

e. jika $\boldsymbol{A} = (a_{(1)}, a_{(2)}, \dots, a_{(n)})$, maka tr $(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{(i)}' a_{(i)}$.

Definisi 14.

Misal $\boldsymbol{A}$ suatu matriks kuadrat $k \times k$ dan $\boldsymbol{I}$ matriks identitas $k \times k$, maka skalar λ_1, λ_2, ... ,λ_k yang memenuhi persamaan polinomial $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = 0$ dinamakan *nilai eigen* (atau akar karakteristik) dari matriks $\boldsymbol{A}$. Persamaan $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = 0$ (sebagai fungsi dari λ) dinamakan persamaan karakteristik (Johnson & Wichern, 2007 : 97-99).

Misal $\boldsymbol{A}$ suatu matriks kuadrat berukuran $k \times k$ dan misal λ merupakan nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$. Jika $\boldsymbol{x}_{(k\times 1)}$ adalah vektor tak nol ($\boldsymbol{x}_{(k\times 1)} \neq \boldsymbol{0}_{(k\times 1)}$) sehingga

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$$

maka $\boldsymbol{x}$ dikatakan menjadi *vektor eigen* (vektor karakteristik) dari matriks $\boldsymbol{A}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Untuk menentukan vektor eigen sehingga memiliki kesatuan panjang yaitu jika $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$, maka $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}/\sqrt{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}$ sebagai vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

B. Vektor Rata-rata & Matriks Kovarian

Vektor acak adalah vektor yang elemen-elemennya terdiri dari p variabel acak dapat ditulis sebagai $\boldsymbol{X}' = [X_1, X_2, \dots, X_p]$. Vektor rata-rata adalah vektor yang elemen-elemennya terdiri dari p rata-rata variabel acak dapat ditulis sebagai berikut :

$$\underset{(p\times 1)}{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}$$

Mean dan kovarian dari $p \times 1$ vektor acak $\boldsymbol{X}$ dapat ditetapkan sebagai matriks (Johnson & Wichern, 2007 : 69-70). Nilai harapan dari setiap elemen yang terkandung dalam vektor rata-rata $\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{X})$, dan p variansi σ_{ii} dan $p(p -$

1)/2 kovarian yang berbeda $\sigma_{ik}(i < k)$ terkandung dalam matriks varian-kovarian simetris $\boldsymbol{\Sigma} = E(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})'$. Secara khusus,

$$E(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu}$$

dan

$$\boldsymbol{\Sigma} = E[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})']$$

$$= E\left[\begin{pmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \\ \vdots \\ X_P - \mu_P \end{pmatrix} (X_1 - \mu_1, \quad X_2 - \mu_2, \quad \cdots, \quad X_P - \mu_P)\right]$$

$$= E\begin{bmatrix} (X_1 - \mu_1)^2 & (X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2) & \cdots & (X_1 - \mu_1)(X_P - \mu_P) \\ (X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1) & (X_2 - \mu_2)^2 & \cdots & (X_2 - \mu_2)(X_P - \mu_P) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_p - \mu_P)(X_1 - \mu_1) & (X_P - \mu_P)(X_2 - \mu_2) & \cdots & (X_P - \mu_P)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E(X_1 - \mu_1)^2 & E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] & \cdots & E[(X_1 - \mu_1)(X_P - \mu_P)] \\ E[(X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1)] & E(X_2 - \mu_2)^2 & \cdots & E[(X_2 - \mu_2)(X_P - \mu_P)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(X_P - \mu_P)(X - \mu_1)] & E[(X_P - \mu_P)(X_2 - \mu_2)] & \cdots & E(X_P - \mu_P)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

C. Distribusi Normal Multivariat

Densitas normal multivariat adalah bentuk umum dari densitas normal untuk dimensi $p \geq 2$ (Johnson & Wichern, 2007 : 149-150). Densitas normal berdimensi p untuk vektor acak $\boldsymbol{X}' = [X_1, X_2, \dots, X_p]$ mempunyai bentuk

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}$$

dengan $-\infty < x_i < \infty, i = 1,2, \dots, p$ dan densitas normal dimensi-p dinyatakan dengan $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ yang merupakan analogi dari densitas normal kasus univariat.

`Jika $X_1, X_2, \dots, X_p$ berdistribusi normal *multivariate* maka $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})$ berdistribusi χ_p^2. Berdasarkan sifat ini maka pemeriksaan distribusi multinormal dapat dilakukan dengan cara membuat plot *chi-square* dari nilai $d_j^2 = (\boldsymbol{x}_j - \overline{\boldsymbol{x}})' \boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{x}_j - \overline{\boldsymbol{x}}), j = 1,2, \dots, n$.

Langkah-langkah membangun plot *chi-square* (Johnson & Wichern, 2007 : 182-187) :

1. Menghitung nilai jarak kuadrat dengan rumus :

$$d_j^2 = (\boldsymbol{x}_j - \overline{\boldsymbol{x}})' \boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{x}_j - \overline{\boldsymbol{x}}), j = 1,2, \dots, n$$

   dengan : $\boldsymbol{x}_j$ = vektor pengamatan ke-j

   d_j^2 = nilai jarak kuadrat ke-j

   $\boldsymbol{S}^{-1}$ = invers matriks varian-kovarian

2. Mengurutkan nilai jarak kuadrat tersebut dari yang terkecil sampai terbesar yaitu $d_{(1)}^2 \leq d_{(2)}^2 \leq \cdots \leq d_{(n)}^2$.

3. Menyusun pasangan $\left(q_{c.p}\left(\frac{j-\frac{1}{2}}{n}\right), d_{(j)}^2\right)$, dengan $q_{c.p}\left(\frac{j-\frac{1}{2}}{n}\right)$ merupakan kuantil ke $100\left(\frac{j-\frac{1}{2}}{n}\right)$ dari distribusi *chi-square* dengan derajat kebebasan *p*. Secara umum $q_{c.p}\left(\frac{j-\frac{1}{2}}{n}\right) = \chi_p^2\left(\frac{n-j+\frac{1}{2}}{n}\right)$.

Data dikatakan berasal dari populasi berdistribusi normal multivariat apabila sekitar 50% nilai $d_j^2 \leq q_{c.p}(0,5)$ atau plot *chi-square* cenderung membentuk garis lurus.

D. Uji Kesamaan Matriks Kovarian

Salah satu uji yang umum digunakan untuk kesamaan matriks kovarian adalah uji *Box M* (Rencher, 1998 : 138-140). Dengan *g* populasi, hipotesis nol nya adalah H_0 : $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = \ldots = \boldsymbol{\Sigma}_g$ dan hipotesis H_1 adalah $\exists \boldsymbol{\Sigma}_i \neq \boldsymbol{\Sigma}_j$ dengan $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, g$.

Statistik uji yang digunakan adalah

$$M = \left[\sum_\ell (n_\ell - 1)\right] ln\left|\boldsymbol{S}_{gab.}\right| - \sum_\ell \left[(n_\ell - 1) ln|\boldsymbol{S}_\ell|\right] \tag{2.1}$$

dengan

$$\boldsymbol{S}_{gab.} = \frac{1}{\sum_\ell (n_\ell - 1)} \left\{(n_1 - 1)\boldsymbol{S}_1 + (n_2 - 1)\boldsymbol{S}_2 + \cdots + \left(n_g - 1\right)\boldsymbol{S}_g\right\} \tag{2.2}$$

dengan n_ℓ merupakan ukuran sampel untuk grup ke-ℓ, $\boldsymbol{S}_\ell$ merupakan matriks kovarian sampel grup ke-ℓ dan $\boldsymbol{S}_{gab.}$ merupakan kombinasi matriks kovarian sampel.

M dapat didekati dengan distribusi F dengan aturan $F = -2b_1 \ln M$ jika $c_2 > c_1^2$ atau $F = \frac{-a_2 b_2 \ln M}{a_1(1+2b_2 \ln M)}$ jika $c_2 < c_1^2$ dengan :

$$c_1 = \left[\sum_{i=1}^{g} \frac{1}{v_i} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{g} v_i}\right] \left[\frac{2p^2+3p-1}{6(p+1)(g-1)}\right],$$

dengan $v_i = n_i - 1$, *p* banyak variabel dan *g* banyak grup dan

$$c_2 = \left[\frac{(p-1)(p+2)}{6(g-1)}\right] \left[\sum_{i=1}^{g} \frac{1}{v_i} - \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{g} v_i\right)^2}\right],$$

$$a_1 = \tfrac{1}{2}(g-1)p(p+1) \text{ ; } a_2 = \frac{a_1+2}{|c_2+c_1^2|}$$

$$b_1 = \frac{1-c_1-a_1/a_2}{a_1} \text{ ; } b_2 = \frac{1-c_1-2/a_2}{a_2}$$

Kriteria keputusannya adalah pada taraf signifikansi α, tolak H_0 jika $F_{hitung} > F_{tabel}$ dengan derajat bebas (a_1,a_2).

E. Jaringan Syaraf Tiruan (*Artificial Neural Network*)

Model *neural network* didefinisikan sebagai suatu sistem pemrosesan informasi yang mempunyai karakteristik menyerupai jaringan saraf manusia. Model *neural network* tercipta sebagai suatu generalisasi model matematis dari pemahaman manusia (*human cognition*) yang didasarkan atas asumsi sebagai berikut (Fausett, 1994 : 3) :

1. Pemrosesan informasi terjadi pada elemen sederhana yang disebut neuron.
2. Isyarat atau sinyal mengalir di antara sel saraf/neuron melalui suatu sambungan penghubung.
3. Setiap sambungan penghubung memiliki bobot yang bersesuaian. Bobot ini akan digunakan untuk menggandakan/mengalikan isyarat yang dikirim melaluinya.
4. Setiap sel saraf akan menerapkan fungsi aktivasi terhadap isyarat hasil penjumlahan berbobot yang masuk kepadanya untuk menentukan isyarat keluarannya.

Dengan tingkat kemampuan yang sangat baik, beberapa aplikasi model *neural network* sangat cocok untuk diterapkan pada :

1. Klasifikasi, memilih suatu *input* data ke dalam satu kategori tertentu yang ditetapkan.
2. Asosiasi, menggambarkan suatu objek secara keseluruhan hanya dengan sebuah bagian dari objek lain.
3. *Self organizing*, kemampuan untuk mengolah data-data *input* tanpa harus memiliki data sebagai target.

4. Optimasi, menemukan suatu jawaban atau solusi yang paling baik sehingga seringkali dengan meminimalisasikan suatu fungsi biaya (*optimizer*).

Jaringan saraf biologis merupakan kumpulan dari sel-sel saraf (*neuron*). Neuron mempunyai tugas mengolah informasi. Komponen-komponen utama dari sebuah neuron dapat dikelompokkan menjadi tiga bagian, yaitu (Puspitaningrum, 2006 : 2) :

1. *Dendrit*. Dendrit bertugas untuk menerima informasi.
2. *Badan sel* (*soma*). Badan sel berfungsi sebagai tempat pengolahan informasi.
3. *Akson* (*neurit*). Akson mengirimkan impuls-impuls ke sel saraf lainnya.

Lapisan-lapisan penyusun model *neural network* dapat dibagi menjadi tiga, yaitu :

1. Lapisan *input*

   Node-node di dalam lapisan *input* disebut unit-unit *input*. Unit-unit *input* menerima *input* dari dunia luar. *Input* yang dimasukkan merupakan penggambaran dari suatu masalah.

2. Lapisan tersembunyi

   Node-node di dalam lapisan tersembunyi disebut unit-unit tersembunyi. *Output* dari lapisan ini tidak secara langsung dapat diamati.

3. Lapisan *output*

   Node-node pada lapisan *output* disebut unit-unit *output*. Keluaran atau *output* dari lapisan ini merupakan *output* model *neural network* terhadap suatu permasalahan.

Karakteristik model *neural network* ditentukan oleh :

1. Pola hubungan antar neuron (arsitektur jaringan)

   Seringkali sangat tepat memvisualisasikan neuron sebagai lapisan. Umumnya, neuron-neuron pada lapisan yang sama berkelakuan sama. Faktor kunci untuk menentukan perilaku dari sebuah neuron adalah dengan fungsi aktivasinya dan pola koneksi dengan neuron yang lain sehingga neuron dapat mengirim dan menerima sinyal. Penyusunan neuron pada lapisan-lapisan dan pola koneksinya dalam dan antar lapisan disebut arsitektur jaringan. Adapun jenis arsitektur jaringan yang sering dipergunakan yaitu (Fausett, 1994 : 12-14) :

   a. Jaringan berlapis tunggal (*single layer net*)

      Jaringan berlapis tunggal mempunyai satu lapisan bobot terkoneksi. Pada lapisan ini, unit *input* dapat dibedakan dengan unit *output*. Dimana unit *input* merupakan unit yang menerima sinyal dari dunia luar sedangkan unit *output* adalah unit dimana respon dari jaringan dapat terlihat.

   b. Jaringan berlapis banyak (*multilayer net*)

      Jaringan berlapis banyak adalah jaringan dengan satu atau lebih lapisan diantara lapisan *input* dan lapisan *output* yang biasa disebut lapisan tersembunyi (*hidden layer*). Jaringan berlapis banyak dapat memecahkan masalah yang lebih kompleks daripada jaringan berlapis tunggal, namun pada pelatihannya akan lebih sulit. Pada beberapa kasus, pelatihan pada jaringan ini lebih baik karena memungkinkan bagi jaringan untuk memecahkan masalah yang tidak dapat diselesaikan jaringan berlapis tunggal karena jaringan tidak dapat dilatih untuk menampilkan secara benar.

c. Jaringan dengan lapisan kompetitif (*competitif layer net*)

Bentuk lapisan kompetitif merupakan jaringan saraf tiruan yang sangat besar. Interkoneksi antar neuron pada lapisan ini tidak ditunjukkan pada arsitektur seperti jaringan yang lain. Prinsip dari prosesnya adalah yang menang yang mengambil bagiannya.

2. Metode penentuan bobot-bobot (pelatihan atau proses pembelajaran jaringan)

Proses pembelajaran pada model *neural network* antara lain sebagai berikut (Kusumadewi, 2003 : 220-221) :

a. Pembelajaran terawasi (*supervised learning*)

Metode pembelajaran pada *neural network* disebut terawasi jika *output* yang diharapkan telah diketahui sebelumnya. Misalkan terdapat jaringan saraf yang akan digunakan untuk mengenali pasangan pola. Pada proses pembelajaran, satu pola *input* akan diberikan ke satu neuron pada lapisan *input*. Pola ini akan dirambatkan di sepanjang jaringan saraf hingga sampai ke neuron pada lapisan *output*. Lapisan *output* ini akan membangkitkan pola *output* yang nantinya akan dicocokkan dengan pola *output* targetnya. Apabila terjadi perbedaan antara pola *output* hasil pembelajaran dengan pola target, maka disini akan muncul *error*. Apabila nilai *error* ini masih cukup besar, mengindikasikan bahwa masih perlu dilakukan lebih banyak pembelajaran lagi.

b. Pembelajaran tak terawasi (*unsupervised learning*)

Pada metode pembelajaran yang tak terawasi ini tidak memerlukan target *output*. Pada metode ini, tidak dapat ditentukan hasil yang seperti apakah yang diharapkan selama proses pembelajaran. Selama proses pembelajaran, nilai bobot disusun dalam suatu *range* tertentu tergantung pada nilai *input* yang diberikan. Tujuan pembelajaran ini adalah mengelompokkan unit-unit yang hampir sama dalam suatu area tertentu.

3. Fungsi Aktivasi

Fungsi aktivasi akan menentukan *output* suatu neuron (mengubah sinyal *input* menjadi sinyal *output*) yang akan dikirim ke neuron lain (Fausett, 1994 : 17). Dalam jaringan saraf tiruan, fungsi aktivasi berguna untuk mengaktifkan neuron yang dipakai pada jaringan tersebut. Fungsi aktivasi merupakan bagian penting dalam tahapan perhitungan keluaran dari suatu algoritma. Beberapa fungsi aktivasi yang disediakan pada *toolbox* MATLAB diantaranya terdapat pada tabel (Hagan *et.al*, 2002 : 2-6) :

Tabel 2.1 Fungsi Aktivasi

<table>
<tr><th>Nama Fungsi</th><th colspan="2">Hubungan Input / Output</th><th>Fungsi MATLAB</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Hard Limit</td><td>$y = 0$</td><td>$x < 0$</td><td rowspan="2">hardlim</td></tr>
<tr><td>$y = 1$</td><td>$x \geq 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Symmetrical Hard Limit</td><td>$y = -1$</td><td>$x < 0$</td><td rowspan="2">hardlims</td></tr>
<tr><td>$y = +1$</td><td>$x \geq 0$</td></tr>
<tr><td>Linear</td><td colspan="2">$y = x$</td><td>purelin</td></tr>
</table>

Saturating Linear	$y = 0$	$x < 0$	satlin
	$y = x$	$0 \le x \le 1$	
	$y = 1$	$x > 1$	
Symmetric Saturating Linear	$y = -1$	$x < -1$	satlins
	$y = x$	$-1 \le x \le 1$	
	$y = 1$	$x > 1$	
Log-Sigmoid	$y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$		logsig
Hyperbolic Tangent Sigmoid	$y = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$		tansig
Positive Linear	$y = 0$	$x < 0$	poslin
	$y = x$	$0 \le x$	
Competitive	$y = 1$	neuron dengan x minimum	compet
	$y = 0$	untuk neuron yang lain	

F. Diabetes Mellitus (DM)

1. Definisi Diabetes Mellitus

Menurut *American Diabetes Association* (ADA) 2005, diabetes mellitus merupakan suatu kelompok penyakit metabolik dengan karakteristik hiperglikemia yang terjadi karena kelainan sekresi insulin, kerja insulin atau kedua-duanya. Hiperglikemia kronik pada diabetes berhubungan dengan kerusakan jangka panjang, disfungsi atau kegagalan beberapa organ tubuh, terutama mata, ginjal, syaraf, jantung dan pembuluh darah (Soegondo dkk, 2013 : 19).

Diabetes adalah suatu sindroma yang ditandai dengan peningkatan kadar glukosa darah disebabkan oleh karena adanya penurunan sekresi insulin. Pada DM tipe I penurunan sekresi itu disebabkan oleh karena kerusakan sel beta akibat reaksi otoimun sedangkan pada DM tipe II penurunan sekresi itu disebabkan oleh berkurangnya fungsi sel beta yang progresif akibat glukotoksisitas, tumpukan amilod dan faktor-faktor lain yang disebabkan oleh resitensi insulin disamping faktor usia dan genetik.

2. Klasifikasi Diabetes Mellitus

Klasifikasi diabetes mellitus yang sesuai dengan anjuran klasifikasi DM *American Diabetes Association* adalah sebagai berikut (Hasdianah, 2012 : 17-18) :

a. Diabetes Mellitus tipe I (*Insulin dependent diabetes mellitus*)

DM tipe I ini adalah mereka yang menggunakan insulin oleh karena tubuh tidak dapat menghasilkan insulin. Pada DM tipe I, badan kurang atau tidak menghasilkan insulin, terjadi karena masalah genentik, virus atau penyakit autoimun. Injeksi insulin diperlukan setiap hari untuk pasien DM tipe I. Diabetes tipe I disebabkan oleh faktor genetika (keturunan), faktor imunologik dan faktor lingkungan. DM tipe I sering terjadi pada usia muda termasuk anak-anak.

b. Diabetes Mellitus tipe II (*Insulin requirement diabetes mellitus*)

DM tipe II adalah mereka yang membutuhkan insulin sementara atau seterusnya. Pankreas tidak menghasilkan cukup insulin agar kadar gula darah normal, oleh karena badan tidak dapat respon terhadap insulin. Penyebabnya tidak hanya satu yaitu akibat resistensi insulin yaitu banyaknya jumlah insulin tapi tidak berfungsi. Bisa juga karena kekurangan insulin atau karena gangguan sekresi atau produksi insulin. DM tipe II menjadi semakin umum oleh karena faktor resikonya yaitu obesitas dan kekurangan olahraga. Faktor yang mempengaruhi timbulnya diabetes mellitus yaitu usia lebih dari 40 tahun, obesitas, riwayat keluarga.

3. Gejala dan Tanda-tanda Penyakit Diabetes Mellitus

Gejala dan tanda-tanda penyakit diabetes mellitus dapat digolongkan menjadi gejala akut dan gejala kronik (Hasdianah, 2012 : 37-38).

a. Gejala Akut Penyakit Diabetes Mellitus

Gejala penyakit DM dari satu penderita ke penderita lain bervariasi, bahkan mungkin tidak menunjukkan gejala apapun sampai saat tertentu.

Pada permulaan gejala yang ditunjukkan meliputi banyak makan (polyphagia), banyak minum (polydipsia), dan banyak kencing (polyuria). Bila keadaan tersebut tidak segera diobati, akan timbul gejala lain seperti nafsu makan mulai berkurang atau berat badan turun dengan cepat (turun 5-10 kg dalam waktu 2-4 minggu), mudah lelah, bila tidak lekas diobati, akan timbul rasa mual, bahkan penderita akan jatuh koma yang disebut dengan koma diabetik.

b. Gejala Kronik Diabetes Mellitus

Gejala kronik yang sering dialami oleh penderita diabetes mellitus adalah kesemutan, kulit terasa panas, atau seperti tertusuk-tusuk jarum, rasa tebal di kulit, kram, capai, mudah mengantuk, mata kabur (biasanya sering ganti kacamata), gatal di sekitar kemaluan terutama wanita, gigi mudah goyah dan mudah lepas, kemampuan seksual menurun, bahkan impotensi, serta para ibu hamil sering mengalami keguguran atau kematian janin dalam kandungan, atau dengan bayi berat lahir lebih dari 4 kg.

4. Faktor-faktor Risiko Diabetes Mellitus

Umumnya diabetes mellitus disebabkan oleh rusaknya sebagian kecil atau sebagian besar dari sel-sel betha dari pulau-pulau Langerhans pada pankreas yang berfungsi menghasilkan insulin, akibatnya terjadi kekurangan insulin (Hasdianah, 2012 : 9-11).

Disamping itu diabetes mellitus juga dapat terjadi karena gangguan terhadap fungsi insulin dalam memasukkan glukosa kedalam sel. Gangguan itu dapat terjadi karena kegemukan atau sebab lain yang belum diketahui.

Diabetes mellitus atau lebih dikenal dengan istilah penyakit kencing manis mempunyai beberapa faktor risiko atau faktor pemicu penyakit tersebut, antara lain :

a. Pola makan

Makan secara berlebihan dan melebihi jumlah kadar kalori yang dibutuhkan oleh tubuh dapat memacu timbulnya diabetes mellitus.

Konsumsi makan yang berlebihan dan tidak diimbangi dengan sekresi insulin dalam jumlah yang memadai dapat menyebabkan kadar gula dalam darah meningkat dan pastinya akan menyebabkan diabetes mellitus.

b. Obesitas (kegemukan)

Orang gemuk dengan berat badan lebih dari 90 kg cenderung memiliki peluang lebih besar untuk terkena penyakit diabetes mellitus.

c. Faktor genetis

Diabetes mellitus dapat diwariskan dari orang tua kepada anak. Gen penyebab diabetes mellitus akan dibawa oleh anak jika orang tuanya menderita diabetes mellitus. Pewarisan gen ini dapat sampai ke cucunya bahkan cicitnya walaupun risikonya sangat kecil.

d. Bahan-bahan kimia dan obat-obatan

Bahan-bahan kimia dapat mengiritasi pankreas yang menyebabkan radang pankreas, radang pada pankreas akan mengakibatkan fungsi pankreas menurun sehingga tidak ada sekresi hormon-hormon untuk proses metabolisme tubuh termasuk insulin. Segala jenis residu obat yang terakumulasi dalam waktu yang lama dapat mengiritasi pankreas.

e. Penyakit dan infeksi pada pankreas

Infeksi mikroorganisme dan virus pada pankreas juga dapat menyebabkan radang pankreas yang otomatis akan menyebabkan fungsi pankreas turun sehingga tidak ada sekresi hormon-hormon untuk proses metabolisme tubuh termasuk insulin. Penyakit seperti kolesterol tinggi dan dislipidemia dapat meningkatkan risiko terkena diabetes mellitus.

f. Pola hidup

Pola hidup juga sangat mempengaruhi faktor penyebab diabetes mellitus. Jika orang malas berolahraga memiliki risiko lebih tinggi untuk terkena penyakit diabetes mellitus karena olahraga berfungsi untuk membakar kalori yang berlebihan didalam tubuh. Kalori yang tertimbun didalam tubuh merupakan faktor utama penyebab diabetes mellitus selain disfungsi pankreas.

g. Kadar kortikosteroid yang tinggi.
h. Kehamilan diabetes gestasional, akan hilang setelah melahirkan.
i. Obat-obatan yang dapat merusak pankreas.
j. Racun yang mempengaruhi pembentukan atau efek dari insulin.

Faktor-faktor di atas adalah sebagian contoh dari penyebab diabetes mellitus, sebenarnya masih banyak sekali faktor-faktor pemicu diabetes mellitus. Dengan menerapkan pola makan dan pola hidup yang sehat merupakan pencegahan awal penyakit diabetes mellitus.

G. Pengenalan *Software* SPSS dan MATLAB

1. SPSS (*Statistical Product and Service Solution*)

SPSS merupakan salah satu dari berbagai program aplikasi komputer yang berfungsi untuk menganalisis data, melakukan perhitungan statistik baik untuk statistik parametrik maupun nonparametrik. SPSS aplikasi berbasis *Windows* mempunyai beberapa versi yang secara terus-menerus mengalami perubahan dimulai dari SPSS 6.0 sampai saat ini SPSS 19 (Ghozali, H. I., 2011 : 15). SPSS dapat digunakan sebagai media pengolahan data menyediakan berbagai perintah yang memungkinkan proses pemasukan data, pembuatan grafik, analisis statistik, dan lainnya.

2. MATLAB (*Matrix Laboratory*)

MATLAB adalah sebuah program untuk analisis dan komputasi numerik dan merupakan suatu bahasa pemrograman matematika lanjutan yang dibentuk dengan dasar pemikiran menggunakan sifat dan bentuk matriks. MATLAB telah berkembang menjadi sebuah pemrograman yang canggih yang berisi fungsi-fungsi untuk melakukan tugas pengolahan sinyal, aljabar linear, dan kalkulasi matematis lainnya. MATLAB juga berisi *toolbox* yang berisi fungsi-fungsi tambahan untuk aplikasi khusus (elista.akprind.ac.id/upload/files/4544_Modul2.pdf).