

Grup-Grup Non-Isomorfik Berorder 16

Oleh
Agung Sri Wahyono
NIM. 013114028

ABSTRAK

Penulisan tugas akhir ini bertujuan untuk mencari representasi grup-grup non-isomorfik berorder 16. Metode yang digunakan dalam tulisan ini adalah metode penggabungan koset dan hasil kali langsung.

Jika G adalah grup abelian berorder 16, maka G merupakan perkalian langsung (*Direct Product*) dari grup-grup siklik berorder faktor dari 16. Jika G adalah grup non-abelian berorder 16, maka periode dari elemen G tidak mungkin sama dengan 16, karena jika elemen G mempunyai periode 16, maka G adalah grup siklik berorder 16. Setiap elemen G juga tidak mungkin berperiode 2, karena jika setiap elemen G berorder 2, maka $(ab)^2 = e$, untuk $\forall a, b \in G$ dengan konsekuensi $ba = a^2bab^2 = a(abab)b = a(ab)^2b = ab$, didapatkan grup yang abelian. Periode yang mungkin dari elemen G adalah 8, 4, 2 (tetapi tidak semuanya 2) dan 1. Selanjutnya dibentuk subgrup normal yang dibangun oleh elemen berorder 8, 4 dan 2 yang merupakan periode yang mungkin dari elemen-elemen grup order 16. Subgrup normal-subgrup normal tersebut akan membentuk koset yang mempartisi grup G , dengan menyelidiki semua kemungkinan perkalian koset tersebut dengan elemen G yang bukan elemen dari koset tersebut, maka akan didapatkan representasi grup G . Misalkan, jika $a \in G$ sebuah elemen G yang berorder 8, diambil $H = \langle a \rangle$, dengan H subgrup normal dari G , maka H berindeks 2 dalam G , sehingga $G = H \cup Hb$, dengan $b \in G$. Elemen $b^2 \in H$, karena jika tidak terdapat 3 koset dalam G , yaitu H, Hb, Hb^2 . Hal ini kontradiksi dengan H berindeks 2. Terdapat 8 kemungkinan untuk b^2 , dengan menyelidiki semua kemungkinan dari b^2 , maka akan didapatkan persamaan grup yang mempunyai elemen sebanyak 16. Dengan langkah yang sama dicari grup-grup berorder 16 yang dibangun oleh generator yang mempunyai periode 4 dan 2. Dari semua kemungkinan yang ada, diselidiki kemungkinan mana yang memberikan representasi suatu grup, selanjutnya dari representasi tersebut dibentuk tabel perkalian grup. Dari grup-grup yang didapatkan selanjutnya dicari grup-grup yang saling isomorfis. Suatu grup (G, o) dikatakan isomorfik dengan $(G', *)$ dan dinotasikan dengan $(G, o) \cong (G', *)$, jika terdapat pemetaan satu-satu f dari G onto ke G' yang memenuhi sifat $f(aob) = f(a) * f(b)$, $\forall a, b \in G$, dengan kata lain dua grup saling isomorfis jika terdapat *homomorfisme* bijektif dari G ke G' .

Pada akhirnya dengan menggunakan metode penggabungan koset ini ditemukan 14 grup non-isomorfik berorder 16, sembilan dari grup-grup tersebut adalah grup non-abelian (tidak komutatif) dan lima lainnya adalah grup abelian (komutatif).