

**MODEL ANTRIAN SATU *SERVER* DENGAN POLA KEDATANGAN
BERKELOMPOK (*BATCH ARRIVAL*)**

SKRIPSI

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Yogyakarta

untuk memenuhi sebagian persyaratan

guna memperoleh gelar Sarjana Sains



Oleh

Anaviroh

NIM. 07305144027

**JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA**

2011

**MODEL ANTRIAN SATU *SERVER* DENGAN POLA KEDATANGAN
BERKELOMPOK (*BATCH ARRIVAL*)**

SKRIPSI

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Yogyakarta

untuk memenuhi sebagian persyaratan

guna memperoleh gelar Sarjana Sains



Oleh

Anaviroh

NIM. 07305144027

**JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA**

2011

PERSETUJUAN

**Model Antrian Satu *Server* dengan Pola Kedatangan Berkelompok
(*Batch Arrival*)**

Oleh

Anaviroh

NIM. 07305144027

SKRIPSI

Telah disetujui pada tanggal 25 Maret 2011

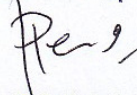
Untuk diujikan didepan Panitia Penguji Skripsi Prodi Matematika

Jurusan Pendidikan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Yogyakarta

Pembimbing



Retno Subekti, M.Sc

NIP.19811116200512002

SKRIPSI

MODEL ANTRIAN SATU *SERVER* DENGAN POLA KEDATANGAN BERKELOMPOK (*BATCH ARRIVAL*)

Disusun oleh :

Anaviroh

07305144027

Telah diujikan di depan dewan Penguji Skripsi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Yogyakarta pada tanggal 5 April 2011 dan dinyatakan telah memenuhi syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains.

Susunan Dewan Penguji

Nama	Jabatan	Tanda Tangan	Tanggal
Retno Subekti, M.Sc NIP. 198111162005012002	Ketua Penguji		13/4/2011
Tuharto, M.Si NIP. 196411091990011001	Sekretaris Penguji		13/4/2011
Dr. Sugiman NIP. 196502281991011001	Penguji Utama		12/4/2011
Kismiantini, M.Si NIP. 197908162001122001	Penguji Pendamping		12/4/2011

Yogyakarta, April 2011

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Yogyakarta

Dekan



Dr. Ariswan

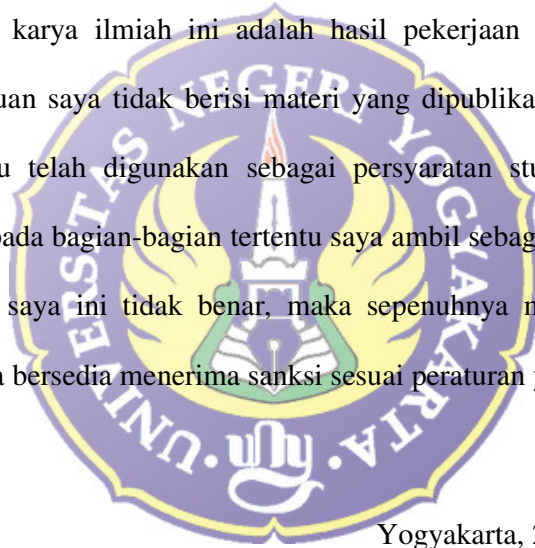
NIP. 195909141988031003

PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini saya:

NAMA : ANAVIROH
NIM : 07305144027
JURUSAN : PENDIDIKAN MATEMATIKA
**JUDUL SKRIPSI : MODEL ANTRIAN SATU *SERVER* DENGAN
POLA KEDATANGAN BERKELOMPOK (*BATCH ARRIVAL*).**

Menyatakan bahwa karya ilmiah ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan sepanjang pengetahuan saya tidak berisi materi yang dipublikasikan atau ditulis oleh orang lain atau telah digunakan sebagai persyaratan studi di perguruan tinggi lain kecuali pada bagian-bagian tertentu saya ambil sebagai acuan. Apabila terbukti pernyataan saya ini tidak benar, maka sepenuhnya menjadi tanggung jawab saya, dan saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan yang berlaku.



Yogyakarta, 25 Maret 2011

Anaviroh

NIM. 07305144027

MOTTO

Dengan menyebut nama Allah Yang Maha Pemurah lagi Maha Penyayang
sungguh langkah yang berat ini terasa ringan karena-Mu.

Doa dan usaha adalah kekuatan terdasyat yang membawa kita menuju
kesuksesan

Jangan membelenggu diri kita dengan pikiran yang rumit.
(Sahid, M.Sc)

Jadikan keberhasilan orang lain sebagai motivasi kita, tetapi tidak perlu
memaksa diri untuk bekerja berdasarkan target orang lain, bekerjalah
berdasarkan kemampuan dan target kita sendiri.

Boleh jadi kita membenci sesuatu, padahal ia amat baik bagi kita, dan boleh
jadi pula kita menyukai sesuatu, padahal ia amat buruk bagi kita.
Allah Maha Tau, sedangkan kita tidak mengetahui itu.
(QS. Al Baqarah : 216)

Mintalah pertolongan kepada Allah dengan sabar dan salat, sesungguhnya
Allah beserta orang – orang yang sabar.
(QS. Al Baqarah : 153)

PERSEMBAHAN

Karya kecil ini aku persembahkan untuk:

Ayah dan Bunda tercinta,

Terima kasih atas doa dan dukungan selama ini.

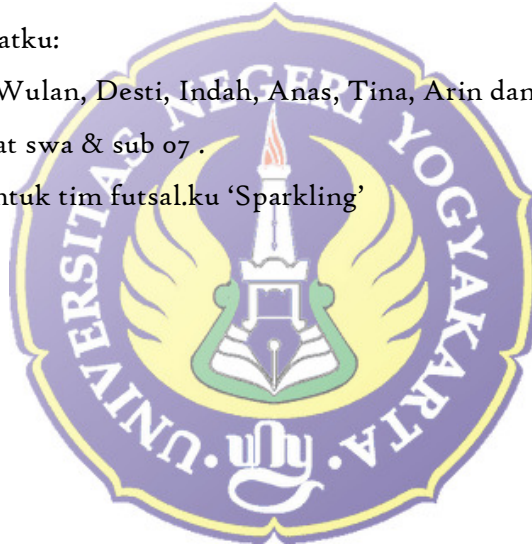
Bang U.un yang selalu menginspirasi,

tanpa lelah selalu memberiku semangat.

Sahabat – sahabatku:

Erlin, Khrisna, Wulan, Desti, Indah, Anas, Tina, Arin dan teman – teman
seperjuangan mat swa & sub 07 .

Tak lupa juga untuk tim futsal.ku ‘Sparkling’



MODEL ANTRIAN SATU *SERVER* DENGAN POLA KEDATANGAN BERKELOMPOK (*BATCH ARRIVAL*)

Oleh
Anaviroh
NIM. 07305144027

ABSTRAK

Antrian dapat terjadi karena banyaknya *customer* yang membutuhkan pelayanan melebihi kapasitas pelayanan. Pola kedatangan *customer* ke dalam sistem antrian ada dua macam, yaitu *customer* datang secara individu dan sekelompok *customer* yang datang secara bersamaan pada satu waktu ke dalam sistem antrian. Pola kedatangan yang kedua ini disebut dengan *batch/ bulk arrival*. Pada skripsi ini akan dibahas tentang antrian dengan pola kedatangan berkelompok, tujuannya untuk mengetahui ukuran keefektifan pada sistem antrian ini.

Antrian yang akan dibahas adalah antrian dengan pola kedatangan berkelompok yang memiliki satu *server* dengan satu garis antrian yang melayani *customer* satu per satu. Pola kedatangan pada antrian ini berdistribusi Poisson dan pola pelayanan berdistribusi Eksponensial dengan disiplin antrian *FIFO* (*First In First Out*). Pada pembahasan dilakukan penurunan formula untuk mendapatkan ukuran keefektifan sistem antrian yang digunakan untuk menganalisis masalah antrian pada contoh implementasi. Kemudian hasil analisis yang diperoleh dibandingkan dengan penyelesaian menggunakan *software WINQSB*. Sebagai implementasi diberikan ilustrasi kasus antrian pada perekaman Surat Pemberitahuan / SPT disuatu kantor pajak. Sistem antrian pada kasus ini adalah beberapa berkas SPT yang telah disortir lalu diserahkan sekaligus kepada seorang staf yang bertugas, kemudian SPT direkam satu per satu.

Model antrian satu *server* dengan pola kedatangan berkelompok yang berdistribusi Poisson dan waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial dinotasikan dengan $(M^X/M/1)$, dengan X adalah variabel acak yang menyatakan ukuran kelompok. Sebagai dasar untuk memperoleh ukuran keefektifan pada model antrian ini adalah dengan menentukan *probability generating function* (PGF) dari banyaknya *customer* dalam sistem. Ukuran keefektifan pada model antrian ini antara lain: nilai harapan banyaknya *customer* dalam sistem (L_s), nilai harapan banyaknya *customer* dalam antrian (L_q), nilai harapan waktu tunggu *customer* dalam sistem (W_s), dan nilai harapan waktu tunggu *customer* dalam antrian (W_q). Hasil analisis data pada contoh implementasi model antrian ini baik menggunakan formula maupun *software WINQSB* menunjukkan hasil yang sama, yaitu diperoleh ukuran keefektifan: $L_s = 66$ SPT, $L_q = 65$ SPT, $W_s = 2,58$ jam, dan $W_q = 2,5$ jam.

KATA PENGANTAR

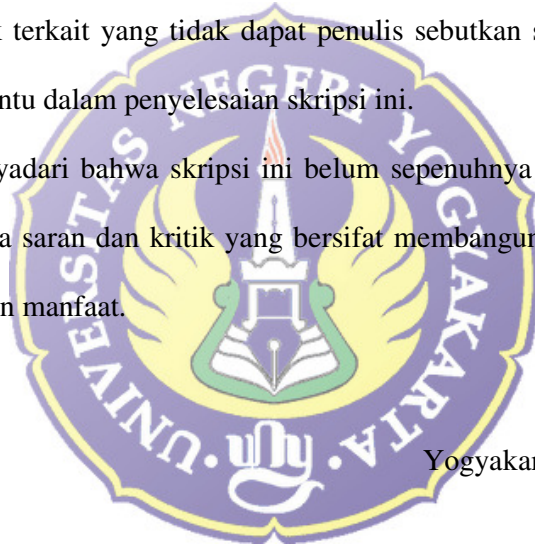
Puji dan syukur kehadiran Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat dan hidayahNya, sehingga penulisan tugas akhir skripsi yang berjudul “Model Antrian Satu *Server* dengan Pola Kedatangan Berkelompok (*Batch Arrival*)” ini dapat diselesaikan.

Penulisan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak, oleh karena itu dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bpk. Dr. Ariswan selaku Dekan FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta, yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk menyelesaikan studi.
2. Bpk. Suyoso, M.Si selaku Pembantu Dekan I FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta, yang telah memberikan kemudahan dalam pengurusan administrasi selama penulisan skripsi.
3. Bpk. Dr. Hartono selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta, yang telah memberikan kemudahan dalam pengurusan administrasi selama penulisan skripsi.
4. Ibu. Atmini Dhoruri, M.S selaku Ketua Program Studi Matematika, yang telah memberikan pengarahan dalam penyusunan tugas akhir skripsi.
5. Bpk. Mustofa, S.Si selaku Penasehat Akademik, yang telah memberikan informasi dan pengarahan selama penulis menempuh kuliah.
6. Ibu. Retno Subekti, M.Sc selaku Dosen Pembimbing, yang telah memberikan pengarahan, nasehat, dan motivasi dalam menyusun skripsi.

7. Bpk. Dr. Sugiman selaku Dosen Penguji, yang telah memberikan saran – saran dalam penulisan skripsi.
8. Ibu. Kismiantini, M.Si selaku Dosen Penguji, yang telah memberikan saran – saran dalam penulisan skripsi.
9. Bpk. Tuharto, M.Si selaku Dosen Penguji, yang telah memberikan saran – saran dalam penulisan skripsi.
10. Seluruh dosen Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta, yang telah memberikan ilmu kepada penulis.
11. Semua pihak terkait yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini belum sepenuhnya sempurna, untuk itu penulis menerima saran dan kritik yang bersifat membangun. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat.



Yogyakarta, 13 April 2011

Anaviroh

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN MOTTO	v
HALAMAN PERSEMBAHAN	vi
ABSTRAK	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR SIMBOL.....	xii
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR GAMBAR	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xv
BAB I. PENDAHULUAN	
A. Latar Belakang Masalah.....	1
B. Rumusan Masalah.....	3
C. Tujuan.....	3
D. Manfaat.....	4
BAB II. LANDASAN TEORI	
A. Proses Antrian.....	5
1. Definisi Proses Antrian.....	5
2. Komponen dasar dalam Proses Antrian	7
B. Notasi Kendall	14
C. Proses Kelahiran dan Kematian (<i>Birth – Death Processes</i>).....	15
D. Distribusi Eksponensial dan Distribusi Poisson	24
E. Distribusi Kedatangan	26
F. Distribusi Kepergian	33
G. Proses Kedatangan dan Kepergian <i>Steady State</i>	39
H. <i>Probability Generating Function (PGF)</i>	42
I. Ukuran Keefektifan Sistem Antrian.....	44

J. Model Antrian ($M/M/1$)	46
K. Penggunaan <i>Software WINQSB</i>	53
BAB III. PEMBAHASAN	
A. Pola Kedatangan Berkelompok (<i>Batch Arrival</i>)	55
B. Proses Kedatangan dan Kepergian pada Sistem Antrian $M^X/M/1$	58
C. Solusi <i>Steady State</i> Model Antrian $M^X/M/1$	61
D. Ukuran Keefektifan Sistem Antrian $M^K/M/1$	69
E. Implementasi	79
BAB V. PENUTUP	
A. Simpulan	91
B. Saran	92
DAFTAR PUSTAKA	94
LAMPIRAN	96



DAFTAR SIMBOL

$P_n(t)$: Peluang terdapat n *customer* dalam sistem pada saat t .

n : Jumlah *customer* dalam sistem antrian.

$\lambda_n \Delta t$: Probabilitas satu kedatangan bila dalam sistem terdapat n *customer*.

λ_n : Laju kedatangan *customer* bila dalam sistem terdapat n *customer*.

$\mu_n \Delta t$: Probabilitas satu kepergian bila dalam sistem terdapat n *customer*.

μ_n : Laju pelayanan *customer* bila dalam sistem terdapat n *customer*.

$X(t)$: Banyaknya kedatangan *customer* pada waktu t .

$Y(t)$: Banyaknya kepergian *customer* pada waktu t .

$N(t)$: Banyaknya *customer* dalam sistem sampai waktu t .

ρ : Faktor utilitas sistem atau peluang *server* sibuk.

$o(\Delta t)$: Suatu fungsi yang memenuhi $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

L_s : Nilai harapan banyak *customer* dalam sistem.

L_q : Nilai harapan banyak *customer* dalam antrian.

W_s : Nilai harapan waktu tunggu *customer* dalam sistem.

W_q : Nilai harapan waktu tunggu *customer* dalam sistem

$\bar{a}$: Rata – rata ukuran kelompok yang masuk ke dalam sistem antrian.

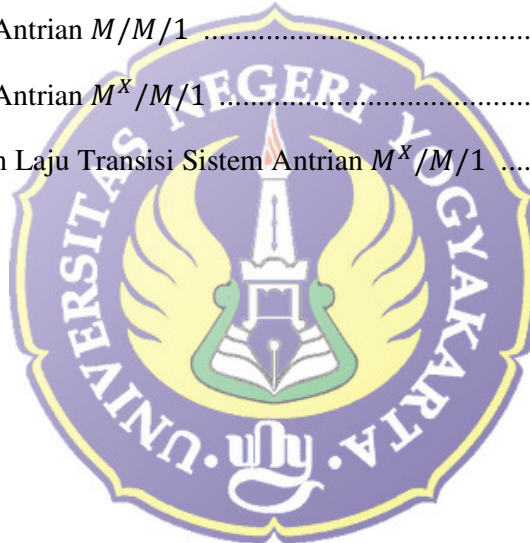
$\lambda \bar{a}$: Laju kedatangan *customer*, dengan tiap kedatangan berukuran $\bar{a}$

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Simbol – Simbol Pengganti Notasi Kendall-Lee	15
Tabel 2.2 Kemungkinan Kejadian terdapat n Customer dalam Sistem pada saat $t + \Delta t$	20
Tabel 2.3 Ukuran Keefektifan pada Model Antrian ($M/M/1$)	53
Tabel 3.1 Kemungkinan terdapat n Customer dalam Sistem Antrian dengan Pola Kedatangan Berkelompok pada Saat $t + \Delta t$	59
Tabel 3.2 Kemungkinan terdapat $n = 0$ Customer dalam Sistem Antrian dengan Pola Kedatangan Berkelompok pada Saat $t + \Delta t$	60
Tabel 3.3 Ukuran Keefektifan pada Model Antrian ($M^K/M/1$)	79
Tabel 3.4 Ukuran Kelompok dan Waktu Antar Kedatangan tiap Kelompok	81
Tabel 3.5 Lama Waktu Pelayanan Perekaman SPT	84
Tabel 3.6 Output Penyelesaian Masalah Antrian pada Model ($M^{17}/M/1$) dengan WINQSB	90

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Sistem Antrian	6
Gambar 2.2 Sistem Antrian <i>Single Chanel – Single Phase</i>	9
Gambar 2.3 Sistem Antrian <i>Single Chanel – Multi Phase</i>	10
Gambar 2.4 Sistem Antrian <i>Multi Chanel – Single Phase</i>	10
Gambar 2.5 Sistem Antrian <i>Multi Chanel – Multi Phase</i>	11
Gambar 2.6 Proses Kedatangan dan Kepergian dalam Suatu Sistem Antrian	19
Gambar 2.7 Sistem Antrian $M/M/1$	47
Gambar 3.1 Sistem Antrian $M^x/M/1$	56
Gambar 3.2 Diagram Laju Transisi Sistem Antrian $M^x/M/1$	59



DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Hasil <i>Generate Data</i>	96
Lampiran 2. Uji Kesesuaian Distribusi Kedatangan <i>Customer</i> dan Waktu Pelayanan <i>Customer</i> Menggunakan <i>One – Sample Kolmogorov Smirnov Test</i>	98
Lampiran 3. Tampilan Langkah-Langkah Penggunaan <i>WINQSB</i>	



BAB I

PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG MASALAH

Manusia sebagai makhluk sosial, tidak akan terlepas dari peran serta orang lain dalam kehidupan. Pada kondisi tertentu manusia pasti membutuhkan jasa orang lain dalam memenuhi kebutuhan hidup, dan untuk mendapatkannya terkadang mengharuskan untuk menunggu terlebih dulu. Hal tersebut sangat mungkin terjadi, karena banyak orang yang membutuhkan jasa yang sama dalam waktu yang bersamaan pula. Kondisi tersebut sering terlihat dalam kehidupan sehari-hari, seperti orang menunggu untuk mendapatkan tiket kereta api, menunggu pesanan di rumah makan, mengantri di kasir sebuah swalayan, dan mobil yang menunggu giliran untuk dicuci.

Kenyataannya menunggu adalah bagian dari kehidupan sehari-hari, dan yang dapat diharapkan adalah dapat mengurangi ketidaknyamanan tersebut. Sesuatu yang sangat diharapkan adalah ketika dapat memperoleh jasa tanpa harus menunggu terlalu lama. Individu – individu yang menunggu (komponen, produk, kertas kerja, orang) bertujuan untuk mendapatkan suatu layanan. Pada proses menunggu untuk mendapatkan layanan tersebut menimbulkan suatu garis tunggu, dan pada garis tunggu tersebut dapat diprediksi karakteristik – karakteristiknya.

Sehingga dapat dijadikan dasar pengambilan keputusan agar tercapai kondisi yang lebih baik, misalnya agar tidak terjadi antrian yang berkepanjangan.

Menurut Sinalunga (2008:238), Teori antrian (*Queueing Theory*) merupakan studi probabilistik kejadian garis tunggu (*waiting lines*), yakni suatu garis tunggu dari *customer* yang memerlukan layanan dari sistem yang ada. Antrian terjadi karena adanya keterbatasan sumber pelayanan, yang umumnya berkaitan dengan terbatasnya *server* karena alasan ekonomi. Jika jumlah *server* yang disediakan terbatas, memungkinkan terjadi antrian yang terlalu lama, sehingga orang dapat memutuskan untuk meninggalkan antrian tersebut. Hal ini merupakan suatu kerugian bagi pihak perusahaan, karena kehilangan *customer*. Agar tidak kehilangan *customer*, maka pihak perusahaan harus menyediakan *server* yang mencukupi, tetapi dilain pihak perusahaan harus mengeluarkan biaya yang lebih besar.

Menurut Wospakrik (1996:302), sistem antrian adalah himpunan *customer*, *server* beserta aturan yang mengatur antara kedatangan *customer* dan pelayanannya. Salah satu komponen dari sistem antrian adalah pola kedatangan *customer*. Tipe kedatangan ada dua macam, yaitu *customer* tiba dalam sistem antrian secara individu pada satu waktu dan sekelompok *customer* yang datang bersamaan pada satu waktu. Dalam masalah antrian biasa diasumsikan bahwa *customer* tiba di suatu fasilitas layanan secara individu. Namun asumsi tersebut terbantahkan dalam beberapa situasi di dunia nyata, misalnya surat yang tiba di kantor pos, orang-orang pergi ke

rumah makan atau ke bioskop adalah beberapa contoh keadaan dimana *customer* tidak datang sendiri – sendiri, tetapi secara berkelompok dalam satu waktu. Tentu saja kondisi ini berbeda dengan antrian yang kedatangannya secara individu, misalnya waktu tunggu *customer*, dan kesibukan sistem tidak akan sama.

Dalam tugas akhir ini akan dibahas mengenai antrian dengan pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*). Penelusuran rumus dimulai dengan menganalisis sistem antrian dengan satu *server*. Menurut Dharma (2001:39), sistem ini banyak ditemui dalam sistem komunikasi. Tujuan pembahasan ini untuk memperoleh beberapa karakteristik yang dapat mengukur kinerja/keefektifan sistem antrian. Pada model antrian *batch arrival* dengan satu *server*, diharapkan *server* mampu mengakomodasi jumlah antrian unit yang lebih dari satu, yang masuk ke dalam sistem antrian dalam waktu bersamaan. Sehingga diharapkan unit tidak menunggu terlalu lama. Dengan demikian akan dibangun konstruksi model antrian yang sesuai dengan kondisi tersebut.

A. RUMUSAN MASALAH

Berdasarkan latar belakang masalah maka permasalahan dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana model dari sistem antrian satu *server* dengan pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*)?
2. Bagaimana ukuran keefektifan dari model antrian satu *server* dengan pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*)?

3. Bagaimana implementasi model antrian satu *server* dengan pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*)?

B. TUJUAN

Dengan mengacu pada latar belakang masalah dan rumusan masalah, maka tujuan dari penulisan ini adalah:

1. Menjelaskan tingkah laku dari model sistem antrian satu *server* dengan pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*).
2. Menjelaskan ukuran keefektifan dari model antrian satu *server* dengan pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*).
3. Menjelaskan implementasi model antrian satu *server* dengan pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*).

C. MANFAAT

Penulisan tugas akhir ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Bagi pembaca memberikan gambaran mengenai model antrian satu *server* dengan pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*).
2. Bagi perpustakaan jurusan pendidikan matematika memberikan tambahan referensi tentang kajian teori antrian.
3. Bagi instansi dapat dijadikan pertimbangan sebagai dasar pengambilan keputusan dalam pengoptimalan *server*.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diuraikan tentang dasar – dasar yang diperlukan dalam pembahasan model antrian dengan pola kedatangan berkelompok. Pembahasannya mencakup tentang model antrian dengan pola kedatangan secara individu yang berdistribusi Poisson dan waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial.

A. Proses Antrian

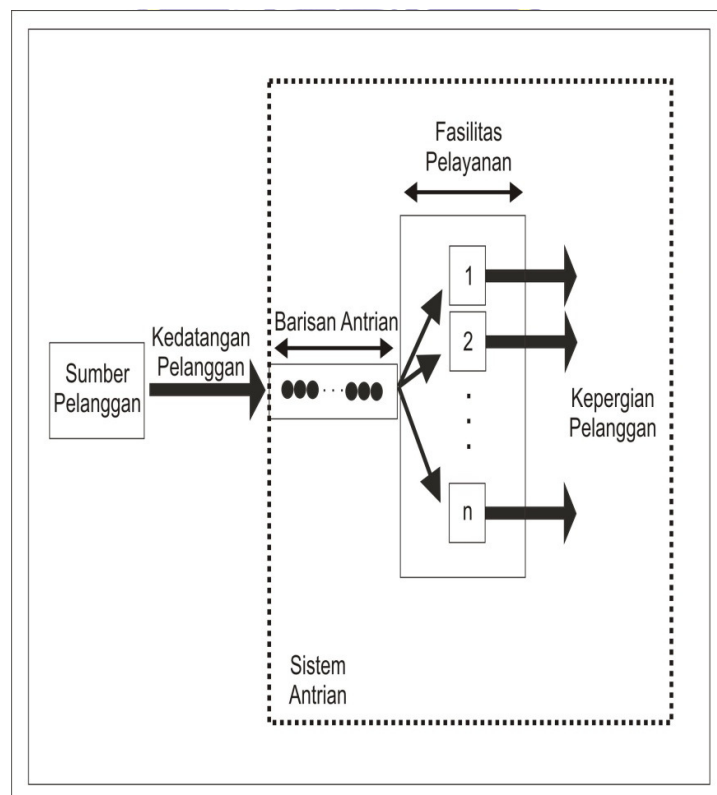
1. Definisi Proses Antrian



Menurut Bronson (1996: 310), proses antrian merupakan proses yang berhubungan dengan kedatangan *customer* pada suatu fasilitas pelayanan, menunggu panggilan dalam baris antrian jika belum mendapat pelayanan dan akhirnya meninggalkan fasilitas pelayanan setelah mendapat pelayanan. Proses ini dimulai saat *customer* – *customer* yang memerlukan pelayanan mulai datang. Mereka berasal dari suatu populasi yang disebut sebagai sumber input.

Menurut Hillier dan Lieberman (1980: 401), proses antrian adalah suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan *customer* ke suatu sistem antrian, kemudian menunggu dalam antrian hingga pelayan memilih *customer* sesuai dengan disiplin pelayanan, dan akhirnya *customer* meninggalkan sistem antrian setelah selesai pelayanan.

Sistem antrian adalah himpunan *customer*, pelayan, dan suatu aturan yang mengatur kedatangan para *customer* dan pelayanannya. Sistem antrian merupakan “ proses kelahiran – kematian “ dengan suatu populasi yang terdiri atas para *customer* yang sedang menunggu pelayanan atau yang sedang dilayani. Kelahiran terjadi jika seorang *customer* memasuki fasilitas pelayanan, sedangkan kematian terjadi jika *customer* meninggalkan fasilitas pelayanan. Keadaan sistem adalah jumlah *customer* dalam suatu fasilitas pelayanan. (Wospakrik, 1996 : 302)



Gambar 2.1 Sistem Antrian

1. Komponen Dasar dalam Proses Antrian

Menurut Taha (1997:609), suatu sistem antrian bergantung pada tujuh komponen yaitu pola kedatangan, pola kepergian, kapasitas sistem, desain pelayanan, disiplin pelayanan, ukuran sumber pemanggilan, dan perilaku manusia. Komponen – komponen tersebut diuraikan sebagai berikut.

a. Pola Kedatangan

Menurut Wagner (1972:840), pola kedatangan adalah pola pembentukan antrian akibat kedatangan *customer* dalam selang waktu tertentu. Pola kedatangan dapat diketahui secara pasti atau berupa suatu variabel acak yang distribusi peluangnya dianggap telah diketahui.

Jika tidak disebutkan secara khusus *customer* datang secara individu ke dalam sistem antrian. Namun dapat pula lebih dari satu *customer* datang secara bersamaan ke dalam sistem antrian, pada kondisi ini disebut dengan *bulk arrival* (Taha, 1997:177).

b. Pola Kepergian

Pola kepergian adalah banyak kepergian *customer* selama periode waktu tertentu. Pola kepergian biasanya dicirikan oleh waktu pelayanan, yaitu waktu yang dibutuhkan oleh seorang pelayan untuk melayani seorang *customer*. Waktu pelayanan dapat bersifat deterministik dan dapat berupa suatu variabel acak dengan distribusi peluang tertentu (Bronson, 1996 : 310).

Waktu pelayanan bersifat deterministik berarti bahwa waktu yang dibutuhkan untuk melayani setiap *customer* selalu tetap, sedangkan waktu pelayanan yang berupa variabel acak adalah waktu yang dibutuhkan untuk melayani setiap *customer* berbeda – beda.

c. Kapasitas Sistem

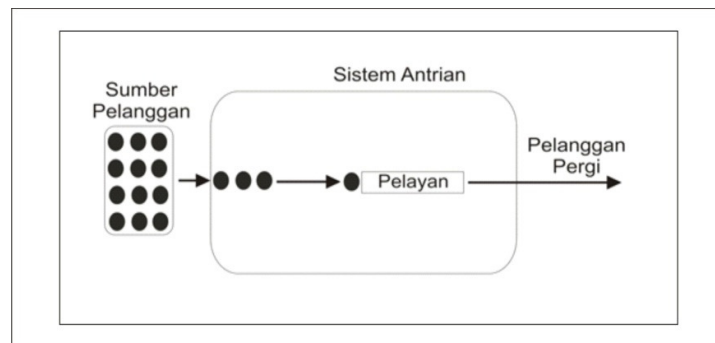
Menurut Bronson (1996:310), kapasitas sistem adalah banyak maksimum *customer*, baik *customer* yang sedang berada dalam pelayanan maupun dalam antrian, yang ditampung oleh fasilitas pelayanan pada waktu yang sama. Suatu sistem antrian yang tidak membatasi banyak *customer* dalam fasilitas pelayanannya disebut sistem berkapasitas tak berhingga, sedangkan suatu sistem yang membatasi banyak *customer* dalam fasilitas pelayanannya disebut sistem berkapasitas berhingga, jika *customer* memasuki sistem pada saat fasilitas pelayanan penuh maka *customer* akan ditolak dan meninggalkan sistem tanpa memperoleh pelayanan.

d. Desain Pelayanan

Menurut Sinalunga (2008:249), Desain sarana pelayanan dapat diklasifikasikan dalam *channel* dan *phase* yang akan membentuk suatu struktur antrian yang berbeda-beda. *Channel* menunjukkan jumlah jalur untuk memasuki sistem pelayanan. *Phase* berarti jumlah stasiun-stasiun pelayanan, dimana para langganan harus melaluinya sebelum pelayanan dinyatakan lengkap. Ada empat model struktur antrian dasar yang umum terjadi dalam seluruh sistem antrian:

1. *Single Chanel – Single Phase*

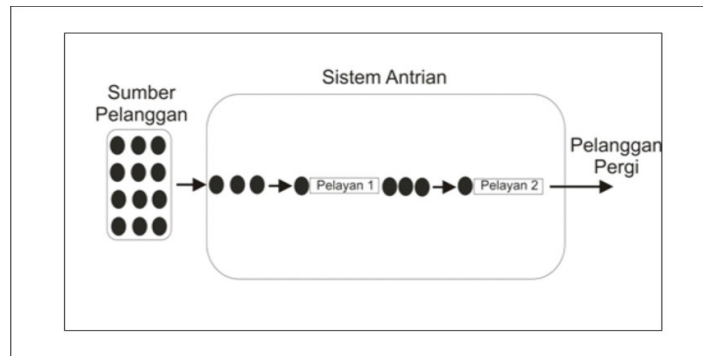
Single Chanel berarti bahwa hanya ada satu jalur untuk memasuki sistem pelayanan atau ada satu pelayanan. *Single phase* menunjukkan bahwa hanya ada satu stasiun pelayanan sehingga yang telah menerima pelayanan dapat langsung keluar dari sistem antrian. Contohnya antrian pada penjualan karcis kereta api yang hanya dibul



Gambar 2.2 Sistem Antrian *Single Channel – Single Phase*

2. *Single Channel - Multi Phase*

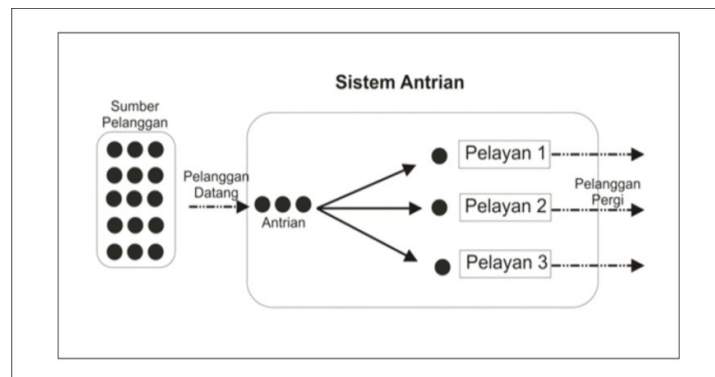
Multi phase berarti ada dua atau lebih pelayanan yang dilaksanakn secara berurutan dalam *phase-phase*. Misalnya pada antrian di laundry, pakaian – pakaian setelah dicuci kemudian dijemur lalu disetrika dan terakhir dikemas.



Gambar 2.3 Sistem Antrian *Single Channel - Multi phase*

3. *Multi Chanel - Single Phase*

Sistem *multi chanel-single phase* terjadi jika ada dua atau lebih fasilitas pelayanan dialiri oleh suatu antrian tunggal. Sebagai contoh adalah Sarana pelayanan nasabah di Bank.

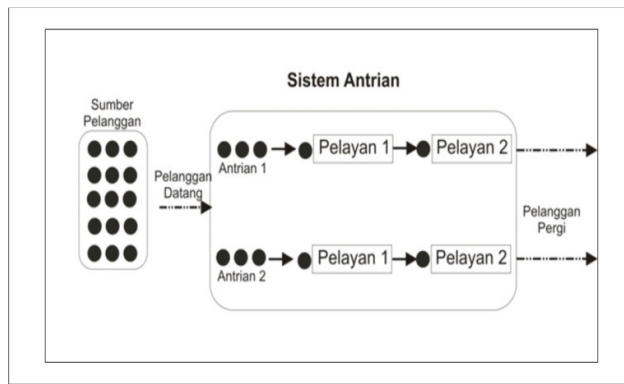


Gambar 2.4 Sistem Antrian *Multi Chanel – Single Phase*

4. *Multi Chanel - Multi Phase*

Sistem ini terjadi jika ada dua atau lebih fasilitas pelayanan dengan pelayanannya lebih dari satu *phase*. Sebagai contoh adalah pelayanan kepada pasien di rumah sakit dari pendaftaran, diagnosa, tindakan medis sampai pembayaran. Setiap sistem-sistem ini

mempunyai beberapa fasilitas pelayanan pada setiap tahap, sehingga lebih dari satu individu dapat dilayani pada suatu waktu.



Gambar 2.5 Sistem Antrian *Multi Channel – Multi Phase*

e. Disiplin Pelayanan

Menurut Sinalungga (2008: 251), disiplin pelayanan adalah suatu aturan yang dikenalkan dalam memilih *customer* dari barisan antrian untuk segera dilayani. Adapun pembagian disiplin pelayanan ialah:

1. *First come first served (FCFS)* atau *first in first out (FIFO)*, suatu peraturan dimana yang akan dilayani ialah *customer* yang datang terlebih dahulu. Contohnya antrian di suatu kasir sebuah swalayan.
2. *Last come first served (LCFS)* atau *last in first out (LIFO)* merupakan antrian dimana yang datang paling akhir adalah yang dilayani paling awal atau paling dahulu. Contohnya antrian pada satu tumpukan barang digudang, barang yang terakhir masuk

akan berada ditumpukkan paling atas, sehingga akan diambil pertama.

3. *Service in random order (SIRO)* atau pelayanan dalam urutan acak atau sering dikenal juga *random selection for services (RSS)*, artinya pelayanan atau panggilan didasarkan pada peluang secara random, tidak mempermasalahkan siapa yang lebih dahulu tiba. Contohnya kertas – kertas undian yang menunggu untuk ditentukan pemenangnya, yang diambil secara acak.
4. *Priority service (PS)*, artinya prioritas pelayanan diberikan kepada mereka yang mempunyai prioritas paling tinggi dibandingkan dengan mereka yang memiliki prioritas paling rendah, meskipun yang terakhir ini sudah lebih dahulu tiba dalam garis tunggu. Kejadian seperti ini bisa disebabkan oleh beberapa hal, misalnya seseorang yang keadaan penyakit yang lebih berat dibanding dengan orang lain dalam sebuah rumah sakit.

f. Sumber Pemanggilan

Menurut Taha (1996:177), ukuran sumber pemanggilan adalah banyaknya populasi yang membutuhkan pelayanan dalam suatu sistem antrian. Ukuran sumber pemanggilan dapat terbatas maupun tak terbatas. Sumber pemanggilan terbatas misalnya mahasiswa yang akan melakukan registrasi ulang di suatu universitas, dimana jumlahnya

sudah pasti. Sedangkan sumber pemanggilan yang tak terbatas misalnya nasabah bank yang antri untuk menabung atau membuka rekening baru, jumlahnya bisa tak terbatas.

g. Perilaku Manusia

Perilaku manusia merupakan perilaku – perilaku yang mempengaruhi suatu sistem antrian ketika manusia mempunyai peran dalam sistem baik sebagai *customer* maupun pelayan. Jika manusia berperan sebagai pelayan, dapat melayani *customer* dengan cepat atau lambat sesuai kemampuannya sehingga mempengaruhi lamanya waktu tunggu (Taha, 1996:178).

Menurut Gross dan Harris (1998:3), perilaku manusia dalam sistem antrian jika berperan sebagai *customer* sebagai berikut.

1. *Reneging* menggambarkan situasi dimana seseorang masuk dalam antrian, namun belum memperoleh pelayanan, kemudian meninggalkan antrian tersebut.
2. *Balking* menggambarkan orang yang tidak masuk dalam antrian dan langsung meninggalkan tempat antrian.
3. *Jockeying* menggambarkan situasi jika dalam sistem ada dua atau lebih jalur antrian maka orang dapat berpindah antrian dari jalur yang satu ke jalur yang lain.

A. Notasi Kendall

Notasi baku untuk memodelkan suatu sistem antrian pertama kali dikemukakan oleh D.G.Kendall dalam bentuk $a/b/c$, dan dikenal sebagai notasi kendall. Namun, A.M. Lee menambahkan simbol d dan e sehingga menjadi $a/b/c/d/e$ yang disebut notasi kendall-Lee (Taha, 1996:627).

Menurut Taha (1997:186), notasi Kendall-lee tersebut perlu ditambah dengan simbol f . Sehingga karakteristik suatu antrian dapat dinotasikan dalam format baku $(a/b/c):(c/d/f)$. Notasi dari a sampai f tersebut berturut – turut menyatakan distribusi waktu antar kedatangan, distribusi waktu pelayanan, jumlah *server* pelayanan, disiplin pelayanan, kapasitas sistem, dan ukuran sumber pemanggilan. Notasi a sampai f dapat digantikan dengan simbol – simbol yang diberikan dalam tabel 2.1 berikut.

Tabel 2.1 Simbol – Simbol Pengganti Notasi Kendall-Lee

Notasi	Simbol	Keterangan
a dan b	M	Markov menyatakan kedatangan dan kepergian berdistribusi Poisson (Waktu antar kedatangan berdistribusi Eksponensial).
	D	Deterministik menyatakan waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan konstan
	E_k	Waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan berdistribusi Erlang
	GI	Distribusi independen umum dari kedatangan (atau waktu antar kedatangan)
	G	Distribusi umum dari keberangkatan (atau waktu pelayanan)
d	FCFS/FIFO	<i>First Come First Served/ First In First Out</i>
	LCFS/LIFO	<i>Last Come First Served/ Last In First Out</i>
	SIRO	<i>Service in random order</i>
	PS	<i>Priority service</i>
c, e, f	$1, 2, 3, \dots, \infty$	

B. Proses Kelahiran dan Kematian (*Birth – Death Processes*)

Proses kedatangan dan kepergian dalam suatu sistem antrian merupakan proses kelahiran dan kematian (*birth – death processes*). Kelahiran terjadi jika seorang *customer* memasuki sistem antrian dan kematian terjadi jika seorang *customer* meninggalkan sistem antrian tersebut.

Menurut Winston (1994:115), proses kelahiran dan kematian merupakan proses penjumlahan dalam suatu sistem dimana keadaan sistem selalu menghasilkan n bilangan bulat positif. Keadaan sistem pada saat t didefinisikan sebagai selisih antara banyaknya kelahiran dan kematian pada saat t . Dengan demikian, keadaan sistem pada saat t dalam suatu sistem antrian yang dinotasikan dengan $N(t)$, adalah selisih antara banyaknya kedatangan dan kepergian pada saat t .

Misal, banyaknya kedatangan *customer* pada saat t dinotasikan dengan $X(t)$ dan banyaknya kepergian pada saat t dinotasikan dengan $Y(t)$, maka banyaknya *customer* yang berada dalam sistem pada saat t adalah $N(t) = X(t) - Y(t)$. Sedangkan peluang terdapat n *customer* dalam sistem antrian pada saat t dinotasikan dengan $P(N(t) = n)$ atau $P_n(t)$.

Akan dicari peluang terdapat n *customer* dalam suatu sistem antrian pada saat t . Namun sebelumnya, diberikan definisi – definisi yang digunakan pada pembahasan selanjutnya.

Definisi 2.1 (Hogg dan Tanis, 2001:66) Kejadian $A_1, A_2, \dots, A_k$ dikatakan kejadian – kejadian yang saling asing jika $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$.

Definisi 2.2 (Bain dan Engelhardt, 1992:9) Jika sebuah percobaan $A_1, A_2, A_3, \dots$ adalah kejadian yang mungkin terjadi pada ruang sampel S . Fungsi peluang merupakan fungsi yang mengawankan setiap kejadian A dengan bilangan real $P(A)$ dan $P(A)$ disebut peluang kejadian A jika memenuhi ketentuan berikut.

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. Jika $A_1, A_2, A_3, A_4 \dots$ adalah kejadian yang saling asing, maka

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + \dots$$

Definisi 2.3 (Hogg dan Tanis, 2001 : 96) Kejadian A dan B dikatakan saling bebas jika dan hanya jika

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Jika kejadian A dan B tidak memenuhi kondisi tersebut maka disebut kejadian bergantung.

Definisi 2.4 (Ross, 1999 : 60) $o(\Delta t)$ merupakan suatu fungsi atas Δt dengan ketentuan $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

Definisi 2.5 (Purcell & Varberg, 1987 : 141)

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{df(t)}{dt}$$

Asal limit fungsinya ada

Teorema 2.1 (Bartle dan Sherbert, 2000 : 176-177) Misal f dan g didefinisikan pada $[a, b]$, misal $f(a) = g(a) = 0$, sehingga $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0}$

dikatakan *indeterminate* dan $g(x) \neq 0$ untuk $a < x < b$. Jika f dan g terdiferensial di a dan $g'(a) \neq 0$ maka limit dari $\frac{f}{g}$ di a ada dan sama dengan $f'(a)/g'(a)$. Sehingga

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Teorema tersebut disebut dengan aturan L'Hopital.

Bukti

Jika $f(a) = g(a) = 0$ untuk $a < x < b$ berlaku

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

Maka $f'(x)/g'(x)$ berdasarkan definisi (2.5) adalah

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Terbukti bahwa $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Menurut Wospakrik (1996:297), asumsi – asumsi proses kelahiran dan kematian dalam antrian sebagai berikut:

- i) Semua kejadian pada suatu interval waktu yang sangat pendek (Δt) mempunyai probabilitas yang sama apabila sebanyak n customer berada dalam sistem antrian, maka probabilitas sebuah kedatangan terjadi antara t dan $t + \Delta t$, dinyatakan dengan :

$$P((X(t + \Delta t) - X(t)) = 1) = \lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$$

λ merupakan laju kedatangan.

- ii) Probabilitas tidak ada kedatangan antara t dan $t + \Delta t$, dinyatakan dengan:

$$P((X(t + \Delta t) - X(t)) = 0) = 1 - \lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$$

- iii) Probabilitas ada satu kepergian antara t dan $t + \Delta t$, dinyatakan dengan:

$$P((Y(t + \Delta t) - Y(t)) = 1) = \mu_n \Delta t + o(\Delta t)$$

μ merupakan laju pelayanan.

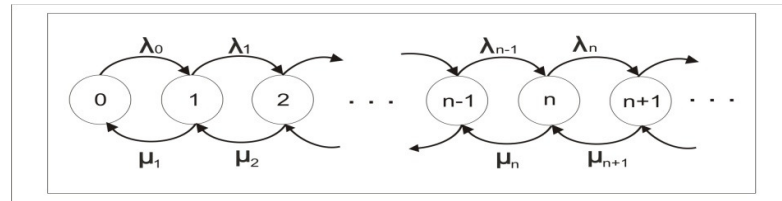
- iv) Probabilitas tidak ada kepergian antara t dan $t + \Delta t$, dinyatakan dengan:

$$P((Y(t + \Delta t) - Y(t)) = 0) = 1 - \mu_n \Delta t + o(\Delta t)$$

- v) Probabilitas terjadi lebih dari satu kejadian pada selang waktu yang sangat pendek adalah sangat kecil sehingga dapat diabaikan, dapat dinyatakan dengan: $P((Y(t + \Delta t) - Y(t)) > 1) = o(\Delta t)$

- vi) Proses kedatangan dan pelayanan merupakan kejadian yang saling bebas.

Berdasarkan asumsi (vi), kedatangan dan kepergian merupakan kejadian – kejadian yang saling bebas, sehingga kejadian – kejadian pada interval waktu tertentu tidak mempengaruhi kejadian pada interval waktu sebelumnya atau kejadian pada interval waktu sesudahnya. Proses kedatangan dan kepergian dalam suatu sistem antrian sesuai asumsi – asumsi diatas ditunjukkan pada Gambar 2.6 berikut.



Gambar 2.6 Proses kedatangan dan kepergian dalam suatu sistem antrian (Taha, 1991 : 622)

Berdasarkan Gambar 2.6 kemungkinan – kemungkinan kejadian saling asing yang dapat terjadi jika terdapat n ($n > 0$) *customer* dalam sistem pada waktu $t + \Delta t$ adalah sebagai berikut.

Tabel 2.2 Kemungkinan Kejadian terdapat n *Customer* dalam Sistem pada Saat $t + \Delta t$

Kasus	Jumlah <i>Customer</i> pada Waktu (t)	Jumlah Kedatangan pada Waktu (Δt)	Jumlah Kepergian pada Waktu (Δt)	Jumlah <i>Customer</i> pada Waktu (t+ Δt)
1	n	0	0	n
2	n+1	0	1	n
3	n-1	1	0	n
4	n	1	1	n

Menurut asumsi (vi), kedatangan dan kepergian merupakan kejadian – kejadian yang saling bebas, sehingga peluang dari masing – masing kejadian tersebut adalah sebagai berikut.

1. Probabilitas Kasus 1 = $P_n(t)(1 - \lambda_n \Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu_n \Delta t + o(\Delta t))$
2. Probabilitas Kasus 2 = $P_{n+1}(t)(1 - \lambda_{n+1} \Delta t + o(\Delta t))(\mu_{n+1} \Delta t + o(\Delta t))$
3. Probabilitas Kasus 3 = $P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1} \Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu_{n-1} \Delta t + o(\Delta t))$

$$= (\lambda_{n-1} \Delta t + o(\Delta t))P_{n-1}(t)$$
4. Probabilitas kasus 4 adalah $o(\Delta t)$, sesuai dengan asumsi v

Karena kasus – kasus tersebut saling asing, maka probabilitas terdapat n customer dalam sistem ($n \geq 1$) pada saat ($t + \Delta t$) dinyatakan dengan :

$$P_n(t + \Delta t) = P(\text{Kasus 1 atau Kasus 2 atau Kasus 3 atau Kasus 4})$$

$$P_n(t + \Delta t) = \text{Probabilitas Kasus 1} + \text{Probabilitas Kasus 2} + \text{Probabilitas Kasus 3} + \text{Probabilitas Kasus 4}$$

$$\begin{aligned} P_n(t + \Delta t) &= P_n(t)(1 - \lambda_n \Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu_n \Delta t + o(\Delta t)) + \\ &\quad P_{n+1}(t)(1 - \lambda_{n+1} \Delta t + o(\Delta t))(\mu_{n+1} \Delta t + o(\Delta t)) + \\ &\quad (\lambda_{n-1} \Delta t + o(\Delta t))P_{n-1}(t) + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} &= P_n(t) - P_n(t)(\lambda_n \Delta t) - P_n(t)(\mu_n \Delta t) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1} \Delta t) + \\ &\quad P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1} \Delta t) + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Pada Persamaan (2.2) dikurangkan $P_n(t)$ pada ruas kanan dan kiri kemudian dibagi dengan Δt maka didapatkan:

$$\begin{aligned} \frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} &= P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}) - P_n(t)(\lambda_n) - P_n(t)(\mu_n) + \\ &\quad \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Karena Δt sangat kecil dan mendekati nol, maka berdasarkan definisi 2.5 didapatkan:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}) - P_n(t)(\lambda_n) - P_n(t)(\mu_n) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_n(t)}{dt} &= P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}) - P_n(t)(\lambda_n) - P_n(t)(\mu_n) \\ &= -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + (\mu_{n+1})P_{n+1}(t) + (\lambda_{n-1})P_{n-1}(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) merupakan dasar perhitungan probabilitas terdapat n *customer* pada proses kedatangan murni dan kepergian murni, Persamaan (2.4) disebut sebagai Persamaan Kolmogorov, untuk $n \geq 1$.

Selanjutnya akan dibahas secara khusus probabilitas terdapat n *customer* untuk nilai $n = 0$. Pada saat jumlah *customer* dalam sistem adalah nol, maka probabilitas terjadinya nol kepergian *customer* pada kasus 1 adalah satu.

Probabilitas terdapat n *customer*, dengan $n = 0$ dalam waktu $(t + \Delta t)$ adalah

$$P_n(t + \Delta t) = P(\text{Kasus 1 atau Kasus 2 atau Kasus 4})$$

$$P_n(t + \Delta t) = \text{Probabilitas Kasus 1} + \text{Probabilitas Kasus 2} + \text{Probabilitas Kasus 4}$$

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)(1 - \lambda_n \Delta t + o(\Delta t))(1) + P_{n+1}(t)(1 - \lambda_{n+1} \Delta t + o(\Delta t))(\mu_{n+1} \Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t)$$

Nilai $n = 0$ maka diperoleh

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda_0 \Delta t + o(\Delta t))(1) + P_1(t)(1 - \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t))(\mu_1 \Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t)$$

$$= P_0(t)(1 - \lambda_0 \Delta t + o(\Delta t)) + P_1(t)(\mu_1 \Delta t) + o(\Delta t)$$

$$= P_0(t)(\lambda_0 \Delta t) + P_1(t)(\mu_1 \Delta t) + o(\Delta t)$$

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) - P_0(t)(\lambda_0 \Delta t) + P_1(t)(\mu_1 \Delta t) + o(\Delta t)$$

(2.5)

Pada Persamaan (2.5) dikurangkan $P_0(t)$ pada ruas kanan dan kiri kemudian dibagi dengan Δt maka didapatkan:

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = P_1(t)(\mu_1) - P_0(t)(\lambda_0) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

Karena Δt sangat kecil dan mendekati nol, maka berdasarkan definisi 2.5 didapatkan:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[P_1(t)(\mu_1) - P_0(t)(\lambda_0) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right]$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = P_1(t)(\mu_1) - P_0(t)(\lambda_0) \quad , n = 0$$

(2.6)

Persamaan (2.4) dan (2.6) merupakan Persamaan Kolmogorov yang digunakan sebagai dasar untuk menentukan peluang bahwa ada n customer dengan nilai $n \geq 1$ dan $n = 0$ pada selang waktu $(t, t + \Delta t)$, dapat diringkas sebagai berikut.

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \begin{cases} \frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + (\mu_{n+1})P_{n+1}(t) + P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}), n \geq 1 \\ \frac{dP_0(t)}{dt} = P_1(t)(\mu_1) - P_0(t)(\lambda_0), n = 0 \end{cases}$$

C. Distribusi Eksponensial dan Distribusi Poisson

1. Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial digunakan untuk menggambarkan distribusi waktu pada fasilitas jasa, dimana waktu pelayanan tersebut diasumsikan bersifat bebas. Artinya, waktu untuk melayani pendatang tidak bergantung pada lama waktu yang telah dihabiskan untuk melayani pendatang sebelumnya, dan tidak bergantung pada jumlah pendatang yang menunggu untuk dilayani. (Djauhari, 1997:175-176)

Definisi 2.6 (Cooper, 1981:42) Jika X adalah variabel acak kontinu dengan fungsi distribusi kumulatif $P\{X \leq x\} = F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x}, & \text{untuk } x \geq 0 \\ 0 & , \text{ untuk lainnya} \end{cases}$$

dan fungsi densitas peluang $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ yaitu

$$f(x) = \mu e^{-\mu x}, x \geq 0 \quad (2.7)$$

Maka X disebut berdistribusi Eksponensial dengan paramer μ .

2. Distribusi Poisson

Suatu eksperimen yang menghasilkan jumlah sukses yang terjadi pada interval waktu ataupun daerah yang spesifik dikenal sebagai eksperimen Poisson. Interval waktu tersebut dapat berupa menit, hari, minggu, bulan, maupun tahun, sedangkan daerah yang spesifik dapat berarti garis, luas, sisi, maupun material. (Dimiyati, 1999:309)

Menurut Dimiyati, (1999:309) ciri-ciri eksperimen Poisson adalah :

- a. Banyaknya hasil percobaan yang terjadi dalam suatu selang waktu atau suatu daerah tertentu bersifat independen terhadap banyaknya hasil percobaan yang terjadi pada selang waktu atau daerah lain yang terpisah.
- b. Peluang terjadinya satu hasil percobaan selama suatu selang waktu yang singkat sekali atau dalam suatu daerah yang kecil, sebanding dengan panjang selang waktu tersebut atau besarnya daerah tersebut.

- c. Peluang bahwa lebih dari satu hasil percobaan akan terjadi dalam selang waktu yang singkat tersebut atau dalam daerah yang kecil tersebut dapat diabaikan.

Definisi 2.7 (Djauhari, 1997:163) Variabel acak diskrit X dikatakan berdistribusi Poisson dengan parameter λ jika fungsi peluangnya sebagai berikut.

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

D. Distribusi Kedatangan

Distribusi kedatangan berhubungan dengan peluang terdapat n kedatangan *customer* dalam suatu sistem antrian pada interval waktu tertentu. Kedatangan yang dimaksud dalam pembahasan ini adalah kedatangan murni, yaitu kedatangan tanpa disertai kepergian, maka laju kepergian $\mu_n = 0, \forall n \geq 0$ (Dimyati, 1999 : 358 – 359).

Peluang terdapat n ($n \geq 0$) kedatangan pada waktu t dapat diperoleh dengan mensubstitusikan $\mu_n = 0$ dan $\lambda_n = \lambda$ ke Persamaan (2.4) dan Persamaan (2.6) sehingga diperoleh sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -\lambda P_0(t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_n(t)}{dt} &= \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t), \\ n &> 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Definisi 2.8 (Kreeyszig, 2003:33) Persamaan diferensial orde satu dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

disebut Persamaan differensial linear dan mempunyai penyelesaian:

$$y = ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$$

Persamaan (2.9) dapat dinyatakan sebagai Persamaan differensial linear orde satu dengan $P(x) = \lambda$ dan $Q(x) = 0$. Maka penyelesaiannya adalah

$$\begin{aligned} P_0(t) &= ce^{-\int \lambda dt} \\ &= ce^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Diasumsikan bahwa proses kedatangan murni dimulai pada saat sistem memiliki nol *customer*, sehingga peluang terdapat nol *customer* ($n = 0$) dalam sistem pada saat $t = 0$ adalah 1 dinotasikan dengan $P_0(0) = 1$.

Peluang ada *customer* ($n > 0$) pada $t = 0$ adalah 0, hal ini dapat dituliskan sebagai berikut.

$$P_n(0) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases}$$

(2.11)

Dengan demikian

$$P_0(0) = ce^{-\lambda \cdot 0} = 1$$

Dan diperoleh $c = 1$ sehingga

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

(2.12)

Jadi Persamaan (2.12) merupakan solusi untuk Persamaan (2.9).

Selanjutnya akan dicari solusi untuk Persamaan (2.10) sebagai berikut.

Berdasarkan definisi (2.8), Persamaan (2.10) dapat dinyatakan sebagai Persamaan differensial linear orde satu dengan $P(x) = \lambda$ dan $Q(x) = \lambda P_{n-1}(t)$. Maka penyelesaiannya adalah

$$\begin{aligned} P_n(t) &= ce^{-\int \lambda dt} + e^{-\int \lambda dt} \int \lambda e^{\int \lambda dt} P_{n-1}(t) dt \\ &= ce^{-\lambda t} \\ &\quad + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} P_{n-1}(t) dt \end{aligned} \quad (2.13)$$

Untuk nilai $n = 1$ diperoleh

$$\begin{aligned} P_1(t) &= ce^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} P_0(t) dt \\ &= ce^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} e^{-\lambda t} dt \end{aligned} \quad (2.14)$$

Persamaan (2.12) disubstitusikan ke Persamaan (2.14) diperoleh

$$P_1(t) = ce^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} e^{-\lambda t} dt$$

$$= ce^{-\lambda t} + \lambda te^{-\lambda t}$$

(2.15)

Berdasarkan Persamaan (2.11) maka dari Persamaan (2.15) didapatkan

$$P_1(0) = ce^{-\lambda \cdot 0} + \lambda \cdot 0 \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = 0$$

Sehingga diperoleh nilai $c = 0$, maka Persamaan (2.15) menjadi

$$P_1(t) = \lambda te^{-\lambda t}$$

(2.16)

Jadi Persamaan (2.16) adalah solusi Persamaan (2.10) untuk $n = 1$

Selanjutnya dicari solusi Persamaan (2.10) untuk $n = 2$ sebagai berikut.

Untuk $n = 2$ Persamaan (2.13) menjadi

$$P_2(t)$$

$$= ce^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} P_1(t) dt \quad (2.17)$$

Persamaan (2.16) disubstitusikan ke Persamaan (2.17) didapatkan

$$P_2(t) = ce^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} \lambda te^{-\lambda t} dt$$

$$= ce^{-\lambda t} + \lambda^2 e^{-\lambda t} \int t dt$$

$$\begin{aligned}
&= ce^{-\lambda t} \\
&+ \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Berdasarkan Persamaan (2.11) maka dari Persamaan (2.18) didapatkan

$$P_2(0) = ce^{-\lambda \cdot 0} + \frac{(\lambda \cdot 0)^2}{2} e^{-\lambda \cdot 0} = 0$$

Sehingga diperoleh nilai $c = 0$, maka Persamaan (2.18) menjadi

$$\begin{aligned}
P_2(t) \\
&= \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Jadi Persamaan (2.19) adalah solusi Persamaan (2.10) untuk $n = 2$

Dari Persamaan (2.12), (2.16) dan (2.19) dapat disimpulkan bahwa solusi umum dari Persamaan (2.09) dan Persamaan (2.10) adalah

$$\begin{aligned}
P_n(t) \\
&= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Bukti bahwa Persamaan (2.20) adalah solusi umum dari Persamaan (2.9) dan Persamaan (2.10) sebagai berikut.

Langkah – langkah pembuktian dengan induksi matematika:

1. Persamaan (2.16) yaitu $P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$ membuktikan bahwa Persamaan (2.20) merupakan penyelesaian Persamaan (2.10) untuk $n = 1$.

2. Diasumsikan Persamaan (2.20) merupakan penyelesaian Persamaan

$$(2.10) \text{ untuk } n = k, \text{ maka } P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

3. Akan dibuktikan bahwa Persamaan (2.20) merupakan penyelesaian dari Persamaan (2.10) untuk $n = k + 1$

Untuk $n = k + 1$, Persamaan (2.10) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dP_{k+1}(t)}{dt} &= \lambda P_k(t) \\ &\quad - \lambda P_{k+1}(t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Asumsi 2 disubstitusikan ke Persamaan (2.21) sehingga menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dP_{k+1}(t)}{dt} &= \lambda^{k+1} \frac{t^k}{k!} e^{-\lambda t} \\ &\quad - \lambda P_{k+1}(t) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Persamaan (2.22) merupakan Persamaan differensial orde satu dengan

$P(x) = \lambda$ dan $Q(x) = \lambda^{k+1} \frac{t^k}{k!} e^{-\lambda t}$, sehingga penyelesaiannya adalah

$$\begin{aligned} P_{k+1}(t) &= c e^{-\int \lambda dt} + e^{-\int \lambda dt} \int \lambda^{k+1} \frac{t^k}{k!} e^{-\lambda t} e^{\int \lambda dt} dt \\ &= c e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \int \lambda^{k+1} \frac{t^k}{k!} e^{-\lambda t} e^{\lambda t} dt \\ &= c e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \lambda^{k+1} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ce^{-\lambda t} \\
&+ \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda t}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Berdasarkan Persamaan (2.11) maka dari Persamaan (2.23) didapatkan

$$P_{k+1}(0) = ce^{-\lambda \cdot 0} + \frac{(\lambda \cdot 0)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda \cdot 0} = 0$$

Sehingga diperoleh nilai $c = 0$, maka Persamaan (2.23) menjadi

$$\begin{aligned}
&P_{k+1}(t) \\
&= \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda t}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Persamaan (2.24) merupakan penyelesaian dari Persamaan (2.10) untuk $n = k + 1$ dan memenuhi Persamaan (2.20).

Jadi, $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ merupakan solusi umum dari Persamaan (2.9) dan Persamaan (2.10). Dengan demikian, berdasarkan definisi (2.7) dapat disimpulkan bahwa kedatangan *customer* berdistribusi Poisson.

Teorema 2.2 (Bronson, 1966:305) Jika kedatangan *customer* berdistribusi Poisson maka waktu antar kedatangan *customer* berdistribusi Eksponensial.

Bukti:

Berdasarkan uraian sebelumnya, diketahui bahwa kedatangan *customer* berdistribusi Poisson. $T_n (n > 0)$ adalah waktu antara $(n - 1)$ kedatangan sampai n kedatangan. Barisan $\{T_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$ merupakan barisan waktu antar kedatangan yang saling asing dan saling bebas.

Ambil T_1 yang merupakan waktu antara tidak ada *customer* dalam sistem dan ketika ada kedatangan pertama. Akan ditunjukkan bahwa T_1 berdistribusi Eksponensial.

Ambil $t < T_1$, maka banyaknya kedatangan pada waktu t adalah nol, artinya

$$\begin{aligned} P_n(T_1 > t) &= P(\text{Tidak ada kedatangan selama waktu } t) \\ &= P_0(t) \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (2.12), $P_0(t) = e^{-\lambda t}$ dengan λ menyatakan laju kedatangan rata – rata, maka fungsi distribusi kumulatif dari T_1 dengan $t \geq 0$ adalah

$$\begin{aligned} F(t) &= P(T_1 \leq t) \\ &= 1 - P(T_1 > t) \\ &= 1 - P_0(t) \\ &= 1 \\ &\quad - e^{-\lambda t} \end{aligned} \tag{2.25}$$

Berdasarkan definisi (2.6), Persamaan (2.25) merupakan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Eksponensial yang secara umum ditulis

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

Sehingga fungsi densitas peluang dari T_1 untuk $t \geq 0$ adalah

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{dF(t)}{dt} \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Berdasarkan definisi (2.6), T_1 merupakan peubah acak yang berdistribusi Eksponensial dengan parameter λ . Sesuai dengan asumsi bahwa barisan waktu antar kedatangan pada sistem antrian adalah saling bebas, maka pembuktian diatas juga berlaku untuk $\{T_n\}, n > 0$. Jadi terbukti bahwa waktu antar kedatangan berdistribusi Eksponensial.

E. Distribusi Kepergian

Distribusi kepergian berhubungan dengan peluang terdapat n kepergian *customer* dalam suatu sistem antrian pada interval waktu tertentu. Kepergian yang dimaksud dalam pembahasan ini adalah kepergian murni, yaitu kepergian yang tanpa disertai kedatangan, sehingga laju kedatangan $\lambda_n = 0, \forall_n \geq 0$.

Diasumsikan bahwa laju kepergian tidak tergantung pada banyaknya *customer* yang berada dalam sistem, sehingga $\mu_n = \mu, \forall_n \geq 0$. Peluang

terdapat $n(n \geq 0)$ kepergian selama waktu t dapat diperoleh dengan mensubstitusikan $\lambda_n = 0$ dan $\mu_n = \mu$ ke Persamaan (2.4) dan Persamaan (2.6) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} \\ = \mu P_{n+1}(t) \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_n(t)}{dt} = -\mu P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) , \\ n > 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Akan ditunjukkan bahwa kepergian *customer* berdistribusi Poisson. Jika jumlah *customer* dalam sistem antrian selama t adalah $n = N$, maka $P_{n+1} = 0, n \geq N$ sehingga untuk $n \geq N$ berlaku

$$\begin{aligned} \frac{dP_n(t)}{dt} \\ = -\mu P_n(t) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Sedangkan untuk $0 < n < N$ berlaku

$$\begin{aligned} \frac{dP_n(t)}{dt} \\ = -\mu P_n(t) \\ + \mu P_{n+1}(t) , \end{aligned} \quad (2.30)$$

Berdasarkan definisi (2.8), Persamaan (2.29) dan Persamaan (2.30) dapat dinyatakan sebagai Persamaan differensial orde satu. Sehingga penyelesaian Persamaan (2.29) adalah

$$P_n(t) = ce^{-\mu t}, n \geq N$$

Diasumsikan bahwa proses kepergian murni dimulai ($t = 0$) pada saat sistem memiliki $n = N$ customer dalam sistem. Sehingga peluang terdapat N customer dalam sistem pada kondisi awal ($t = 0$) dinotasikan $P_N(0)$ adalah

1. Jika $0 \leq n < N$ maka $P_N(0) = 0$. Hal ini dapat dituliskan sebagai berikut.

$$P_N(0) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq n < N \\ 1 & , n = N \end{cases}$$

(2.31)

Dengan demikian, $P_N(0) = ce^{-\mu \cdot 0} = 1$

Maka diperoleh nilai $c = 1$, oleh karena itu didapatkan

$$P_N(t) = e^{-\mu t} \quad (2.32)$$

Selanjutnya akan dicari solusi untuk Persamaan (2.30) sebagai berikut.

Penyelesaian dari Persamaan (2.30) adalah

$$P_n(t) = ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int e^{\mu t} P_{n+1}(t) dt, \quad 0 < n < N \quad (2.33)$$

Untuk $n = N - 1$ maka

$$P_{N-1}(t) = ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int e^{\mu t} P_N(t) dt \quad (2.34)$$

Substitusi Persamaan (2.32) ke Persamaan (2.34) sehingga didapatkan

$$P_{N-1}(t) = ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int e^{\mu t} e^{-\mu t} dt$$

$$= ce^{-\mu t} + \mu te^{-\mu t} \quad (2.35)$$

Berdasarkan Persamaan (2.31), maka

$$P_{N-1}(0) = ce^{-\mu \cdot 0} + \mu \cdot 0 \cdot e^{-\mu \cdot 0} = 0$$

Sehingga $c = 0$, maka Persamaan (2.35) menjadi

$$P_{N-1}(t) = \mu te^{-\mu t} \quad (2.36)$$

Untuk $n = N - 2$, Persamaan (2.35) menjadi

$$P_{N-2}(t) = ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int e^{\mu t} P_{N-1}(t) dt \quad (2.37)$$

Persamaan (2.36) disubstitusikan ke Persamaan (2.37) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} P_{N-2}(t) &= ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int e^{\mu t} \mu te^{-\mu t} dt \\ &= ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int \mu t dt \\ &= ce^{-\mu t} \\ &\quad + \frac{(\mu t)^2}{2} e^{-\mu t} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Berdasarkan Persamaan (2.31) maka

$$P_{N-2}(0) = ce^{-\mu \cdot 0} + \frac{(\mu \cdot 0)^2}{2} e^{-\mu \cdot 0} = 0$$

Sehingga diperoleh $c = 0$, maka Persamaan (2.38) menjadi

$$P_{N-2}(t) = \frac{(\mu t)^2}{2} e^{-\mu t} \quad (2.39)$$

Dari Persamaan (2.32), (2.36) dan Persamaan (2.39) dapat disimpulkan bahwa penyelesaian umum dari Persamaan (2.29) dan Persamaan (2.30) adalah

$$P_n(t) = \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t}$$

Pembuktiannya analog pada pembuktian distribusi kedatangan yang telah dibahas pada subbab sebelumnya. Jadi kepergian *customer* juga berdistribusi Poisson, dengan parameter μ .

Teorema 2.3 (Wagner, 1978 : 850)

Jika kepergian *customer* berdistribusi Poisson maka waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial.

Bukti

Misal keadaan awal suatu sistem antrian sebanyak $n = N$ *customer*. Ambil T_1 sebagai waktu pelayanan pertama, $T_n, n > 1$ menunjukkan waktu pelayanan kepada *customer* ke n sehingga barisan $\{T_n\}$ dengan $n = 1, 2, 3, \dots$ merupakan barisan waktu pelayanan yang saling asing dan saling bebas.

Akan ditunjukkan bahwa T_1 berdistribusi Eksponensial. Ambil $t < T_1$, maka jumlah kepergian pada waktu t adalah nol, artinya

$$P_N(T_1 > t) = P(\text{Terdapat } N \text{ customer pada waktu } t)$$

$$= P_N(t)$$

Berdasarkan Persamaan (2.32), $P_N(t) = e^{-\mu t}$ dengan μ menyatakan laju pelayanan rata – rata, maka fungsi distribusi kumulatif dari T_1 dengan $t \geq 0$ adalah

$$F(t) = P(T_1 \leq t)$$

$$= 1 - P(T_1 > t)$$

$$= 1 - P_N(t)$$

$$= 1$$

$$- e^{-\mu t}$$

(2.40)

Berdasarkan definisi (2.6), Persamaan (2.40) merupakan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Eksponensial yang secara umum ditulis



$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

Sehingga fungsi densitas peluang dari T_1 untuk $t \geq 0$ adalah

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \mu e^{-\mu t} \quad (2.41)$$

Berdasarkan definisi (2.6), T_1 merupakan variabel acak yang berdistribusi Eksponensial dengan parameter μ . Sesuai dengan asumsi bahwa barisan waktu pelayanan pada sistem antrian adalah saling bebas, maka

pembuktian diatas juga berlaku untuk $\{T_n\}, n > 0$. Jadi terbukti bahwa waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial.

F. Proses Kedatangan dan Kepergian *Steady state*

Kondisi *Steady state* yaitu keadaan sistem yang tidak tergantung pada keadaan awal maupun waktu yang telah dilalui. Jika suatu sistem antrian telah mencapai kondisi *steady state* maka peluang terdapat n customer dalam sistem pada waktu t ($P_n(t)$) tidak tergantung pada waktu (Ecker dan Kupferschmid, 1988:394).

Kondisi *steady state* terjadi ketika $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$ dan $\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P_n$ sehingga $P_n(t) = P_n$ untuk semua t , artinya P_n tidak tergantung pada waktu.

Proses kedatangan dan kepergian pada pembahasan sebelumnya menghasilkan Persamaan (2.4) dan Persamaan (2.6). Untuk memperoleh kondisi *steady state*, Persamaan (2.4) dan Persamaan (2.6) disubstitusi dengan $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$ dan $P_n(t) = P_n$, sehingga diperoleh Persamaan kesetimbangan sebagai berikut.

$$0 = -(\lambda_n + \mu_n)P_n + (\mu_{n+1})P_{n+1} + P_{n-1}(\lambda_{n-1}) \quad n \geq 1 \quad (2.42)$$

$$0 = P_1(\mu_1) - P_0(\lambda_0), \quad n = 0 \quad (2.43)$$

Atau

$$P_{n+1} = \frac{(\lambda_n + \mu_n) P_n}{\mu_{n+1}} - \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n+1}} P_{n-1}, \quad n > 0 \quad (2.44)$$

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0, \quad n = 0 \quad (2.45)$$

Akan dicari penyelesaian umum dari Persamaan (2.42) dan (2.43)

Untuk $n = 1$ maka Persamaan (2.44) menjadi

$$P_2 = \frac{(\lambda_1 + \mu_1) P_1}{\mu_2} - \frac{\lambda_0}{\mu_2} P_0 \quad (2.46)$$

Selanjutnya Persamaan (2.45) disubstitusikan ke Persamaan (2.46) diperoleh

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{(\lambda_1 + \mu_1) \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} P_0 \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_0 + \mu_1 \lambda_0}{\mu_1 \mu_2} P_0 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} P_0 \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_1 \mu_2} P_0 \end{aligned}$$

Untuk $n = 2$ didapatkan

$$P_3 = \frac{(\lambda_2 + \mu_2) P_2}{\mu_3} - \frac{\lambda_1}{\mu_3} P_1$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa penyelesaian umum dari Persamaan (2.42) dan (2.43) adalah

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1} P_0 \\ &= P_0 \prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right), \end{aligned} \quad (2.47)$$

Bukti dengan induksi matematika:

1. Telah dibuktikan pada Persamaan (2.42) bahwa Persamaan (2.47) berlaku untuk $n = 1$ dan $n = 2$
2. Diasumsikan bahwa Persamaan (2.47) berlaku untuk $n = k$ maka

$$P_k = \frac{\lambda_{k-1} \lambda_{k-2} \dots \lambda_0}{\mu_k \mu_{k-1} \dots \mu_1} P_0$$

3. Akan dibuktikan Persamaan (2.47) berlaku untuk $n = k + 1$

$$P_{k+1} = \frac{\lambda_k \lambda_{k-1} \dots \lambda_0}{\mu_{k+1} \mu_k \dots \mu_1} P_0$$

Substitusikan Persamaan (2.47) ke Persamaan (2.44), dengan $n = k + 1$

diperoleh

$$\begin{aligned} P_{k+2} &= \frac{(\lambda_{k+1} + \mu_{k+1})}{\mu_{k+2}} \frac{\lambda_k \lambda_{k-1} \dots \lambda_0}{\mu_{k+1} \mu_k \dots \mu_1} P_0 - \frac{\lambda_k}{\mu_{k+2}} \frac{\lambda_{k-1} \lambda_{k-2} \dots \lambda_0}{\mu_k \mu_{k-1} \dots \mu_1} P_0 \\ &= \frac{\lambda_{k+1} \lambda_k \lambda_{k-1} \dots \lambda_0 P_0}{\mu_{k+2} \mu_{k+1} \mu_k \dots \mu_1} + \frac{\mu_{k+1} \lambda_k \lambda_{k-1} \dots \lambda_0 P_0}{\mu_{k+2} \mu_{k+1} \mu_k \dots \mu_1} \\ &\quad - \frac{\lambda_k}{\mu_{k+2}} \frac{\lambda_{k-1} \lambda_{k-2} \dots \lambda_0}{\mu_k \mu_{k-1} \dots \mu_1} P_0 \\ &= \frac{\lambda_{k+1} \lambda_k \lambda_{k-1} \dots \lambda_0}{\mu_{k+2} \mu_{k+1} \mu_k \dots \mu_1} P_0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Jadi terbukti bahwa Persamaan (2.47) berlaku untuk $n = k + 1$.

Jadi Persamaan (2.47) menyatakan peluang terdapat n customer dalam keadaan *steady state* (P_n), $n > 0$.

G. Probability Generating function (PGF)

Definisi 2.9 (Bain & Engelhardt, 1991:61) Jika X adalah suatu variabel acak diskrit dengan fungsi peluang $f(x)$ maka nilai harapan dari X didefinisikan sebagai

$$E(X) = \sum_x x f(x) \quad (2.49)$$

Definisi 2.10 (Purcell & Varberg, 1987: 49) Andaikan $S(x)$ adalah jumlah sebuah deret pangkat pada sebuah selang $I = \{x | -1 < x < 1\}$ sehingga

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots \quad (2.50)$$

Maka turunan pertama dari $S(x)$ adalah

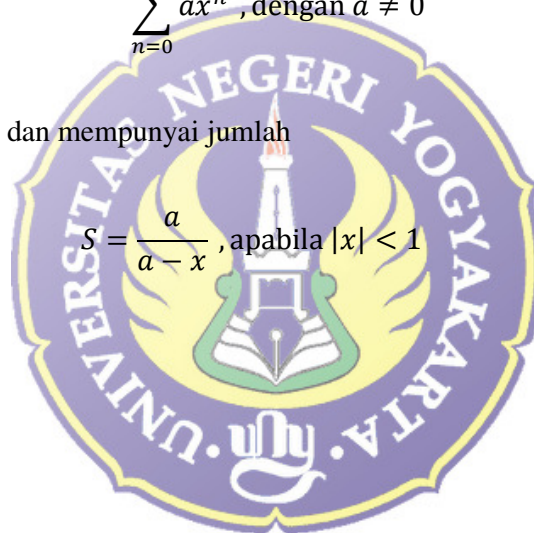
$$\frac{dS(x)}{dx} = \frac{d \sum_{n=0}^{\infty} x^n}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} \quad (2.51)$$

Definisi 2.11 (Purcell & Varberg, 1987 : 12) Deret geometri berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n, \text{ dengan } a \neq 0$$

akan konvergen dan mempunyai jumlah

$$S = \frac{a}{a-x}, \text{ apabila } |x| < 1$$



Definisi 2.12 (Bunday, 1996:10) Jika N adalah suatu variabel acak diskrit yang diasumsikan nilainya $n (= 0, 1, 2, \dots)$ dengan probabilitas P_n maka *probability generating function* (PGF) dari N didefinisikan sebagai

$$P(z) = E[z^N] = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n \quad (2.52)$$

Untuk $z = 1$, didapatkan

$$P(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \quad (2.53)$$

Turunan pertama dari $P(z)$ adalah

$$P'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n z^{n-1} \quad (2.54)$$

Sehingga

$$P'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n$$

Berdasarkan definisi (2.9) maka diperoleh

$$P'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = E[N] \quad (2.55)$$

I. Ukuran Keefektifan Sistem Antrian

Menurut Taha (1997, 189:190), ukuran keefektifan suatu sistem antrian dapat ditentukan setelah probabilitas *steady state* diketahui. Ukuran – ukuran keefektifan suatu sistem tersebut antara lain:

1. Nilai harapan banyaknya *customer* dalam sistem antrian (L_s).
2. Nilai harapan banyaknya *customer* dalam antrian (L_q).
3. Nilai harapan waktu tunggu dalam sistem antrian (W_s).
4. Nilai harapan waktu tunggu dalam antrian (W_q).

Sebelum membahas lebih lanjut, akan diuraikan lima definisi yang mendukung pembahasan ukuran keefektifan suatu sistem.

Definisi 2.13 (Taha, 1993: 596). Jumlah *customer* dalam sistem adalah jumlah *customer* dalam antrian ditambah jumlah *customer* yang sedang mendapat layanan.

Definisi 2.14 (Taha, 1993: 596). Laju kedatangan efektif merupakan laju kedatangan rata – rata dalam waktu yang panjang. Laju kedatangan efektif dinotasikan λ_{eff} dan dinyatakan dengan

$$\lambda_{eff} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n \quad (2.56)$$

λ_n merupakan laju kedatangan jika ada n *customer* dalam sistem, jika laju kedatangan konstan untuk semua n , maka cukup ditulis dengan λ . (Dimiyati, 1999:353)

Definisi 2.15 (Dimiyati, 2003: 373) Laju pelayanan rata-rata untuk seluruh pelayan dalam sistem antrian adalah laju pelayanan rata-rata dimana *customer* yang sudah mendapat pelayanan meninggalkan sistem antrian. Laju pelayanan rata-rata untuk seluruh pelayan dinyatakan dengan μ .

Nilai harapan banyaknya *customer* dalam sistem antrian (L_s) merupakan jumlah dari perkalian keseluruhan *customer* dalam sistem dengan peluang terdapat n *customer* (Ecker, 1988: 390), dinyatakan dengan

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n \quad (2.57)$$

Nilai harapan banyaknya *customer* dalam antrian (L_q) merupakan jumlah dari perkalian *customer* dalam antrian dengan peluang terdapat n *customer* (Hillier & Lieberman. 2011: 852), dinyatakan dengan

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty} (n - c)P_n \quad (2.58)$$

Apabila W_s merupakan waktu menunggu *customer* dalam sistem antrian dan W_q merupakan waktu menunggu *customer* dalam antrian, maka hubungan W_s, W_q, L_s, L_q dinyatakan dengan

$$L_s = \lambda W_s \quad (2.59)$$

$$L_q = \lambda W_q \quad (2.60)$$

Persamaan (2.59) dan (2.60) dikenal dengan nama *Little Law*, diperkenalkan pertama kali oleh John D.C Little pada tahun 1961 (Gross dan Harris, 1998: 11).

J. Model Antrian ($M/M/1$)

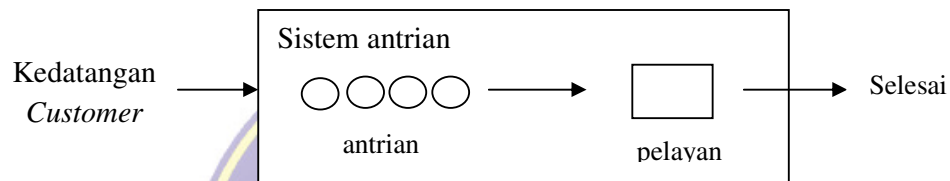
Sebagai dasar dalam pembahasan model antrian ($M^X/M/1$) akan dibahas terlebih dahulu model antrian ($M/M/1$).

1. Solusi *Steady-State* untuk Model ($M/M/1$)

Sistem antrian ($M/M/1$) merupakan model antrian satu *server* dengan kedatangan berdistribusi Poisson dan waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial. Model ini merupakan model tanpa batas

kapasitas baik dari kapasitas sistem maupun kapasitas sumber pemanggilan. Aturan pelayanannya bersifat FCFS, yaitu *customer* yang datang pertama dilayani terlebih dahulu begitu seterusnya. Notasi sistem antrian ini berdasarkan dengan notasi Kendall-Lee adalah

Sistem pada model antrian ini dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar. 2.6 Sistem Antrian

Jika kedatangan *customer* mengikuti distribusi Poisson dengan laju λ , maka dari asumsi (i) *probability* sebuah kedatangan terjadi pada t adalah $\lambda e^{-\lambda t}$, dan berdasarkan asumsi (v) *probability* terjadi lebih dari satu kedatangan pada t adalah $1 - e^{-\lambda t}$.

Fungsi densitas peluang untuk waktu antar kedatangan dan waktu antar pelayanan pada model antrian ini berturut – turut adalah

,

dimana λ adalah rata – rata waktu antar kedatangan dan μ adalah rata – rata waktu pelayanan. Probabilitas sebuah kepergian terjadi pada ρ ,

berdasarkan asumsi (ii) adalah $\mu\Delta t + o(\Delta t)$ dan probabilitas lebih dari satu kepergian terjadi pada Δt , dinyatakan dengan adalah $o(\Delta t)$.

Oleh karena itu, proses dalam sistem ini merupakan masalah proses kelahiran dan kematian yang telah dibahas pada subbab sebelumnya dengan $\lambda_n = \lambda$ dan $\mu_n = \mu$ untuk semua n . Dengan mensubstitusikan $\lambda_n = \lambda$ dan $\mu_n = \mu$ ke Persamaan (2.4) dan Persamaan (2.6), menghasilkan Persamaan Kolmogorov pada sistem antrian ($M/M/1$) sebagai berikut.

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)P_n(t) + (\mu)P_{n+1}(t) + P_{n-1}(t)(\lambda), n \geq 1 \quad (2.61a)$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = P_1(t)(\mu) - P_0(t)(\lambda), n = 0 \quad (2.61b)$$

Probabilitas *steady - state* pada sistem ini diperoleh dengan mensubstitusi $\lambda_n = \lambda$ dan $\mu_n = \mu$ ke Persamaan (2.42) dan Persamaan (2.43), menghasilkan Persamaan kesetimbangan sebagai berikut.

$$0 = -(\lambda + \mu)P_n + \mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} \quad n \geq 1, \quad (2.62a)$$

$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1, \quad n = 0 \quad (2.62b)$$

Karena pada sistem antrian ($M/M/1$) merupakan masalah proses kedatangan dan kepergian dengan laju kedatangan dan kepergian konstan, maka solusi *steady state* untuk model antrian ini dapat diperoleh dengan mensubstitusi $\lambda_n = \lambda$ dan $\mu_n = \mu$ ke Persamaan (2.47). Sehingga diperoleh

$$P_n = P_0 \prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \quad (n \geq 1)$$

$$= P_0 (\lambda/\mu)^n$$

dengan mendefinisikan $\rho^* = \frac{\lambda}{\mu}$ maka

$$P_n = P_0 (\rho^*)^n$$

(2.63)

Berdasarkan definisi (2.2), bahwa $P(S) = 1$ dengan S adalah total semua kejadian, maka $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ sehingga dari Persamaan (2.62) diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_0 (\rho^*)^n = 1$$

$$P_0 (1 + \rho^* + (\rho^*)^2 + (\rho^*)^3 + \dots) = 1$$

(2.64)

berdasarkan definisi (2.11), $1 + \rho^* + (\rho^*)^2 + (\rho^*)^3 + \dots$ konvergen jika dan hanya jika $\rho^* < 1$, maka diperoleh

$$P_0 \left(\frac{1}{1 - \rho^*} \right) = 1$$

Sehingga solusi *steady state* ada jika $\rho^* < 1$

Sehingga

$$P_0 = 1 - \rho^* \quad (\rho^* < 1),$$

(2.65)

Substitusi Persaman (2.65) ke Persamaan (2.63) didapatkan

$$P_n = (1 - \rho^*) (\rho^*)^n \quad (\rho^* < 1)$$

(2.66)

Persamaan (2.66) merupakan solusi *steady state* untuk $(M/M/1)$, dari Persamaan (2.66) dapat ditentukan ukuran keefektifan dari model antrian $(M/M/1)$.

2. Ukuran Keefektifan Model Antrian $(M/M/1)$

a) Nilai Harapan Banyak *Customer* dalam Sistem

Dari Persamaan (2.57) diketahui bahwa nilai harapan banyak *customer* dalam sistem adalah

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n$$

maka substitusi Persamaan (2.66) ke Persamaan (2.57) diperoleh

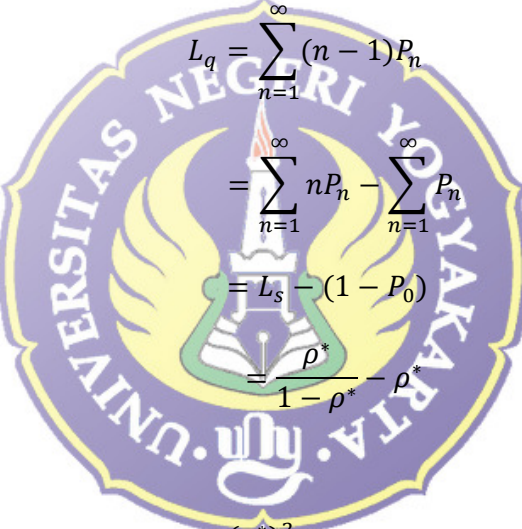
$$\begin{aligned}
 L_s &= \sum_{n=0}^{\infty} n (1 - \rho^*) (\rho^*)^n \\
 &= (1 - \rho^*) \sum_{n=0}^{\infty} n (\rho^*)^n \\
 &= (1 - \rho^*) (\rho^* + 2(\rho^*)^2 + 3(\rho^*)^3 + \dots) \\
 &= (1 - \rho^*) \rho^* (1 + 2(\rho^*)^2 + 3(\rho^*)^3 + \dots) \\
 &= (1 - \rho^*) \rho^* \frac{d}{d\rho^*} \sum_{n=0}^{\infty} (\rho^*)^n \\
 &= (1 - \rho^*) \rho^* \frac{d}{d\rho^*} \left(\frac{1}{1 - \rho^*} \right) \\
 &= (1 - \rho^*) \rho^* \frac{1}{(1 - \rho^*)^2} \\
 &= \frac{\rho^*}{1 - \rho^*}
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

b) Nilai Harapan banyak *Customer* dalam Antrian

Dari Persamaan (2.58) diketahui bahwa nilai harapan banyak *customer* dalam sistem adalah

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty} (n - c)P_n$$

dengan c menyatakan jumlah *server* yang aktif, maka untuk kasus $M/M/1$ nilai $c = 1$, sehingga diperoleh



$$\begin{aligned}
 L_q &= \sum_{n=1}^{\infty} (n - 1)P_n \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} nP_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n \\
 &= L_s - (1 - P_0) \\
 &= \frac{\rho^*}{1 - \rho^*} - \rho^* \\
 &= \frac{(\rho^*)^2}{1 - \rho^*}
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

c) Nilai Harapan Waktu Tunggu *Customer* dalam Sistem

Berdasarkan Rumus *Little* pada Persamaan (2.59), diketahui

$$L_s = \lambda W_s$$

maka

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} \quad (2.69)$$

substitusi Persamaan (2.67) ke Persamaan (2.69) didapatkan

$$\begin{aligned} W_s &= \frac{\rho^*}{\lambda(1 - \rho^*)} \\ &= \frac{1}{\mu(1 - \rho^*)} \end{aligned} \quad (2.70)$$

d) Nilai Harapan Waktu Tunggu *Customer* dalam Antrian

Berdasarkan Rumus *Little* pada Persamaan (2.60), diketahui

$$L_q = \lambda W_q$$

maka



$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad (2.71)$$

substitusi Persamaan (2.68) ke Persamaan (2.71) didapatkan

$$\begin{aligned} W_q &= \frac{(\rho^*)^2}{\lambda(1 - \rho^*)} \\ &= \frac{\rho^*}{\mu(1 - \rho^*)} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Dari Persamaan (2.67), Persamaan (2.68), Persamaan (2.70) dan Persamaan (2.72) dapat diringkas ukuran keefektifan model antrian ($M/M/1$) dalam tabel 2.3 berikut ini.

Tabel 2.3 Ukuran Keefektifan pada Model Antrian ($M/M/1$)

No	Ukuran Keefektifan	Formula
1	Banyak <i>customer</i> dalam sistem	$L_s = \frac{\rho^*}{1 - \rho^*}$
2	Banyak <i>customer</i> dalam sistem	$L_q = \frac{(\rho^*)^2}{1 - \rho^*}$
3	Waktu tunggu <i>customer</i> dalam sistem	$W_s = \frac{1}{\mu(1 - \rho^*)}$
4	Waktu tunggu <i>customer</i> dalam antrian	$W_q = \frac{\rho^*}{\mu(1 - \rho^*)}$

K. Penggunaan Software WINQSB untuk Penyelesaian Model Antrian Batch

Arrival

Langkah – langkah penyelesaian pada model antrian dengan Software WINQSB adalah sebagai berikut.

1. Buka aplikasi dengan cara klik *Start* > Program > WinQSB > *Queuing Analysis*
2. Kemudian, akan muncul tampilan awal dari WinQSB dan pilih File > New Problem atau klik icon new folder.
3. Akan muncul pilihan menu Simple M/M system dan General Queuing System, kemudian pilih General Queuing System klik OK.
4. Isi kolom dengan nilai yang sesuai dengan kasus yang akan diselesaikan.
5. Kemudian pilih menu Solve and Analyze > Solve The Performance atau klik icon dari Solve The Performance.
6. Kemudian akan muncul tampilan hasil analisis WinQSB

Tampilan – tampilan menu pada setiap langkah diatas dapat dilihat dalam lampiran 3



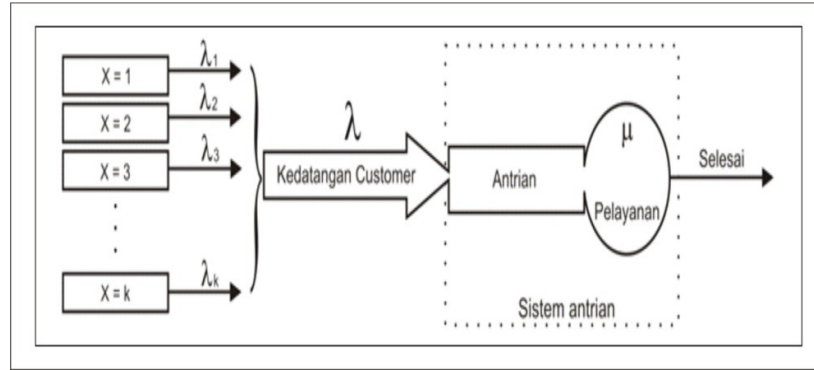
BAB III

PEMBAHASAN

Dalam skripsi ini akan dibahas tentang keefektifan sistem antrian satu *server* dengan pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*). Ukuran keefektifan sistem antrian tersebut dapat dilihat dari banyak *customer* dalam sistem/ L_s , banyak *customer* dalam antrian/ L_q , waktu tunggu *customer* dalam sistem/ W_s , waktu tunggu *customer* dalam antrian/ W_q , dan persentase *server* sibuk/ $\bar{c}$. Untuk mengetahui ukuran keefektifan tersebut, langkah pertama akan dicari *probability generating function* (PGF) dari banyaknya *customer* dalam sistem antrian, kemudian dari PGF tersebut dapat digunakan untuk mencari L_s, L_q, W_s, W_q , dan $\bar{c}$.

A. Pola Kedatangan Berkelompok (*Batch Arrival*)

Sebagai contoh situasi pada sistem antrian dimana *customer* datang secara berkelompok yaitu kedatangan *customer* secara berkelompok di sebuah restoran, dan surat – surat yang tiba di kantor pos. Ilustrasi sistem antrian dengan pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*) terlihat dalam Gambar 3.1 berikut ini.



Gambar 3.1 Sistem Antrian $M^X/M/1$

Pada sistem antrian ini *customer* datang secara berkelompok dengan ukuran kelompok tersebut adalah X , dimana secara umum X adalah variabel acak positif. Pada pembahasan ini, *customer* datang berdasarkan distribusi Poisson dengan laju kedatangan λ , dan terdapat sebuah *server* yang memiliki waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial dengan laju pelayanan μ , dimana *customer* dilayani secara individu dengan disiplin antrian *FIFO* (*First In First Out*). Desain pelayanan pada sistem antrian ini adalah *Single Channel Single Phase*. Notasi untuk model antrian satu *server* dengan pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*) tersebut adalah $M^X/M/1$.

Jika X adalah variabel acak yang menyatakan ukuran kelompok dengan fungsi peluang $a_k = P(X = k)$ dengan $k \geq 1$ maka berdasarkan definisi (2.11) *probability generating function* (*PGF*) dari X adalah

$$A(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, |z| \leq 1 \quad (3.1)$$

Turunan pertama dari $A(z)$ adalah

$$A'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$$

maka

$$A'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \quad (3.2)$$

Berdasarkan definisi (2.9), Persamaan (3.2) merupakan nilai harapan dari X dinyatakan dengan

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k = A'(1) \quad (3.3)$$

Dengan demikian nilai harapan ukuran kelompok yang masuk ke dalam sistem antrian dapat diperoleh dengan mencari $A'(1)$.

Jadi nilai harapan ukuran kelompok yang masuk ke dalam sistem antrian adalah

$$E(X) = A'(1) = \bar{a} \quad (3.4)$$

A. Proses Kedatangan dan Kepergian pada Sistem Antrian $M^X/M/1$

Pada sistem antrian dengan pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*), ukuran suatu kelompok yang masuk kedalam suatu sistem antrian merupakan variabel acak positif X , dengan fungsi peluang kedatangan suatu kelompok berukuran k adalah

$$P(X = k) = a_k \text{ dengan } k \geq 1.$$

(3.5)

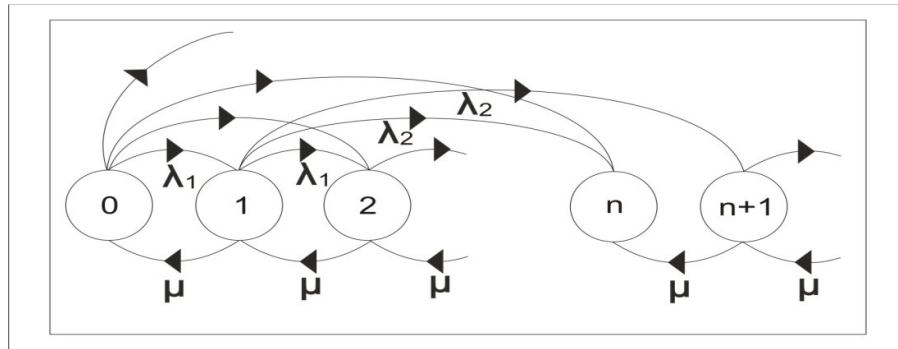
Jika laju kedatangan suatu kelompok yang terdiri dari k customer dinyatakan dengan λ_k maka

$$a_k = \frac{\lambda_k}{\lambda}, \quad (3.6)$$

dengan λ adalah $\sum_k \lambda_k$.

Karena proses kedatangan pada sistem antrian dengan pola kedatangan berkelompok mengikuti distribusi Poisson dengan banyaknya kedatangan tiap satuan waktu adalah λ dan setiap kedatangan tersebut berukuran $\bar{a}$, maka banyaknya kedatangan tiap satuan waktu pada sistem antrian $M^X/M/1$ ini adalah $\lambda \bar{a}$.

Laju transisi untuk sistem antrian $M^X/M/1$ dapat dilihat dalam Gambar 3.2 berikut.



Gambar 3.2 Diagram laju transisi untuk sistem antrian $M^X/M/1$

(Hadianti, 2006:176)

Berdasarkan Gambar 3.2, jika terdapat $n(n > 0)$ customer kejadian – kejadian saling asing yang mungkin terjadi dengan pola kedatangan berkelompok yang berukuran k ($1 \leq k \leq n$) dapat ditunjukkan pada tabel 3.1 sebagai berikut.

Tabel 3.1 Kemungkinan terdapat n Customer dalam Sistem Antrian dengan Pola Kedatangan Berkelompok pada Saat $t + \Delta t$.

Kasus	Jumlah Customer pada Waktu (t)	Jumlah Kedatangan pada Waktu (Δt)	Jumlah Kepergian pada Waktu (Δt)	Jumlah Customer pada Waktu (t+ Δt)
1	n	0	0	n
2	n+1	0	1	n
3	n-k	k	0	n
4	n	1	1	n

Jika terdapat n customer dengan $n = 0$ maka kejadian – kejadian saling asing yang mungkin terjadi dapat dilihat pada table 3.2 sebagai berikut.

Kasus	Jumlah	Jumlah	Jumlah	Jumlah
-------	--------	--------	--------	--------

1	n	0	0	n
2	n+1	0	1	n
4	n	1	1	n

Tabel 3.2 Kemungkinan terdapat $n = 0$ Customer dalam Sistem Antrian dengan Pola Kedatangan Berkelompok pada Saat $t + \Delta t$

Dari tabel 3.1 terlihat bahwa perbedaan kemungkinan kejadian pada sistem antrian $M^X/M/1$ dan $M/M/1$ adalah pada kasus ketiga. Sedangkan pada tabel 3.2 semua kemungkinan kejadian pada sistem antrian $M^X/M/1$ dan $M/M/1$ sama. Probabilitas kasus ketiga dari tabel 3.1 dapat diuraikan sebagai berikut.

Berdasarkan asumsi (i) probabilitas sebuah kedatangan secara individu terjadi antara t dan $(t + \Delta t)$ adalah $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$. Pada model antrian dengan pola kedatangan berkelompok, probabilitas sebuah kedatangan yang terdiri dari k customer terjadi antara t dan $(t + \Delta t)$ adalah $\lambda a_k \Delta t + o(\Delta t)$.

Probabilitas kasus 3 = Probabilitas kedatangan berukuran 1 atau 2 atau 3 atau 4 dan seterusnya sampai n .

Probabilitas kasus 3 = $P_{n-1}(t)(\lambda a_1 \Delta t + o(\Delta t)) + P_{n-2}(t)(\lambda a_2 \Delta t +$

$o(\Delta t))$

$+ P_{n-3}(t)(\lambda a_3 \Delta t + o(\Delta t)) + \dots$

$+ P_0(t)(\lambda a_n \Delta t + o(\Delta t))$

$$= \sum_{k=1}^n P_{n-k}(t) \lambda a_k \Delta t$$

$+ o(\Delta t)$

(3.7)

Karena model antrian $M^X/M/1$ merupakan variasi dari model antrian $M/M/1$ maka proses kedatangan dan kepergian pada sistem antrian $M^X/M/1$ diperoleh berdasarkan proses kedatangan dan kepergian pada sistem antrian $M/M/1$. Pada proses kedatangan dan kepergian sistem antrian $M/M/1$ menghasilkan Persamaan Kolmogorov yaitu Persamaan (2.61). Sehingga proses kedatangan dan kepergian pada sistem antrian $M^X/M/1$ diperoleh berdasarkan Persamaan (2.61) dengan probabilitas kasus ketiga sesuai dengan Persamaan (3.7), maka menghasilkan Persamaan Kolmogorov sebagai berikut.

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)P_n(t) + (\mu)P_{n+1}(t) + \sum_{k=1}^n \lambda a_k P_{n-k}(t), \quad n \geq 1 \quad (3.8)$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = P_1(t)(\mu) - P_0(t)(\lambda), \quad n = 0 \quad (3.9)$$

B. Solusi *Steady state* Model Antrian $M^X/M/1$

Kondisi *steady state* yaitu keadaan sistem yang tidak tergantung pada keadaan awal maupun waktu yang telah dilalui. Jika suatu sistem antrian telah mencapai kondisi *steady state* maka peluang terdapat n customer dalam sistem pada waktu t , yang dinotasikan dengan $(P_n(t))$ tidak tergantung pada waktu.

Kondisi *steady state* terjadi ketika $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$ dan $\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P_n$, sehingga $P_n(t) = P_n$, untuk semua t , artinya P_n tidak tergantung pada waktu.

Kondisi *steady state* pada sistem antrian $M^X/M/1$ diperoleh dengan mensubstitusikan $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$, dan $P_n(t) = P_n$ ke Persamaan (3.8) dan Persamaan (3.9) sehingga didapatkan

$$0 = P_1\mu - P_0\lambda, n = 0$$

(3.10a)

$$0 = -(\lambda + \mu)P_n + (\mu)P_{n+1}$$

$$+ \sum_{k=1}^n \lambda a_k P_{n-k}, n \geq 1 \quad (3.10b)$$

Persamaan (3.10) tidak dapat diselesaikan menggunakan metode rekursif seperti pada model antrian $M/M/1$. Untuk menentukan solusi *steady state* pada model antrian $M^X/M/1$, langkah pertama adalah menentukan PGF dari banyak *customer* dalam sistem.

Jika N adalah variabel diskrit yang menyatakan banyaknya *customer* dalam sistem, dengan probabilitas P_n maka berdasarkan definisi (2.9) PGF dari N adalah

$$P(z) = E[z^N] = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n, |z| \leq 1 \quad (3.11)$$

Jika X menyatakan ukuran kelompok yang masuk ke dalam sistem antrian dan N menyatakan banyaknya *customer* dalam sistem, maka dari

Persamaan (3.1) dan Persamaan (3.11) PGF dari X dan N masing – masing adalah

$$A(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, \quad P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n, \quad |z| \leq 1$$

Penyelesaian Persamaan (3.10) dengan mencari PGF dari N adalah sebagai berikut.

Persamaan (3.10) dikalikan dengan z^n , maka didapatkan:

$$0 = P_1 \mu z^n - P_0 \lambda z^n, \quad n = 0 \quad (3.12)$$

$$0 = -(\lambda + \mu)P_n z^n + (\mu)P_{n+1} z^n + \lambda \sum_{k=1}^n a_k P_{n-k} z^n, \quad n \geq 1 \quad (3.13)$$

Kemudian Persamaan (3.12) dan Persamaan (3.13) dapat diuraikan sebagai berikut.

Untuk $n = 0$ maka Persamaan (3.12) menjadi $0 = P_1 \mu - P_0 \lambda$, nilainya sama dengan Persamaan (3.10a).

Dari Persamaan (3.13) dapat diuraikan sebagai berikut.

$$\text{Untuk } n = 1 \text{ didapatkan } 0 = -(\lambda + \mu)P_1 z + (\mu)P_2 z + \lambda \sum_{k=1}^1 a_k P_{1-k} z$$

$$\text{Untuk } n = 2 \text{ didapatkan } 0 = -(\lambda + \mu)P_2 z^2 + (\mu)P_3 z^2 + \lambda \sum_{k=1}^2 a_k P_{2-k} z^2$$

$$\text{Untuk } n = 3 \text{ didapatkan } 0 = -(\lambda + \mu)P_3 z^3 + (\mu)P_4 z^3 + \lambda \sum_{k=1}^3 a_k P_{3-k} z^3$$

$\vdots$

Untuk $n - 1$ didapatkan $0 = -(\lambda + \mu)P_{n-1}z^{n-1} + (\mu)P_n z^{n-1}$

$$+ \lambda \sum_{k=1}^n a_k P_{(n-1)-k} z^{n-1}$$

Untuk n didapatkan $0 = -(\lambda + \mu)P_n z^n + (\mu)P_{n+1} z^n + \lambda \sum_{k=1}^n a_k P_{n-k} z^n$

:

Dan seterusnya.

Langkah penyelesaian selanjutnya yaitu persamaan – persamaan yang telah didapatkan diatas dari penguraian Persamaan (3.12) dan Persamaan (3.13) dijumlahkan dari $n = 0$ sampai ∞ .

Untuk jumlahan dari $n = 1$ sampai ∞ diperoleh

$$-(\lambda + \mu) \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1} z^n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n-k} a_k z^n = 0 \quad (3.14)$$

Persamaan (3.14) ditambah dengan Persamaan (3.10a) didapatkan

$$\begin{aligned} (P_1 \mu - P_0 \lambda) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n - \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1} z^n + \\ \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n-k} a_k z^n \\ = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

dengan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n-k} a_k z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n-k} z^{n-k} a_k z^k$$

kemudian dapat diuraikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (P_{n-1} z^{n-1} a_1 z^1 + P_{n-2} z^{n-2} a_2 z^2 + P_{n-3} z^{n-3} a_3 z^3 \\
 &\quad + P_{n-4} z^{n-4} a_4 z^4 + P_{n-5} z^{n-5} a_5 z^5 + \dots) \\
 &= (P_0 z^0 a_1 z^1 + P_1 z^1 a_1 z^1 + P_0 z^0 a_2 z^2 + P_2 z^2 a_1 z^1 \\
 &\quad + P_1 z^1 a_2 z^2 + P_0 z^0 a_3 z^3 + P_3 z^3 a_1 z^1 \\
 &\quad + P_2 z^2 a_2 z^2 + P_1 z^1 a_3 z^3) + P_0 z^0 a_4 z^4 \\
 &\quad + \dots) \\
 &= P_0 z^0 (a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots) \\
 &\quad + P_1 z^1 (a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots) \\
 &\quad + P_2 z^2 (a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots) \\
 &\quad + P_3 z^3 (a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots) \\
 &\quad + \dots \\
 &= (a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots) (P_0 z^0 + P_1 z^1 \\
 &\quad + P_2 z^2 + P_3 z^3 + P_4 z^4 + \dots) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \sum_{n=k}^{\infty} P_{n-k} z^{n-k}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Berdasarkan Persamaan (3.1) dan Persamaan (3.11), maka Persamaan (3.16)

dapat dinyatakan dengan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \sum_{n=k}^{\infty} P_{n-k} z^{n-k} = A(z)P(z) \quad (3.17)$$

Kemudian substitusi Persamaan (3.17) ke Persamaan (3.15), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} & (P_1\mu - P_0\lambda) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n - \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1} z^n + \lambda A(z)P(z) \\ & = 0 \\ & (P_1\mu - P_0\lambda) - \lambda(P(z) - P_0) - \mu(P(z) - P_0) \\ & \quad + \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1} z^n + \lambda A(z)P(z) = 0 \\ & -(\lambda + \mu)P(z) + \mu P_0 + \mu P_1 + \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1} z^n + \lambda A(z)P(z) = 0 \\ & -(\lambda + \mu)P(z) + \mu P_0 + \mu \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1} z^n + \lambda A(z)P(z) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

misal $n + 1 = m$, maka substitusi $n = m - 1$ ke Persamaan (3.18) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} & -(\lambda + \mu)P(z) + \mu P_0 + \frac{\mu}{z} \sum_{m=1}^{\infty} P_m z^m + \lambda A(z)P(z) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Kedua ruas Persamaan (3.19) dikalikan dengan z menghasilkan

$$-z(\lambda + \mu)P(z) + z\mu P_0 + \mu[P(z) - P_0] + z\lambda A(z)P(z) = 0$$

$$(-z(\lambda + \mu) + z\lambda A(z) + \mu)P(z) + \mu P_0(z - 1) = 0$$

$$P(z) = \frac{\mu P_0(z - 1)}{(z(\lambda + \mu) - z\lambda A(z) - \mu)}$$

$$= \frac{\mu P_0(z - 1)}{z\lambda(1 - A(z)) - \mu(1 - z)}$$

$$= \frac{\mu P_0(1-z)}{\mu(1-z) - z\lambda(1-A(z))}$$

(3.20)

Jadi Persamaan (3.20) adalah PGF dari N, pada model antrian $M^X/M/1$.

Pada Persamaan (3.20) akan dicari nilai P_0 yang merupakan peluang terdapat nol *customer* dalam sistem sebagai berikut.

Dari Persamaan (3.11) diketahui PGF dari N adalah

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n$$

untuk $z = 1$, didapatkan

$$P(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n 1^n$$

Berdasarkan definisi (2.2) jumlah total suatu peluang adalah 1, sehingga didapatkan

$$P(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \quad (3.21)$$

Dari Persamaan (3.20) diketahui PGF dari N adalah

$$P(z) = \frac{\mu P_0(1-z)}{\mu(1-z) - z\lambda(1-A(z))}$$

Substitusi $z = 1$ ke Persamaan (3.20) diperoleh

$$P(1) = \frac{\mu P_0(1-1)}{\mu(1-1) - z\lambda(1-A(1))}$$

Persamaan tersebut berbentuk $\frac{0}{0}$ maka berdasarkan teorema 2.1 penyelesaiannya digunakan aturan l'Hopital sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} P(z) &= \frac{\lim_{z \rightarrow 1} \mu P_0(1-z)}{\lim_{z \rightarrow 1} [\mu(1-z) - z\lambda(1-A(z))]} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-\mu P_0}{-\mu - \lambda + \lambda A(z) + \lambda z A'(z)} \\ &= \frac{\mu P_0}{\mu - \lambda A'(1)} \end{aligned}$$

(3.22)

Dari Persamaan (3.21) dan (3.22) didapatkan

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\mu P_0}{\mu - \lambda A'(1)} \\ P_0 &= 1 - \frac{\lambda A'(1)}{\mu} \end{aligned}$$

(3.23)

Substitusi Persamaan (3.4) ke Persamaan (3.23) diperoleh

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda \bar{a}}{\mu}$$

Jadi

$$P_0 = 1 - \rho$$

(3.24)

dengan

$$\rho = \frac{\lambda \bar{a}}{\mu}$$

Substitusi Persamaan (3.24) ke Persamaan (3.20) maka PGF dari N dapat dinyatakan dengan:

$$P(z) = \frac{\mu(1-\rho)(1-z)}{\mu(1-z) - z\lambda(1-A(z))}$$

(3.25)

Probabilitas terdapat n customer dalam sistem pada model antrian $M^X/M/1$ merupakan koefisien dari z^n . Dari Persamaan (3.25) dapat ditentukan nilai harapan banyaknya customer dalam sistem pada model antrian $M^X/M/1$

C. Ukuran Keefektifan Sistem Antrian $M^X/M/1$

Ukuran keefektifan suatu sistem antrian *batch arrival* dapat ditentukan setelah PGF dari N diketahui. Ukuran – ukuran keefektifan dari suatu sistem antrian tersebut adalah banyak customer dalam sistem/ L_s , banyak customer yang menunggu dalam antrian/ L_q , waktu tunggu setiap customer dalam

sistem/ W_s , waktu tunggu setiap *customer* dalam antrian/ W_q , dan persentase pemanfaatan sarana pelayanan/ $\bar{c}$. Ukuran – ukuran keefektifan tersebut dapat digunakan untuk menganalisis operasi situasi antrian, yang dimaksudkan untuk pembuatan rekomendasi tentang rancangan sistem tersebut.

1. Nilai Harapan Banyak *Customer* dalam Sistem

Nilai harapan banyak *customer* dalam sistem antrian merupakan jumlah keseluruhan dari perkalian *customer* dalam sistem dan probabilitasnya, dinyatakan dengan:

$$L_s = E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n \quad (3.26)$$

Pada model antrian $M/M/1$ probabilitas terdapat n *customer* dalam sistem (P_n) dapat langsung diketahui, sehingga L_s dapat diperoleh dengan mensubstitusi nilai P_n tersebut. Sedangkan pada model antrian $M^x/M/1$, nilai P_n tidak langsung diketahui sehingga L_s dapat diperoleh berdasarkan PGF dari N yaitu dapat dicari sebagai berikut.

Dari Persamaan (3.11) diketahui bahwa PGF dari N adalah

$$P(z) = E[z^N] = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n$$

Turunan pertama dari $P(z)$ adalah

$$P'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n z^{n-1}$$

maka

$$P'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n \quad (3.27)$$

Berdasarkan Persamaan (3.26), maka Persamaan (3.27) adalah nilai harapan dari banyak *customer* dalam sistem antrian dinyatakan dengan

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = P'(1)$$

Jadi nilai harapan banyak *customer* dalam sistem pada model antrian $M^X/M/1$ diperoleh dari $P'(1)$.

Langkah pertama untuk menentukan nilai harapan banyak *customer* dalam sistem pada model antrian $M^X/M/1$ adalah dengan mencari $P'(z)$ kemudian menentukan $P'(1)$.

Persamaan (3.20) dapat dituliskan lebih sederhana sebagai berikut:

$$P(z) = \frac{(1-\rho)}{1-z \frac{\lambda}{\mu} (\bar{A}(z))} \text{ dimana } \bar{A}(z) = \frac{1-A(z)}{1-z}$$

Turunan pertama dari $P(z)$ adalah

$$\begin{aligned} P'(z) &= \frac{-(1-\rho)(-\frac{\lambda}{\mu} \bar{A}(z) - \frac{\lambda}{\mu} z \bar{A}'(z))}{(1-z \frac{\lambda}{\mu} (\bar{A}(z)))^2} \\ &= \frac{(1-\rho)(\frac{\lambda}{\mu} \bar{A}(z) + (\frac{\lambda}{\mu} z \bar{A}'(z)))}{(1-z \frac{\lambda}{\mu} (\bar{A}(z)))^2} \end{aligned}$$

Sehingga

$$P'(1) = \frac{(1-\rho)\left(\frac{\lambda}{\mu}\bar{A}(1) + \left(\frac{\lambda}{\mu}z\bar{A}'(1)\right)\right)}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}(\bar{A}(1))^2\right)} \quad (3.28)$$

Untuk memperoleh $P'(1)$ terlebih dulu harus dihitung $\bar{A}'(1)$

$$\bar{A}(z) = \frac{1 - A(z)}{1 - z}$$

Turunan pertama dari $\bar{A}(z)$ adalah

$$\bar{A}'(z) = \frac{-(1-z)A'(z) + 1 - A(z)}{(1-z)^2}$$

Karena $\bar{A}'(1) = \frac{0}{0}$, maka berdasarkan teorema 2.1 penyelesaiannya menggunakan aturan l'Hopital sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned} \bar{A}'(1) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-(1-z)A'(z) + 1 - A(z)}{(1-z)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z)A''(z)}{2(1-z)} \\ &= \frac{A''(1)}{2} \\ &= \frac{E[X(X-1)]}{2} = \frac{E(X^2)}{2} - \frac{E(X)}{2} \end{aligned}$$

(3.29)

Dengan mensubstitusikan Persamaan (3.29) ke Persamaan (3.28),
maka didapatkan:

$$\begin{aligned}
 P'(1) &= \frac{(1 - \rho) \left(\frac{\lambda}{\mu} E(X) + \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{E(X^2)}{2} - \frac{E(X)}{2} \right) \right)}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu} (E(X))^2 \right)} \\
 &= \frac{(1 - \rho) \left(\rho + \frac{\lambda}{\mu} \frac{E(X^2)}{2} - \frac{\rho}{2} \right)}{(1 - \rho)^2}, \text{ dengan } \rho \\
 &= \frac{\lambda E(X)}{\mu}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\rho + \frac{\lambda}{\mu} E(X^2)}{2(1 - \rho)}$$

Jadi banyak *customer* dalam sistem, pada model antrian $M^X/M/1$ dengan ukuran kelompoknya berupa variabel acak X dinyatakan dengan

$$\begin{aligned}
 L_s &= E(N) \\
 &= \frac{\rho + \frac{\lambda}{\mu} E(X^2)}{2(1 - \rho)} \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

Dari Persamaan (3.5), diketahui peluang kedatangan suatu kelompok berukuran k dinyatakan dengan $P(X = k) = a_k$. Jika diasumsikan bahwa dalam antrian *batch arrival* kelompok yang datang tepat berukuran K , maka peluang bahwa suatu kedatangan berukuran K adalah satu, dan peluang suatu kedatangan untuk ukuran kelompok lainnya adalah nol. Pernyataan tersebut dapat dituliskan sebagai berikut.

$$a_k = \begin{cases} 1, & X = K \\ 0, & X \neq K \end{cases}$$

dengan K adalah suatu nilai yang menyatakan ukuran kelompok

Sehingga

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \\
 &= 1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + Ka_K + \cdots \\
 &= K
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

dan

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k \\
 &= 1^2 a_1 + 2^2 a_2 + 3^2 a_3 + \cdots + K^2 a_K + \cdots = K^2
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Substitusi Persamaan (3.31) dan (3.32) ke Persamaan (3.30) didapatkan:

$$L_s = \frac{\rho + \frac{\lambda}{\mu} E(X^2)}{2(1-\rho)} = \frac{\rho + K\rho}{2(1-\rho)} = \left(\frac{K+1}{2}\right) \frac{\rho}{1-\rho}$$

Jadi banyak *customer* dalam sistem, pada model antrian $M^K/M/1$ yaitu dengan rata – rata ukuran kelompok adalah K dinyatakan dengan:

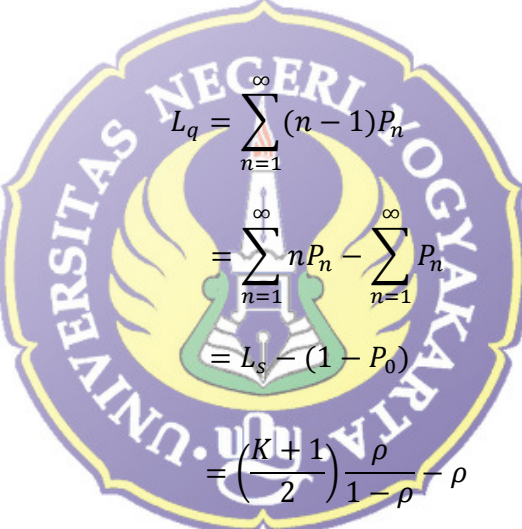
$$L_s = \left(\frac{K+1}{2}\right) \frac{\rho}{1-\rho} \tag{3.33}$$

2. Nilai Harapan Banyak *Customer* dalam Antrian

Nilai harapan banyak *customer* dalam antrian merupakan jumlah dari perkalian *customer* dalam antrian dengan probabilitas terdapat n *customer* dinyatakan dengan

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n - c)P_n$$

Dengan c menyatakan jumlah *server* yang melayani, maka dalam model antrian dengan satu *server* nilai $c = 1$, sehingga banyak *customer* dalam antrian pada model antrian $M^X/M/1$ dapat diperoleh sebagai berikut.



$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=1}^{\infty} (n - 1)P_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nP_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n \\ &= L_s - (1 - P_0) \\ &= \left(\frac{K+1}{2}\right) \frac{\rho}{1-\rho} - \rho \end{aligned}$$

Jadi banyak *customer* dalam antrian pada model antrian $M^K/M/1$ dinyatakan dengan:

$$\begin{aligned} L_q \\ &= \left(\frac{K+1}{2}\right) \frac{\rho}{1-\rho} - \rho \end{aligned} \quad (3.34)$$

3. Nilai Harapan Waktu Tunggu *Customer* dalam Sistem

Waktu tunggu dalam sistem antrian adalah jumlah antara waktu menunggu dalam antrian dan waktu pelayanan. Berdasarkan Persamaan (2.59) waktu tunggu dalam sistem dapat diperoleh dari rumus *Little* yaitu

$$\begin{aligned} W_s \\ = \frac{L_s}{\lambda} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Dalam model antrian $M^X/M/1$, laju kedatangan *customer* adalah $\lambda\bar{a}$, dengan $\bar{a}$ adalah rata-rata dari ukuran kelompok yang masuk ke dalam sistem antrian.

Waktu tunggu *customer* dalam sistem diperoleh dari substitusi Persamaan (3.33) ke Persamaan (3.35) sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} W_s &= \frac{\left(\frac{K+1}{2}\right) \frac{\rho}{1-\rho}}{\lambda\bar{a}} \\ &= \frac{(K+1)K}{2\mu(1-\rho)K} \\ &= \frac{1}{2\mu(1-\rho)} \left[\frac{K+K^2}{K} \right] \end{aligned}$$

Jadi waktu tunggu *customer* dalam sistem pada model antrian

$M^K/M/1$ adalah

$$W_s = \frac{1}{2\mu(1-\rho)} \left[\frac{K+K^2}{K} \right] \quad (3.36)$$

4. Nilai Harapan Waktu Tunggu *Customer* dalam Antrian

Waktu tunggu *customer* dalam antrian adalah selisih antara waktu tunggu *customer* dalam sistem dan waktu *customer*. Laju pelayanan per satuan waktu adalah μ maka waktu pelayanan untuk seorang *customer* adalah $\frac{1}{\mu}$. Sehingga waktu tunggu dalam antrian adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W_q &= W_s - \frac{1}{\mu} \\ W_q &= \frac{1}{2\mu(1-\rho)} \left[\frac{K+K^2}{K} \right] - \frac{1}{\mu} \\ &= \frac{(K+K^2)-(2(1-\rho)K)}{2\mu(1-\rho)K} \\ &= \frac{1}{2\mu(1-\rho)} \left[\frac{K^2-K(1-2\rho)}{K} \right] \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (2.60) waktu tunggu dalam antrian juga dapat diperoleh juga dari rumus *Little* sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W_q &= \frac{L_q}{\lambda \bar{a}} \\ &= \frac{\left(\frac{K+1}{2} \right) \frac{\rho}{1-\rho} - \rho}{\lambda \bar{a}} \\ &= \frac{\left[\frac{(K+1)-(2(1-\rho))}{2} \right] \frac{\rho}{(1-\rho)}}{\lambda K} \\ &= \frac{1}{2\mu(1-\rho)} \left[\frac{K^2-K(1-2\rho)}{K} \right] \end{aligned}$$

Jadi waktu tunggu *customer* dalam antrian pada model antrian $M^K/M/1$ adalah

$$W_q = \frac{1}{2\mu(1-\rho)} \left[\frac{K^2 - K(1-2\rho)}{K} \right] \quad (3.37)$$

5. Persentase *Server* Sibuk

Persentase kesibukan *server* berarti memperlihatkan seberapa besar pemanfaatan dari suatu sarana pelayanan. Nilai harapan jumlah *server* yang sibuk sama dengan selisih antara jumlah *customer* dalam sistem dan jumlah *customer* dalam antrian.

Jadi persentase *server* yang sibuk adalah

$$\bar{c} = (L_s - L_q) \times 100\% \quad (3.38)$$

Dengan mensubstitusi Persamaan (3.33) dan Persamaan (3.34) ke Persamaan (3.38) maka diperoleh

$$\bar{c} = \rho \times 100\% \quad (3.39)$$

Jadi persentase kesibukan *server* pada model antrian $M^X/M/1$ sama dengan persentase kesibukan *server* model antrian pada umumnya.

Dari Persamaan (3.33), (3.34), (3.36), (3.37), dan (3.39) dapat diringkas ukuran keefektifan dari model antrian $M^K/M/1$ dalam tabel 3.3 berikut ini.

Tabel 3.3 Ukuran Keefektifan Model Antrian $M^K/M/1$

No	Ukuran Keefektifan	Formula
1	Banyak <i>customer</i> dalam sistem	$L_s = \left(\frac{K+1}{2}\right) \frac{\rho}{1-\rho}$
2	Banyak <i>customer</i> dalam antrian	$L_q = \left(\frac{K+1}{2}\right) \frac{\rho}{1-\rho} - \rho$
3	Waktu tunggu <i>customer</i> dalam sistem	$W_s = \frac{1}{2\mu(1-\rho)} \left[\frac{K+K^2}{K} \right]$
4	Waktu tunggu <i>customer</i> dalam antrian	$W_q = \frac{1}{2\mu(1-\rho)} \left[\frac{K^2 - K(1-2\rho)}{K} \right]$
5	Presentase kesibukan <i>server</i>	$\bar{c} = \rho \times 100\%$

E. Implementasi

Agar lebih memahami tentang model antrian $M^K/M/1$ diberikan contoh penerapan soal sebagai berikut.

Sebagai ilustrasi penulis memberikan Gambaran penerapan model antrian pada situasi antrian yang terjadi di sebuah kantor pajak. Data yang diolah adalah data yang dibangun dengan *software* minitab yang distribusi kedatangannya memenuhi distribusi Poisson dan waktu pelayanannya memenuhi distribusi Eksponensial. Dengan rata – rata laju kedatangan (λ)

adalah 1,5 dan rata – rata waktu pelayanan ($1/\mu$) adalah 2, serta rata – rata ukuran kelompok yang masuk ke dalam sistem adalah 17. Data tersebut dapat dilihat dalam lampiran 1. Misal situasi antrian ini diamati pada antrian perekam Surat Pemberitahuan/ SPT di sebuah kantor pajak. SPT yang direkam yaitu SPT yang telah disortir. Beberapa berkas SPT yang telah disortir diserahkan sekaligus kepada staf yang bertugas untuk direkam. Berarti SPT tersebut masuk kedalam sistem antrian secara berkelompok dan jumlahnya acak. Hanya ada seorang staf yang bertugas merekam SPT. Karena kedatangan berdistribusi Poisson, dan setiap kedatangannya ada lebih dari satu *customer* yang banyaknya tidak pasti dan hanya ada satu *server* dengan waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial, maka kondisi tersebut memenuhi asumsi dari model antrian $M^X/M/1$.

Analisis model antrian seperti contoh kasus diatas adalah sebagai berikut. Dalam kasus diatas, yang berperan sebagai *customer* bukan manusia tetapi barang yaitu berupa berkas SPT, sedangkan yang berperan sebagai *server* adalah manusia yaitu seorang staf di kantor pajak. Model dari sistem antrian pada kasus diatas dinotasikan dengan $M^{17}/M/1$. Karakteristik – karakteristik dari sistem antrian tersebut antara lain:

1. Laju Kedatangan

Laju kedatangan yaitu banyaknya kedatangan tiap satuan waktu. Pada skripsi ini, formula yang telah didapatkan hanya sesuai untuk distribusi kedatangan Poisson. Karena data kedatangan *customer* pada ilustrasi ini adalah data yang dibangkitkan yang memenuhi distribusi Poisson maka tidak perlu dilakukan pengujian data. Namun, sebagai lampiran uji distribusi kedatangan *customer* dapat dilihat dalam lampiran 2.

Tabel 3.4 Ukuran Kelompok dan Waktu Antar Kedatangan tiap Kelompok



Kedatangan ke-	Ukuran Kelompok	Waktu antar kedatangan
1	18	00:48:22
2	13	00:13:05
3	20	01:36:01
4	20	00:53:29
5	12	00:25:54
6	21	
Jumlah	104	3:56:51 atau 3,9 jam

Dari tabel tersebut diketahui bahwa selama $3,9 \approx 4$ jam ada enam kali kedatangan, jadi laju kedatangan atau banyaknya kedatangan tiap jam adalah $\frac{6}{4} = 1,5$ jadi $\lambda = 1,5$.

2. Nilai Harapan Ukuran Kelompok

Surat – surat pemberitahuan yang akan direkam masuk ke dalam sistem antrian secara berkelompok, dengan ukuran setiap kedatangannya tidak pasti banyaknya. Sehingga akan dicari nilai harapan ukuran kelompok tersebut. Berdasarkan Persamaan (3.3), nilai harapan ukuran kelompok yang masuk kedalam sistem adalah

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k$$

Dari Persamaan (3.6) diketahui

$$a_k = \frac{\lambda_k}{\lambda},$$

berdasarkan tabel (3.4) maka diperoleh a_k sebagai berikut.

$$a_{12} = (X = 12) = \frac{1}{6}$$

$$a_{13} = (X = 13) = \frac{1}{6}$$

$$a_{18} = (X = 18) = \frac{1}{6}$$

$$a_{20} = (X = 20) = \frac{2}{6}$$

$$a_{21} = (X = 21) = \frac{1}{6}$$

Maka

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k = 12 \cdot \frac{1}{6} + 13 \cdot \frac{1}{6} + 18 \cdot \frac{1}{6} + 20 \cdot \frac{2}{6} + 21 \cdot \frac{1}{6} = \frac{104}{6}$$

$$= 17,33$$

Jadi rata – rata atau nilai harapan ukuran kelompok yang masuk ke dalam sistem antrian adalah $K = 17,33 \approx 17$.

3. Laju Pelayanan

Laju pelayanan yaitu banyaknya *customer* yang dilayani tiap satuan waktu. Pada skripsi ini, formula yang telah didapatkan hanya sesuai untuk distribusi pelayanan Eksponensial. Karena data pelayanan *customer* pada ilustrasi ini adalah data yang dibangkitkan yang memenuhi distribusi Eksponensial maka tidak perlu dilakukan pengujian data. Namun uji distribusi pelayanan *customer* dapat dilihat dalam lampiran 2.

Tabel 3.5 Lama Waktu Pelayanan Perekaman SPT

No	Mulai dilayani	Selesai dilayani	Lama Pelayanan				
1	07:35:00	07:36:55	00:01:55	38	09:01:38	09:02:13	00:00:35
2	07:37:33	07:40:22	00:02:49	39	09:02:37	09:04:24	00:01:47
3	07:40:57	07:42:28	00:01:31	40	09:04:57	09:06:42	00:01:45
4	07:42:51	07:43:47	00:00:56	41	09:07:15	09:08:16	00:01:01
5	07:44:27	07:44:37	00:00:10	42	09:08:17	09:11:48	00:03:31
6	07:44:45	07:46:52	00:02:07	43	09:12:10	09:21:13	00:09:03
7	07:46:58	07:48:34	00:01:36	44	09:21:16	09:22:00	00:00:44
8	07:49:00	07:52:28	00:03:28	45	09:22:30	09:23:44	00:01:14
9	07:52:47	07:53:31	00:00:44	46	09:23:55	09:25:57	00:02:02
10	07:54:02	07:56:27	00:02:25	47	09:25:58	09:26:03	00:00:05
11	07:56:44	07:57:27	00:00:43	48	09:26:06	09:27:40	00:01:34
12	07:57:57	08:00:12	00:02:15	49	09:28:05	09:31:39	00:03:34
13	08:00:23	08:01:41	00:01:18	50	09:32:05	09:34:51	00:02:46
14	08:01:55	08:03:07	00:01:12	51	09:35:23	09:35:56	00:00:33
15	08:03:15	08:04:35	00:01:20	52	10:07:29	10:07:41	00:00:12
16	08:04:50	08:15:09	00:10:19	53	10:07:49	10:13:15	00:05:26
17	08:15:25	08:20:01	00:04:36	54	10:13:34	10:14:02	00:00:28
18	08:20:26	08:22:56	00:02:30	55	10:14:22	10:16:26	00:02:04
19	08:23:19	08:23:21	00:00:02	56	10:16:30	10:18:36	00:02:06
20	08:23:22	08:28:16	00:04:54	57	10:18:43	10:22:51	00:04:08
21	08:28:55	08:29:01	00:00:06	58	10:22:59	10:23:43	00:00:44
22	08:29:07	08:30:44	00:01:37	59	10:24:15	10:24:20	00:00:05
23	08:31:04	08:33:54	00:02:50	60	10:24:22	10:24:26	00:00:04
24	08:34:29	08:34:49	00:00:20	61	10:24:32	10:24:53	00:00:21
25	08:35:02	08:37:47	00:02:45	62	10:25:10	10:27:41	00:02:31
26	08:38:17	08:38:42	00:00:25	63	10:28:05	10:28:10	00:00:05
27	08:39:00	08:40:03	00:01:03	64	10:28:16	10:30:09	00:01:53
28	08:40:06	08:40:11	00:00:05	65	10:30:48	10:31:50	00:01:02
29	08:40:15	08:40:38	00:00:23	66	10:31:54	10:33:08	00:01:14
30	08:41:00	08:43:05	00:02:05	67	10:33:24	10:33:47	00:00:23
31	08:43:10	08:46:33	00:03:23	68	10:34:05	10:34:08	00:00:03
32	08:46:50	08:47:45	00:00:55	69	10:34:10	10:34:17	00:00:07
33	08:48:22	08:51:51	00:03:29	70	10:32:25	10:32:32	00:00:07
34	08:52:12	08:53:04	00:00:52	71	10:32:40	10:37:38	00:04:58
35	08:53:39	08:56:49	00:03:10	72	11:01:00	11:12:11	00:11:11
36	08:56:57	09:01:16	00:04:19	73	11:12:23	11:13:21	00:00:58
37	09:01:29	09:01:34	00:00:05	74	11:14:02	11:14:08	00:00:06
				75	11:14:15	11:16:16	00:02:01
				76	11:16:18	11:16:34	00:00:16

77	11:16:47	11:19:00	00:02:13	93	12:02:50	12:05:14	00:02:24
78	11:19:10	11:20:20	00:01:10	94	12:05:33	12:07:05	00:01:32
79	11:20:30	11:20:53	00:00:23	95	12:07:40	12:10:48	00:03:08
80	11:21:14	11:32:44	00:11:30	96	12:11:00	12:13:41	00:02:41
81	11:33:10	11:34:02	00:00:52	97	12:14:13	12:14:42	00:00:29
82	11:34:40	11:36:44	00:02:04	98	12:15:08	12:17:43	00:02:35
83	11:36:50	11:39:54	00:03:04	99	12:18:10	12:23:24	00:05:14
84	11:40:00	11:41:29	00:01:29	100	12:23:40	12:25:13	00:01:33
85	11:41:51	11:46:55	00:05:04	101	12:25:40	12:25:47	00:00:07
86	11:47:00	11:50:13	00:03:13	102	12:25:56	12:26:26	00:00:30
87	11:50:23	11:51:05	00:00:42	103	12:27:00	12:29:53	00:02:53
88	11:51:33	11:52:28	00:00:55	104	12:31:04	12:35:15	00:04:11
89	11:53:06	11:53:25	00:00:19	Jumlah			03:35:01
90	11:53:40	11:59:30	00:05:50				atau
91	12:01:00	12:02:17	00:01:17				3,58 jam
92	12:02:30	12:02:40	00:00:10				

Dari tabel (3.4) diketahui total waktu pelayanan untuk 104 *customer* adalah 03:35:01 atau 3,58 jam sehingga laju pelayanan atau banyaknya pelayanan tiap jam, $\mu = 104 / 3,58 = 29$

4. Faktor utilitas sistem atau peluang *server* sibuk

$$\rho = \frac{K\lambda}{\mu} = \frac{17(1,5)}{29} = 0,87931$$

5. Ukuran Keefektifan Sistem

Sesuai pembahasan ukuran keefektifan sistem yang akan dianalisis adalah nilai harapan banyak *customer* dalam sistem/ L_s , nilai harapan banyak *customer* dalam antrian/ L_q , nilai harapan waktu tunggu *customer* dalam sistem/ W_s , nilai harapan waktu tunggu *customer* dalam antrian/ W_q , dan persentase *server* sibuk/ $\bar{c}$.

Perhitungan dilakukan dengan dua cara, yaitu dengan menggunakan formula yang telah didapatkan dari penelusuran dan dengan menggunakan *software WINQSB*.

- a. Analisis berdasarkan Formula

- i) Nilai Harapan Banyak *Customer* dalam Sistem

Dari tabel 3.3 no. 1 didapatkan nilai harapan banyak *customer* dalam sistem

$$L_s = \left(\frac{K+1}{2} \right) \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$= \left(\frac{17+1}{2} \right) \frac{0,87931}{1-0,87931}$$

$$= 65,5712$$

Jadi banyaknya *customer* dalam sistem sekitar 66 SPT.

ii) Nilai Harapan Banyak *Customer* dalam Antrian

Dari tabel 3.3 no. 2 didapatkan nilai harapan banyak *customer* dalam antrian adalah

$$L_q = \left(\frac{K + 1}{2} \right) \frac{\rho}{1 - \rho} - \rho$$

$$= \left(\frac{17 + 1}{2} \right) \frac{0,87931}{1 - 0,87931} - 0,87931 = 64,69189$$

Jadi banyak *customer* dalam antrian sekitar 64,69189 $\approx$

65 SPT

iii) Nilai Harapan Waktu Tunggu *Customer* dalam Sistem

Dari tabel 3.3 no. 3 didapatkan nilai harapan waktu tunggu *customer* dalam sistem adalah

$$W_s = \frac{1}{2\mu(1 - \rho)} \left[\frac{K + K^2}{K} \right]$$

$$= \frac{1}{2(29)(1 - 0,87931)} \left[\frac{17 + (17)^2}{17} \right]$$

$$= 2,5714 \text{ jam}$$

Jadi waktu tunggu *customer* dalam sistem sekitar 2,58 jam.

iv) Nilai Harapan Waktu Tunggu *Customer* dalam Antrian

Dari tabel 3.3 no. 4 didapatkan nilai harapan waktu tunggu *customer* dalam sistem adalah

$$W_q = \frac{1}{2\mu(1-\rho)} \left[\frac{K^2 - K(1-2\rho)}{K} \right]$$

$$= \frac{1}{2(29)(0,12069)} \left[\frac{17^2 - 17(1-2(0,87931))}{17} \right]$$

$$= 2,5369$$

Jadi waktu tunggu *customer* dalam antrian sekitar 2,5 jam

v) Persentase *Server* Sibuk

Dari tabel 3.3 no.5 diperoleh presentase kesibukan *server* adalah

$$\bar{c} = \rho \times 100\%$$

$$= 87,931\%$$

$$\approx 88\%$$

Jadi persentase kesibukan *server* adalah 88% sehingga dapat dikatakan *server* pada sistem antrian tersebut cukup sibuk

Dari analisis tersebut diketahui dengan laju kedatangan atau $\lambda = 1,5$ dan laju pelayanan atau $\mu = 29$, dan rata – rata ukuran

kelompok yang masuk kedalam sistem adalah 17, terlihat bahwa *server* cukup sibuk yaitu dengan persentasenya 88%. Sehingga presentase *server* menganggur cukup kecil yaitu 12%. Ukuran keefektifan sistem tersebut adalah $L_s = 66$ SPT, $L_q = 65$ SPT, $W_s = 2,58$ jam, $W_q = 2,5$ jam. Dalam kondisi seperti ini berarti masih perlu dilakukan perbaikan pada sistem antrian tersebut. Ada beberapa pilihan yang bisa diambil untuk mengatasi agar *server* tidak terlalu sibuk yaitu dengan menambah jumlah *server* atau mempercepat waktu pelayanan.

b. Analisis berdasarkan Hasil Perhitungan dengan *Software WINQSB*

Beberapa *software* yang dapat digunakan untuk menganalisis masalah antrian adalah *TORA*, *ARENA*, *Pro Model*, *SAS*, dan *WINQSB*. Pada skripsi ini akan dibandingkan hasil analisis yang diperoleh berdasarkan formula yang telah didapatkan dari penelusuran dengan hasil penyelesaian menggunakan *software WINQSB*. Output dari *WINQSB* dapat dilihat pada tabel 3.6 berikut.

Tabel 3.6 Output Penyelesaian Masalah Antrian pada Model ($M^{17}/M/1$) dengan *WINQSB*

03-16-2011	Performance Measure	Result
1	System: M(b)/M/1	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per hour =	1.5000
3	Service rate per server (μ) per hour =	29.0000
4	Overall system effective arrival rate per hour =	25.5000
5	Overall system effective service rate per hour =	25.5000
6	Overall system utilization =	87.9310 %
7	Average number of customers in the system (L) =	65.5714
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	64.6921
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	73.5714
10	Average time customer spends in the system (W) =	2.5714 hours
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	2.5369 hours
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	2.8852 hours
13	The probability that all servers are idle (Po) =	12.0690 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw or Pb) =	87.9310 %
15	Average number of customers being balked per hour =	0
16	Total cost of busy server per hour =	\$0
17	Total cost of idle server per hour =	\$0
18	Total cost of customer waiting per hour =	\$0
19	Total cost of customer being served per hour =	\$0
20	Total cost of customer being balked per hour =	\$0
21	Total queue space cost per hour =	\$0
22	Total system cost per hour =	\$0

Hasil perhitungan yang diperoleh menggunakan *software WINQSB* menunjukkan hasil yang sama dengan perhitungan menggunakan formula yang telah didapatkan.

BAB IV

SIMPULAN DAN SARAN

A. Simpulan

Dari pembahasan skripsi dengan judul “ Model Antrian Satu *Server* dengan Pola Kedatangan Berkelompok (*Batch Arrival*)”, dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Model antrian satu *server* dengan pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*) dinotasikan dengan $(M^X/M/1)$, dengan X adalah variabel acak yang menyatakan ukuran kelompok yang masuk ke dalam sistem antrian. Model tersebut menggambarkan sistem antrian dengan pola kedatangan *customer* secara berkelompok yang berdistribusi Poisson, dan pelayanan *customer* secara individu dengan waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial. Dasar untuk menganalisis model antrian dengan pola kedatangan berkelompok adalah dengan menentukan *probability generating function* (*PGF*) dari banyak *customer* dalam sistem, yang dinyatakan dengan

$$P(z) = \frac{\mu(1 - \rho)(1 - z)}{\mu(1 - z) - z\lambda(1 - A(z))}$$

2. Ukuran keefektifan sistem antrian dengan pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*) yang diperoleh dari penelusuran sebagai berikut.

- a) Nilai harapan banyak *customer* dalam sistem, dinyatakan dengan

$$L_s = \left(\frac{K+1}{2} \right) \frac{\rho}{1-\rho}$$

- b) Nilai harapan banyak *customer* yang menunggu dalam antrian,

$$\text{dinyatakan dengan } L_q = \left(\frac{K+1}{2} \right) \frac{\rho}{1-\rho} - \rho$$

- c) Nilai harapan waktu tunggu setiap *customer* dalam sistem, dinyatakan

$$\text{dengan } W_s = \frac{1}{2\mu(1-\rho)} \left[\frac{K+K^2}{K} \right]$$

- d) Nilai harapan waktu tunggu setiap *customer* dalam antrian, dinyatakan

$$\text{dengan } W_q = \frac{1}{2\mu(1-\rho)} \left[\frac{K^2 - K(1-2\rho)}{K} \right]$$

- e) Persentase pemanfaatan sarana pelayanan, dinyatakan dengan

$$(\bar{c}) = (\rho) \times 100\%$$

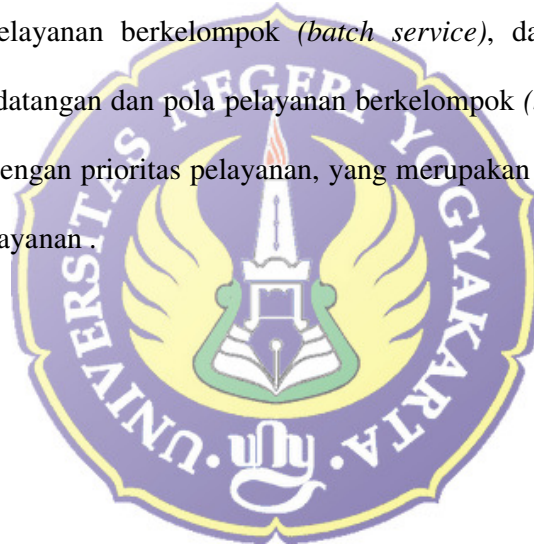
1. Pada implementasi model antrian satu *server* dengan pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*) diberikan contoh penerapan antrian dengan pola kedatangan berkelompok pada perekaman SPT di kantor pajak. Langkah – langkah dalam menganalisis model antrian tersebut adalah:

- a) Melakukan uji kesesuaian distribusi kedatangan *customer* dan distribusi waktu pelayanan *customer*.
- b) Menganalisis ukuran keefektifan sistem berdasarkan formula yang sesuai pada model antrian ini. Hasil dari analisis pada contoh penerapan dalam skripsi ini diperoleh ukuran keefektifan dari model antrian adalah $L_s = 66$ SPT, $L_q = 65$ SPT, $W_s = 2,58$ jam, $W_q = 2,5$ jam. Nilai ukuran keefektifan tersebut diperoleh dari dua cara, yaitu berdasarkan formula dari penelusuran rumus pada pembahasan

dan dengan *software* WINQSB, keduanya menunjukkan hasil yang sama.

A. Saran

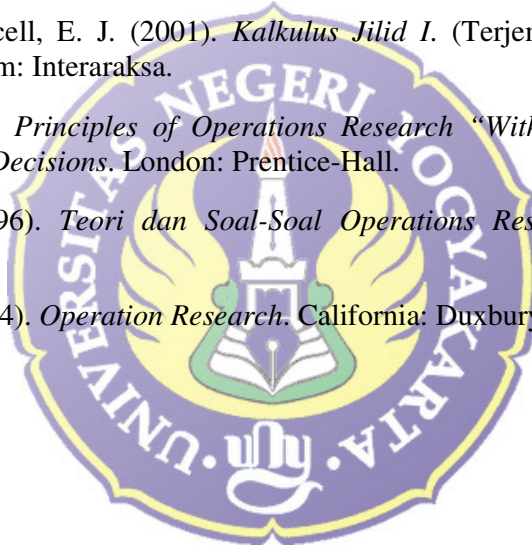
Dari hasil pengkajian model antrian satu *server* dengan pola kedatangan berkelompok dapat dikembangkan lebih lanjut sampai dengan tingkat pengambilan keputusan, misalnya dengan model biaya. Selain itu juga dapat dikembangkan model antrian dengan pola kedatangan berkelompok *multi server*, serta variasi model $M/M/1$ yang lain seperti model antrian dengan pola pelayanan berkelompok (*batch service*), dan model antrian dengan pola kedatangan dan pola pelayanan berkelompok (*bulk queue*), serta model antrian dengan prioritas pelayanan, yang merupakan salah satu bentuk dari disiplin pelayanan.



DAFTAR PUSTAKA

- Bain, L, & Engelhardt. (1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. California: Wadsworth Publishing Company.
- Barte, R. G, & Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to Real Analysis*. New York: John Wiley & Sons.
- Bhat, N. U. (1984). *Element of Applied Stochastic Processes*. 2nd. ed. New York: John Wiley & Sons.
- Bronson, R. (1996). *Teori dan Soal-Soal Operations Research*. (Terjemahan Hans Wospakrik). Jakarta: Erlangga.
- Bunday, B. D. (1996). *An Introduction to Queuing Theory*. New York: John Wiley & Sons.
- Chaudhury, M. L.(1983). *A First Course in Bulk Queue*. New York: John Wiley & Sons.
- Cooper, R. B. (1981). *Introduction to Queuing Theory*. 2nd. ed. New York: Elseveir North Holland, Inc.
- Dharma, J. L. (2001). *Model Antrian $M^H/G/1$* . Bandung: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Katolik Parahyangan.
- Dimiyati, A, & Tarliyah, T. (1999). *Operation Research “Model-Model Pengambilan Keputusan”*. Bandung: PT Sinar Baru Algesindo.
- Djauhari, M. (1997). *Statistika Matematika*. Bandung: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, ITB.
- Ecker, J, & Kupferschimd, M. (1988). *Introduction to Operation Research*. New York: John Wiley & Sons.
- Gross, D, & Harris, C. M. (1998). *Fundamental of Queuing Theory* 3rd. New York: John Wiley & Sons.
- Hadianti, R. (2006). *Kapita Selektia Terapan I (Teori Antrian)*. Bandung: ITB.
- Hillier, F.S, & Lieberman, G. J. (2005). *Introduction to Operations Research*. New York: McGraw-Hill.
- Hines, W. W, & Montgomery, D. C. (1990). *Probability and Statistics in Engineering and Management Science*. New York: John Wiley & Sons.
- Hogg, R. V, & Tanis, E. A. (2001). *Probability and Statistical Inference*. 6th. ed. New Jersey: Prentice Hall International, Inc.

- Kreyszig, E. (2003). *Advance Engineering Mathematics*. New York: John Wiley & Sons.
- Medhy, J. (1991). *Stochastic Processes*. New York: John Wiley & Sons.
- Ross, S. M. (1983). *Stochastic Processes*. New York: John Wiley & Sons.
- Sinalungga, S. (2008). *Pengantar Teknik Industri*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Taha, H. (1982). *Operations Research an Introduction*. New York: Macmillan Publishing Co Inc.
- Taha, H. (1997). *Riset Operasi*. (Terjemahan Daniel Wirajaya). Jakarta: Bina Rupa Aksara.
- Thierauf, R. J, & Klekamp, R. C. (1975). *Decision Making Through Operations Research*. New York: John Wiley & Sons.
- Varberg, D, & Purcell, E. J. (2001). *Kalkulus Jilid I*. (Terjemahan I Nyoman Susila). Batam: Interaraksa.
- Wagner, H. (1972). *Principles of Operations Research "With Applications to Managerial Decisions"*. London: Prentice-Hall.
- Wospakrik, H. (1996). *Teori dan Soal-Soal Operations Research*. Bandung: Erlangga.
- Winston, W. L. (1994). *Operation Research*. California: Duxbury Press.



LAMPIRAN



Lampiran 1. Hasil *Generate* data yaitu Tabel Data Kedatangan *Customer*, Waktu Mulai Dilayani dan Waktu Selesai Dilayani.

No	waktu kedatangan	Mulai dilayani			
1	07:30:00	07:35:00	31	08:18:22	08:43:10
2	07:30:00	07:37:33	32	08:31:27	08:46:50
3	07:30:00	07:40:57	33	08:31:27	08:48:22
4	07:30:00	07:42:51	34	08:31:27	08:52:12
5	07:30:00	07:44:27	35	08:31:27	08:53:39
6	07:30:00	07:44:45	36	08:31:27	08:56:57
7	07:30:00	07:46:58	37	08:31:27	09:01:29
8	07:30:00	07:49:00	38	08:31:27	09:01:38
9	07:30:00	07:52:47	39	08:31:27	09:02:37
10	07:30:00	07:54:02	40	08:31:27	09:04:57
11	07:30:00	07:56:44	41	08:31:27	09:07:15
12	07:30:00	07:57:57	42	08:31:27	09:08:17
13	07:30:00	08:00:23	43	08:31:27	09:12:10
14	07:30:00	08:01:55	44	08:31:27	09:21:16
15	07:30:00	08:03:15	45	08:31:27	09:22:30
16	07:30:00	08:04:50	46	08:31:27	09:23:55
17	07:30:00	08:15:25	47	08:31:27	09:25:58
18	07:30:00	08:20:26	48	08:31:27	09:26:06
19	08:18:22	08:23:19	49	08:31:27	09:28:05
20	08:18:22	08:23:22	50	08:31:27	09:32:05
21	08:18:22	08:28:55	51	08:31:27	09:35:23
22	08:18:22	08:29:07	52	10:07:28	10:07:29
23	08:18:22	08:31:04	53	10:07:28	10:07:49
24	08:18:22	08:34:29	54	10:07:28	10:13:34
25	08:18:22	08:35:02	55	10:07:28	10:14:22
26	08:18:22	08:38:17	56	10:07:28	10:16:30
27	08:18:22	08:39:00	57	10:07:28	10:18:43
28	08:18:22	08:40:06	58	10:07:28	10:22:59
29	08:18:22	08:40:15	59	10:07:28	10:24:15
30	08:18:22	08:41:00	60	10:07:28	10:24:22
			61	10:07:28	10:24:32
			62	10:07:28	10:25:10

Lanjutan Lampiran 1.

No	waktu kedatangan	Mulai dilayani			
63	10:07:28	10:28:05	83	11:00:57	11:36:50
64	10:07:28	10:28:16	84	11:26:51	11:40:00
65	10:07:28	10:30:48	85	11:26:51	11:41:51
66	10:07:28	10:31:54	86	11:26:51	11:47:00
67	10:07:28	10:33:24	87	11:26:51	11:50:23
68	10:07:28	10:34:05	88	11:26:51	11:51:33
69	10:07:28	10:34:10	89	11:26:51	11:53:06
70	10:07:28	10:32:25	90	11:26:51	11:53:40
71	10:07:28	10:32:40	91	11:26:51	12:01:00
72	11:00:57	11:01:00	92	11:26:51	12:02:30
73	11:00:57	11:12:23	93	11:26:51	12:02:50
74	11:00:57	11:14:02	94	11:26:51	12:05:33
75	11:00:57	11:14:15	95	11:26:51	12:07:40
76	11:00:57	11:16:18	96	11:26:51	12:11:00
77	11:00:57	11:16:47	97	11:26:51	12:14:13
78	11:00:57	11:19:10	98	11:26:51	12:15:08
79	11:00:57	11:20:30	99	11:26:51	12:18:10
80	11:00:57	11:21:14	100	11:26:51	12:23:40
81	11:00:57	11:33:10	101	11:26:51	12:25:40
82	11:00:57	11:34:40	102	11:26:51	12:25:56
			103	11:26:51	12:27:00
			104	11:26:51	12:31:04

Lampiran 2. Uji Kesesuaian Distribusi Kedatangan *Customer* dan Waktu Pelayanan

Customer Menggunakan *One – Sample Kolmogorov Smirnov Test*.

1. Uji Distribusi Kedatangan *Customer*

a. Ukuran Kelompok yang Masuk Sistem Antrian

Tabel Ukuran Kelompok dan Waktu antar Kedatangan tiap Kelompok

Kedatangan ke-	Ukuran Kelompok	Waktu antar kedatangan
1	18	00:48:22
2	13	00:13:05
3	20	01:36:01
4	20	00:53:29
5	12	00:25:54
6	21	
Jumlah	104	3:56:51 atau 3,9 jam

Langkah – langkah pengujian:

1. H_0 : Ukuran kelompok berdistribusi Poisson
2. H_1 : Ukuran kelompok tidak berdistribusi Poisson
3. $\alpha = 0,05$
4. Wilayah kritik: H_0 ditolak jika angka signifikan $< \alpha$

Lanjutan Lampiran 2.

5. Perhitungan dengan *software SPSS***One-Sample kolmogorov-Smirnov Test**

		ukuran
N		6
Poisson Parameter ^{a,b}	Mean	17.33
Most Extreme	Absolute	.209
Differences	Positive	.158
	Negative	-.209
Kolmogorov-Smirnov Z		.511
Asymp. Sig. (2-tailed)		.956

a. Test distribution is Poisson.

b. Calculated from data.

6. Keputusan:

Hasil pengujian kesesuaian ukuran kedatangan *customer* diperoleh angka signifikan $> \alpha$ jadi H_0 diterima, simpulkan bahwa ukuran kelompok yang masuk ke dalam sistem antrian berdistribusi Poisson, dengan rata – rata 17,33

Lanjutan Lampiran 2.

b. Laju Kedatangan *Customer*Laju kedatangan *customer*

No	Waktu	Jumlah Kedatangan
1	07.30-08.29	2
2	08.30-09.29	1
3	09.30-10.29	1
4	10.30-11.29	2

Langkah – langkah pengujian:

1. H_0 : Laju kedatangan *customer* berdistribusi Poisson
2. H_1 : Laju kedatangan *customer* tidak berdistribusi Poisson
3. $\alpha = 0,05$
4. Wilayah kritik: H_0 ditolak jika angka signifikan $< \alpha$

Lanjutan Lampiran 2

5. Perhitungan dengan *software SPSS*

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test		
		Jml kdatangan
N		4
Poisson Parameter ^{a, b}	Mean	1.50
Most Extreme	Absolute	.223
Differences	Positive	.191
	Negative	-.223
Kolmogorov-Smirnov Z		.446
Asymp. Sig. (2-tailed)		.989

a. Test distribution is Poisson.

b. Calculated from data.

6. Keputusan:

Dari output tersebut angka signifikan lebih besar dari α , yaitu 0,989
 $> 0,05$ jadi H_0 diterima, simpulkan laju kedatangan *customer*
berdistribusi Poisson dengan rata – rata 1,5

Lanjutan lampiran 2

2. Uji Distribusi Waktu Pelayanan

Berdasarkan lama waktu pelayanan pada tabel 3.4, dilakukan uji distribusi waktu pelayanan sebagai berikut.

Langkah – langkah pengujian:

1. H_0 : Waktu pelayanan *customer* berdistribusi Eksponensial
2. H_1 : Waktu pelayanan *customer* tidak berdistribusi Eksponensial
3. $\alpha = 0,05$
4. Wilayah kritik: H_0 ditolak jika angka signifikan $< \alpha$
5. Perhitungan dengan *software SPSS*

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		pelayanan
N		104
Exponential parameter. ^{a,b}	Mean	0:02:04.04
		8
Most Extreme Differences	Absolute	.070
	Positive	.070
	Negative	-.036
Kolmogorov-Smirnov Z		.715
Asymp. Sig. (2-tailed)		.686

a. Test Distribution is Exponential.

b. Calculated from data.

Lanjutan lampiran 2

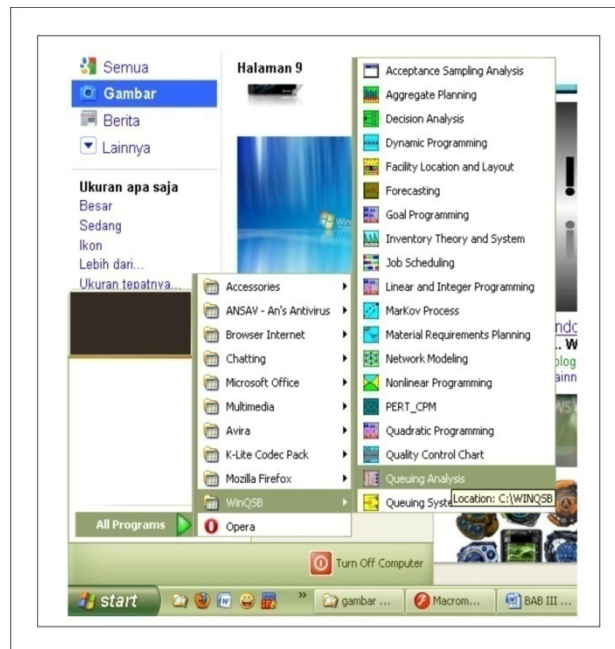
6. Keputusan:

Dari output tersebut angka signifikan lebih besar dari α , yaitu $0,686 > 0,05$ jadi H_0 diterima, simpulkan bahwa waktu pelayanan *customer* berdistribusi Eksponensial dengan rata – rata waktu pelayanan tiap *customer* adalah $00:02:04 \approx 2,067$ menit. Jadi $\frac{1}{\mu} = 2,067$ menit = $0,034$ jam, berarti $\mu = 29$ *customer*/ jam.

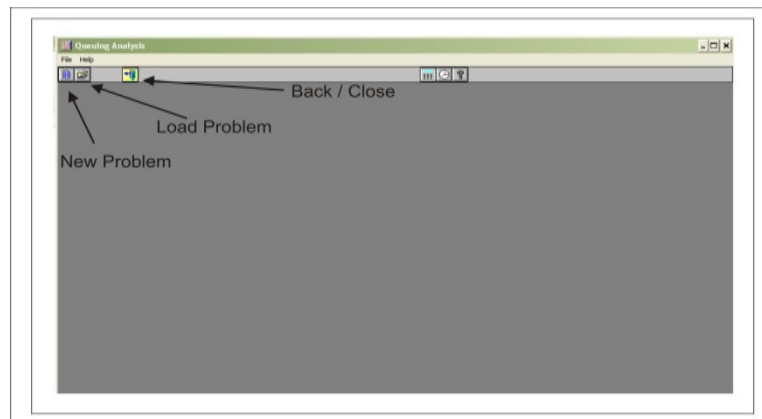


Lampiran 3. Tampilan Langkah – Langkah Penggunaan *Software WINQSB* untuk Penyelesaian Masalah Antrian dengan Pola Kedatangan Berkelompok.

1. Tampilan membuka aplikasi dengan cara klik *Start > Program > WinQSB > Queuing Analysis*



2. Tampilan awal dari *WinQSB*



Lanjutan Lampiran 3.

3. Tampilan pilihan menu *Simple M/M system* dan *General Queuing System*

Problem Specification

Problem Title: Queuing Problem

Time Unit: hour

Entry Format:

☐ Simple M/M System

☒ General Queuing System

OK Cancel Help

Labels and arrows:

- Nama Antrian (points to Problem Title)
- Satuan waktu pada kasus antrian (points to Time Unit)
- Model Antrian $M^x/M/c$ (points to General Queuing System)

4. Tampilan kolom yang harus diisi

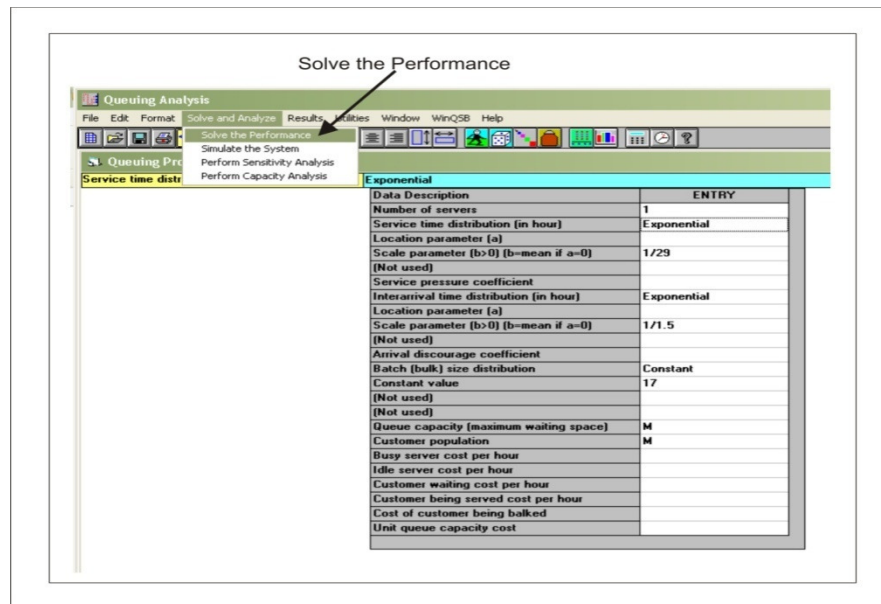
Data Description	ENTRY
Number of servers	
Service time distribution (in hour)	Exponential
Location parameter (a)	
Scale parameter (b>0) (b=mean if a=0)	
(Not used)	
Service pressure coefficient	
Interarrival time distribution (in hour)	Exponential
Location parameter (a)	
Scale parameter (b>0) (b=mean if a=0)	
(Not used)	
Arrival discourage coefficient	
Batch (bulk) size distribution	Constant
Constant value	1
(Not used)	
(Not used)	
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hour	
Idle server cost per hour	
Customer waiting cost per hour	
Customer being served cost per hour	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Labels and arrows:

- Banyak Server (points to Number of servers)
- Distribusi waktu pelayanan diisi dengan $\frac{1}{\mu}$ (points to Service time distribution)
- Distribusi waktu kedatangan Diisi dengan $\frac{1}{\lambda}$ (points to Interarrival time distribution)
- Ukuran kelompok (points to Batch size distribution)

Lanjutan Lampiran 3

5. Tampilan setelah kolom diisi kemudian



Lanjutan lampiran 3

6. Tampilan hasil analisis *WinQSB*

03-16-2011	Performance Measure	Result
1	System: M(b)/M/1	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hour =	1.5000
3	Service rate per server (mu) per hour =	29.0000
4	Overall system effective arrival rate per hour =	25.5000
5	Overall system effective service rate per hour =	25.5000
6	Overall system utilization =	87.9310 %
7	Average number of customers in the system (L) =	65.5714
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	64.6921
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	73.5714
10	Average time customer spends in the system (W) =	2.5714 hours
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	2.5369 hours
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	2.8852 hours
13	The probability that all servers are idle (Po) =	12.0690 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw or Pb) =	87.9310 %
15	Average number of customers being balked per hour =	0
16	Total cost of busy server per hour =	\$0
17	Total cost of idle server per hour =	\$0
18	Total cost of customer waiting per hour =	\$0
19	Total cost of customer being served per hour =	\$0
20	Total cost of customer being balked per hour =	\$0
21	Total queue space cost per hour =	\$0
22	Total system cost per hour =	\$0