M – 4

THE APPLICATION OF FOURIER TRANSFORMATION ON ANALOG SIGNAL PROCESSING

Nikenasih Binatari, Emi Nugroho Ratna Sari
Yogyakarta State University

Abstract

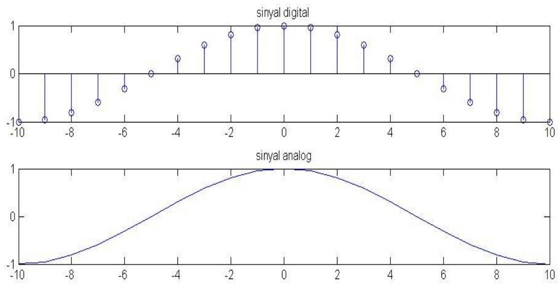
Signal is a quantity that carries informations of nature phenomen. The data's which are presented on signal can be used to inforrm the characteristic of the phenomen. Nevertheless, signal is generally presented on time domain. For some cases, analysis of signals in time domain is too difficult. Here, we need to look at the problem from another perspective. Joseph Fourier, great mathematician, found that signal can be stated as linear combination of elementary signals where the coefficients of the linear combination were the spectrum of the signal and were function of frequency. Therefore, we can transform signal from time domain into frequency domain using fourier transformation. Moreover, periodic signal can be transformed using fourier series while aperiodic signal can be transformed using fourier integral.
Keywords : fourier transformation, analog signal, frequency domain.

A. Pendahuluan

Jika sinyal periodik atas domain waktu digambar dalam sebuah diagram, maka sumbu horisontal berupa variabel waktu dan sumbu vertikal berupa variabel amplitudo. Sementara pada sinyal periodik atas domain frekuensi, sumbu horisontal berupa variabel frekuensi dan sumbu vertikal berupa variabel amplitudo. Dengan mengubah perspektif dari domain waktu ke domain frekuensi, masalah-masalah yang rumit mungkin akan lebih jelas dan mudah untuk dicari solusinya.

Sinyal direpresentasikan secara matematis sebagai fungsi dari satu variabel bebas atau lebih, sebagai contoh sinyal pembicaraan direpresentasikan oleh tekanan akustik sebagai fungsi waktu, dan gambar direpresentasikan oleh terang sebagai fungsi dua variabel ruang. Sinyal yang dibahas pada analisa ini dibatasi hanya pada sinyal satu dimensi saja.

Ada dua jenis sinyal dasar yaitu sinyal waktu kontinu, yang kemudian biasa disebut dengan sinyal analog, dan sinyal waktu diskrit, yang kemudian biasa disebut dengan sinyal digital. Perbedaan kedua sinyal ini akan diilustrasikan pada Gambar 3.1 berikut.



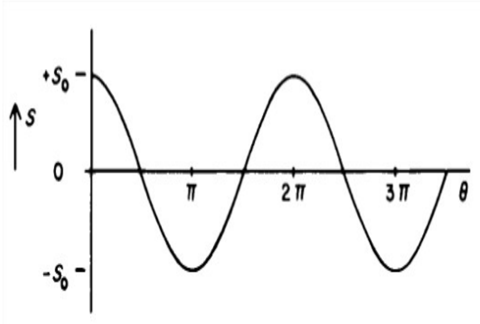
Gambar 3.1.

Pada model mathematis, untuk membedakan antara sinyal digital dan sinyal analog maka kemudian digunakan simbol t untuk variabel bebas waktu kontinu dan simbol n untuk variabel bebas waktu diskrit sedemikian sehingga $x[n]$ merepresentasikan sinyal digital dan $x(t)$ untuk merepresentasikan sinyal analog. Jadi, pada pembahasan ini akan dianalisa sinyal analog dan digital yang periodik dengan periode T.

Diberikan $S(t,z)$ adalah ketinggian sinyal pada saat t dan di posisi z. Dimisalkan sinyal disini merupakan sinyal sinusoidal kosinus yang bergerak merambat, periodik dan besar phasenya ϕ . Darisini dimisalkan

$$S(t,z) = S_0 \cos(\theta) \quad \text{Persamaan 3.1}$$

Pada rumus diatas S_0 adalah amplitudo sinyal dan θ adalah sudut yang dibentuk terhadap garis horisontal. Ilustrasi berikut merupakan bentuk sinyal sebagai fungsi atas θ .



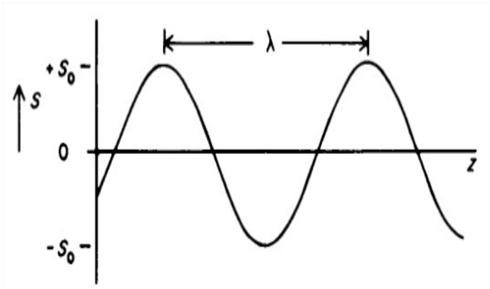
Gambar 3.2.

Sinyal kosinus bergerak merambat kekanan oleh karena itu sinyal kosinus proporsional terhadap posisinya z. Misalkan konstanta proporsionalitasnya k, k > 0. Diketahui pula bahwa sinyal merupakan sinyal periodik, misal dengan periode *T*. Oleh karena itu, sinyal kosinus juga proporsional terhadap waktunya *t*. Misalkan konstanta proporsionalitasnya $\omega, \omega > 0$. Selanjutnya besar phasenya adalah ϕ. Darisini dapat diperoleh bahwa $\theta = \omega t - kz + \phi$ atau

$$S(t,z) = S_0 \cos(\omega t - kz + \phi) \quad \text{Persamaan 3.2}$$

dimana pada saat t = 0, z = 0 maka $\theta = \phi$.

Merujuk pada Gambar 3.2, maka pada saat t = t_1, pergerakan sinyal dapat diilustrasikan pada Gambar 3.3 berikut.



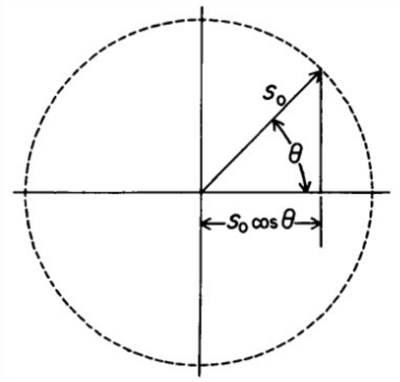
Gambar 3.3

Konstanta proporsionalitas terhadap posisi dipengaruhi oleh panjang gelombangnya, λ . Karena setiap perpindahan sepanjang λ , terjadi satu gelombang penuh 2π maka diperoleh $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

Konstanta proporsionalitas terhadap posisi disebut juga dengan konstanta phase.

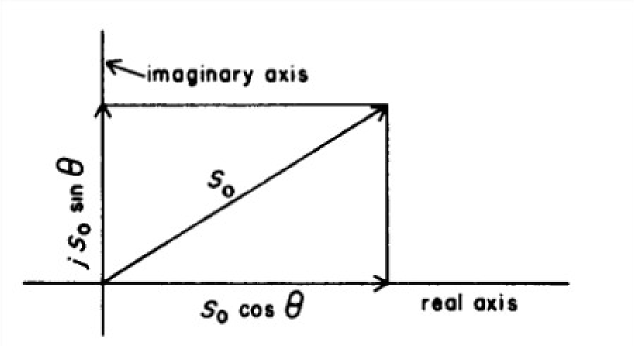
Sementara itu, konstanta proporsionalitas terhadap waktu dipengaruhi oleh periodenya. Setiap perambatan selama T, terjadi satu gelombang penuh 2π , maka diperoleh $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Konstanta proporsionalitas terhadap waktu disebut juga dengan frekuensi radian.

Selanjutnya, karena $S(t,z)$ dalam bentuk diatas bersifat periodik, maka sinyal sebagai fungsi sinusoidal kosinus tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk radian. Ilustrasi sinyal pada Persamaan 3.1 jika dinyatakan dalam bentuk radian, seperti gambar berikut.



Gambar 3.4

Titik pada lingkaran dinyatakan sebagai vektor $(S_0 \cos\theta, S_0 \sin\theta)$. Jika direpresentasikan dalam bentuk radian, maka amplitudo sinyal merupakan jari-jari lingkaran dan ketinggian sinyal merupakan panjang garis horisontal. Darisini maka sinyal dapat dinyatakan dalam bidang kompleks. Proyeksi horisontal vektor merupakan bagian real dari bilangan kompleks sementara proyeksi vertikal vektor merupakan bagian imaginer dari bilangan kompleks.
Ilustrasi dari penjelasan ini dapat dilihat pada Gambar 3.5 berikut.



Gambar 3.5

Jadi,

$$S(\theta) = S_0 \cos\theta + iS_0 \sin\theta = S_0 e^{i\theta}$$

Karena $\theta = \omega t - kz + \phi$ maka

$$S(\omega t - kz + \phi) = S_0 e^{i(\omega t - kz + \phi)}$$

Selanjutnya apabila dianalisa sinyal pada satu titik saja, misal di titik $z = z_1$ maka ketinggian sinyal hanya merupakan fungsi atas waktu saja. Pada pembahasan selanjutnya, hanya akan dibahas sinyal sebagai fungsi atas waktu.

B. Hasil

B.1 Sinyal periodik waktu kontinu.

Dimisalkan $x(t)$ adalah sinyal analog atas *t* yang periodik dengan periode T. Oleh karena itu, berlaku

$$x(t+T) = x(t), \forall t \in R.$$

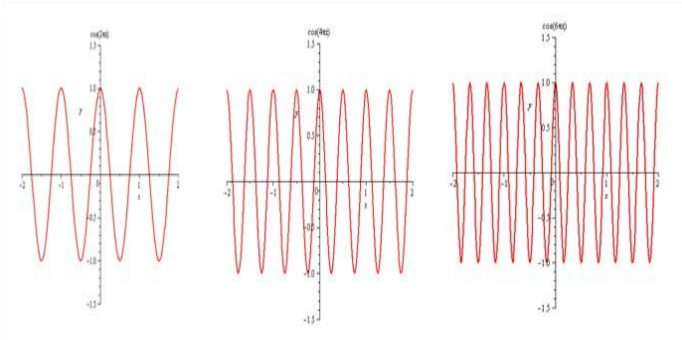
Menurut J.B Fourier, maka sinyal tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk deret fourier sebagai berikut

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}$$

dengan

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{c}^{c+T} x(t) e^{-i\frac{2n\pi}{T}t} dt$$

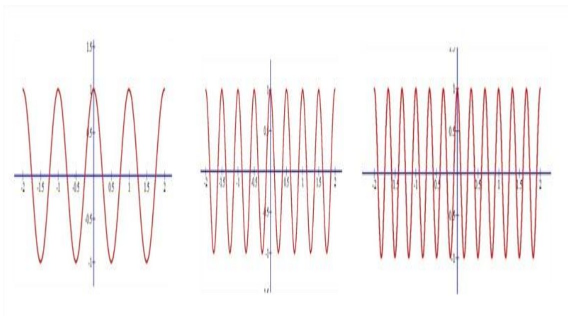
Pada pembahasan sebelumnya telah dijelaskan bahwa ketinggian sinyal dapat dilihat dari bagian real sinyal eksponensial kompleks. Bagian real dari bentuk eksponensial $e^{in\frac{2\pi}{T}t}$ merupakan fungsi kosinus $cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)$. Ilustrasi fungsi kosinus untuk n = 1, n = 2 dan n = 3 dengan T = 1 sebagai berikut :



Gambar 3.6

Dari Gambar 3.6 dapat dilihat bahwa semakin besar nilai *n*, maka kecepatan osilasi gelombang akan bertambah. Untuk n = 1, n = 2 dan n = 3 periode gelombangnya berturut-turut adalah 1, ½ dan 1/3.

Selanjutnya untuk komponen harmonis dengan n negatif yaitu n = -1, n = -2 dan n -3 seperti yang diilustrasikan pada Gambar 3.7 berikut.



(i) (ii) (iii)

Gambar 3.7

Gambar 3.7 (i), (ii), (ii) berturut-turut merupakan grafik $cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)$ untuk n = -1, n = -2 dan n = -3. Darisini dapat dilihat bahwa periode gelombangnya berturut-turut adalah 1, ½ dan 1/3. Secara umum, karena $cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) = cos\left(\frac{-2n\pi t}{T}\right)$, maka gelombang akan mempunyai periode yang sama.

Selanjutnya dapat diperhatikan pula bahwa, setiap T = 1, gelombang juga akan mengalami perulangan sehingga setiap sinyal pada gambar diatas dapat dikatakan mempunyai periode T = 1 untuk n berapapun. Dari Gambar 3.6 dan Gambar 3.7 dapat dilihat bahwa masing-masing komponen mempunyai periode yang sama yaitu T. Hal ini berlaku pula untuk bagian imaginer dari sinyal. Dengan demikian, kombinasi linear eksponensial kompleks yang dihubungkan secara harmonis dari bentuk

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}$$

adalah juga periodik dengan periode T.

Meskipun demikian, komponen harmonik ke-n, n > 1, juga mempunyai periode $\frac{T}{n}$. Darisini kemudian diperkenalkan T yang kemudian disebut sebagai periode dasar dan *f* disebut dengan frekuensi dasar sementara periode dan frekuensi masing-masing komponen harmonik ke-n secara berturut-turut dinyatakan dengan $T_n=\frac{T}{n}$ dan $f_n = nf$.

Pada kombinasi linear tersebut, bentuk $c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}$ untuk n = 0 adalah konstan, dua bentuk berikutnya yaitu untuk n = +1 dan n = -1 mempunyai frekuensi dasar yang sama dengan ω dan dirujuk sebagai komponen dasar atau komponen harmonis pertama. Dua bentuk berikutnya yaitu untuk n = +2 dan n = -2 adalah periodik dengan setengah periode (atau ekuivalen dengan dua kali frekuensi) dari komponen dasar. Demikian halnya untuk n = +3 dan n = -3. Secara umum, komponen-komponen untuk n = +N dan n = -N dirujuk sebagai komponen-komponen harmonis ke-N. Jika sinyal dapat dinyatakan dalam bentuk kombinasi linear eksponensial kompleks diatas maka c_n merupakan amplitudo sinyal dari komponen harmonis ke-n dan mempunyai periode T_n.

Rangkaian frekuensi yang terkandung dalam sinyal disebut dengan spektrum. Jadi, representasi koefisien fourier suatu sinyal pada domain waktu dapat dipandang sebagai transformasi sinyal periodik x(t) menjadi suatu spektrum yang terdiri dari spektrum amplitudo.

Kembali pada sinyal dalam representasi deret fourier. Secara umum, c_n adalah bilangan kompleks. Lebih jauh lagi, bila sinyal periodik tersebut adalah bilangan real, maka c_n dan c_{-n} adalah kompleks konjugate, yaitu

$c_n = |c_n| e^{i\theta_n}$ dan $c_{-n} = |c_n| e^{-i\theta_n}$

maka darisini maka untuk sinyal bilangan real, deret fourier dapat direpresentasikan dalam bentuk

$$x(t)=c_0+2\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}+\theta_n\right)$$

dengan $c_n = |c_n| e^{i\theta_n} = \frac{1}{T}\int_{c}^{c+T} x(t) e^{-i\frac{2n\pi}{T}t}\,dt$

Contoh 3. 1 :

Diberikan sinyal periodik $x(t)=\cos(t)$. Akan dicari spektrum amplitudo dari sinyal tersebut.

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{c}^{c+T} x(t) e^{-i\frac{2n\pi}{T}t}\,dt$$

Sinyal mempunyai periode 2π atau frekuensi dasar 1. Oleh karena itu T = 2π atau f = 1. Ambil c = -π. Darisini diperoleh $c_0 = 0$ $c_1 = \frac{1}{2}$ $c_{-1} = \frac{1}{2}$ dan untuk n yang lain diperoleh $c_n = 0$

Jadi, sinyal x(t) = cos(t) dibangun oleh frekuensi 1 dan -1 dengan amplitudo ½.

Amplitudo pada komponen harmonis ke-n dinyatakan dengan

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{c}^{c+T} x(t)e^{-i\frac{2n\pi}{T}t}dt$$

Pada hubungan diatas, amplitudo c_n , untuk n bilangan bulat tak nol, merupakan fungsi atas periode

$$T_n = \frac{T}{n}$$

Karena periode merupakan kebalikan dari frekuensi maka dengan kata lain, amplitudo diatas dapat dinyatakan sebagai fungsi atas frekuensi sebagai berikut :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{c}^{c+T} x(t)e^{-i2\pi f_n t}dt$$

dengan $f_n = nf$. Rumus diatas menyatakan hubungan antara amplitudo sebagai fungsi atas frekuensi. Apabila besaran amplitudo sinyal x sebagai fungsi atas frekuensi dinotasikan dengan simbol $X(f_n)$, maka diperoleh

$$X(f_n) = \frac{1}{T}\int_{c}^{c+T} x(t)e^{-i2\pi f_n t}dt$$

Jadi darisini diperoleh bahwa domain frekuensinya merupakan nilai diskrit frekuensi $\{nf, n \in Z\}$

.

Selanjutnya khusus untuk sinyal yang bernilai bilangan-bilangan real, maka

$$X(f_n) = \frac{1}{T}\int_{c}^{c+T} x(t)e^{-i2\pi f_n t}dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{c}^{c+T} x(t)[cos(2\pi f_n t) - i\,sin(2\pi f_n t)]dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{c}^{c+T} x(t)[cos(2\pi f_n t)]dt - \frac{i}{T}\int_{c}^{c+T} x(t)[sin(2\pi f_n t)]dt$$

Jadi, diperoleh

$$Re[X(f_n)] = \frac{1}{T}\int_{c}^{c+T} x(t)[cos(2\pi f_n t)]dt \quad \textbf{dan} \quad Im[X(f_n)] = -\frac{1}{T}\int_{c}^{c+T} x(t)[sin(2\pi f_n t)]dt$$

Apabila $Im[X(f_n)] = 0$ untuk setiap n maka $X(f_n)$ bernilai imaginer yang berakibat

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f_n)e^{in\frac{2\pi}{T}t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} Re[X(f_n)]e^{in\frac{2\pi}{T}t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} Re[X(f_n)]\left[cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + i\,sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\right]$$

Bagian real dari bentuk diatas merupakan ketinggian sinyal pada komponen harmonis ke-n. Oleh karena itu, ketinggian sinyal pada komponen harmonis ke-n adalah

$$Re[X(f_n)]\left[cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\right].$$

Hal ini berakibat bahwa $Re[X(f_n)]$ amplitudo pada komponen harmonis ke-n.
Apabila $Re[X(f_n)]=0$ untuk setiap n maka $X(f_n)$ bernilai imaginer yang berakibat

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} Im[X(f_n)]\left[i\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)-\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\right]$$

Darisini diperoleh ketinggian sinyal pada komponen harmonis ke-n adalah

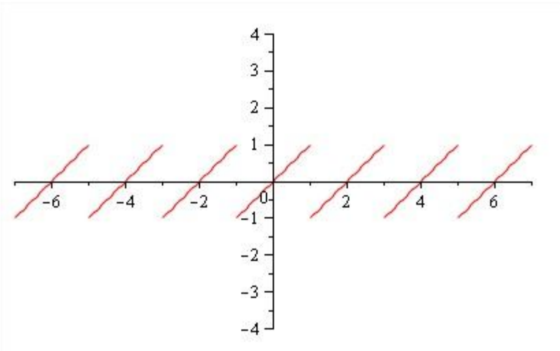
$$-Im[X(f_n)]\left[\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\right].$$

Hal ini berakibat bahwa $Im[X(f_n)]$ amplitudo pada komponen harmonis ke-n.

Contoh 3.3 :
Diketahui suatu sinyal periodik dengan periode 2 sebagai berikut

$$x(t)=t, -1<t<1$$

Untuk t yang lain berlaku $x(t+2)=x(t)$.



Gambar 3.9

Nyatakan sinyal tersebut dalam domain frekuensi.
Jawab :
Karena sinyal mempunyai periode dasar 2, maka frekuensi dasarnya 0.5. Darisini diambil c = -1.
Untuk n = 0, diperoleh

$$X(f_0)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^{-i2\pi f_0 t}dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^{-i2\pi .0.t}dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} tdt=0$$

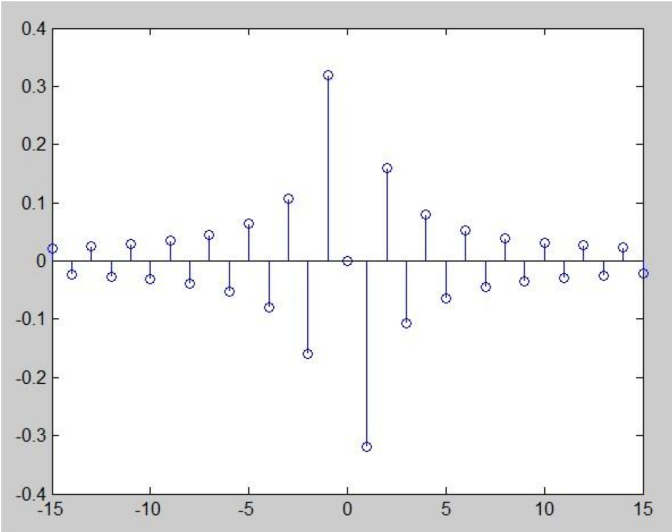
Untuk n $\neq$ 0, ambil c = -1, sehingga diperoleh

$$X(f_n)=\frac{1}{-i4\pi f_n}\left\{e^{-i2\pi f_n}+\frac{1}{i2\pi f_n}e^{-i2\pi f_n}+e^{i2\pi f_n}-\frac{1}{i2\pi f_n}e^{i2\pi f_n}\right\}.$$

Dengan menggunakan rumus euler, diperoleh

$$X(f_n)=\frac{i(-1)^n}{2\pi f_n}$$

Hubungan antara amplitudo dan frekuensi dari sinyal pada Contoh 3.2 untuk bagian imaginernya dapat dilihat pada Gambar 3.10 berikut.



Gambar 3.10

Script Matlab

```
n=-15:15;
T=2;
for i=1:length(n)
    if n(i)==0 X(i)=0;
    else
y(i)=(-1)^(n(i));
fn(i)=n(i)/T;
X(i)=(y(i))/(2*pi*fn(i));
    end
end
stem(n,X)
```

B.2 Sinyal Aperiodik Waktu Kontinu

Pada sinyal analog periodik, dapat dilihat bahwa sinyal mempunyai frekuensi yang terhitung. Pada grafik hubungan amplitudo dan frekuensi, amplitudo sinyal hanya terdefinisi pada nilai-nilai frekuensi saja (f_n). Untuk sinyal non periodik, diasumsikan bahwa periode dasar berlangsung dari seluruh domain waktu sehingga periode dasar nya tak berhingga. Hal ini berakibat bahwa nilai frekuensi dasarnya akan menjadi sangat kecil (mendekati nol) yang kemudian berakibat spketrumnya menjadi kontinu.

Representasi sinyal periodik dalam deret fourier adalah sebagai berikut :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}$$

dengan

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{c}^{c+T} x(t)e^{-i\frac{2n\pi}{T}t}\,dt$$

Misalkan didefinisikan $f_n = \dfrac{n}{T}$. Darisini diperoleh bahwa $\Delta f = f_{n+1} - f_n = \dfrac{1}{T} = f_0$. Diambil c = -T/2 maka untuk koefisien fouriernya akan diperoleh

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-i\frac{2n\pi}{T}t}\,dt$$

Substitusikan pada persamaan deret fourier, diperoleh

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi f_n t} dt \right) e^{i2\pi f_n t} \Delta f$$

Karena pada sinyal aperiodik nilai frekuensi sangat kecil $(\Delta f \to 0)$, maka

$$x(t) = \lim_{\Delta f \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi f_n t} dt \right) e^{i2\pi f_n t} \Delta f = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \right) e^{i2\pi f t} df$$

Jadi darisini diperoleh bahwa representasi sinyal aperiodik dalam integral fourier adalah sebagai berikut

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

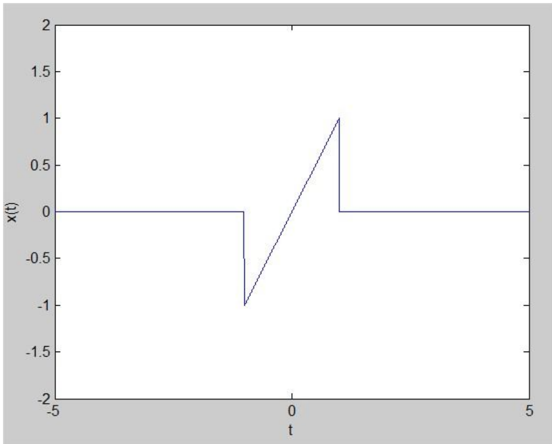
dengan

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

Contoh 3.5 :
Diketahui suatu sinyal dengan hubungan berikut

$$x(t) = t, -1 < t < 1$$

Sementara untuk t yang lain berlaku $x(t) = 0$

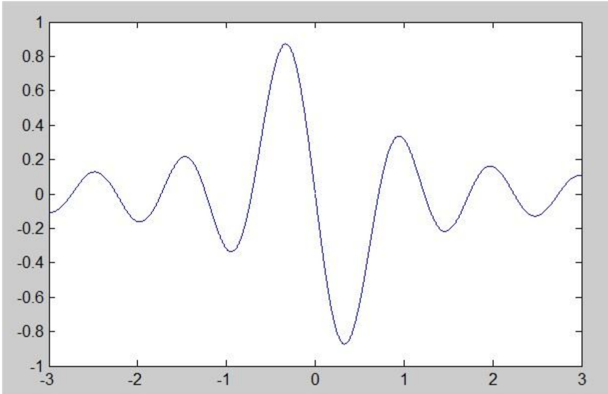


Gambar 3.15

Nyatakan sinyal tersebut dalam *frequency domain*.
Jawab :

$$X(f) = \frac{i}{2\pi f} \left(2\cos(2\pi f) - \frac{\sin(2\pi f)}{\pi f} \right)$$

Hubungan frekuensi dan amplitudo pada contoh 3.5 dapat dinyatakan dalam grafik berikut :



Gambar 3.16

C. Kesimpulan

Dari pembahasan didepan dapat diambil kesimpulan bahwa analisa sinyal pada frekuensi domain dapat dilakukan dengan menggunakan transformasi fourier.

1. Jika sinyal periodik terhadap waktu kontinu dan dinyatakan dalam bentuk $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f_n\right) e^{in\frac{2\pi}{T}t}$ maka spektrum frekuensi dari sinyal adalah $X\left(f_n\right)=\frac{1}{T}\int_{c}^{c+T} x(t) e^{-i2\pi f_n t} dt$.
2. Jika sinyal aperiodik terhadap waktu kontinu dan dinyatakan dalam bentuk maka spektrum frekuensi dari sinyal adalah $X\left(f\right)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$.

D. Daftar Pustaka

- Bracewell, R. “The Fourier Transform and its applications”. McGraw Hill. 1965.
- Do, Minh. “Fundamental of Signal Processing. Lecture Notes”. http://cnx.org/content/col10360/1.3/
- Hayes, Monson H. “Schaum Outline. Digital Signal Processing”.. Mc-Graw Hil. 1999.
- NN. “The fundamentals of Signal Processing. Application Note 243. Agilent Technologies. USA.