METODE *ORDINARY KRIGING* PADA GEOSTATISTIKA

SKRIPSI

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
untuk memenuhi sebagian persyaratan
guna memperoleh gelar Sarjana Sains

Oleh:
Anantia Nur Alfiana
NIM. 05305141026

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2010

PERSETUJUAN

Skripsi yang berjudul **" Metode *ordinary Kriging* pada Geostatistika"** ini telah disetujui oleh pembimbing untuk diujikan.

Yogyakarta, 08 September 2010

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Mathilda Susanti, M. Si	R. Rosnawati, M. Si
NIP. 196403141989012001	NIP. 196712201992032001

SURAT PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya :

Nama	: Anantia Nur Alfiana
NIM	: 05305141026
Program Studi	: Matematika
Jurusan	: Pendidikan Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Judul Skripsi	: *Metode Ordinary Kriging* pada *Geostatistik*

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini benar-benar hasil karya saya sendiri. Sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya atau pendapat yang ditulis atau diterbitkan orang lain kecuali sebagai acuan atau kutipan dengan mengikuti tata penulisan karya ilmiah yang telah lazim.

Yogyakarta, 08 September 2010

Yang menyatakan,

(Anantia Nur Alfiana)

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul " **Metode *Ordinary Kriging* pada Geostatistika** " yang disusun oleh:

Nama : Anantia Nur Alfiana

NIM : 05305141026

Prodi : Matematika

telah diujikan di depan Dewan Penguji pada tanggal 28 September 2010 dan dinyatakan lulus.

DEWAN PENGUJI

Nama	Jabatan	Tanda Tangan	Tanggal
Mathilda Susanti, M. Si NIP. 196403141989012001	Ketua Penguji	……………..	……….
R. Rosnawati, M. Si NIP. 196712201992032001	Sekretaris Penguji	……………..	……….
Endang Listyani, M. Si NIP. 195911151986012001	Penguji Utama	……………..	……….
Kismiantini, M. Si NIP. 197908162001122001	Penguji Pendamping	……………..	……….

Yogyakarta, Oktober 2010

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dekan,

Dr. Ariswan

NIP. 195 909 141 988 031 003

MOTTO

Awali setiap langkahmu dengan membaca basmallah, insya Allah kemudahan akan selalu tercurah untukmu,.,.

Ketika kamu terjatuh, segeralah bangkit, jangan terbelenggu oleh sakitnya luka yang kamu dapat…

Yakinlah jika Allah SWT akan memberikan yang terbaik untuk kita, karena apa yang kita inginkan dan kita anggap benar belum tentu yang terbaik untuk kita…

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

Orang tua saya ibu Tita Retno Susilowati, bapak Kadaryanto, bapak Yunan Ginting dan Ibu Nurmauli yang selalu mendoakan ananda disetiap sujudnya, selalu menguatkan disaat ananda lemah, selalu memberikan semua kasih sayang yang mereka miliki. Nanta sayang ibu dan bapak…

Papih, mamih, dan bolang..terimakasih atas kasih sayang tulus yang telah diberikan untuk nanta…nanta sayang sekali dengan kalian. Untuk mamih dan papih terimakasih atas semua yang telah kalian beri untuk nanta. Kalian adalah orang tua kedua nanta. Kalian selalu memberi nanta semangat ketika nanta benar-benar lemah.

Mila, Oli, nisa, refael dan rasita..adek-adek yang kucintai. Terimakasih atas kasih sayang dan keceriaan yang kalian beri dihari-hariku.

Om, tante, dan semua sepupuku…terimakasih karena kasih sayang dan keceriaan di hari-hariku

Sahabat sekaligus saudara Q, Dewi Kumala Sari, Adyta Prabandoro Saputri, Niken Anggrayni, Agung Ranny D dan Rahma Dewi Permana. Terimakasih atas semangat, kasih sayang dan keceriaan yang telah kalian berikan disetiap hariQ.

Kakak-kakakQ…mb Diyan, Mas Agil, Mas Bambang, n Mas Galuh..terimaksih untuk nasehat dan support yang begitu besar buat Nta..

METODE ORDINARY KRIGING PADA GEOSTATISTIKA

Oleh :

Anantia Nur Alfiana

NIM. 05305141026

ABSTRAK

Kriging adalah suatu teknik perhitungan untuk menghitung estimasi dari suatu variabel teregional yang menggunakan pendekatan bahwa data yang dianalisis dianggap sebagai suatu realisasi dari suatu variable acak, dan keseluruhan variable acak yang dianalisis akan membentuk suatu fungsi acak dengan menggunakan model structural variogram. *Ordinary kriging* merupakan *kriging* paling sederhana yang digunakan pada kasus data sampel kandungan yang tidak memiliki trend tertentu dengan rata-rata populasi tidak diketahui. Tujuan penulisan skripsi ini menjelaskan tentang metode *ordinary kriging* pada geostatistika, menjelaskan tentang sifat-sifat *ordinary kriging* beserta langkah-langkah pengestimasian cadangan hasil tambang dan juga penerapan metode *ordinary kriging* dalam menentukan cadangan batubara di wilayah Afrika.

Metode *ordinary kriging* merupakan metode *kriging* yang menghasilkan estimator yang bersifat BLUE *(Best Linear Unbiased Estimator)*. Data yang digunakan pada metode *ordinary kriging* merupakan data spasial dengan rata-rata populasi tidak diketahui dan diasumsikan bersifat stasioner. Dalam mengestimasi dengan menggunakan *ordinary kriging* diperlukan langkah-langkah yaitu 1) Menguji asumsi stasioneritas, 2) menentukan nilai semivariogram eksperimental, 3) melakukan analisis structural dengan mencocokan nilai semivariogram eksperimental dengan semivariogram teoritis, 4) menghitung nilai bobot pengaruh masing-masing titik tersampel, 5) menghitung $\hat{Z}(u_0)$, 6) perhitungan estimasi variansi eror.

Pada penerapan metode *ordinary kriging*, data sampel kandungan batubara diperoleh sebanyak 116 sampel, yang terdiri dari lokasi batubara, berupa koordinat titik x (absis), y (ordinat), z (elevasi/ketinggian) serta BB (nilai kandungan batubara). Estimasi dilakukan pada 16236 lokasi yang diperoleh dari hasil kombinasi linear beberapa koordinat titik di sekitar data sampel yang diperoleh. Berdasarkan analisis struktural diperoleh model *gauss* yang ditentukan berdasarkan nilai MSE *(Mean Square Error)* terkecil. Dengan melakukan perhitungan menggunakan program R, tanpa melakukan perhitungan bobot pengaruh masing-masing titik tersempel, dapat langsung diperoleh hasil estimasi cadangan batubara dan variansi eror. Hasil estimasi cadangan batubara diperoleh nilai kandungan minimum sebesar 15,957 % pada lokasi titik absis (x) sebesar 16178, titik ordinat (y) sebesar 11268, dan titik elevasi (z) sebesar 635 m diatas permukaan laut dengan variansi eror sebesar 0,061 dan nilai kandungan maksimum sebesar 29,244 % pada lokasi titik absis (x) sebesar 13978, titik ordinat (y) sebesar 9468, dan titik elevasi (z) 575 m diatas permukaan laut dengan variansi eror sebesar 1,124.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul ***" Metode Ordinary Kriging* pada *Geostatistik* "** dengan sebaik-baiknya. Shalawat serta salam kita sampaikan kepada junjungan kita Rasulullah SAW, para keluarganya, para sahabatnya, dan para pengikutnya hingga hari pembalasan.

Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta. Penulisan skripsi ini tidak lepas dari bantuan, pengarahan dan bimbingan berbagai pihak. Pada kesempatan kali ini, penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Bapak Dr. Ariswan sebagai Dekan FMIPA UNY yang telah memberikan kelancaran pelayanan dalam urusan akademik.
2. Bapak Dr. Hartono sebagai Ketua Jurusan Pendidikan Matematika UNY yang telah memberikan kelancaran pelayanan dalam urusan akademik.
3. Ibu Atmini Dhoruri, M. Si sebagai Ketua Program Studi Matematika UNY yang telah memberikan kelancaran pelayanan dalam urusan akademik.
4. Bapak Tuharto, M. Si sebagai Pembimbing Akademik yang selalu memberikan kritik, saran dan motivasi selama penulis mengikuti pendidikan di UNY ini.
5. Ibu Mathilda Susanti, M. Si sebagai Pembimbing I dan Ibu R. Rosnawati, M. Si sebagai Pembimbing II atas segala bimbingan dan pengarahannya selama penulis mengerjakan skripsi ini.

6. Seluruh dosen Jurusan Pendidikan Matematika atas segala ilmu yang telah diberikan.
7. Seluruh karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam UNY atas segala bantuan demi kelancaran skripsi ini.
8. Semua teman-teman Program Studi Matematika 2005 yang telah memberikan dukungan selama ini. Terima kasih.
9. Endra Angen Laksana, Mas Wid, Mas Bayu, Mas Eko, dan Mas Adi yang telah membantu proses penyelesaian skripsi ini.
10. Semua pihak yang telah banyak membantu dalam penulisan skripsi ini dan tidak dapat disebutkan satu per satu.

Skripsi ini masih jauh dari kata sempurna sehingga penulis mengharapkan adanya kritik dan saran yang membangun dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Semoga skripsi ini bisa bermanfaat bagi banyak pihak.

Wassallamualaikum Wr. Wb

Yogyakarta, 08 September 2010

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Statistika adalah ilmu yang mempelajari bagaimana merencanakan, mengumpulkan, menganalisis, menyajikan, menginterpretasi, dan menarik kesimpulan berdasarkan data yang ada. Pengumpulan data memegang peranan penting dalam statistika, sebab bila data tersebut mengalami kesalahan atau tidak representatif dapat dipastikan bahwa kesimpulan yang diperoleh akan salah. Terdapat dua macam statistika, yaitu statistika deskriptif dan statistika inferensial. Statistika deskriptif adalah statistika yang digunakan untuk mendeskripsikan dan menyimpulkan data, baik secara numerik (misal menghitung rata-rata dan standar deviasi) atau secara grafis (dalam bentuk tabel atau grafik), untuk mendapatkan gambaran jelas mengenai data tersebut, sehingga lebih mudah dibaca dan lebih bermakna. Sedangkan statistika inferensial adalah statistika yang digunakan untuk mengambil keputusan berdasarkan analisis data yang diperoleh, misalkan melakukan uji hipotesis, melakukan estimasi pengamatan masa mendatang, membuat permodelan hubungan (korelasi, regresi, anova, deret waktu), dan sebagainya. Data yang dapat digunakan antara lain data pada bidang pemasaran, farmasi, geologi, psikologi, dan masih banyak lagi.

Secara khusus, terdapat statistika yang digunakan untuk mengolah data geologi dan terdapat informasi spasial disebut dengan istilah geostatistika. Informasi spasial yaitu informasi yang mengidentifikasi lokasi geografis dan karakteristik keadaan alam atau buatan manusia dan batas-batas di muka bumi. Selain itu, pada geologi banyak dijumpai masalah-masalah variasi spasial. Penerapan geostatistika sangat luas. Pada perkembangannya banyak aplikasi statistika multivariat yang masuk dalam geostatistika.

Geostatistika dikembangkan pada industri mineral untuk melakukan perhitungan cadangan mineral, seperti emas, perak, platina, dan sebagainya. Hal yang paling penting dalam perhitungan cadangan adalah penaksiran. D.K. Krige, seorang insinyur pertambangan Afrika Selatan, memperkenalkan salah satu metode penaksiran yang digunakan untuk menangani variabel teregionalisasi *(regionalized variable)*. Variabel teregionalisasi adalah variabel yang mempunyai nilai berbeda (bervariasi) dengan berubahnya lokasi/tempat. Metode penaksiran yang digunakan untuk menangani variabel teregionalisasi disebut dengan metode *kriging*. Pada tahun 1960an, *Kriging* dikembangkan dalam geostatistika oleh Georges Matheron (Suprajitno Munadi, 2005: 4).

Pada perkembangannya banyak metode *kriging* yang dikembangkan untuk menangani berbagai macam kasus yang ada dalam data geostatistik salah satu kasus yaitu terdapat data kandungan mineral tersampel yang tidak memiliki trend (kecenderungan) tertentu. Metode *kriging* yang sesuai untuk menyelesaikan kasus tersebut antara lain *simple kriging* dan *ordinary kriging*. *Simple kriging* digunakan pada saat rata-rata populasi diketahui, sedangkan pada *ordinary kriging* digunakan pada saat rata-rata populasi tidak diketahui. Namun, pada kesempatan kali ini akan dibahas tentang metode *ordinary kriging* karena pada kenyataannya rata-rata populasi tidak dapat diketahui.

B. Rumusan Masalah

1. Apakah yang dimaksud dengan metode *ordinary kriging* pada geostatistika?
2. Bagaimana sifat-sifat metode *ordinary kriging*?
3. Bagaimanakah langkah-langkah mengestimasi cadangan hasil tambang dengan menggunakan metode *ordinary kriging*?
4. Bagaimana penerapan metode *ordinary kriging* dalam menentukan cadangan batubara?

C. Tujuan

Adapun tujuan penulisan skripsi ini adalah:

1. Menjelaskan tentang metode *ordinary kriging* pada geostatistika.
2. Menjelaskan tentang sifat-sifat metode *ordinary kriging*.
3. Menjelaskan langkah-langkah untuk pengestimasian cadangan hasil tambang dengan menggunakan metode *ordinary kriging*.
4. Menjelaskan penerapan metode *ordinary kriging* terutama dalam hal menentukan cadangan batubara.

D. Manfaat

Adapun manfaat yang bisa diperoleh dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Penulis dapat mempelajari lebih dalam tentang metode *ordinary kriging* pada geostatistika.
2. Penulis dapat mempelajari lebih dalam tentang sifat-sifat yang terdapat pada metode *ordinary kriging*.

3. Penulis dapat mengetahui langkah-langkah untuk mengestimasi cadangan hasil tambang dengan menggunakan metode *orinary kriging*.
4. Penulis dapat mengetahui penerapan metode *ordinary kriging* dalam penambangan batubara.

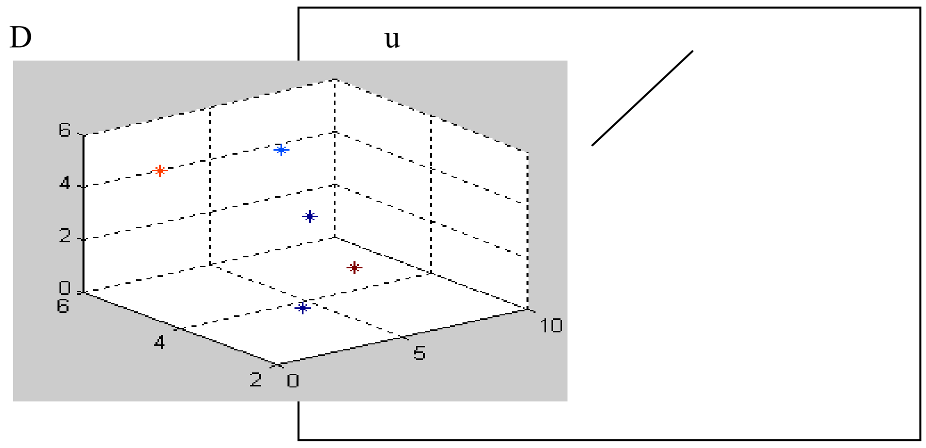
BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam bab ini dibahas tentang data spasial, variabel random kontinu, vektor dan vektor random, ekspektasi, variansi, kovariansi, matriks, transpose matriks, matriks persegi, matriks identitas, matriks invers, stasioneritas, variogram dan semivariogram, lagrange multiplier.

A. Data Spasial

Pada geologi, terdapat dua jenis data yang merepresentasikan fenomena-fenomena yang terdapat di dunia nyata. Salah satu jenis data tersebut adalah jenis data yang merepresentasikan aspek-aspek keruangan dari fenomena tersebut. Jenis data seperti ini sering disebut sebagai data-data posisi, koordinat, ruang atau spasial. Data spasial merupakan data yang disajikan dalam posisi geografis dari suatu obyek, berkaitan dengan lokasi, bentuk dan hubungan diantaranya dalam ruang bumi. Penyajian data geografik dilakukan dengan menggunakan titik, garis dan luasan. Data spasial dapat berupa data diskret atau kontinu dan dapat juga memiliki lokasi spasial beraturan *(regular)* maupun tak beraturan *(irregular)*. Data spasial dikatakan mempunyai lokasi yang *regular* jika antara lokasi yang saling berdekatan satu dengan yang lain mempunyai posisi yang beraturan dengan jarak sama besar, sedangkan dikatakan *irregular* jika antara lokasi yang saling berdekatan satu dengan yang lain mempunyai posisi yang tidak beraturan dengan jarak yang berbeda. Data spasial dapat diilustrasikan seperti gambar berikut :



Gambar 2.1. Gambar data spasial

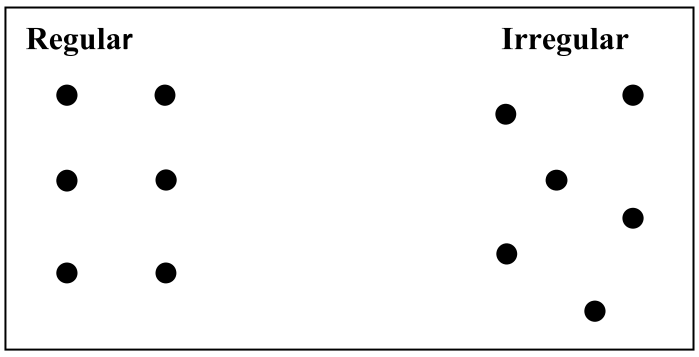
Lambang D merupakan simbol bagi domain, dengan $D \subset R^d$ untuk sembarang dimensi d. $u \in R^d$ merupakan lokasi data generik dalam d-dimensional ruang Euclidean dan Z(u) adalah vektor random dalam lokasi $u \in D$. Sehingga dapat dirumuskan model umum data spasial $\{Z(u): u \in D \subset R^d\}$ (Cressie, 1993:8).

Pada ilmu geologi, data terletak di dimensi 3 yaitu terletak pada koordinat x (absis), y (ordinat) dan z (elevasi/ketinggian). Dalam hal ini, *u* merupakan suatu lokasi spasial, yang selanjutnya disebut dengan titik, dan *Z(u)* pada lokasi spasial *u* berupa nilai acak dari lokasi spasial *u*.

Menurut Cressie(1993:10) dalam pernyataannya disebutkan bahwa berdasarkan jenis data, terdapat 3 tipe mendasar data spasial yaitu data geostatistik *(geostatistical data)*, data area *(lattice area)*, dan pola titik (*point pattern)*.

1. Data Geostatistik *(Geostatistical Data)*

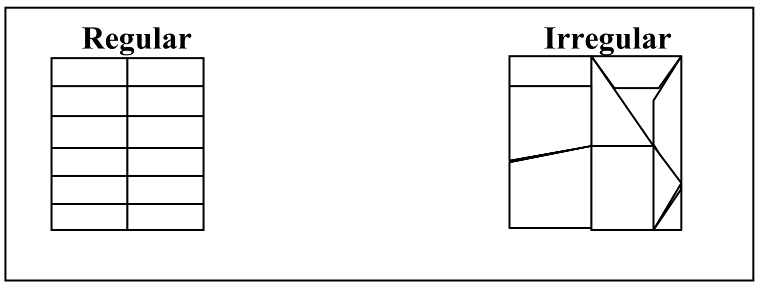
Pada awal tahun 1980-an geostatistika muncul sebagai gabungan dari disiplin ilmu teknik pertambangan, geologi, matematika dan statistika. Kelebihannya jika dibandingkan dengan pendekatan klasik untuk mengestimasi cadangan mineral adalah bahwa geostatistik mampu memodelkan baik kecenderungan spasial (*spasial trend*) maupun korelasi spasial *(spasial correlation*). Data dari setiap sampel titik didefinisikan oleh lokasi dan bobot nilai pengukuran objek yang diamati. Setiap nilai data berhubungan dengan lokasinya. Prinsip dasar geostatistika adalah bahwa area yang saling berdekatan cenderung memiliki bobot nilai yang tidak jauh berbeda jika dibandingkan dengan area yang tidak berdekatan (berjauhan). Data geostatistik (*geostatistical*) mengarah pada data sampel yang berupa titik, baik beraturan *(regular)* atau tak beraturan *(irregular)* dari suatu distribusi spasial kontinu (Cressie, 1993: 10). Agar lebih jelasnya diilustrasikan dalam gambar sebagai berikut:



Gambar 2.2. Gambar data geostatistik

2. Data Area *(Lattice Data)*

Data area *(lattice data)* terdiri dari dua bentuk, yaitu berupa unit *regular* dan unit *irregular* yang didukung pula oleh informasi lingkungan dan dihubungkan dengan batas-batas tertentu. Data area sendiri berhubungan dengan wilayah spasial, merupakan kumpulan data atribut diskrit yang merupakan hasil pengukuran pada wilayah tertentu (Cressie, 1993: 11). Data area merupakan sebuah konsep dari garis tepi dan persekitaran *(neighbor)* yang dapat diilustrasikan sebagai berikut:



Gambar 2.3. Gambar data area

Data untuk setiap area didefinisikan berdasarkan lokasi dan bobot nilai pengukurannya. Secara umum, data area digunakan dalam studi *epidemologi*.

3.* Pola Titik *(Point Pattern)

Pola titik *(point pattern)* adalah pola yang muncul dari variabel yang dianalisis pada lokasi kejadian(Cressie, 1993: 12). Sampel yang digunakan adalah sampel yang tak beraturan (memiliki jarak yang berbeda). Lokasi pola titik diperoleh berdasarkan pada posisi koordinat kartesius (x,y) dari titik yang diamati sedangkan data pola titik spasial diperoleh dari informasi atribut pada objek yang bersesuaian.

Hal penting pada analisis data pola titik adalah untuk mengetahui hubungan ketergantungan antar titik. Maksudnya adalah untuk mengetahui apakah lokasi titik-titik yang menjadi objek penelitian membentuk kluster atau regular, sehingga dapat dilihat apakah terjadi ketergantungan antar titik atau tidak.

B. Variabel Random Kontinu (Bain dan Engelhardt, 1992: 64)

Definisi 2.b.1:

Variabel random X disebut variabel random kontinu jika terdapat fungsi *f(x)*, yaitu fungsi densitas peluang (fdp) dari X, sedemikian sehingga fungsi distribusi kumulatif (FDK) dari X adalah fungsi *F* yang memenuhi hubungan sebagai berikut:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{2.1}$$

Teorema 2.b.1

Fungsi $f(x)$ adalah fdp untuk setiap variabel random kontinu X jika dan hanya jika memiliki kedua sifat berikut:

1. $f(x) \geq 0$, untuk setiap x
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

C. Vektor dan Vektor Random

1. Vektor

Susunan bilangan real $x_1, x_2, ..., x_n$ sebanyak n komponen yang disusun dalam sebuah kolom atau baris disebut vektor, dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ atau } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$$

2. Vektor Random

Vektor random merupakan perluasan dari variabel random. Apabila suatu unit eksperimen menghasilkan hanya satu variabel terukur maka variabel tersebut dinamakan variabel random. Namun, jika menghasilkan beberapa variabel terukur semisal m variabel maka hasil pengukuran tersebut dinamakan vektor random. Jadi elemen atau komponen vektor random adalah variabel random. Penulisan dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathbf{p} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} & \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & \rho_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

D. Ekspektasi (Bain dan Engelhardt, 1992 : 67)

Definisi 2.d.1:

Misalkan X peubah acak kontinu dengan fdp f, maka:

(1) Ekspektasi X adalah suatu nilai yang dinyatakan dengan simbol $E(X)$, yang besarnya ditentukan dengan rumus

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \tag{2.2}$$

Jika integral tersebut bersifat konvergen.

(2) Apabila $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ tidak konvergen, maka dikatakan bahwa ekspektasi X tidak ada.

Ekspektasi dari X mempunyai sifat sebagai berikut:

Teorema 2.d.1

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

Bukti:

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= E(aX)+E(b) \\ &= E(a)E(X)+E(b) \\ &= aE(X)+b \end{aligned}$$

E. Variansi (Bain dan Engelhardt, 1992 : 73)

Definisi 2.e.1:

Variansi dari peubah acak X didefinisikan sebagai berikut:

$$Var(X)=E[X-E(X)]^2 \tag{2.3}$$

Sifat variansi ditunjukkan pada beberapa teorema berikut:

Teorema 2.e.1

Jika X peubah acak, maka:

$$Var\ (X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

Bukti:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[(X-E(X))^2] \\ &= E(X^2-2XE(X)+\left(E(X)\right)^2) \\ &= E(X^2)-2E(X)E(X)+(E(X))^2 \\ &= E(X^2)-2(E(X))^2+(E(X))^2 \\ &= E(X^2)-(E(X))^2 \end{aligned}$$

Teorema 2.e.2

Jika X peubah acak, a dan b konstanta, maka:

$$Var(aX+b) = a^2 var(X)$$

Bukti:

$$\begin{aligned} Var(aX+b) &= E(aX+b)^2 - [E(aX+b)]^2 \\ &= E\left(a^2X^2 + 2abX + b^2\right) - [aE(X)+b]^2 \\ &= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - \left[a^2E^2(X) + 2abE(X) + b^2\right] \\ &= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2E^2(X) - 2abE(X) - b^2 \\ &= a^2E(X^2) - a^2E^2(X) \\ &= a^2[E(X)^2 - [E(X)]^2] \\ &= a^2 var(X) \end{aligned}$$

F. Kovariansi

Definisi 2.f.1:

Menurut Bain and Engelhardt (1992:174) nilai kovariansi dari peubah acak X dan Y didefinisikan sebagai berikut:

$$Cov\ (X,Y) = E[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)] \tag{2.4}$$

Notasi lain yang dapat digunakan untuk kovariansi adalah σ_{xy}

Sifat-sifat pada kovariansi, ditunjukkan pada beberapa teorema berikut:

Teorema 2.f.1

Jika X dan Y merupakan peubah acak serta a dan b suatu konstanta, maka

1. $Cov\ (aX, bY) = ab\ Cov\ (X,Y)$
2. $Cov\ (X+a, Y+b) = cov(X,Y)$

3. $Cov\ (X, aX + b) = a\ Var\ (X)$

Bukti:

1. $Cov\ (aX, bY) = E\big[\big(aX - aE(X)\big)\big(bY - bE(Y)\big)\big]$

$$= E\left[a\big[\big(X - E(X)\big)\big]b\big[\big(Y - E(Y)\big)\big]\right]$$

$$= ab\ E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big]$$

$$= abCov\ (X, Y)$$

2. $Cov\ (X + a, Y + b) = E\big[\big((X + a) - (E(X) + a)\big)\big((Y + b) - (E(Y) + b)\big)\big]$

$$= E[(X + a - E(X) - a)(Y + b - E(Y) - b)]$$

$$= E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big]$$

$$= Cov\ (X, Y)$$

3. $Cov\ (X, aX + b) = E\big[\big(X - E(X)\big)\big((aX + b) - (aE(X) + b)\big)\big]$

$$= E\big[\big(X - E(X)\big)(aX + b - aE(X) - b)\big]$$

$$= E\big[(X - E(X)\big(aX - aE(X)\big)\big]$$

$$= E\left[\big(X - E(X)\big)\left(a\big(X - E(X)\big)\right)\right]$$

$$= aE[(X - E(X)]^2$$

$$= aVar\ (X)$$

Teorema 2.f.2

Jika X dan Y suatu peubah acak independen dan $Cov\ (X, Y) = 0$, maka:

$$Cov\ (X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Bukti:

$cov\ (X, Y) = E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big]$

$$= E[XY - YE(X) - XE(Y) + E(X)E(Y)]$$

$$= E(XY) - E\big(YE(X)\big) - E\big(XE(Y)\big) + E(E(X)E(Y))$$

$$= E(XY) - E(Y)E(X) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y)$$

$$= E(XY) - 2E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

G. Matriks

Matriks adalah susunan bilangan berbentuk segiempat. Bilangan-bilangan dalam susunan itu disebut **entri** matriks. Entri pada baris ke i kolom ke j dari suatu matriks $\boldsymbol{A}$ dinyatakan sebagai a_{ij}. $\boldsymbol{A}$ suatu matriks berukuran $m \times n$ merupakan sebuah matriks dengan banyak baris m dan banyak kolom n dan dinyatakan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

H. Tranpose Matriks

Jika terdapat matriks $\boldsymbol{A}$ yang merupakan sebarang matriks $m \times n$ maka transpose matriks A dinyatakan dengan $\boldsymbol{A}^T$. $\boldsymbol{A}^T$ adalah matriks $n \times m$ yang diperoleh dengan menukarkan baris dengan kolom pada matriks $\boldsymbol{A}$. Cara mengubah yaitu dengan menjadikan baris pertama pada matriks $\boldsymbol{A}$ sebagai kolom pertama untuk matriks $\boldsymbol{A}^T$, baris kedua pada matriks $\boldsymbol{A}$ sebagai kolom kedua untuk matriks $\boldsymbol{A}^T$, dan seterusnya.

Jika diketahui matriks $\boldsymbol{A}$ sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Maka, transpose matriks yang diperoleh adalah

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

I. Matriks Persegi

Matriks persegi merupakan suatu matriks dimana banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom. Matriks $\boldsymbol{B}$ dikatakan matriks persegi orde n jika banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom, yaitu n.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

J. Matriks Identitas

Matriks identitas *(identity matrix)* adalah matriks persegi dengan bilangan 1 terletak pada diagonal utama sedangkan bilangan 0 terletak di luar diagonal utama. Matriks identitas dinyatakan dengan $\boldsymbol{I}$.

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ dan seterusnya}$$

K. Matriks Invers

Jika **A** merupakan suatu matriks persegi dengan $|\mathbf{A}| \neq 0$, I suatu matriks identitas, dan $\mathbf{A}^{-1}$ merupakan invers A, dimana $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{A}|} adj\mathbf{A} \tag{2.5}$$

Beberapa sifat invers matriks adalah sebagai berikut:

1. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
3. $(c\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{c}\mathbf{A}^{-1}$, untuk suatu skalar c

L. Stasioneritas

Metode *ordinary kriging* dapat digunakan apabila data yang ada merupakan data yang bersifat stasioner. Suatu data dikatakan memiliki sifat stasioner apabila data tersebut tidak memiliki kecenderungan terhadap trend tertentu. Atau dengan kata lain, apabila fluktuasi data berada disekitar suatu nilai rata-rata yang konstan, tidak tergantung pada waktu dan variansi dari fluktuasi tersebut. Terdapat 3 macam stasioneritas dalam geostatistika, yaitu: (Delfiner, 1999: 16)

1. *Strict Stationarity*

Variabel random *Z(u)* dikatakan *strict stationarity* jika fungsi distribusi (kumulatif) dari $\left(z(u_1), z(u_2), ..., z(u_t)\right)$ dan $\left(z(u_{1+h}), z(u_{2+h}), ..., z(u_{t+h})\right)$ sama untuk sebarang nilai h, dengan h merupakan suatu konstanta dan t adalah pengamatan.

2. ***Second Order Stationarity***

Pada *Second Order Stationerity*, diasumsikan bahwa *E(Z(u)) = m*. Berarti nilai ekspektasi akan konstan untuk semua lokasi u, sehingga akan mengakibatkan *E(Z(u)) = E(Z(u+h)* dan kovariansi hanya bergantung pada jarak h dan tidak bergantung pada lokasi u.

$$Cov(h) = E[(Z(u)-m)(Z(u+h)-m)]$$

$$= E[Z(u)Z(u+h)] - m^2$$

Untuk h = 0

$$\begin{aligned} Cov(0) &= E\left[(Z(u)-m)(Z(u)-m)\right] \\ &= E\left[\, Z(u)^2 - 2mZ(u) + m^2 \,\right] \\ &= E\left[\, Z(u)^2 - 2E(Z(u))Z(u) + \left(E(Z(u))\right)^2 \,\right] \\ &= E\left[Z(u)\right]^2 - 2\left[E\left(Z(u)\right)\right]^2 + \left[E(Z(u))\right]^2 \\ &= E[Z(u)]^2 - [E(Z(u))]^2 \\ &= Var(Z(u)) \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

3. ***Intrinsic Stationerity***

Suatu variabel random dikatakan *Intrinsic Stationerity* apabila memenuhi persamaan berikut:

$$2\gamma(u, u+h) = Co\,\mathrm{v}[z(u)-z(u+h), z(u)-z(u+h)]$$

Dengan menggunakan asumsi *second order stationerity*, dan *intrinsic stationerity* yang diasumsikan, maka dapat dituliskan hubungan antara variogram, dengan simbol 2γ, dan kovariansinya sebagai berikut:

$$2\gamma(h) = \text{var}\left[Z(u) - Z(u+h)\right]$$

$$\begin{aligned}
&= E\left[Z(u) - Z(u+h)\right]^2 - \left[E[(Zu) - Z(u+h)]\right]^2 \\
&= E\left[Z(u) - Z(u+h)\right]^2 \\
&= E\left[\{Z(u) - Z(u+h)\}\{Z(u) - Z(u+h)\}\right] \\
&= E\left[Z(u)\right]^2 - 2E\left[Z(u)Z(u+h)\right] + E\left[Z(u+h)\right]^2 \\
&= \text{var}\left[Z(u)\right] + \left[E(Z(u))\right]^2 - 2E\left[Z(u)Z(u+h)\right] + \text{var}\left[Z(u+h)\right] \\
&+ \left[E\left[Z(u+h)\right]\right]^2 \\
&= 2\sigma^2 + 2m^2 - 2E\left[Z(u)Z(u+h)\right] \\
&= 2\sigma^2 - 2E\left[Z(u)Z(u+h) - m^2\right] \\
&= 2\sigma^2 - 2Cov(h)
\end{aligned}$$

Dari penjabaran di atas diperoleh hubungan semivariogram, dengan simbol γ, dan kovariansinya adalah sebagai berikut:

$$\gamma(h) = \sigma^2 - Cov(h)$$

karena $\sigma^2 = Cov(0)$

maka diperoleh

$$\gamma(h) = C\text{ov}(0) - Cov(h) \qquad (2.6)$$

M. Variogram dan Semivariogram (Munadi, 2005: 33)

Pada geostatistika, terdapat suatu perangkat dasar dari geostatistika untuk visualisasi, pemodelan dan eksploitasi autokorelasi spasial dari variabel teregionaisasi yang biasa dikenal sebagai semivariogram. Sedangkan semivariogram adalah setengah dari variogram, dengan simbol γ. Sesuai dengan namanya, Variogram adalah ukuran dari variansi. Variogram digunakan untuk menentukan jarak dimana nilai-nilai data pengamatan menjadi tidak saling tergantung atau tidak ada korelasinya. Simbol dari variogram adalah 2γ. Semivariogram ini digunakan untuk mengukur korelasi spasial berupa variansi eror pada lokasi u dan lokasi u + h.

1. Variogram dan Semivariogram Eksperimental

Variogram eksperimental adalah variogram yang diperoleh dari data yang diamati atau data hasil pengukuran. Variogram didefinisikan sebagai berikut:

$$2\gamma(h) = \mathrm{var}(Z(u) - Z(u+h))$$

karena pada stasioneritas terdapat sifat $E\left[Z(u)\right] = E\left[Z(u+h)\right]$, sehingga

$$2\gamma(h) = E\left[Z(u) - Z(u+h)\right]^2$$

Dari rumus di atas diperoleh rumus praktis dari semivariogram eksperimental ditaksirkan sebagai berikut:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (Z(u_i) - Z(u_i + h))^2 \qquad (2.7)$$

Bukti:

$$2\gamma(h) = E\left[Z(u) - Z(u+h)\right]^2$$

Misalkan $V = \left[Z(u) - Z(u+h)\right]^2$ dan diketahui bahwa *E(V)=m* sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 2\gamma(h) &= E\left[V\right] \\ &= \frac{1}{N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} V \\ &= \frac{1}{N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [Z(u_i) - Z(u_i + h)]^2 \end{aligned}$$

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [Z(u_i) - Z(u_i + h)]^2$$

Dengan

$2\gamma(h)$ = nilai variogram dengan jarak h

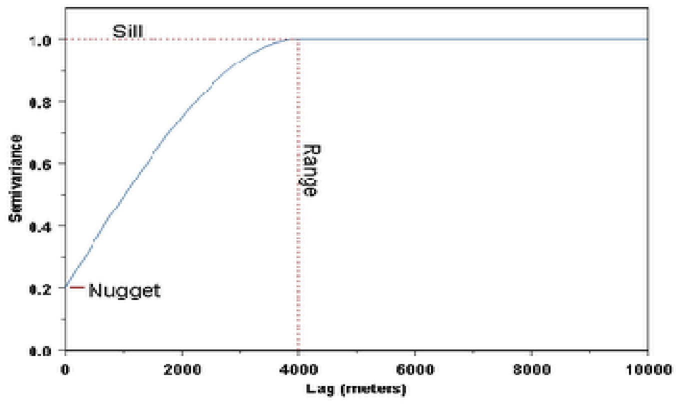
$\gamma(h)$ = nilai semivariogram dengan jarak h

$Z(u_i)$ = nilai pengamatan di titik u_i

$Z(u_i + h)$ = nilai pengamatan di titik $u_i + h$

$N(h)$ = banyaknya pasangan titik yang mempunyai jarak h

Berikut gambar semivariogram eksperimental :



Gambar 2.4. Semivariogram Eksperimental

2. Variogram dan Semivariogram Teoritis

Variogram teoritis mempunyai bentuk kurva yang paling mendekati variogram eksperimental. Sehingga, untuk keperluan analisis lebih lanjut variogram eksperimental harus diganti dengan variogram teoritis. Terdapat beberapa jenis variogram teoritis yang sering digunakan, yaitu:

a. **Model Bola *(Spherical Model)***

Bentuk variogram ini diumuskan sebagai berikut:

$$\gamma(h)=\begin{cases} C\left[\left(\dfrac{3h}{2a}\right)-\left(\dfrac{h}{2a}\right)^{3}\right] & \text{untuk } h \le a \\ C & \text{untuk } h > a \end{cases} \quad (2.8)$$

Dengan

- h adalah jarak lokasi antar sampel
- C adalah *sill,* yaitu nilai variogram untuk jarak pada saat besarnya konstan (tetap). Nilai ini sama dengan nilai variansi data.
- a adalah *range*, yaitu jarak pada saat nilai variogram mencapai *sill.*

b. Model eksponensial *(Exponential Model)*

Pada model eksponensial terjadi peningkatan dalam semivariogram yang sangat curam dan mencapai nilai *sill* secara asimtotik, dirumuskan sebagai berikut:

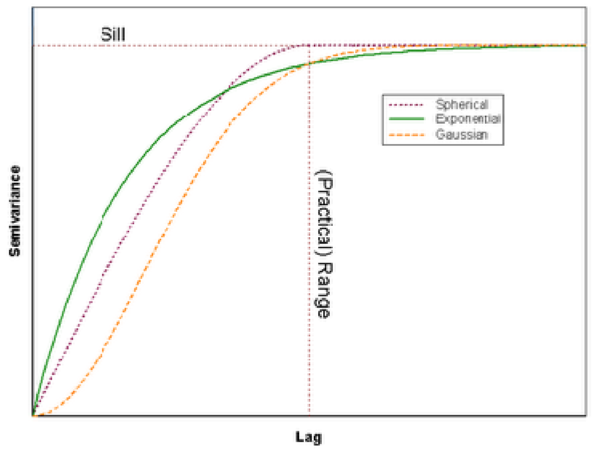
$$\gamma(h) = C\left[1 - exp\left(-\frac{h}{a}\right)\right] \quad (2.9)$$

c. Model Gauss *(Gaussian Model)*

Model Gauss merupakan bentuk kuadrat dari eksponensial sehingga menghasilkan bentuk parabolik pada jarak yang dekat dan dirumuskan sebagai berikut:

$$\gamma(h) = C\left[1 - exp\left(-\frac{h}{a}\right)^{2}\right] \quad (2.10)$$

Berikut gambar ketiga model semivariogram teoritis :



Gambar 2.5. Model Semivariogram Teoritis

N. Lagrange Multiplier

Fungsi *Lagrange* digunakan untuk menyelesaikan masalah penentuan nilai ekstrim (maksimum minimum) dari suatu fungsi. *Lagrange Multiplier* digunakan ketika beberapa variabel dibatasi dengan batasan-batasan *(constraints)* tertentu. Jika akan dicari nilai ekstrim suatu fungsi $f(x,y)$ dengan *constraints* tertentu maka harus dipenuhi $g(x,y)=0$ dan dibentuk fungsi *Lagrange* sebagai berikut:

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) \tag{2.11}$$

dengan λ adalah suatu pengali *Lagrange* dengan syarat ekstrim :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

BAB III

PEMBAHASAN DAN PENERAPAN

Bab ini akan membahas metode *kriging*, metode *ordinary kriging*, sifat-sifat pada metode *ordinary kriging*, langkah-langkah estimasi menggunakan metode *ordinary kriging* dan contoh penerapannya.

A. *Kriging*

Geostatistika merupakan statistika yang digunakan pada bidang geologi. Pada bidang geologi terdapat suatu metode yang digunakan untuk melakukan pengestimasian cadangan mineral atau hasil tambang lainnya. Salah satu metode yang digunakan untuk mengestimasi cadangan tersebut dengan menggunakan metode *kriging*. Metode *kriging* digunakan oleh G. Matheron untuk menonjolkan metode khusus dalam moving average terbobot (*weighted moving average)* yang meminimalkan variansi dari hasil estimasi. *Kriging* adalah suatu teknik perhitungan untuk estimasi dari suatu variabel terregional yang menggunakan pendekatan bahwa data yang dianalisis dianggap sebagai suatu realisasi dari suatu variabel acak, dan keseluruhan variabel acak yang dianalisis tersebut akan membentuk suatu fungsi acak dengan menggunakan model struktural variogram. *Kriging* juga merupakan suatu metode yang digunakan untuk menonjolkan metode khusus dalam rata-rata bergerak terbobot yang meminimalkan variansi dari hasil estimasi.

Secara umum, kriging merupakan suatu metode untuk menganalisis data geostatistik untuk menginterpolasi suatu nilai kandungan mineral berdasarkan data sampel. Data sampel pada ilmu kebumian biasanya diambil di tempat-tempat yang tidak beraturan. Dengan kata lain, metode ini digunakan untuk mengestimasi besarnya nilai karakteristik $\hat{Z}$ pada titik tidak tersampel berdasarkan informasi dari karakteristik titik-titik tersampel yang berada di sekitarnya dengan mempertimbangkan korelasi spasial yang ada dalam data tersebut.

Estimator kriging $\hat{Z}(u)$ dapat dituliskan sebagai berikut (Bohling, 2005: 4):

$$\hat{Z}(u) - m(u) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha [Z(u_\alpha) - m(u_\alpha)] \qquad (3.1)$$

Dengan

u, u_α : vektor lokasi untuk estimasi dan salah satu dari data yang berdekatan, dinyatakan sebagai α

m(u) : nilai ekspektasi dari Z(u)

$m(u_\alpha)$: nilai ekspektasi dari $Z(u_\alpha)$

$\lambda_\alpha(u)$: Nilai $Z(u_\alpha)$ untuk estimasi lokasi u. nilai $Z(u_\alpha)$ yang sama akan memiliki nilai yang berbeda untuk estimasi pada lokasi berbeda.

n : banyaknya data sampel yang digunakan untuk estimasi.

Z(u) diperlakukan sebagai bidang acak dengan suatu komponen trend, *m(u)*, dan komponen sisa atau error, $e(u) = Z(u) - m(u)$. Estimasi kriging yang bersifat sisa pada *u* sebagai penilaian penjumlahan dari sisa pada data disekitarnya. Nilai λ_α, diperoleh dari kovariansi atau semivariogram, dengan diperlukan komponen karakteristik sisa.

Tujuan kriging adalah untuk menentukan nilai, λ_α, yang meminimalkan variansi pada estimator, dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{\sigma}_e^2 = var\,\{\hat{Z}(u) - Z(u)\} \tag{3.2}$$

Banyak metode yang dapat digunakan dalam metode kriging salah satunya yaitu *ordinary kriging* yang akan dibahas pada pembahasan berikutnya.

B. *Ordinary Kriging (OK)*

Ordinary kriging (OK) adalah metode *kriging* paling sederhana yang terdapat pada geostatistika. Pada metode ini, memiliki asumsi bahwa rata-rata *(mean)* tidak diketahui dan bernilai konstan. Pada *ordinary kriging,* $m(u)$ merupakan *mean* dari Z(u) yaitu $m(u) = E(Z(u))$, dimana $E\big(Z(u)\big) = \mu$.

Pada Cressie (1993: 120) dijelaskan bahwa *ordinary kriging* berhubungan dengan prediksi spasial dengan dua asumsi:

Asumsi Model:

$$\mathrm{Z(u)} = \mu + \delta(\mathrm{u}), \quad \mathrm{u} \in \mathrm{D}, \mu \in \mathrm{R} \text{ dan } \mu \text{ tak diketahui} \tag{3.3}$$

Asumsi Prediksi:

$$\hat{Z}(u) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u_\alpha) \qquad \text{dengan} \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha = 1 \tag{3.4}$$

Dengan:

$\delta(u)$: nilai error pada Z(u)

n : banyaknya data sampel yang digunakan untuk estimasi.

Karena koefisien dari hasil penjumlahan prediksi linear adalah 1 dan memiliki syarat tak bias maka $E\left(\hat{Z}(u)\right) = \mu = E\big(Z(u)\big) = Z(u)$, untuk setiap $\mu \in R$ dan karena *Z(u)* merupakan suatu konstanta maka *E(Z(u)) = Z(u)*.

Jika terdapat estimator error, $\hat{e}(u)$, pada setiap lokasi merupakan perbedaan antara nilai estimasi $\widehat{Z}(u)$ dengan nilai sebenarnya Z(u), yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{e}(u) = \widehat{Z}(u) - Z(u) \qquad (3.5)$$

Dengan $E(\hat{e}(u)) = 0$

Dengan menggunakan persamaan (3.5) dapat dibuktikan bahwa $\widehat{Z}(u)$ merupakan estimator tak bias. Akan dibuktikan bahwa $\widehat{Z}(u)$ merupakan estimator tak bias:

$$\hat{e}(u) = \widehat{Z}(u) - Z(u)$$

$$E\big(\hat{e}(u)\big) = E\left(\hat{Z}(u) - Z(u)\right)$$

$$E\big(\hat{e}(u)\big) = E\left(\hat{Z}(u)\right) - E\big(Z(u)\big)$$

Karena $E\big(\hat{e}(u)\big) = 0$, maka diperoleh

$$0 = E\left(\hat{Z}(u)\right) - E\big(Z(u)\big)$$

$$E\left(\hat{Z}(u)\right) = E\big(Z(u)\big)$$

$$\widehat{Z}(u) = Z(u)$$

Terbukti bahwa $\widehat{Z}(u)$ merupakan estimator tak bias dari $Z(u)$.

Ordinary kriging akan meminimalkan rata-rata estimator eror kuadrat. Dengan menggunakan persamaan (3.4) maka akan diperoleh

$$E(\hat{e}(u)^2) = Var(\hat{e}(u)) + [E(\hat{e}(u))]^2 \qquad (3.6)$$

$$= Var(\hat{e}(u)) + 0$$

$$= Var(\hat{e}(u))$$

Karena $E(\hat{e}(u)) = 0$, maka $\left(E\left(\hat{e}(u)\right)\right)^2 = 0$

C. Sifat – Sifat pada *Ordinary Kriging*

Salah satu tujuan kriging, seperti yang sudah dijelaskan pada pembahasan sebelumnya, yaitu menghasilkan estimator yang bersifat *Best Linear Unbiassed Estimator* (BLUE). Berikut akan dibuktikan sifat *BLUE* pada *ordinary kriging*:

1. Linear

Diperoleh suatu persamaan pada metode *ordinary kriging* adalah sebagai berikut:

$$\hat{Z}(u)=\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u_\alpha)$$

Dari persamaan diatas, $\hat{Z}(u)$ dapat dikatakan estimator yang bersifat linear karena merupakan fungsi linear dari Z(u)

Terdapat n pengukuran pada lokasi 1, 2, 3, …, n dinyatakan sebagai berikut $Z(u_1), Z(u_2), Z(u_3), \dots, Z(u)$. Berdasarkan data yang tersampel, akan diestimasi Z(u) pada lokasi yang tidak tersampel yang dinyatakan dalam $Z(u_0)$. Selanjutnya, dari persamaan (3.4) dan (3.5), akan disusun variabel random untuk menggambarkan estimator dari eror, yaitu

$$\hat{e}(u_0) = \widehat{Z}(u_0) - Z(u_0) = \sum_{\alpha=0}^{n} \lambda_\alpha Z(u_\alpha) - Z(u_0) \qquad (3.7)$$

Dengan $\hat{Z}(u)$ merupakan kombinasi linear dari semua data tersampel.

2. *Unbiased*

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\hat{Z}(u)$ merupakan estimator tak bias. Dapat dipastikan bahwa error pada lokasi tertentu memiliki nilai ekspektasi 0 dengan menerapkan rumus untuk nilai ekspektasi pada kombinasi linear terhadap persamaan (3.7), sehingga diperoleh:

$$E\big(\hat{e}(u)\big) = E(\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u_\alpha) - Z(u))$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n}{}_{\alpha} E\big(Z(u_\alpha)\big) - E(Z(u)) \qquad (3.8)$$

Dengan asumsi bahwa fungsi random bersifat stasioner, dimana setiap nilai ekspektasi boleh dituliskan sebagai $E(Z)$, sehingga diperoleh:

$$E\big(\hat{e}(u)\big) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z) - E(Z)$$

Karena $E\big(\hat{e}(u)\big) = 0$, maka

$$E\big(\hat{e}(u)\big) = 0 = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z) - E(Z)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z) = E(Z)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha = 1$$

Sehingga

$$E\left(\hat{Z}(u)\right) = E(\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z(u)))$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z(u))$$

$$= 1\,.\,\mu$$

$$= \mu$$

Berdasarkan penjabaran di atas, maka diperoleh $E\left(\hat{Z}(u)\right) = \mu = Z(u)$, dimana $Z(u) = E(Z(u))$ dengan Z(u) berupa suatu konstatnta. Ini berarti *ordinary kriging* menghasilkan estimator yang tak bias dengan $\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha = 1$.

3. *Best*

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa metode *ordinary kriging* bersifat best yaitu dengan meminimumkan variansi eror. Dengan mengasumsikan bahwa $var\big(Z(u_0)\big) = \sigma^2$, maka persamaan (3.6) menjadi

$$\begin{aligned} Var(e(u_0)) &= var(\hat{Z}(u_0) - Z(u_0)) \\ &= cov\left(\hat{Z}(u_0), \hat{Z}(u_0)\right) + cov\big(Z(u_0), Z(u_0)\big) - 2cov\left(\hat{Z}(u_0), Z(u_0)\right) \\ &= var\left(\hat{Z}(u_0)\right) + var\big(Z(u_0)\big) - 2cov\left(\hat{Z}(u_0), Z(u_0)\right) \\ &= var\left(\hat{Z}(u_0)\right) + \sigma^2 - 2cov\left(\hat{Z}(u_0), Z(u_0)\right) \qquad (3.9) \end{aligned}$$

Dengan

$$\begin{aligned} var\left(\hat{Z}(u_0)\right) &= var\ (\textstyle\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u_\alpha)) \\ &= \textstyle\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \lambda_\alpha \lambda_\beta cov\ (Z(u_\alpha), Z\big(u_\beta\big)) \qquad (3.10) \end{aligned}$$

Dan

$$\begin{aligned} cov\big(\hat{Z}(u_0), Z(u_0)\big) &= E(\textstyle\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u_\alpha) Z(u_0)) - E(\hat{Z}(u_0) E(Z(u_0))) \\ &= \textstyle\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha\, E\big(Z(u_\alpha) Z(u_0)\big) - E\left(\hat{Z}(u_0)\right) E\big(Z(u_0)\big) \\ &= \textstyle\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha\, E\big(Z(u_\alpha) Z(u_0)\big) - E(\textstyle\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u_\alpha)) E\big(Z(u_0)\big) \end{aligned}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E\big(Z(u_\alpha)Z(u_0)\big) - \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z(u_\alpha))\, E\big(Z(u_0)\big)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha\, cov(Z(u_\alpha), Z(u_0)) \tag{3.11}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.10) dan (3.11) ke dalam persamaan (3.8) maka akan diperoleh estimasi variansi eror *ordinary kriging* sebagai berikut :

$$Var\big(e(u_0)\big) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \lambda_\alpha \lambda_\beta cov\ \Big(Z(u_\alpha), Z\big(u_\beta\big)\Big) + \sigma^2$$

$$-2\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha\, cov(Zu_\alpha, Z(u_0)) \tag{3.12}$$

Dengan syarat

$\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha = 1.$

Setelah melakukan penjabaran di atas, maka dapat dicari nilai minimum dari variansi eror menggunakan *lagrange multiplier* dengan parameter *lagrange* 2p. Persamaan *lagrange multiplier* dinyatakan sebagai berikut:

$$F(a,p) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \lambda_\alpha \lambda_\beta cov\Big(Z(u_\alpha), Z\big(u_\beta\big)\Big) + \sigma^2$$

$$-2\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha\, cov\big(Z(u_\alpha), Z(u_0)\big) + 2p(\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha - 1) \tag{3.13}$$

Penyelesaian *lagrange multiplier* adalah sebagai berikut :

Persamaan *lagrange* diturunkan terhadap bobot variabel

$$\frac{\partial F(\lambda,p)}{\partial \lambda_1} = 2\sum_{\theta=1}^{n} \lambda_\theta cov(Z(u_\theta), Z(u_1)) - 2cov\big(Z(u_1), Z(u_0)\big) + 2p$$

$$\frac{\partial F(\lambda,p)}{\partial \lambda_2} = 2\sum_{\theta=1}^{n} \lambda_\theta cov(Z(u_\theta), Z(u_2)) - 2cov\big(Z(u_2), Z(u_0)\big) + 2p$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial F(\lambda,p)}{\partial \lambda_n} = 2\sum_{\theta=1}^{n} \lambda_\theta cov(Z\big(u_\theta\big), Z(u_n)) - 2cov\big(Z(u_n), Z(u_0)\big) + 2p$$

Dengan $\frac{\partial F(\lambda,p)}{\partial \lambda_n} = 0$

Sehingga diperoleh

$\sum_{\theta=1}^{n} \lambda_\theta cov(Z(u_\theta), Z(u_n)) = cov\big(Z(u_n), Z(u_0)\big) - p$

Persamaan *lagrange* diturunkan terhadap parameter p

$\frac{\partial F(\lambda,p)}{\partial p} = 2\sum_{\theta=1}^{n} \lambda_\theta - 2$

Dengan $\frac{\partial F(\lambda,p)}{\partial \lambda_p} = 0$

Sehingga diperoleh

$\sum_{\theta=1}^{n} \lambda_\theta = 1$

Dari penyelesaian *lagrange* di atas diperoleh:

$$cov\big(Z(u_n), Z(u_0)\big) = \sum_{\theta=1}^{n} \lambda_\alpha cov\big(Z(u_\theta), Z(u_n)\big) + p \quad (3.14)$$

Untuk $\theta = 1, 2, 3, \dots, n$

Dan

$$\sum_{\theta=1}^{n} \lambda_\theta = 1 \quad (3.15)$$

Dari persamaan di atas dapat dibentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} C_{z_{11}} & \cdots & C_{z_{1n}} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_{z_{n1}} & \cdots & C_{z_{nn}} & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{z_{10}} \\ \vdots \\ C_{z_{n0}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan nilai bobot masing-masing titik tersampel terhadap titik yang akan diestimasi dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{z_{11}} & \cdots & C_{z_{1n}} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_{z_{n1}} & \cdots & C_{z_{nn}} & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_{z_{10}} \\ \vdots \\ C_{z_{n0}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$C_{z_{nn}}$ = kovariansi antara variabel tersampel pada lokasi n dengan variabel tersampel pada lokasi n

$C_{z_{n0}}$ = kovariansi antara variabel tersampel pada lokasi n dengan variabel yang akan diestimasi.

p = rata-rata variabel

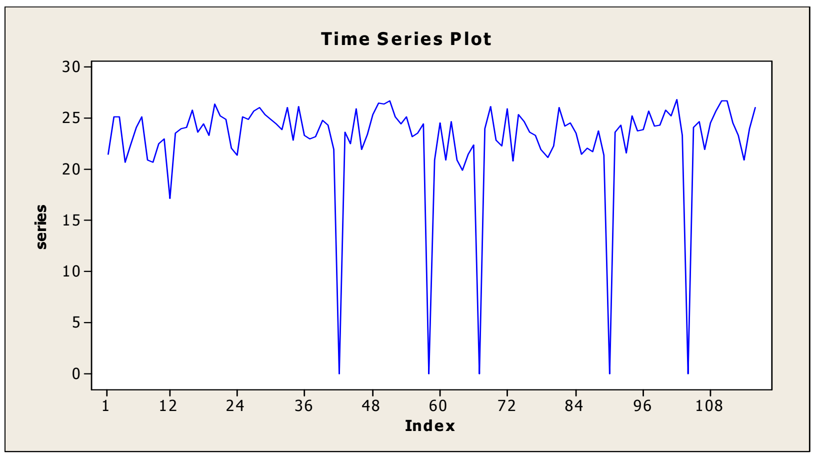
Setelah diperoleh persamaan (3.15) dan (3.16) lalu disubstitusikan ke dalam persamaan (3.13) diperoleh variansi eror sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
Var\big(\hat{e}(u_0)\big) &= \textstyle\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\lambda_\alpha\lambda_\beta cov\ \Big(Z(u_\alpha), Z\big(u_\beta\big)\Big) + \sigma^2 \\
&\quad -2\textstyle\sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha\ cov(Zu_\alpha, Z(u_0)) \\
&= \textstyle\sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha\left[cov\big(Z(u_\alpha), Z(u_0)\big) - p\right] + \sigma^2 - 2\textstyle\sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha\ cov(Zu_\alpha, Z(u_0)) \\
&= \sigma^2 - \left[\textstyle\sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha\ cov\big(Zu_\alpha, Z(u_0)\big) - p\right] \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

D. Langkah–Langkah Estimasi Menggunakan *Ordinary Kriging*

Pada estimasi dengan menggunakan ordinary kriging, diperlukan langkah-langkah pengestimasian. Berikut ini langkah – langkah estimasi dengan menggunakan *ordinary kriging* :

1. Menguji asumsi stasioneritas orde dua, yaitu menguji asumsi stasioneritas antara kandungan batubara dengan elevasi. Pada *ordinary kriging* diperlukan asumsi data yang bersifat stasioner untuk data kandungan hasil tambang. Data dikatakan stasioner jika plot yang dihasilkan tidak mengandung trend tertentu, ditunjukkan seperti pada gambar berikut ini:



Gambar 3.1. Plot analisis runtun waktu stasioneritas

atau dapat dilihat dari keacakan warna kandungan pada plot 3D kandungan batubara sehingga tidak menimbulkan gradasi warna tertentu seperti dapat dilihat pada gambar 3.3 (Suprajitno Munadi: 2005).

2. Apabila asumsi stasioneritas sudah terpenuhi maka selanjutnya dilakukan perhitungan variogram eksperimental. Variogram eksperimental diperoleh dari data sampel.
3. Melakukan analisis struktural. Analisis struktural yaitu mencocokkan semivariogram eksperimental dengan semivariogram teoritis. Hal ini dilakukan dengan membandingkan nilai *mean square error* (MSE) dari beberapa semivariogram teoritis, lalu dipilih model semivariogram teoritis dengan nilai MSE yang terkecil untuk digunakan pada analisis lebih lanjut.
4. Jika dilakukan langkah pengestimasian secara manual, selanjutnya akan dilakukan perhitungan nilai bobot pengaruh masing-masing titik tersampel pada variabel terhadap titik yang akan diestimasi menggunakan semivariogram yang valid. Namun, karena perhitungan dilakukan dengan menggunakan program R maka dapat langsung diperoleh hasil pengestimasian cadangan batubara dan variansi eror.
5. Menghitung $\widehat{Z}(u_0)$. $\widehat{Z}(u_0)$ merupakan hasil estimasi cadangan batubara yang diperoleh dari data kandungan batubara tersampel.
6. Langkah terakhir yaitu dilakukan perhitungan estimasi variansi error. Jika dalam perhitungan digunakan program R maka hasil variansi error akan terlihat pula pada saat dilakukan perhitungan estimasi cadangan hasil tambang.

E. Penerapan

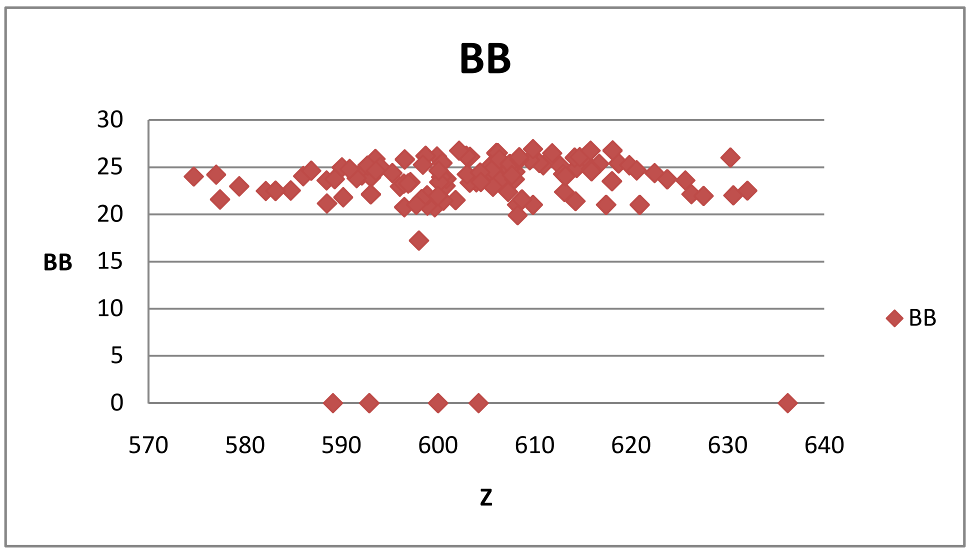
Aplikasi metode *ordinary kriging* akan digunakan untuk mengestimasi dan memetakan cadangan batubara yang diperoleh dari http://geoecosse.bizland.com. Data batubara diperoleh dari daerah penambangan di sekitar Afrika. Batubara adalah batuan sedimen yang dapat terbakar, terbentuk dari endapan organik, yaitu sisa-sisa tumbuhan. Pembentukan batubara memerlukan kondisi-kondisi tertentu dan hanya terjadi pada era-era tertentu sepanjang sejarah geologi.

Pada perhitungan, *Microsoft excel* akan digunakan untuk analisis struktural dan membuat plot semivariogram. Selain itu, digunakan pula MATLAB untuk memetakan kandungan batubara dalam 3-D serta paket program statistika *open source* yaitu R versi 2.7.2 untuk mengestimasi cadangan batubara.

1. Informasi data

Pada aplikasi ini digunakan data posisi batubara yang dinyatakan dengan koordinat titik dan kandungan batubara tersampel. Koordinat titik yang digunakan adalah x (absis), y (ordinat), dan z (elevasi/ketinggian) dengan satuan meter (m), sedangkan BB merupakan kandungan batubara yang dinyatakan dalam satuan persen (%). Data yang digunakan sebanyak 116 lokasi dan kandungan batubara. Data dapat dilihat pada lampiran 1.

Pada data tersebut, akan dilakukan pengestimasian cadangan batubara dengan menggunakan metode *ordinary kriging*. Metode *ordinary kriging* digunakan untuk data yang bersifat stasioner dengan rata-rata populasi tidak diketahui dan bernilai konstan. Hubungan antara kandungan dengan elevasi dapat dilihat pada gambar 3.1.



Gambar 3.2. ***Scatter plot*** **antara kandungan batubara dengan elevasi**

Apabila dilihat dari gambar di atas, besarnya kandungan batubara tidak dipengaruhi oleh elevasi. Hal ini dapat dilihat dari semakin besar elevasi ternyata besar kandungan tidak bertambah. Sehingga kandungannya terlihat acak dan tidak mengandung trend tertentu. Berikut adalah ringkasan data titik koordinat dan kandungan batubara:

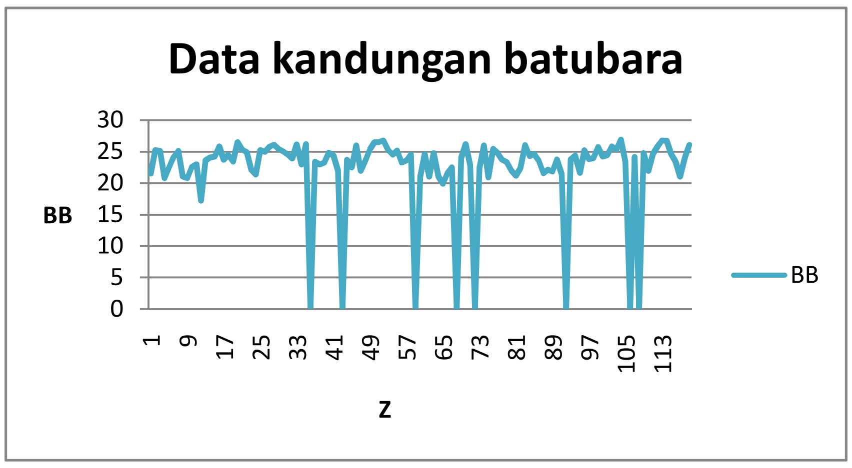
Table 3.2. Ringkasan data koordinat titik serta kandungan batubara

	X	Y	Z	BB
Min.	7978,2	9268,3	574,68	0
Mean	11891,02	13396,69	604,15	22,82
Median	11764,5	13367,6	604,27	23,97
Max	16095,4	16541,4	636,21	26,9

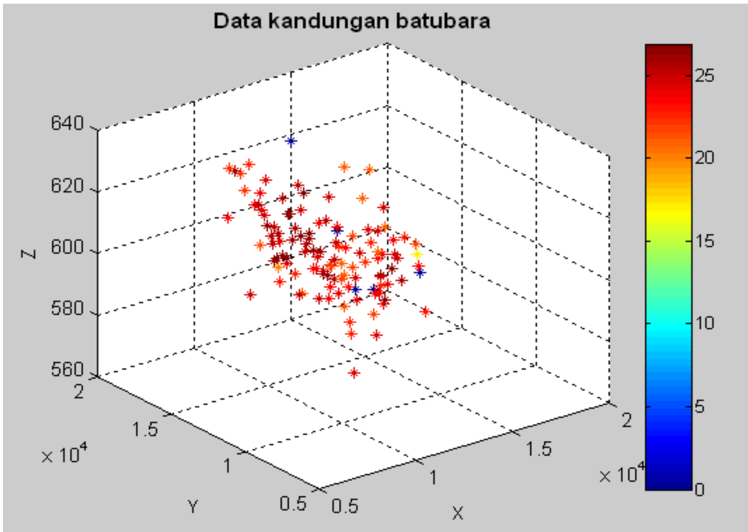
Dari tabel diatas diperoleh nilai absis minimum 7978,2 dan maksimum 16095,4, nilai ordinat minimum 9268,3 dan maksimum 16541,4, sedangkan nilai elevasi minimum 574,68 dan maksimum 636,21. Data kandungan batubara yaitu 0% untuk nilai minimum dan 26,9% untuk nilai maksimum.

2. **Asumsi Stasioneritas**

Berikut ini plot data kandungan batubara tersampel :



Gambar 3.3. Plot data sampel kandungan batubara



Gambar 3.4. Plot data sampel kandungan batubara 3D

Berdasarkan plot yang sudah dihasilkan, dapat dilihat bahwa nilai kandungan batubara tersampel terlihat konstan dan tidak mengarah pada trend tertentu. Dengan menggunakan rata-rata pada sampel maka dapat ditarik suatu garis lurus pada plot data kandungan batubara. Jika tidak terdapat perubahan pada nilai tengah dan nilai observasinya banyak berada di sekitar garis maka data kandungan batubara dapat dikatakan bersifat stasioner. Selain itu, pada plot 3D terlihat bahwa tidak terdapat gradasi warna tertentu dan bersifat acak. Jadi kedua plot tersebut menunjukkan bahwa kandungan batubara tersebut bersifat stasioner. Jika asumsi stasioneritas tidak terpenuhi, maka digunakan metode lain yaitu metode *universal kriging*.

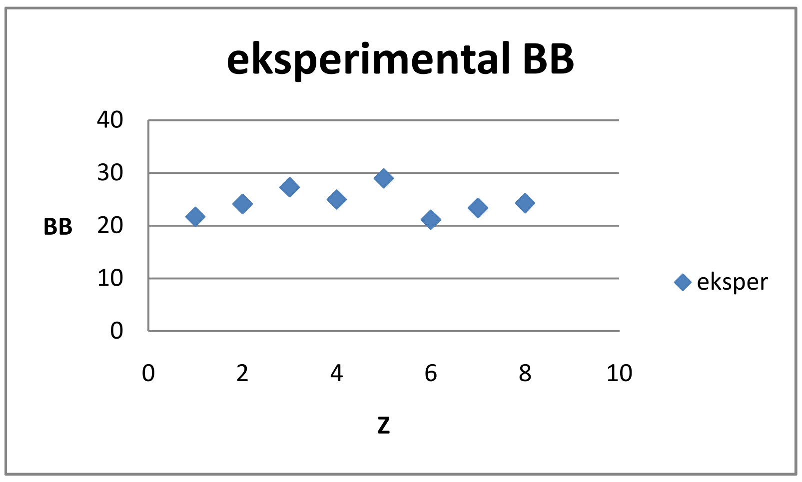
3. Semivariogram

Setelah asumsi stasioneritas terpenuhi maka dilakukan perhitungan semivariogram eksperimental untuk batubara. Perhitungan dilakukan menggunakan program R dan hasil dapat dilihat pada lampiran 3. Selanjutnya, dilakukan analisis struktural untuk mencocokan semivariogram teoritis yang sesuai digunakan pada analisis lebih lanjut. Berikut adalah hasil perhitungan semivariogram eksperimental pada batubara :

Tabel 3.3. Semivariogram eksperimental batubara

Pasangan	Jarak	Semivariogram
512	750,822	21,682
1346	1739,073	24,110
1686	2832,193	27,280
1431	3944,099	24,969
987	5062,183	28,950
500	6158,728	21,158
188	7248,504	23,359
20	8211,789	24,277

Dari hasil perhitungan semivariogram eksperimental diperoleh jumlah pasangan data pada masing-masing kelas dan jarak dari setiap pasangan data beserta nilai semivariogramnya. Jumlah total pasangan data adalah jumlah kombinasi data sampel batubara yaitu C(116,2) = 6670, Sedangkan plot semivariogramnya sebagai berikut :



Gambar 3.5. Plot semivariogram eksperimental

Plot semivariogram eksperimental pada batubara terlihat stabil setelah mencapai rata-rata jarak 5062,145 (meter) dengan nilai semivariogram sebesar 28,950. Nilai *sill* diperoleh dari nilai variansi batubara sebesar 26,803 dan *range* sebesar 4725 yang diperoleh dari nilai tengah jarak pada kelas yang nilai semivariogramnya mendekati nilai *sill*. Nilai *sill* dan *range* yang telah diperoleh, selanjutnya digunakan untuk melakukan analisis struktural.

Pada hasil analisis struktural, diperoleh semivariogram yang sesuai untuk batubara yaitu semivariogram model *Gauss*. Hal ini dapat dilihat pada lampiran 4 yaitu saat ditunjukkan nilai MSE terkecil terletak pada model *Gauss* dibandingkan dengan kedua model yang lain.

4. Estimasi Cadangan Batubara Menggunakan Ordinary Kriging

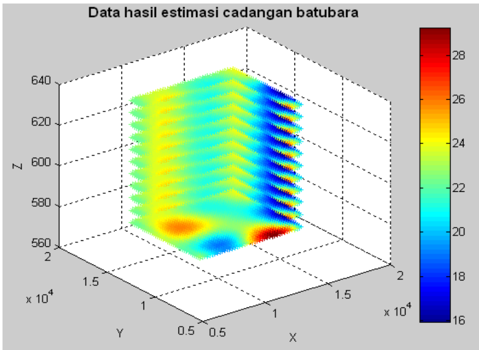
Setelah memperoleh model semivariogram yang sesuai dengan data kandungan batubara, selanjutnya semivariogram tersebut akan digunakan untuk mengestimasi cadangan batubara. Pada penyelesaian kasus ini estimasi akan dilakukan untuk 16236 lokasi. Program yang digunakan untuk membantu proses analisis ini yaitu Program R dengan *syntax* yang ada pada lampiran 7. Hasil estimasi yang diperoleh dapat dilihat pada lampiran 8, namun hanya akan ditampilkan hasil estimasi dengan jumlah 2000 lokasi pertama. Berikut ini adalah ringkasan hasil estimasi cadangan batubara :

Tabel 3,5, Ringkasan data estimasi cadangan batubara

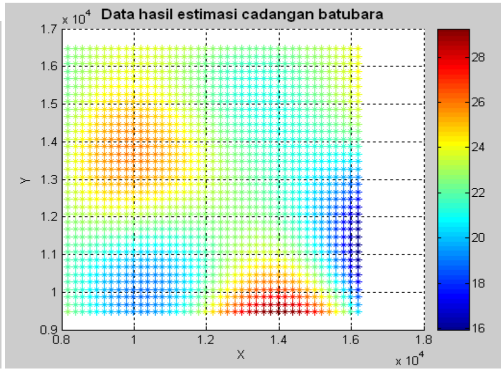
	X	Y	Z	BB	Var eror
min	8178	9468	575	15,957	0,523
mean	12178	12968	605	22,516	0,708
median	12178	12968	605	22,521	0,563
max	16178	16468	635	29,244	4,965

Berdasarkan hasil ringkasan data estimasi cadangan batubara diatas dengan menggunakan metode *ordinary kriging* diperoleh lokasi absis antara 8178 – 16178, lokasi ordinat antara 9468 – 16468, dan elevasi antara 575-635 dengan 16237 titik lokasi yang diestimasi.Hasil estimasi cadangan batubara diperoleh antara 15,957% untuk nilai minimumnya dan 29,244% untuk nilai maksimumnya, sedangkan nilai minimum untuk variansi erornya adala 0,523 dan 4,965 untuk nilai maksimum.

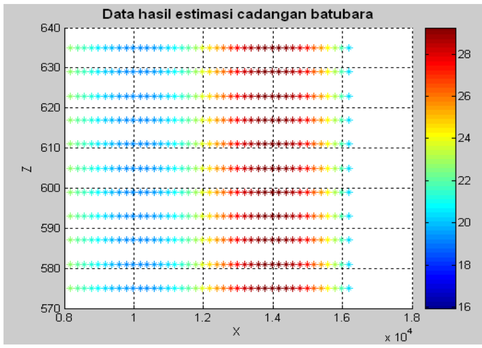
Berikut adalah hasil pemetaan cadangan batubara menggunakan *ordinary kriging*:



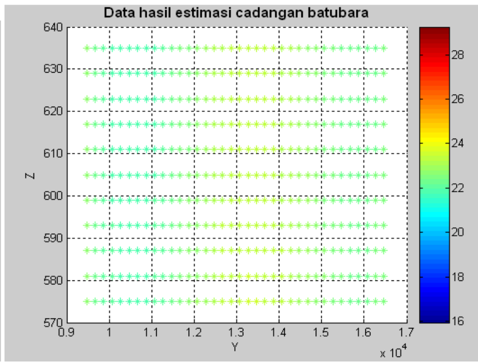
(a)



(b)



(c)



(d)

Gambar 3.6. Plot hasil estimasi cadangan batubara menggunakan *ordinary kriging*
(a). Plot hasil estimasi berdasarkan absis, ordinat dan elevasi. (b). Plot hasil estimasi berdasarkan absis dan ordinat. (c). Plot hasil estimasi berdasarkan absis dan elevasi. (d). Plot hasil estimasi berdasarkan ordinat dan elevasi.

Pada plot hasil estimasi cadangan batubara menggunakan *ordinary kriging* pada gambar 3.5 dapat dilihat bahwa yang berwarna merah tua kandungannya berkisar lebih dari 28%, sedangkan yang berwarna biru tua kandungannya kurang dari 16%. Jadi pada hasil estimasi cadangan batubara dengan menggunakan metode *ordinary kriging*, besarnya kandungan batubara tidak dipengaruhi oleh letak koordinat titik. Hal tersebut dapat dilihat pada saat bertambahnya nilai absis, ordinat dan elevasi dari suatu lokasi, nilai kandungan batubara tidak mengalami peningkatan atau penurunan yang cukup besar.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan pada bab-bab sebelumnya, maka diperoleh beberapa kesimpulan dan saran sebagai berikut:

A. Kesimpulan

1. Metode *ordinary kriging* merupakan salah satu analisis yang digunakan untuk mengestimasi cadangan hasil tambang. Metode *ordinary kriging* digunakan pada kasus data sampel kandungan mineral dan hasil tambang yang tidak memiliki trend (kecenderungan) tertentu dengan rerata populasi tidak diketahui dan bernilai konstan.
2. Estimasi cadangan dengan menggunakan metode *ordinary kriging* menghasilkan *the best linier unbiased estimator* (BLUE).
3. Langkah-langkah pengestimasian cadangan hasil tambang dengan menggunakan metode *ordinary kriging* adalah sebagai berikut:

   7. Menguji asumsi stasioneritas orde dua pada variabel.
   8. Menghitung variogram eksperimental.
   9. Melakukan analisis struktural. Analisis struktural yaitu mencocokkan semivariogram eksperimental dengan semivariogram teoritis.
   10. Menghitung nilai bobot pengaruh masing-masing titik sampel pada variabel terhadap titik yang akan diestimasi menggunakan semivariogram yang valid.
   11. Menghitung $\hat{Z}(u_0)$.

12. Langkah terakhir yaitu dilakukan perhitungan estimasi variansi error.

4. Pada penerapan, diperoleh sampel sebanyak 116 data. Akan dilakukan estimasi terhadap 16236 lokasi. Data yang diperoleh telah memenuhi asumsi stasioneritas karena data tidak membentuk suatu trend tertentu. Selanjutnya dilakukan perhitungan semivariogram eksperimental yang kemudian dipilih nilai semivariogram yang mendekati nilai *sill* yaitu 28.950, dengan nilai sill sebesar 26.803. Berdasarkan nilai semivariogram tersebut, diperoleh *range* sebesar 4725. Setelah itu dilakukan analisis struktural dan diperoleh semivariogram yang sesuai yaitu model *Gauss.* Hal tersebut diperoleh dengan membandingkan nilai MSE *(Mean Square Error)* dari masing-masing model semivariogram dan dipilih nilai MSE terkecil. Jika dilakukan langkah pengestimasian secara manual, selanjutnya akan dilakukan perhitungan nilai bobot pengaruh masing-masing titik tersampel. Namun, karena perhitungan dilakukan dengan menggunakan program R maka kita dapat langsung memperoleh hasil pengestimasian cadangan batubara dan variansi eror. Hasil estimasi cadangan batubara diperoleh nilai kandungan minimum sebesar 15,957 % pada lokasi titik absis (x) sebesar 16178, titik ordinat (y) sebesar 11268, dan titik elevasi (z) sebesar 635 m diatas permukaan laut dengan variansi eror sebesar 0,061 dan nilai kandungan maksimum sebesar 29,244 % pada lokasi titik absis (x) sebesar 13978, titik ordinat (y) sebesar 9468, dan titik elevasi (z) 575 m diatas permukaan laut dengan variansi eror sebesar 1,124.

B. Saran

Pada skripsi ini digunakan metode *ordinary kriging* untuk mengestimasi cadangan hasil tambang. Metode ini bersifat stasioner sehingga tidak memiliki kecenderungan pada trend tertentu dengan rerata konstan dan tidak diketahui. Namun terkadang dalam suatu lokasi tambang terdapat mineral atau hasil tambang lain yang berpengaruh terhadap hasil tambang yang akan diestimasi. Salah satu metode yang digunakan untuk mengestimasi cadangan mineral dengan memperhitungkan pengaruh variabel lain atau yang disebut co-variabel adalah metode *ordinary cokriging*.

DAFTAR PUSTAKA

Anonim. (2008). *Lagrange Multiplier*. Tersedia di www.google.com. Diakses tanggal 10 Januari 2010.

Anton, H. (1995). *Aljabar Linear Elementer (edisi kelima)*. (Terjemahan oleh Pantur Silaban & I. Nyoman Susila). Jakarta: Erlangga.

Bain & Engelhardt. (1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics 2nd Edition*. California: Duxbury Press.

Bohling, G. (2005). *Kriging*. Tersedia di http://people.ku.edu/~gbohling/cpe940. diakses tanggal 25 Agustus 2009.

Cressie, N. A. C. (1993). *Statistics For Spatial Data.* New York: John Wiley and Sons, Inc.

Delfiner, P. C. P. (1999). *Geostatistics Modeling Spatial Uncertainty*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Isaaks, E. H. (1989). *Applied Geostatistics*. New York: Oxford University Press.

Suprajitno Munadi. (2005). *Pengantar Geostatistik*. Jakarta: Universitas Indonesia.

B. Setyadji. (2005). Data Geostatistik. Tersedia di http://geodesy.gd.itb.ac.id/bsetyadji/wp-content/uploads/2007/09/gd4113-2.pdf. Diakses tanggal 05 November 2009.

Walpole, R. E. (1982). *Pengantar Statistika*, *Edisi ketiga*. (Terjemahan Bambang Sumantri). Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.

Wikipedia. *Kriging*. Tersedia di http://en.wikipedia.org/wiki/Kriging. Diakses tanggal 26 Desember 2009

Warmada, I. W. Geostatistik vs Geologi Numerik. Tersedia di www. warmada.staff.ugm.ac.id. Diakses tanggal 12 Agustus 2009.