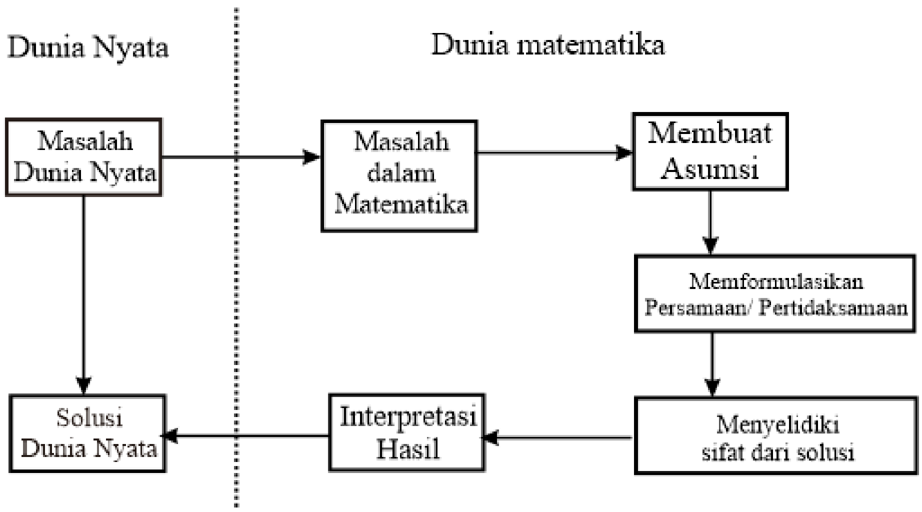
BAB II

LANDASAN TEORI

2.1. Model Matematika

Model Matematika merupakan representasi matematika yang dihasilkan dari pemodelan Matematika. Pemodelan Matematika merupakan suatu proses merepresentasikan dan menjelaskan permasalahan pada dunia nyata ke dalam pernyataan matematis (Widowati & Sutimin, 2007 : 1).

Proses pemodelan Matematika dinyatakan dalam diagram alur sebagai berikut :



Gambar 2.1. Proses Pemodelan Matematika

Berdasarkan Gambar 2.1 dapat diperoleh langkah-langkah pemodelan Matematika adalah sebagai berikut :

1. Menyatakan permasalahan nyata ke dalam pengertian Matematika.

   Pada langkah ini permasalahan yang terjadi di dunia nyata dimodelkan dalam bahasa matematis. Langkah ini meliputi identifikasi variabel-variabel dalam masalah dan membentuk beberapa hubungan antar variabel yang dihasilkan dari permasalahan tersebut.

2. Membuat Asumsi

   Asumsi dalam pemodelan Matematika mencerminkan bagaimana proses berpikir sehingga model dapat berjalan.

3. Formulasi persamaan/ pertidaksamaan

   Dengan pemahaman hubungan antar variabel dan asumsi, langkah selanjutnya yaitu memformulasikan persamaan atau sistem persamaan. Formulasi model merupakan langkah yang paling penting, sehingga terkadang diperlukan adanya pengujian kembali asumsi-asumsi agar dalam proses pembentukan formulasi dapat sesuai dan realistik. Jika pada proses pengujian kembali ditemukan ketidaksesuaian model, maka perlu dilakukan pengkajian ulang asumsi dan membentuk asumsi yang baru.

4. Menyelidiki sifat dari solusi.

   Setelah membentuk formulasi model, langkah selanjutnya adalah menyelidiki sifat dari solusi yaitu menyelidiki apakah solusi sistem stabil atau tidak stabil .

5. Interpretasi Hasil

   Interpretasi hasil merupakan suatu langkah yang menghubungkan formula Matematika dengan kembali ke permasalahan dunia nyata. Interpretasi ini dapat diwujudkan dalam bentuk grafik yang digambarkan berdasarkan solusi yang diperoleh dan selanjutnya diinterpretasikan sebagai solusi dalam dunia nyata .

2.2. Persamaan Diferensial

Definisi 2.1 (Ross, 1984 : 3)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang menyertakan turunan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Berdasarkan banyaknya variabel bebas yang dilibatkan dalam persamaan, persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

Definisi 2.2 (Ross, 1984 : 4)

Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas. Sedangkan persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas.

Contoh 2.1 :

Contoh persamaan diferensial biasa,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \quad \text{(persamaan diferensial orde 2)}$$

$$\frac{d^4y}{dt^4} + 5\frac{d^2y}{dt^2} + 3x = \sin t \quad \text{(persamaan diferensial orde 4).}$$

Contoh persamaan diferensial parsial,

$$\frac{\partial m}{\partial s} + \frac{\partial m}{\partial t} = m$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$$

Definisi 2.3 (Ross, 1984 : 8)

Diberikan suatu persamaan diferensial orde-n berikut :

$$F\left[x, y, y', y'', ..., y^n\right] = 0 \tag{2.1}$$

dengan F adalah fungsi real .

1. *Misalkan f adalah fungsi bilangan real yang terdefinisi untuk semua x dalam suatu interval I dan mempunyai turunan ke-n untuk semua x yang ada di I. Fungsi f disebut solusi eksplisit dari* (2.1) *dalam interval I jika fungsi f memenuhi syarat berikut ini :*

   a. $F\left[x, f(x), f'(x), f''(x), ..., f^n(x)\right]$, *terdefinisi* $\forall x \in I$

   b. $F\left[x, f(x), f'(x), f''(x), ..., f^n(x)\right] = 0, \forall x \in I$

   Hal ini berarti bahwa substitusi $f(x)$ *dan variasi turunan untuk y dan turunannya yang berkorespondensi ke* (2.1) *akan membuat* (2.1) *menjadi suatu identitas di interval I.*

2. *Suatu relasi g(x,y) = 0, disebut solusi implisit dari persamaan* (2.1) *jika relasi ini mendefinisikan sedikitnya satu fungsi bilangan real f dengan variabel x di interval I .*

1. *Solusi eksplisit dan solusi implisit biasa disebut sebagai solusi sederhana.*

2.2.1. Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

Definisi 2.4 (Ross, 1984 : 5)

Persamaan diferensial orde n dengan variabel tak bebas y dan variabel bebas x, dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut :

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=b(x)$$

dengan $a_0 \neq 0$.

Definisi 2.5 (Ross, 1984 : 49)

Persamaan diferensial biasa orde satu dikatakan linear jika dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)\,. \qquad (2.2)$$

Persamaan (2.2) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\left[P(x)y-Q(x)\right]dx+dy=0$$

atau

$$M\left(x,y\right)dx+N\left(x,y\right)dy=0 \qquad (2.3)$$

dengan $M\left(x,y\right)=P(x)y-Q(x)$ dan $N\left(x,y\right)=1$.

Definisi 2.6 (Ross, 1984 : 27)

Suatu persamaan diferensial berbentuk (2.3) *dinamakan persamaan diferensial eksak dalam daerah D jika terdapat suatu fungsi F sehingga* $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$ *dan* $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$ *untuk semua* $(x,y)\in D$.

Teorema 2.1 (Ross, 1984 : 28)

Jika $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$ *dan* $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$ *adalah kontinu. Persamaan diferensial* (2.3) *adalah eksak jika dan hanya jika* $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

Persamaan (2.3) bukanlah persamaan diferensial eksak karena tidak memenuhi Teorema 2.1. Pada persamaan tersebut $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = P(x)$ dan $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0$ maka $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ dengan $P(x) \neq 0$ sehingga persamaan (2.3) merupakan persamaan diferensial non eksak.

Solusi dari persamaan diferensial linear orde satu diperoleh melalui langkah sebagai berikut.

Perkalian persamaan (2.3) dengan faktor integrasi $\mu(x)$ diperoleh,

$$\mu(x)M(x,y)dx + \mu(x)N(x,y)dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu(x)\left[P(x)y - Q(x)\right]dx + \mu(x)dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)\right]dx + \mu(x)dy = 0. \qquad (2.4)$$

Faktor $\mu(x)$ merupakan faktor integrasi dari persamaan (2.4) jika dan hanya jika persamaan (2.4) merupakan persamaan diferensial eksak, yaitu jika dan hanya jika

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x)\right] \qquad (2.5)$$

Persamaan (2.5) dapat direduksi menjadi $\mu(x)P(x) = \frac{d}{dx}\left[\mu(x)\right]$. (2.6)

Fungsi *P* pada persamaan (2.6) merupakan fungsi atas variabel bebas *x*, sedangkan μ merupakan fungsi atas *x* yang tidak diketahui, sehingga persamaan (2.6) dapat dituliskan sebagai persamaan diferensial berikut :

$$\mu P(x) = \frac{d\mu}{dx}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx \,. \tag{2.7}$$

Untuk memperoleh solusi khusus dari persamaan (2.7), dilakukan pengintegralan pada kedua ruas persamaan (2.7) sehingga

$$\Leftrightarrow \ln|\mu| = \int P(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \mu = e^{\int P(x)dx} \,. \tag{2.8}$$

Selanjutnya, perkalian persamaan (2.2) dengan faktor integrasi (2.8) diperoleh

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx}P(x)y = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right] = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

$$\Leftrightarrow d\left[e^{\int P(x)dx}y\right] = e^{\int P(x)dx}Q(x)dx \,. \tag{2.9}$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan (2.9) diperoleh solusi dari persamaan (2.2) yang berbentuk

$$ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + c \tag{2.10}$$

dengan c adalah konstan.

Contoh 2.2

Diberikan persamaan diferensial sebagai berikut

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} + 4xy = x \,. \tag{2.11}$$

Berdasarkan persamaan (2.2), persamaan (2.11) dapat diubah dalam bentuk umum persamaan diferensial linear sebagai berikut :

$$\frac{dy}{dx}+\frac{4x}{x^2+1}y=\frac{x}{x^2+1}. \quad (2.12)$$

Dari persamaan (2.12) dapat diketahui bahwa $P(x)=\frac{4x}{x^2+1}$ dan $Q(x)=\frac{x}{x^2+1}$ sehingga didapat faktor integrasi

$$e^{\int P(x)dx}=e^{\int\left(\frac{4x}{x^2+1}\right)dx}=e^{2.\ln(x^2+1)}=e^{\ln(x^2+1)^2}=(x^2+1)^2. \quad (2.13)$$

Substitusikan $Q(x)=\frac{x}{x^2+1}$ dan (2.13) ke persamaan (2.10) sehingga diperoleh,

$$y(x^2+1)^2=\int(x^2+1)^2\frac{x}{x^2+1}dx+c$$

$$\Leftrightarrow y(x^2+1)^2=\int(x^2+1)xdx+c$$

$$\Leftrightarrow y(x^2+1)^2=\frac{2x^4+4x^2}{8}+c$$

Jadi, solusi dari persamaan (2.11) adalah

$$y(x^2+1)^2=\frac{2x^4+4x^2}{8}+c$$

dengan c adalah konstan.

2.3. Sistem Persamaan Diferensial

Gabungan dari beberapa persamaan diferensial disebut sistem persamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial orde satu dapat dituliskan dalam bentuk

$$\frac{dy_1}{dt}=f_1(t,y_1,y_2,...,y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dt}=f_2(t,y_1,y_2,...,y_n)$$

$$\frac{dy_3}{dt} = f_3(t, y_1, y_2, ..., y_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, ..., y_n) \qquad (2.14)$$

untuk $t \in [a, b]$. Pada sistem (2.14), $f_1, f_2, ..., f_n$ adalah fungsi-fungsi yang diketahui dalam variabel-variabel $t, y_1, y_2, ..., y_n$. Masing-masing $y_i\,(i = 1, 2, ..., n)$ adalah fungsi dalam *t*, yang merupakan variabel bebas (Sahid, 2012 : 400).

Sistem (2.14) dapat pula dituliskan dalam bentuk vektor. Jika dituliskan

$$\mathbf{y} = [y_1\ y_2\ y_3\ \cdots\ y_n\,]^T\ , \qquad \mathbf{f}\ = [f_1\ f_2\ f_3\ \cdots\ f_n\,]^T,$$

dengan **y** dan **f** merupakan vektor-vektor fungsi, maka sistem (2.14) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \boldsymbol{y})$$

atau

$$\begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(y_1, y_2, ..., y_n)^T \\ f_2(y_1, y_2, ..., y_n)^T \\ \vdots \\ f_n(y_1, y_2, ..., y_n)^T \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya diberikan vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dengan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)^T$ dan $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Jika $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ dapat dinotasikan dengan $\dot{\mathbf{x}}$ sehingga $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ untuk menyatakan turunan **x** terhadap *t*, maka

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, ..., \frac{dx_n}{dt} \right)^T.$$

2.3.1. Sistem Persamaan Diferensial Linear

Sistem persamaan diferensial linear orde satu dengan variabel tak bebas $y_1, y_2, ..., y_n$ dan variabel bebas *t* dapat dinyatakan secara umum dalam bentuk sebagai berikut :

$$\frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n + F_1(t)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n + F_2(t)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n + F_n(t)\,. \tag{2.15}$$

Jika $F_i(t)$ dengan $i = 1, 2, ..., n$ bernilai nol maka sistem (2.15) disebut sistem persamaan diferensial linear homogen, sedangkan bila $F_i(t) \neq 0$ maka sistem (2.15) disebut persamaan diferensial linear nonhomogen. (Ross, 1984 : 505-506).

Sistem (2.15) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{dy}{dt} = Ay + F(t) \tag{2.16}$$

dengan A adalah matriks *n* x *n* yang merupakan koefisien dari variabel tak bebas **y**, dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., n$ dan $F(t)$ adalah matriks ukuran *n* x 1 yang merupakan fungsi dari *t*,

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

Contoh 2.3

Diberikan sistem persamaan diferensial linear,

$$\frac{dx_1}{dt} = 7x_1 - x_2 + 6x_3$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -10x_1 + 4x_2 - 12x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -2x_1 + x_2 - x_3 \quad . \tag{2.18}$$

Sistem persamaan diferensial (2.18) merupakan sistem persamaan diferensial linear homogen. Berdasarkan (2.17), sistem (2.18) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

2.3.2. Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear

Definisi 2.7 (Ross, 1984 : 5)

Persamaan diferensial nonlinear merupakan persamaan diferensial biasa yang tidak linear.

Persamaan diferensial disebut sebagai persamaan diferensial nonlinear apabila memenuhi paling sedikit satu dari kriteria berikut (Ross, 1984 : 6),

a. Memuat variabel tak bebas dan turunan-turunannya berpangkat selain satu.

b. Terdapat perkalian dari variabel tak bebas dan/ atau turunan-turunannya.

Contoh 2.4

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut,

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 x_2 - x_2 \tag{2.19a}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2^{\,2}\,. \tag{2.19b}$$

Sistem (2.19) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear dengan variabel bebas t dan variabel tak bebas x_1 dan x_2. Pada sistem (2.19), persamaan (2.19a) memuat perkalian variabel tak bebas x_1 dan x_2, pada persamaan (2.19b) terdapat kuadrat dari variabel bebas x_2. Berdasarkan kondisi tersebut, sistem (2.19) dapat disebut sebagai persamaan diferensial nonlinear.

2.3.3. Sistem Persamaan Diferensial Tundaan

Sistem persamaan diferensial tundaan ditunjukkan dengan persamaan berikut :

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau)\right). \tag{2.20}$$

Persamaan karakteristik dari sistem (2.20) dinyatakan dalam bentuk $\Delta(g,\tau)$ yaitu

$$\Delta(g,\tau) = P(g) + Q(g)e^{-g\tau} = 0 \tag{2.21}$$

dengan τ adalah lama waktu tundaan yang ditambahkan pada model persamaan diferensial yang digunakan, $P(g)$ dan $Q(g)$ merupakan polinomial dalam g dan g merupakan akar karakteristik sistem (2.21) yang selanjutnya disebut sebagai nilai eigen (Rubono, 2009).

Contoh 2.5

Diberikan sistem persamaan diferensial sebagai berikut,

$$\dot{x}_1(t) = -5x_1(t) + 4x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + 4x_2(t) - 6x_2(t)$$

Bila lama waktu tundaan τ berpengaruh terhadap $4x_2$, maka sistem tersebut dapat dituliskan dalam bentuk persamaan diferensial tundaan sebagai berikut,

$$\dot{x}_1(t) = -5x_1(t) + 4x_2(t-\tau)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + 4x_2(t-\tau) - 6x_2(t)$$

dengan $t \geq 0, \tau > 0$ dan $\left(x_1(t), x_2(t)\right) \in \mathbb{R}^2$.

2.4. Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium merupakan solusi dari sistem $\dot{x} = f(x)$ yang tidak mengalami perubahan terhadap waktu.

Definisi 2.7 (Perko, 2001 : 102)

Titik $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ *disebut titik ekuilibrium dari* $\dot{x} = f(x)$ *jika* $f(\hat{x}) = 0$.

Contoh 2.6

Akan dicari titik ekuilibrium dari sistem (2.19). Misalkan $\dot{x} = f(x)$, maka sistem (2.19) dapat dituliskan sebagai $f(x) = \begin{pmatrix} x_1x_2 - x_2 \\ x_1 - x_2{}^2 \end{pmatrix}$. Titik ekuilibrium sistem (2.19) dapat diperoleh jika $f(\hat{x}) = 0$.

Misal $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)^T$ merupakan titik ekuilibrium sistem (2.19), maka

$$\hat{x}_1\hat{x}_2 - \hat{x}_2 = 0 \tag{2.22}$$

$$\hat{x}_1 - \hat{x}_2^{\,2} = 0\,. \tag{2.23}$$

Dari persamaan (2.23) diperoleh $\hat{x}_1 = \hat{x}_2^{\,2}\,.$ (2.24)

Selanjutnya, substitusikan persamaan (2.24) ke persamaan (2.22), sehingga diperoleh

$$\hat{x}_2^{\,3} - \hat{x}_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \hat{x}_2(\hat{x}_2^{\,2} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \hat{x}_2 = 0 \text{ atau } \hat{x}_2 = \pm 1\,.$$

Selanjutnya, substitusikan $\hat{x}_2 = 0$ ke persamaan (2.24) diperoleh $\hat{x}_1 = 0$, substitusikan $\hat{x}_2 = 1$ dan $\hat{x}_2 = -1$ ke persamaan (2.24) diperoleh $\hat{x}_1 = 1$. Jadi, titik ekuilibrium dari sistem (2.19) adalah $(0,0)^T$, $(1,1)^T$, dan $(1,-1)^T$.

2.5. Linearisasi

Linearisasi merupakan proses mengubah suatu sistem nonlinear menjadi sistem linear. Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(x) \tag{2.25}$$

dengan $\boldsymbol{x} \in L \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}$: $L \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}$ fungsi nonlinear dan kontinu.

Sebelum ditunjukkan proses linearisasi dari persamaan diferensial non linear, akan dibahas terlebih dahulu matriks Jacobian berdasarkan teorema berikut.

Teorema 2.2 (Perko, 2001 : 67)

Jika $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *terdiferensial di* x_0 *maka diferensial parsial* $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, ..., n$, *di* x_0 *ada untuk semua* $x \in \mathbb{R}^n$ *dan* $Df(x_0)x = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)x_j$

Bukti :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)x_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0)x_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0)x_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0)x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0)x_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0)x_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0)x_2 \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0)x_n \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0)x_n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0)x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= Df(x_0)x \,. \blacksquare$$

dengan $Df(x_0)$ disebut sebagai matriks Jacobian dari fungsi $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ yang terdifrensial pada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dan $Df(x_0)$ dapat dinotasikan sebagai $Jf(x_0)$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan proses linearisasi dari sistem persamaan diferensial. Misalkan $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T$ merupakan titik ekuilibrium sistem (2.25). Deret Taylor dari fungsi **f** disekitar titik ekuilibrium $\hat{x}$ adalah sebagai berikut :

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n)^T = f_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T (x_1 - \hat{x}_1) + ... + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T (x_n - \hat{x}_n) + R_{f_1}$$

$$f_2(x_1, x_2, ..., x_n)^T = f_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T (x_1 - \hat{x}_1) + ... + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T (x_n - \hat{x}_n) + R_{f_2}$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1,x_2,...,x_n)^T = f_n(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T(x_1-\hat{x}_1)+...+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T(x_n-\hat{x}_n)+R_{f_n}$$

dengan $R_{f_1}, R_{f_2},..., R_{f_n}$ disebut sebagai bagian nonlinear yang selanjutnya dapat diabaikan karena nilainya mendekati nol. Karena $(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T$ titik ekuilibrium sistem (2.25) maka $f_1(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T = f_2(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T = ... = f_n(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T = 0$ sehingga diperoleh,

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T(x_1-\hat{x}_1)+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T(x_2-\hat{x}_2)+...+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T(x_n-\hat{x}_n)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T(x_1-\hat{x}_1)+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T(x_2-\hat{x}_2)+...+\frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T(x_n-\hat{x}_n)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T(x_1-\hat{x}_1)+\frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T(x_2-\hat{x}_2)+...+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T(x_n-\hat{x}_n)$$

(2.26).

Sistem (2.26) dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\hat{x}_1,\hat{x}_2,...,\hat{x}_n)^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1-\hat{x}_1\\ x_2-\hat{x}_2\\ \vdots\\ x_n-\hat{x}_n\end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Misalkan $y_1 = x_1 - \hat{x}_1, y_2 = x_2 - \hat{x}_2, y_3 = x_n - \hat{x}_n$ maka dari sistem (2.27) diperoleh :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Sistem (2.28) merupakan linearisasi sistem (2.25), sehingga diperoleh matriks Jacobian dari sistem (2.25) yaitu,

$$Jf(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)^T \end{bmatrix}.$$

Contoh 2.7

Akan dicari matriks Jacobian dari $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 + x_2 \\ x_1 - x_2{}^2 \end{pmatrix}$ pada titik $x_0 = (1, -1)^T$.

Matriks Jacobian dari fungsi $f(x)$ adalah

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 + 1 \\ 1 & -2x_2 \end{pmatrix},$$

maka $$Df(1, -1) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 + 1 \\ 1 & -2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jadi, matriks Jacobian dari sistem tersebut adalah $Jf(1, -1) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.6. Kestabilan Titik Ekuilibrium

Definisi 2.8 (Perko, 2001 : 102)

Titik ekuilibrium $\hat{x}$ disebut titik ekuilibrium hiperbolik dari sistem (2.25) jika tidak ada nilai eigen dari matriks $Df(\hat{x})$ yang mempunyai bagian real nol.

Kestabilan sistem nonlinear $\dot{x} = f(x)$ di sekitar titik ekuilibrium $\hat{x}$ dapat dilihat dari kestabilan linearisasi sistem (2.25) di sekitar titik ekulibrium $\hat{x}$, asalkan titik ekuilibrium $\hat{x}$ hiperbolik (Perko, 2001 : 103).

Definisi 2.9 (Olsder, 2004 : 57)

Diberikan persamaan diferensial orde satu (2.25) dengan $x \in \mathbb{R}^n$, penyelesaian dengan keadaan awal $x(0) = x_0$ dinotasikan oleh $x(t, x_0)$.

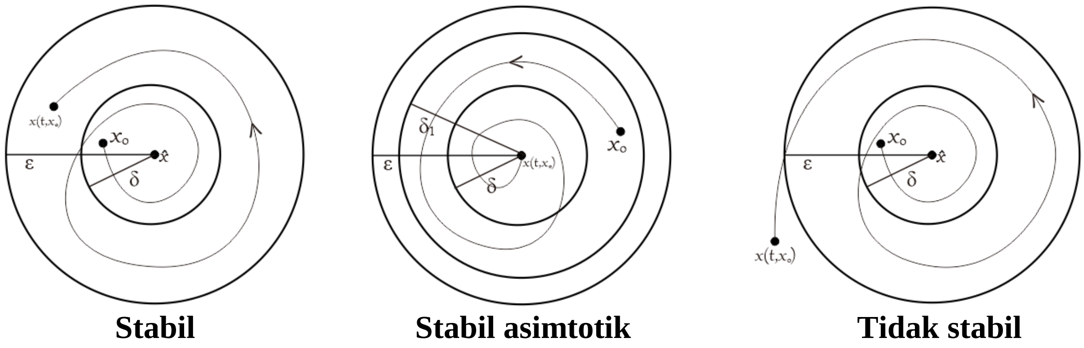
i. *Vektor $\hat{x}$ yang memenuhi $f(\hat{x}) = 0$ dikatakan sebagai titik ekuilibrium.*

ii. *Titik ekulibrium $\hat{x}$ dikatakan stabil jika diberikan untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $\|x_0 - \hat{x}\| < \delta$ maka $\|x(t, x_0) - \hat{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq 0$.*

iii. *Titik ekulibrium $\hat{x}$ dikatakan stabil asimtotik jika titik ekuilibriumnya stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{t \to \infty} \|x(t, x_0) - \hat{x}\| = 0$, bila $\|x_0 - \hat{x}\| < \delta_1$*

iv. *Titik ekulibrium $\hat{x}$ dikatakan tidak stabil jika tidak memenuhi (ii).*

Berikut merupakan ilustrasi untuk Definisi 2.9 yang ditunjukkan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2. Ilustrasi Kestabilan

Dalam menganalisis kestabilan sistem di sekitar titik ekuilibrium menggunakan Definisi 2.9 masih ditemui kesulitan. Oleh karena itu, diberikan definisi dan teorema untuk mengidentifikasi sifat kestabilan sistem nonlinear yang ditinjau dari nilai eigen matriks Jacobian $Jf(\hat{x})$.

Definisi 2.10 (Anton H., 1991 : 277)

Diberikan matriks A berukuran n x n. Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq 0$ *disebut vektor eigen dari A, jika* $A\mathbf{x}$ *adalah kelipatan skalar dari* $\mathbf{x}$ *yaitu*

$$A\mathbf{x} = g\mathbf{x}$$

untuk suatu skalar g. Skalar g disebut nilai eigen dari A.

Teorema 2.3 (Olsder, 2004)

i. Diberikan semua bagian real nilai eigen matriks Jacobian $Jf(\hat{x})$ *bernilai negatif, maka titik ekuilibrium* $\hat{x}$ *dari sistem (2.25) stabil asismtotik lokal.*

ii. Jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen matriks Jacobian $Jf(\hat{x})$ *yang bagian realnya bernilai positif, maka titik ekuilibrium* $\hat{x}$ *dari sistem (2.25) tidak stabil.*

Teorema 2.4 (Olsder, 2004 : 58)

Diberikan sistem persamaan diferensial linear $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, *dengan A adalah matriks berukuran n x n, mempunyai k nilai eigen yang berbeda* $g_1, g_2, g_3, ..., g_n$ *dan* $k \leq n$.

i. *Titik ekuilibrium* $\hat{\mathbf{x}} = 0$ *stabil asimtotik jika dan hanya jika* $\Re e(g_i) < 0, \forall i = 1,2,3,...,k.$

ii. *Titik ekuilibrium* $\hat{\mathbf{x}} = 0$ *stabil jika dan hanya jika* $\Re e(g_i) \leq 0, \forall i = 1,2,3,...,k$ *dan jika setiap nilai eigen* g_i *imaginer dengan* $\Re e(g_i) = 0$, *maka multiplisitas aljabar dan geometri untuk nilai eigen harus sama.*

iii. *Titik ekuilibrium* $\hat{\mathbf{x}} = 0$ *tidak stabil jika dan hanya jika terdapat paling sedikit satu* $\Re e(g_i) > 0$ *untuk i = 1,2,...k.*

Bukti :

(i) Akan dibuktikan bahwa jika titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}} = 0$ stabil asimtotik, maka $\Re e(g_i) < 0, \forall i = 1,2,3,...,k.$

Berdasarkan Definisi 2.9, titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}} = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika $\lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0) - \hat{x}\|$. Hal ini berarti bahwa untuk $t \to \infty$, $x(t, x_0)$ akan menuju $\hat{\mathbf{x}} = 0$. Karena $x(t, x_0)$ merupakan solusi dari sistem persamaan diferensial, maka $x(t, x_0)$ memuat $e^{\Re e(g_i)t}$. Akibatnya untuk $e^{\Re e(g_i)t}$ yang menuju $\hat{\mathbf{x}} = 0$, maka g haruslah bernilai negatif.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa jika $\Re e(g_i) < 0, \forall i = 1, 2, 3, ..., k,$ maka titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}} = 0$ stabil asimtotik.

Solusi dari sistem persamaan diferensial adalah $x(t, x_0)$, maka $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{\Re e(g_i)t}$. Jika $\Re e(g_i) < 0$, maka untuk $t \to \infty$, $x(t, x_0)$ akan menuju $\hat{\mathbf{x}} = 0$. Sehingga, berdasarkan Definisi 2.9, titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}} = 0$ stabil asimtotik.

(ii) Akan dibuktikan bahwa jika titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}} = 0$ stabil, maka $\Re e(g_i) \le 0, \forall i = 1, 2, 3, ..., k$

Andaikan $\Re e(g_i) > 0$, maka solusi persamaan diferensial $x(t, x_0)$ yang selalu memuat $e^{\Re e(g_i)t}$ akan menuju ∞ (menjauh dari titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$) untuk $t \to \infty$, sehingga sistem tidak stabil. Hal ini bertentangan dengan yang diketahui. Jadi terbukti bahwa jika titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}} = 0$ stabil, maka $\Re e(g_i) \le 0, \forall i = 1, 2, 3, ..., k$.

Kemudian akan dibuktikan bahwa $\Re e(g_i) \le 0, \forall i = 1, 2, 3, ..., k$ maka titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}} = 0$ stabil dan jika ada $\Re e(g_i) = 0$, maka multiplisitas aljabar dan geometri untuk nilai eigen harus sama.

Solusi $x(t, x_0)$ merupakan solusi dari sistem persamaan diferensial, maka $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{\Re e(g_i)t}$. Jika $\Re e(g_i) < 0$, maka $e^{\Re e(g_i)t}$ akan menuju $\hat{\mathbf{x}} = 0$ yang artinya titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}} = 0$ stabil asimtotik. Jika $\Re e(g_i) = 0$, maka nilai eigen berupa bilangan kompleks murni. Menurut Luenberger, multiplisitas aljabar berhubungan dengan nilai eigen sedangkan geometri berhubungan dengan vektor eigen (Widayati, 2013 : 23). Oleh karena itu, akan dibuktikan bahwa banyaknya nilai eigen dan vektor eigen adalah sama.

Tanpa mengurangi keumuman, ambil sembarang sistem pada $\mathbb{R}^2$ yang mempunyai nilai eigen bilangan kompleks murni.

$$\begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -p \\ q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, \text{ dengan } p > 0, q > 0 \; . \tag{2.29}$$

Akan ditentukan nilai eigen dari sistem (2.29)

$$| A - gI | = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -p \\ q & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -g & -p \\ q & -g \end{bmatrix} = 0 \; .$$

Diperoleh persamaan karakteristik

$$g^2 + pq = 0 \; . \tag{2.30}$$

Akar dari Persamaan (2.30) adalah

$$g_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4pq}}{2} = \frac{\pm 2i\sqrt{pq}}{2} = \pm i\sqrt{pq}$$

$$g_1 = -i\sqrt{pq} \text{ atau } g_2 = i\sqrt{pq}.$$

Vektor Eigen untuk $g_1 = -i\sqrt{pq}$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} -i\sqrt{pq} & -p \\ q & -i\sqrt{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{2.31}$$

Matriks augmented dari (2.31) yaitu

$$\left[\begin{array}{cc|c} -i\sqrt{pq} & -p & 0 \\ q & -i\sqrt{pq} & 0 \end{array}\right] R_1 \sim R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} q & -i\sqrt{pq} & 0 \\ -i\sqrt{pq} & -p & 0 \end{array}\right] \frac{1}{q} R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{i}{q}\sqrt{pq} & 0 \\ -i\sqrt{pq} & -p & 0 \end{array}\right] R_2 + i\sqrt{pq}\ R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\dfrac{i}{q}\sqrt{pq} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

diperoleh

$$g_1 - \frac{i\sqrt{pq}}{q} g_2 = 0$$

$$g_1 = \frac{i\sqrt{pq}}{q}\ g_2\ .$$

misal $g_2 = t$, maka $g_1 = \frac{i\sqrt{pq}}{q}\ t$

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{pq}}{q}\ t \\ t \end{bmatrix}, \text{ diambil t = 1 diperoleh } \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{pq}}{q} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga vektor eigen g_1 adalah $g_1 = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{pq}}{q} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vektor Eigen untuk $g_2 = i\sqrt{pq}$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} i\sqrt{pq} & -p \\ q & i\sqrt{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.32}$$

Matriks augmented dari (2.32) yaitu

$$\left[\begin{array}{cc|c} i\sqrt{pq} & -p & 0 \\ q & i\sqrt{pq} & 0 \end{array}\right] R_1 \sim R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} q & i\sqrt{pq} & 0 \\ i\sqrt{pq} & -p & 0 \end{array}\right] \frac{1}{q}R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{i}{q}\sqrt{pq} & 0 \\ i\sqrt{pq} & -p & 0 \end{array}\right] R_2 - i\sqrt{pq}\, R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{i}{q}\sqrt{pq} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

diperoleh

$$g_1 + \frac{i\sqrt{pq}}{q}\ g_2 = 0$$

$$g_1 = -\frac{i\sqrt{pq}}{q}\ g_2$$

misal $g_2 = s$, maka $g_1 = -\frac{i\sqrt{pq}}{q}\ s$

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\sqrt{pq}}{q}\ s \\ t \end{bmatrix}, \text{ diambil s = 1 diperoleh } \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\sqrt{pq}}{q} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga vektor eigen g_2 adalah $g_2 = \begin{bmatrix} -\frac{i\sqrt{pq}}{q} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Terbukti banyak nilai eigen sama dengan banyak vektor eigen yaitu sebanyak 2.

(iii) Akan dibuktikan bahwa jika titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}} = 0$ tidak stabil, maka $\Re e(g_i) > 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, k$.

Titik ekuilibrium tidak stabil, jika untuk $t \to \infty$ solusi persamaan differensial $x(t, x_0)$ akan menuju ∞. Hal ini dapat terpenuhi jika $\Re e(g_i) > 0$.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa jika $\Re e(g_i) > 0$ untuk setiap i = $1, 2, \ldots, k$, maka titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}} = 0$ tidak stabil.

Diketahui bahwa jika $\Re e(g_i) > 0$ maka solusi persamaan differensial $x(t, x_0)$ yang memuat $e^{\Re e(g_i)t}$ akan menuju ∞. Dengan demikian, titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}} = 0$ tidak stabil. ■

Kemudian, untuk analisis kestabilan sistem persamaan diferensial tundaan nonlinier dilakukan dengan cara linierisasi sistem di sekitar titik ekuilibrium. Andaikan diketahui titik ekulibrium $E = (s^*, i^*, a^*)$, dimisalkan $u = s - s^*, v = i - i^*, w = a - a^*$ maka diperoleh sistem yang linier yaitu :

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{i} \\ \dot{a} \end{bmatrix} = J_0 \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + J_\tau \begin{bmatrix} u(t-\tau) \\ v(t-\tau) \\ w(t-\tau) \end{bmatrix}$$

dengan J_0 adalah matrik Jacobian untuk parameter tanpa tundaan (*non delay*) dan J_τ adalah matriks Jacobian untuk parameter tundaan (*delay*). Kestabilan titik ekuilibrium ditunjukkan dengan mencari persamaan karakteristik dari sistem. Persamaan karakteristik diperoleh dari $\left| J_0 - J_\tau e^{-g\tau} - gI \right| = 0$ dengan I adalah matriks identitas dan g adalah nilai eigen. (Nur Aini & Subiono, 2012).

2.7. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar merupakan bilangan yang menunjukkan jumlah individu rentan yang dapat menderita penyakit yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi. Menurut Driessche dan Watmough, bilangan reproduksi dasar adalah bilangan yang menyatakan banyaknya rata-rata individu yang terinfeksi akibat tertular individu terinfeksi yang berlangsung dalam populasi *susceptible*. Bilangan reproduksi dasar dinotasikan dengan R_0. Jika $R_0 < 1$ penyakit tidak menyerang populasi, sedangkan jika $R_0 > 1$ maka penyakit akan menyebar.

Misalkan ada n kelas terinfeksi dan m kelas yang tidak terinfeksi, dan misalkan $x \in \mathbb{R}^n$ dan $y \in \mathbb{R}^m$ adalah subpopulasi dari masing-masing kelas. Model kompartemen (kelas) dapat dituliskan dalam bentuk berikut :

$$\dot{x} = f_i(x,y) - v_i(x,y), i = 1,2,...,n,$$

$$\dot{y} = \varphi_j(x,y),\ j = 1,2,...,m, \tag{2.33}$$

dengan f_i merupakan matriks dari laju individu baru terinfeksi penyakit yang menambah kelas terinfeksi, v_i merupakan matriks laju perkembangan penyakit, kematian, dan atau kesembuhan yang mengurangi kelas ini.

Perhitungan bilangan reproduksi dasar berdasarkan linearisasi sistem (2.33) pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Hasil linearisasi dari kelas terinfeksi pada titik ekuilibrium bebas penyakit adalah sebagai berikut :

$$\dot{x} = (F - V)x$$

dengan F dan V matriks berukuran n x n,

$$F = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0, y_0) \text{ dan } V = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(0, y_0)$$

dengan $(0, y_0)$ merupakan titik ekuilibrium bebas penyakit.

Selanjutnya, didefinisikan

$$K = FV^{-1} \tag{2.34}$$

dengan K disebut sebagai *next generation matrix.* Bilangan reproduksi dasar (R_0) dari model kompartemen adalah $R_0 = pK = p(FV^{-1})$ yaitu nilai eigen terbesar dari matriks K (Driessche dan Watmough, 2002).

Contoh 2.8

Diberikan sistem persamaan diferensial berikut :

$$\frac{dS}{dt} = \pi N - \mu S - \lambda SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \lambda SI + \theta\varepsilon I - (\mu + \delta)I$$

$$\frac{dA}{dt} = \delta I - \mu A \tag{2.35}$$

dengan S menyatakan populasi individu sehat dan rentan pada saat *t*, I menyatakan populasi terinfeksi pada saat *t,* dan A menyatakan populasi individu positif AIDS pada saat *t.* Sistem (2.35) mempunyai titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (1,0,0)$.

Pada sistem (2.35) kelas terinfeksi adalah I dan kelas A. *Next generation matrix* dapat diperoleh dari kelas I dan kelas A dengan

$$f = \begin{bmatrix} I\lambda S + \varepsilon\theta I \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } v = \begin{bmatrix} \mu I + \delta I \\ -\delta I + \mu A \end{bmatrix}.$$

Hasil linearisasi dari *f* dan *v* masing-masing adalah

$$F = \begin{bmatrix} \lambda S + \varepsilon\theta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{dan } v = \begin{bmatrix} \mu + \delta & 0 \\ -\delta & -\mu \end{bmatrix}.$$

Sehingga diperoleh *Next generation matrix* berikut

$$K = FV^{-1}$$

$$\Leftrightarrow K=\begin{bmatrix}\lambda S+\varepsilon\theta & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(\mu+\delta)} & 0\\ -\dfrac{\delta}{\mu(\mu+\delta)} & \dfrac{-1}{\mu}\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow K=\begin{bmatrix}\dfrac{\lambda S+\varepsilon\theta}{(\mu+\delta)} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad (2.36)$$

Selanjutnya, substitusikan titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0=(1,0,0)$ ke (2.36) sehingga diperoleh

$$K=\begin{bmatrix}\dfrac{\lambda+\varepsilon\theta}{(\mu+\delta)} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Bilangan reproduksi dasar diperoleh dari nilai eigen terbesar dari matriks K.

Jadi, nilai R_0 dari sistem (2.35) adalah $R_0=\dfrac{\lambda+\varepsilon\theta}{(\mu+\delta)}$.

2.8. Kriteria Routh-Hurwitz

Berdasarkan Teorema 2.4, kestabilan titik ekuilibrium sistem (2.25) dapat dilihat berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobiannya. Namun, seringkali dijumpai akar-akar dari persamaan karakteristik berupa parameter yang nilainya tidak mudah ditentukan. Oleh karena itu, diperlukan aturan/ kriteria yang menjamin bahwa akar-akar persamaan karakteristik bernilai negatif atau ada persamaan karakteristik yang bernilai positif. Kriteria tersebut dikenal dengan sebutan kriteria *Routh Hurwitz*.

Diberikan suatu polinomial

$$P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+...+a_1z+a_0\text{, dengan } a_n\neq 0\text{.} \qquad (2.37)$$

Akar-akar dari polinomial (2.37) dapat diketahui dengan menyusun tabel *Routh* sebagai berikut

$$\begin{array}{c|cccc}
z^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
z^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
z^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \\
z^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \\
\vdots & \vdots & & & \\
z^0 & P & & &
\end{array}$$

dimana $b_1, b_2, ...; c_1, c_2, ...$ dan P diperoleh dari

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, \quad b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \qquad \cdots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}, \qquad \cdots$$

Kriteria Routh Hurwitz :

Semua akar-akar dari polinomial (2.37) mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika semua elemen pada kolom pertama tabel Routh memiliki tanda yang sama (semua bernilai positif atau semua bertanda negatif).

Kriteria tersebut berarti banyaknya perubahan tanda dalam kolom pertama tabel tersebut sama dengan banyaknya akar-akar polinomial (2.37) yang bagian realnya positif. Jadi, bila pada kolom pertama dalam tabel tidak ada perubahan tanda (semua bertanda positif atau semua bertanda negatif), maka semua akar polinomial (2.37) bagian realnya adalah negatif (Subiono, 2013).