REFLEKSI TERHADAP LINGKARAN

SKRIPSI

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan
Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta
Untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan Guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains

Disusun oleh:
Yandika Nugraha
NIM 06305144032

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2011

HALAMAN PERSETUJUAN

REFLEKSI TERHADAP LINGKARAN

SKRIPSI

Tugas akhir skripsi ini disusun oleh:

Nama : Yandika Nugraha

NIM : 0630514432

Telah disetujui dan disahkan pada tanggal

4 April 2011

Untuk dipertahankan di depan panitia penguji skripsi Program Studi Matematika

Jurusan Pendidikan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Yogyakarta

Menyetujui,

Dosen Pembimbing

Himmawati P. L, M.Si

NIP:19750110200012201

HALAMAN PERNYATAAN

Yang bertanda tangan dibawah ini, saya:

Nama	: Yandika Nugraha
NIM	: 06305144032
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: MIPA
Judul Skripsi	: Refleksi Terhadap Lingkaran

Menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan sepanjang pengetahuan saya tidak berisi materi yang telah dipublikasikan atau ditulis oleh orang lain atau telah digunakan sebagai persyaratan menyelesaikan studi di perguruan tinggi lain, kecuali pada bagian-bagian tertentu yang saya ambil sebagai acuan. Apabila ternyata terbukti bahwa pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab saya dan saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan peraturan yang berlaku.

Yogyakarta, 28 April 2011

Yang menyatakan,

Yandika Nugraha

NIM.06305144032

HALAMAN PENGESAHAN

SKRIPSI

REFLEKSI TERHADAP LINGKARAN

Disusun Oleh :

Yandika Nugraha

06305144032

Telah Dipertahankan Di Depan Panitia Penguji Skripsi Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Yogyakarta pada tanggal 15 April 2011 dan dinyatakan telah memenuhi syarat guna memperoleh gelar sarjana sains.

Susunan Panitia Penguji Skripsi

Nama	Jabatan	Tanda Tangan	Tanggal
Himmawati P.L, M.Si	Ketua Penguji	....	27/4 2011
Murdanu, M.Pd	Sekretasis Penguji	....	27/4 2011
Sugiyono, M.Pd	Penguji Utama	....	27/4 - 2011
Dr. Ali Mahmudi	Anggota Penguji	....	27/4 2011

Yogyakarta, April 2011

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dekan

KEMENTERIAN PENDIDIKAN NASIONAL UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Dr. Ariswan

NIP. 19590914 198803 1 003

MOTTO

Takut akan kegagalan seharusnya tidak menjadi alasan untuk tidak mencoba sesuatu.

Frederick Smith

Cara memulai adalah dengan berhenti bicara dan mulai melakukan.

Walt Disney

Jenius adalah 1% inspirasi dan 99% keringat. Tidak ada yang dapat menggantikan kerja keras. Keberuntungan adalah sesuatu yang terjadi ketika kesempatan bertemu kesiapan.

Thomas A. Edison

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah, karya sederhana ini aku persembahkan untuk:

Ummi dan Papi tercinta yang selalu sabar memberikan dukungan dan doa demi kesuksesan ananda.
Terima kasih atas semuanya.

Saudara-saudaraku tersayang
Mbak Ita, terima kasih atas kesabaran dan dukunganmu selama ini, Adek Iyas, mbak Ucik, mbak Hanif, mbak Nunung, mas Udin, Ayoe, anas, saad, era, terima kasih atas kebahagiaan yang telah kalian berikan.

Keluarga besarku tersayang
Keluarga besar Kulon Progo, Mbah putri, mbah kakung, mbah mar, pak dhe Bambang, mama', pak dhe Ugeng, om Bambang, bulek Yayuk, om Kardi, bulek Titik, dan keluatga besar Lombok, terima kasih atas semua do'a, dukungan, semangat dan kepercayaannya.

Cah_Ndableg
Terima kasih atas apa yang telah engkau berikan selama ini kawan.

Sahabat-sahabatku
Sonye, Pomo,Muje terima kasih atas bantuannya.Udes, teman-teman kos bu Fat, Ari, Fahmi Mandela, Bayu, Bejo, Hasim, Risdi sekeluarga, Nana, Tatak, Rizky, dan sahabat-sahabatku yang lain, terimakasih atas segala tawa yang kalian berikan padaku.

REFLEKSI TERHADAP LINGKARAN

Oleh

Yandika Nugraha

NIM.06305144032

ABSTRAK

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah untuk mendefinisikan refleksi terhadap lingkaran, sehingga dapat diselidiki bagaimana menentukan bayangan dari suatu titik, garis dan lingkaran. Setelah didapatkan definisi dan bayangan dari suatu titik, garis, dan lingkaran, akan ditentukan sifat-sifat refleksi terhadap lingkaran.

Untuk menentukan definisi refleksi terhadap lingkaran, dilakukan dengan mengkaji definisi refleksi terhadap titik dan garis, sedangkan untuk menentukan bayangan dari refleksi terhadap lingkaran, dapat menggunakan definisi yang sudah ada. Untuk menentukan sifat-sifat refleksi terhadap lingkaran dapat dikaji berdasarkan sifat-sifat pada refleksi terhadap titik dan garis.

Hasil pembahasan menunjukkkan bahwa untuk setiap titik P tidak pada titik pusat cermin lingkaran, maka refleksi dari titik P terhadap lingkaran γ yang berpusat di O yaitu titik P' yang berada pada sinar garis $\overrightarrow{OP}$, sehingga $(OP)(OP') = r^2$. Suatu objek jika direfleksikan terhadap lingkaran maka akan menghasilkan bayangan yang bermacam-macam, tergantung dari posisi objek tersebut terhadap cermin lingkaran. Jika suatu titik direfleksikan terhadap lingkaran maka bayangannya akan berupa titik di dalam, pada, atau di luar lingkaran tergantung posisi titik terhadap cermin lingkaran. Bayangan dari suatu garis jika direfleksikan terhadap lingkaran akan berupa garis atau lingkaran tergantung posisi awal dari garis tersebut. Suatu lingkaran yang direfleksikan terhadap lingkaran akan menjadi sebuah lingkaran jika lingkaran tersebut tidak menyentuh titik pusat cermin lingkaran. Sifat-sifat refleksi terhadap lingkaran antara lain adalah bukan merupakan isometri, merupakan involusi, memiliki titik tetap, garis tetap dan lingkaran tetap.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis haturkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan segala rahmat serta hidayah-Nya, sehingga memberikan kekuatan, kemudahan, dan kemampuan kepada penulis untuk dapat menyelesaikan skripsi dengan judul " Refleksi Terhadap Lingkaran " guna memenuhi sebagian persyaratan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta.

Penulis menyadari akan kelemahan serta keterbatasan yang ada sehingga dalam menyelesaikan skripsi ini memperoleh bantuan dari berbagai pihak. Dalam kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih kepada :

1. Bapak Dr. Ariswan sebagai Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta yang telah memberikan kesempatan penulis dalam menyelesaikan studi.
2. Bapak Dr. Hartono sebagai Ketua Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta.
3. Ibu Atmini Dhoruri, M. S sebagai Ketua Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta.
4. Ibu Himmawati P.L, M.Si sebagai pembimbing akademik dan dosen pembimbing yang telah memberikan pengarahan dan bimbingan kepada penulis.
5. Bapak dan Ibu dosen Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta yang telah

memberikan ilmu kepada penulis, semoga ilmu yang diberikan dapat bermanfaat.

6. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih banyak kekurangan baik isi maupun susunannya, untuk itu penulis menerima kritik dan saran yang bersifat membangun untuk tulisan semacam pada masa mendatang. Akhirnya penulis mengucapkan terima kasih dan semoga skripsi ini dapat bermanfaat tidak hanya bagi penulis tetapi juga bagi para pembaca. Amin.

Yogyakarta, April 2011
Penulis

Yandika Nugraha
06305144032

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR NOTASI

P	: Titik P
s	: Garis s
$\overline{AB}$	: Ruas garis AB
AB	: Jarak titik A ke B
$m\overline{AB}$	: Panjang ruas garis AB
$\angle ABC$	: Sudut ABC
$m\angle ABC$	: Besar sudut ABC
$\cong$	: Kongruen dengan
$\sim$	: Sebangun dengan
$T(g)$	: Transformasi pada garis g
P'	: Bayangan titik P
M_Q	: Refleksi terhadap titik Q
M_s	: Refleksi terhadap garis s
$\alpha, \beta, \gamma, \rho, \varphi$	: Nama lingkaran
$M\gamma$	: Refleksi terhadap lingkaran γ
■	: Akhir sebuah bukti

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar belakang

Menurut Jarwo Jacko (tanpa tahun), Geometri secara harfiah dapat diartikan sebagai "ilmu pengukuran bumi". Kata "geometri" berasal dari bahasa Yunani, "geo" yang berarti "bumi", dan "metria" yang berarti "pengukuran". Geometri adalah salah satu ilmu tertua, ilmu yang menyangkut geometri telah ada sejak zaman Mesir Kuno, Lembah Sungai Indus dan Babilonia, sekitar 3.000 SM. Peradaban zaman dulu telah memiliki pengetahuan tentang irigasi, drainase dan dapat mendirikan bangunan-bangunan raksasa yang tertinggal di masa kini.

Seiring berjalannya waktu, geometri telah berkembang menjadi pengetahuan yang disusun secara menarik dan logis. Menurut Kusno (2004:54), geometri dimulai dari istilah-istilah dasar yang tidak terdefinisikan, kemudian didefinisikan beberapa istilah penting yang sering digunakan dalam pembahasan geometri agar terhindar dari kerancauan arti. Hal berikutnya yaitu ditetapkan beberapa aksioma dan postulat dan selanjutnya teorema-teorema.

Salah satu pembahasan dalam geometri yaitu tentang transformasi geometri. Istilah transformasi geometri dapat ditafsirkan sebagai geometri yang membahas mengenai transformasi. Transformasi geometri yang biasa dipelajari yaitu refleksi, rotasi, translasi, dan dilasi.

Dalam skripsi ini akan diteliti lebih lanjut mengenai refleksi. Refleksi yang telah umum dipelajari biasanya hanya mengenai refleksi terhadap sebuah titik dan garis, namun demikian kali ini akan dibahas mengenai refleksi terhadap sebuah lingkaran.

Refleksi terhadap titik adalah suatu refleksi dengan cermin berupa titik. Refleksi terhadap garis adalah suatu refleksi dengan cermin berupa suatu garis. Jika titik *P* di refleksikan terhadap suatu titik atau garis, maka bayangannya yaitu titik *P'* dengan titik *Q* atau garis *s* merupakan titik tengah $\overline{PP'}$.

Sifat-sifat refleksi titik dan garis yang ada pada dimensi dua antara lain adalah refleksi merupakan isometri yaitu bersifat kolineasi, mempertahankan besar sudut, dan mempertahankan kesejajaran. Refleksi merupakan involusi dan refleksi memiliki titik tetap dan garis tetap.

Jika cerminnya adalah suatu lingkaran, diperlukan suatu penelitian lebih lanjut untuk menentukan definisi dan sifat-sifat refleksi pada lingkaran dengan mengkaji berdasarkan sifat-sifat refleksi terhadap titik dan garis.

B. Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi pada pembahasan refleksi dari titik, garis, dan lingkaran terhadap lingkaran di dimensi dua dan menggunakan penalaran deduktif. Dari berbagai sumber pustaka, refleksi terhadap lingkaran dikatakan sebagai suatu inversi.

C. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, dapat dirumuskan masalah yaitu:

1. Bagaimana definisi refleksi terhadap suatu lingkaran?
2. Bagaimana menentukan bayangan suatu titik, garis dan lingkaran jika direfleksikan terhadap suatu lingkaran?

3. Bagaimana sifat-sifat refleksi terhadap lingkaran?

D. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mendefinisikan refleksi terhadap lingkaran.
2. Menentukan bayangan suatu titik, garis dan lingkaran jika direfleksikan terhadap lingkaran.
3. Menyelidiki berbagai sifat refleksi titik dan garis terhadap lingkaran.

E. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian yang dilakukan adalah :

1. Menambah wawasan penulis tentang refleksi terhadap lingkaran.
2. Dapat digunakan sebagai tambahan informasi dan referensi bacaan untuk mahasiswa matematika, terlebih bagi mahasiswa yang hendak melakukan penelitian serupa.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Dalam bab ini akan diuraikan berbagai konsep yang digunakan untuk membahas masalah refleksi terhadap lingkaran. Adapun berbagai bahan acuan tersebut adalah titik, garis, sudut, kesebangunan, lingkaran, dan sifat–sifat refleksi pada dimensi dua dengan cermin suatu titik dan garis.

A. Titik, Garis, dan Sudut

Menurut Kusno (2004:54), geometri dimulai dari istilah-istilah yang tidak terdefinisikan, atau disebut unsur pangkal, yaitu berupa titik, garis, dan bidang. Istilah-istilah tidak terdefinisikan ini memulai proses definisi dalam geometri dan mendasari definisi semua istilah geometri lainnya. Terdapat juga pernyataan pangkal yaitu suatu pernyataan yang tidak perlu dibuktikan kebenarannya, seperti aksioma atau postulat.

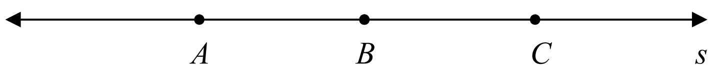
1. Titik

Sebuah titik dilambangkan dengan sebuah noktah dan diberi nama dengan suatu huruf kapital. Titik tidak memiliki panjang maupun ketebalan. Model dari sebuah titik dapat berupa bekas tusukan jarum atau bekas ujung pensil di atas kertas.

2. Garis

Sebuah garis yang melalui titik A dan B dilambangkan dengan simbol $\overleftrightarrow{AB}$. Untuk memberi nama sebuah garis, dapat memanfaatkan dua buah titik pada garis tersebut atau dengan sebuah huruf kecil. Sebuah garis memiliki panjang tetapi tidak mempunyai lebar maupun ketebalan. Model sebuah garis dapat berupa seutas tali yang diregangkan atau goresan pensil yang mengikuti tepi sebuah penggaris.

Cara menuliskan sebuah garis yaitu : $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BA}$, $\overleftrightarrow{CA}$, atau garis s, seperti yang ditunjukkan pada gambar berikut:



Gambar 1. Garis *s*.

Pada Gambar 1, terdapat beberapa nama garis, sehingga pada garis yang sama dapat ditemukan banyak nama.

a. Ruas Garis

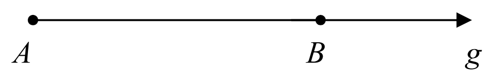
Definisi 2.1 (Kusno, 2004:62)

Suatu ruas garis yang ditentukan oleh dua titik berlainan A dan B adalah himpunan titik-titik yang terdiri dari titik A dan B sebagai ujung dan semua titik di antara titik A dan B, dilambangkan dengan $\overline{AB}$ atau $\overline{BA}$.

b. Sinar Garis

Definisi 2.2 (Kusno, 2004:62)

Misal titik A adalah suatu titik pada garis g. Suatu sinar garis pada garis g adalah himpunan titik-titik yang terdiri dari titik A sebagai pangkal dan semua titik yang sepihak dengan titik B terhadap titik A.



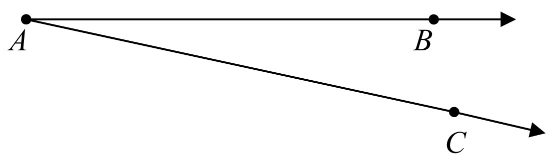
Gambar 2. Sinar garis $\overrightarrow{AB}$.

Sinar garis dengan pangkal titik A dan memuat titik B dilambangkan dengan $\overrightarrow{AB}$.

3 Sudut

Definisi 2.3 (Kusno, 2004:62)

Sudut adalah gabungan dua sinar garis yang bersekutu titik pangkalnya. Sinar-sinar tersebut dinamakan kaki-kaki sudut, sedangkan titik pangkalnya dinamakan titik sudut. Simbol untuk sudut adalah ∠ atau ∡.



Gambar 3. Sudut BAC

Sebuah sudut yang terbentuk oleh sinar garis $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AC}$ dilambangkan dengan $\angle BAC$ atau $\angle CAB$ atau $\angle A$. Sinar garis $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AC}$ disebut kaki-kaki sudut dan titik A

disebut titik sudut. Ukuran atau besar sudut ditulis dengan $m\angle A$. Sudut A berukuran 60^o ditulis $m\angle A = 60°$. Besarnya sudut tidak dipengaruhi oleh panjang kaki sudut.

B. Kongruensi

Definisi 2.1 (Kusno, 2004:63)

1. Ruas garis $\overline{AB}$ dikatakan kongruen dengan $\overline{CD}$ (ditulis $\overline{AB} \cong \overline{CD}$) jika dan hanya jika $m\overline{AB}$ = $m\overline{CD}$.
2. Sudut $\angle ABC$ dikatakan kongruen dengan $\angle PQR$ (ditulis $\angle ABC \cong \angle PQR$) jika dan hanya jika $m\angle ABC = m\ \angle PQR$.

C. Kesebangunan Dua Segitiga

Untuk membahas kesebangunan dua segitiga, perlu diketahui terlebih dahulu mengenai suatu rasio dan proporsi (sebanding). Rasio digunakan untuk membandingkan beberapa ukuran. Rasio dua besaran adalah perbandingan ukuran pertama dengan ukuran kedua, yang dapat dinyatakan menggunakan titik dua, misalnya 3:4 atau pecahan biasa, misalnya $\frac{3}{4}$. Proporsi (sebanding) adalah kesamaan dari dua rasio, jadi 3:4 = 6:8.

Definisi 2.2 (Barnett Rich, 2005: 64)

Dua segitiga dikatakan sebangun jika kedua segitiga tersebut sudut-sudut yang berkorespondensi kongruen dan sisi-sisinya yang berkorespondensi sebanding.

Jika dua segitiga sebangun, misal ΔABC dan $\Delta A'B'C'$ dapat ditulis dengan lambang: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \angle ABC \cong \angle A'B'C'$, $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$, $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$, dan $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$.

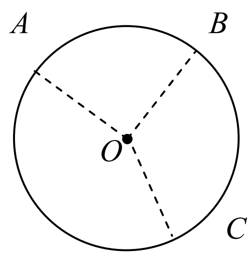
Untuk mengetahui dua segitiga sebangun, dapat ditunjukkan dengan teorema berikut.

a. Dua segitiga sebangun jika dua sudut yang berkorespondensi ukurannya sama (sudut-sudut)
b. Dua segitiga sebangun jika diketahui ukuran-ukuran sisi-sisi yang berkorespondemsi sebanding (sisi-sisi-sisi)
c. Dua segitiga sebangun jika diketahui dua pasang sisi yang berkorespondensi sebanding dan pasangan sudut yang diapit kedua sisi yang berkorespondensi tersebut kongruen (sisi-sudut-sisi)

D. Lingkaran

Definisi 2.3 (Kusno, 2004:114)

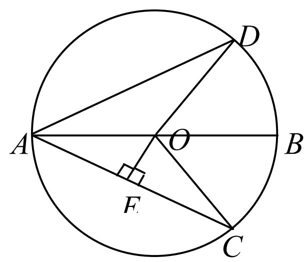
Lingkaran didefinisikan sebagai himpunan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu. Jarak yang sama itu disebut jari-jari lingkaran dan titik tertentu itu disebut titik pusat lingkaran.



Gambar 4. Lingkaran yang berpusat di *O*.

Suatu lingkaran mempunyai daerah dalam dan dareah luar. Daerah dalam (*interior*) suatu lingkaran adalah himpunan titik pusat lingkaran dan semua titik didalam lingkaran. Titik di dalam adalah titik yang memiliki jarak terhadap titik pusat lingkaran kurang dari jari-jari lingkaran. Sedangkan daerah luar (*eksterior*) suatu lingkaran adalah himpunan semua titik di luar lingkaran. Titik di luar lingkaran adalah titik yang memiliki jarak terhadap titik pusat lebih besar dari jari-jari lingkaran tersebut.

a. Bagian-bagian Lingkaran



Gambar 5. Bagian-bagian lingkaran yang berpusat di *O*.

Berdasarkan Gambar 5, dapat dijelaskan beberapa unsur lingkaran, yaitu:

1) Titik pusat.

   Pada Gambar 5, titik *O* merupakan titik pusat lingkaran.

2) Jari-jari (*r*).

   Pada Definisi 5, telah dijelaskan bahwa jari-jari lingkaran adalah jarak dari titik pusat lingkaran ke lingkaran. Pada Gambar 5, jari-jari lingkaran ditunjukkan oleh $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, dan $\overline{OD}$. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa jari-jari bisa menjadi jarak ataupun ruas garis, tergantung penggunaannya.

3) Tali busur.

   Tali busur lingkaran adalah ruas garis yang titik ujung-titik ujungnya adalah dua titik pada lingkaran. Pada Gambar 5, tali busur lingkaran tersebut ditunjukkan oleh $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, dan $\overline{AB}$.

4) Busur.

   Busur lingkaran *AB* merupakan gabungan titik A dan B serta titik-titik pada lingkaran dalam interior sudut pusat AOB. Pada Gambar 5, busur *AC* (ditulis $\overset{\frown}{AC}$), busur *CB* (ditulis $\overset{\frown}{CB}$), busur *AD* (ditulis $\overset{\frown}{AD}$), dan busur BD (ditulis $\overset{\frown}{BD}$) merupakan busur lingkaran.

5) Diameter (*d*).

   Diameter adalah tali busur yang melalui titik pusat lingkaran. Pada Gambar 5, $\overline{AB}$ pada lingkaran dengan titik pusat *O* merupakan diameter lingkaran dengan $m\overline{AB} = m\overline{AO} + m\overline{OB}$. Dengan kata lain, panjang diameter merupakan dua kali nilai jari-jarinya, ditulis *d=2r*.

6) Tembereng.

   Tembereng adalah daerah dalam lingkaran yang dibatasi oleh busur dan tali busur. Pada Gambar 5, tembereng ditunjukkan oleh daerah yang dibatasi oleh $\overset{\frown}{AC}$ dan tali busur AC.

7) Juring.

   Juring lingkaran adalah daerah dalam lingkaran yang dibatasi oleh dua jari-jari lingkaran dan sebuah busur yang diapit oleh kedua jari-jari lingkaran tersebut. Pada Gambar 5, juring lingkaran ditunjukkan oleh daerah yang dibatasi oleh jari-jari $\overline{OC}$ dan $\overline{OB}$ serta busur $\overset{\frown}{BC}$, dinamakan juring BOC.

8) Apotema.

   Apotema merupakan ruas garis yang menghubungkan titik pusat lingkaran dengan tali busur lingkaran tersebut. Garis yang dibentuk bersifat tegak lurus dengan tali busur. Pada Gambar 5, $\overline{OE}$ merupakan apotema pada lingkaran.

9) Sudut pusat lingkaran.

   Sudut pusat lingkaran adalah suatu sudut yang titik sudutnya pada pusat lingkaran. Pada Gambar 5, $\angle BOC, \angle BOD,$ dan $\angle COD$ merupakan sudut pusat lingkaran.

10) Sudut keliling lingkaran.

   Sudut keliling lingkaran adalah sudut di dalam lingkaran yang dibentuk oleh dua tali busur yang titik sudutnya pada lingkaran. Pada Gambar 5, $\angle BAC$, $\angle BAD$, dan $\angle CAD$ merupakan sudut keliling lingkaran.

b. Hubungan sudut pusat dan sudut keliling lingkaran

Sudut pusat dan sudut keliling lingkaran memiliki hubungan seperti yang dijelaskan dalam teorema berikut.

Teorema 2.1 (Kusno, 2004:124)

Ukuran sudut keliling lingkaran sama dengan setengah ukuran sudut pusatnya.

Bukti

Berdasarkan Gambar 5, diketahui bahwa $\angle COD$ merupakan sudut pusat lingkaran dan $\angle CAD$ merupakan sudut keliling lingkaran. Sudut $\angle COD$ dan $\angle CAD$ menghadap busur yang sama, yaitu busur *DC*. Segitiga *ADO* merupakan segitiga sama kaki, maka $m\angle OAD = m\angle ODA$. Jadi, $m\angle AOD$ = $180° - 2 \times m\angle OAD$. Segitiga AOC merupakan segitiga sama kaki, maka $m\angle OCA = m\angle OAC$. Jadi, $m\angle AOC = 180° - 2 \times m\angle OAC$. Pada sudut pusat *COD* diperoleh,

$$\begin{aligned}
m\angle COD &= 360° - (m\angle AOD + m\angle AOC) \\
&= 360° - (180° - 2 \times m\angle OAD + 180° - 2 \times m\angle OAC) \\
&= 360° - (360° - 2 \times m\angle OAD - 2 \times m\angle OAC) \\
&= 360° - 360° + 2 \times m\angle OAD + 2 \times m\angle OAC \\
&= 2 \times m\angle OAD + 2 \times m\angle OAC \\
&= 2 \times m\angle CAD.
\end{aligned}$$

$$m\angle CAD = \frac{1}{2} \times m\angle COD. \blacksquare$$

Dengan demikian, telah diketahui bahwa jika sudut pusat lingkaran dan sudut keliling lingkaran menghadap busur yang sama maka besar sudut pusat adalah dua kali dari besar sudut keliling.

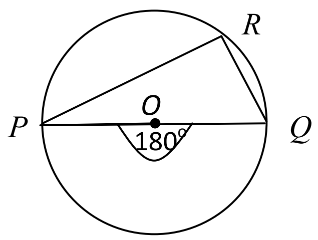
c. Sifat Sudut pada Lingkaran

Sudut pada lingkaran mempunyai beberapa sifat yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.2 (Kusno, 2004:124)

Sudut keliling dalam semi lingkaran adalah sudut siku-siku.

Bukti



Gambar 6. Sudut siku-siku dalam lingkaran.

Berdasarkan Gambar 6, diketahui bahwa lingkaran dengan titik pusat O memiliki diameter $\overline{PQ}$, $\angle POQ$ merupakan sudut pusat, dan $\angle PRQ$ merupakan sudut keliling yang menghadap busur PQ. Berdasarkan Teorema 2.1, diketahui bahwa Ukuran sudut keliling lingkaran sama dengan setengah ukuran sudut pusatnya.

Oleh karena itu, $m\angle PRQ = \frac{1}{2} \times \angle POQ$

$$m\angle PRQ = \frac{1}{2} \times 180^\circ$$

$$\angle PRQ = 90^\circ. \blacksquare$$

Dengan demikan, telah diketahui bahwa sudut keliling yang menghadap diameter lingkaran selalu membentuk 90° atau sudut siku-siku.

d. Hubungan garis dan lingkaran

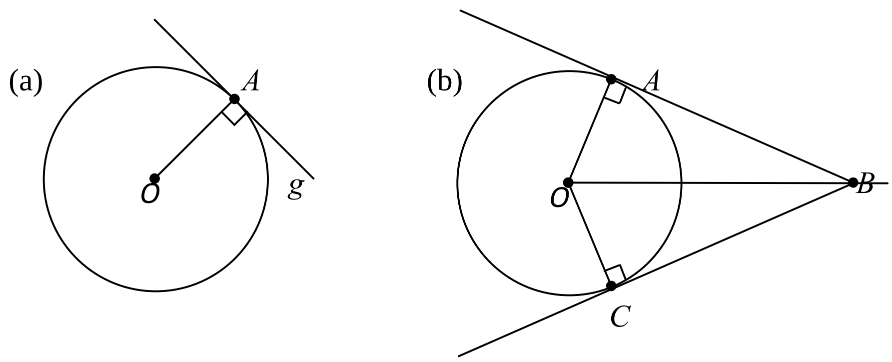
Berdasarkan posisi dari garis dan lingkaran, maka terdapat tiga keadaan yaitu:

1) Garis dan lingkaran saling asing

   Suatu garis dikatakan saling asing dengan lingkaran jika dan hanya jika garis dan lingkaran tersebut tidak memiliki titik persekutuan .

2) Garis dan lingkaran yang bersinggungan

   Garis singgung lingkaran adalah garis yang mempunyai sebuah titik persekutuan pada lingkaran. Titik tersebut dinamakan titik singgung lingkaran.



Gambar 7. Garis singgung melalui satu titik.

Gambar 7 menunjukkan lingkaran yang berpusat di titik O dengan diameter $\overline{OA}$ dan garis g menyinggung lingkaran dan tegak lurus $\overline{OA}$. Garis g disebut garis singgung dan titik A disebut titik singgung. Pada Gambar 7 (a), terlihat bahwa hanya terdapat satu buah garis singgung yang melalui satu titik pada lingkaran, sedangkan pada Gambar 7(b) dapat terlihat bahwa dapat dibuat dua buah garis singgung melalui satu titik di luar lingkaran.

Teorema 2.3 (Kusno, 2004:122)

Setiap garis singgung lingkaran selalu tegak lurus terhadap jari-jari atau diameter yang melalui titik singgungnya.

Bukti

Pada Gambar 7(a), misalkan $\overline{OA}$ tidak tegak lurus g, maka akan berakibat ada garis lain l dengan $\overline{OA} \perp l$ dan l suatu garis singgung. Karena g dan l keduanya garis singgung di titik A, maka bertentangan dengan definisi bahwa Garis singgung lingkaran adalah garis yang mempunyai sebuah titik persekutuan pada lingkaran. Dengan demikian, pengandaian bahwa $\overline{OA}$ tidak tegak lurus g salah, seharusnya $\overline{OA} \perp g$.

3) Garis dan lingkaran yang berpotongan

   Suatu garis yang memotong lingkaran tepat di dua titik dinamakan garis potong lingkaran.

e. Hubungan dua lingkaran

Berdasarkan posisi dari lingkaran dan lingkaran, maka terdapat lima keadaan yaitu:

1) Dua lingkaran dikatakan sepusat jika dan hanya jika kedua lingkaran tersebut mempunyai pusat yang sama.
2) Dua lingkaran dikatakan bersinggungan luar jika dan hanya jika kedua lingkaran tersebut berpotongan tepat di satu titik dan daerah-daerah dalamnya tidak beririsan.
3) Dua lingkaran dikatakan bersinggungan dalam jika dan hanya jika kedua lingkaran tersebut berpotongan tepat di satu titik dan daerah dalam lingkaran yang satu memuat daerah dalam lingkaran yang lain. Titik potongnya dinamakan titik singgung.
4) Dua lingkaran dikatakan berpotongan jika dan hanya jika kedua lingkaran tersebut berpotongan tepat di dua titik.
5) Dua lingkaran dikatakan saling asing jika dan hanya jika kedua lingkaran tersebut tidak mempunyai titik persekutuan.

E. Refleksi Pada Dimensi Dua

1. Transformasi Geometri

Transformasi geometri T adalah pemetaan bijektif (korespondensi satu-satu) dari himpunan titik dalam bidang Euclides kepada himpunan yang sama. Menurut

Susanta (1990: 22), dalam pembahasan transformasi perlu dipelajari apa yang disebut sifat invarian (tidak berubah) terhadap transformasi tersebut. Suatu titik atau garis yang bertahan terhadap transformasi disebut dengan titik tetap atau garis tetap dan transformasinya disebut mempertahankan titik atau garis tadi. Suatu transformasi disebut kolineasi bila hasil transformasi terhadap suatu garis akan berupa garis lagi. Jadi bila *g* suatu garis maka *T* adalah suatu kolineasi bila *T(g)* akan berupa garis lagi.

2. Isometri

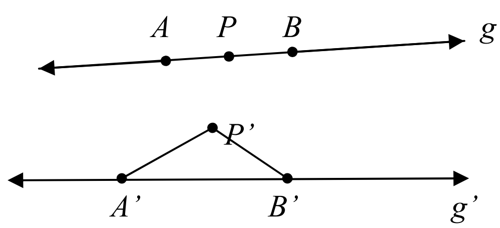
Suatu transformasi *T* adalah isometri jika dan hanya jika untuk setiap pasangan titik titik *P* dan *Q* dipenuhi $m\overline{P'Q'} = m\overline{PQ}$ dengan $P' = T(P)$ dan $Q' = T(Q)$.

Kecuali untuk mempertahankan jarak antara dua titik, suatu isometri memiliki sifat memetakan garis menjadi garis, mempertahankan besar sudut, dan mempertahankan kesejajaran, seperti yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.4 (Susanta, 1990:23)

Suatu isometri memetakan garis menjadi garis (kolineasi)

Bukti



Gambar 8. Transformasi garis *g*.

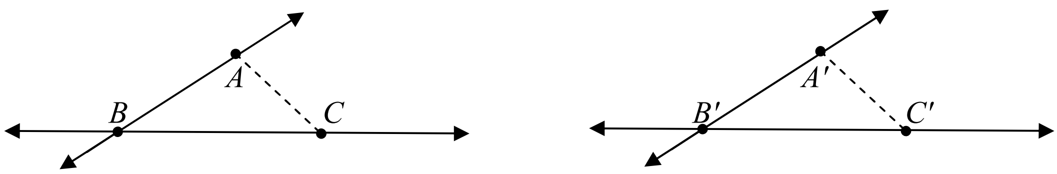
Ambil sebarang isometri *T* dan garis *g*, akan ditunjukkan bahwa *T(g)* berupa sebuah garis. Ambil dua titik sebarang *A* dan *B* pada garis *g* dengan *T(A) = A'* dan *T(B) = B'*. Tarik $\overleftrightarrow{A'B'}$ atau garis *t*. Akan dibuktikan bahwa $g = g'$.

Ambil titik *P* sebarang pada garis *g* dengan *A-P-B* dan misalkan *P' = T(P).* Anda ikan titik *P'* di luar garis *t* maka dalam $\Delta A'B'P'$ dipenuhi $m\overline{A'P'}+m\overline{P'B'} > m\overline{A'B'}$, tetapi karena *T* isometri maka pastilah $m\overline{A'P'} + m\overline{P'B'} = m\overline{AP} + m\overline{PB}$. Timbul kontradiksi, maka pengandaian titik *P'* di luar salah, sehingga *P'* harus pada garis *g'*, maka $g = g'$. ■

Teorema 2.5 (Susanta, 1990:25)

Suatu isometri mempertahankan besar sudut

Bukti



Gambar 9. Transformasi $\angle ABC$.

Ambil sebuah $\angle ABC$, andaikan *A' = T (A), B' = T (B),* dan *C' = T (C)*

Menurut Teorema 2.4, maka $\overleftrightarrow{A'B'}$ dan $\overleftrightarrow{B'C'}$ adalah garis lurus. Oleh karena $\angle ABC = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$ maka $\angle A'B'C' = \overrightarrow{B'A'} \cup \overrightarrow{B'C'}$ sedangkan $\overline{BA'} \cong \overline{BA}, \overline{B'C'} \cong \overline{BC},\ \overline{C'A'} \cong \overline{CA}$. Dengan demikian $\Delta ABC \cong \Delta\, A'B'C'$. Jadi $\angle A'B'C' \cong \angle ABC$. ■

Dengan demikian suatu isometri dapat mempertahankan besarnya suatu sudut.

Teorema 2.6 (Susanta, 1990:25)

Suatu isometri mempertahankan kesejajaran

Bukti:

Gambar 10. Transformasi garis *a* sejajar garis *b*.

Harus diperlihatkan bahwa garis $a' \,//\, b'$. Andaikan garis a' memotong garis b' di sebuah titik P', jadi $P' \in a'$ dan $P' \in b'$. Oleh karena T sebuah transformasi maka ada titik P sehingga $T(P) = P'$ dengan $P \in a$ dan $P \in b$. Ini berarti bahwa garis a memotong garis b di titik P, jadi bertentangan dengan yang diketahui bahwa garis $a \,//\, b$.

Maka pengandaian bahwa garis a' memotong garis b' salah. Jadi haruslah garis $a' \,//\, b'$. ■

3. Refleksi Terhadap Titik dan Garis

Refleksi pada dimensi dua berdasarkan cerminnya dibedakan atas refleksi terhadap titik dan refleksi terhadap garis. Sebagai pembanding dalam membahas refleksi terhadap lingkaran, berikut hanya akan diuraikan sifat-sifat refleksi terhadap titik dan garis pada dimensi dua.

a. Refleksi Terhadap Titik

Definisi 2.4

Refleksi terhadap titik Q dilambangkan dengan M_Q.

Suatu refleksi terhadap titik Q adalah suatu pemetaan yang memenuhi

(i) Jika $P = Q$ maka $M_Q\ (P) = P$.

(ii) Jika $P \neq Q$ maka $M_Q\ (P) = P'$, dengan Q merupakan titik tengah $\overline{PP'}$.

Untuk menyelidiki lebih lanjut sifat-sifat refleksi terhadap titik, akan diselidiki bahwa refleksi terhadap titik merupakan transformasi.

Teorema 2.7(Susanta, 1990:42)

Setiap refleksi terhadap titik adalah transformasi.

1) Dari Definisi 2.4 terlihat bahwa daerah asal M adalah seluruh bidang V (Euclides).
2) M_Q adalah pemetaan surjektif.

   Ambil titik $X' \in V$. Jika $X' = Q$ maka $M_Q\ (X) = X = X'$. Misalkan $X' \neq Q$, maka $M_Q(X) = X'$ dengan Q menjadi titik tengah $\overline{XX'}$. Sehingga titik X' memiliki prapeta. Jadi M adalah surjektif.
3) M_Q merupakan pemetaan injektif.

   Jika $A \neq B$ maka akan dibuktikan bahwa $M_Q(A) \neq M_Q(B)$.

Ambil $A \neq Q$, $B \neq Q$, dan $A = B$. Misalkan bahwa $M_Q(A) = M_Q(B)$, sehingga A' = B'. Jadi, Q merupakan titik tengah $\overline{AA'}$ dan $\overline{BB'}$. Karena A'=B', maka $\overline{AA'}$ = $\overline{BA'}$. Titik Q merupakan titik tengah $\overline{AA'}$ dan $\overline{BA'}$, sehingga dapat dikatakan bahwa A = B. Jadi M_Q adalah injektif.

Berdasarkan 1, 2, dan 3 maka M_Q adalah suatu transformasi dengan daerah asal bidang Euclides dan daerah hasil bidang Euclides.

Berdasarkan Definisi 2.4, maka akan memunculkan beberapa teorema sebagai berikut.

Teorema 2.8 (Susanta, 1990:43)

Setiap refleksi terhadap titik adalah isometri.

Bukti :

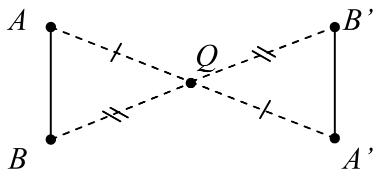
Misalkan M_Q (A) = A'

M_Q (B) = B'

1) Untuk titik A dan B pada Q berdasarkan Definisi 2.4, maka A = A' dan B = B', sehingga A = B = Q.
2) Untuk titik A = Q dan $B \neq Q$, M_Q (A) = A' = A dan M_Q (B) = B', titik Q merupakan titik tengah $\overline{BB'}$. Jika $\overline{AB} \cong \overline{QB}$ maka $\overline{A'B'} \cong \overline{AB'} \cong \overline{QB'}$. Dengan demikian, jika A' = A = Q maka $\overline{QB} \cong \overline{QB'}$ atau $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.

3) Untuk letak ruas garis tertentu.

Suatu ruas garis akan di refleksikan terhadap titik Q. Ambil $\overline{AB}$, titik A dan B di luar Q.



Gambar 11. Refleksi $\overline{AB}$ terhadap titik Q.

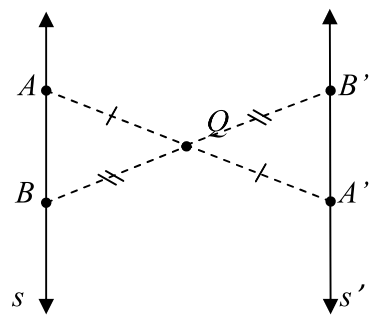
Dari Gambar 11 diketahui bahwa $\overline{AA'}$ dan $\overline{BB'}$ saling berpotongan di titik Q dengan $\overline{AQ} \cong \overline{QA'}$ dan $\overline{BQ} \cong \overline{QB'}$. Dalam perpotongan dua ruas garis, sudut yang bertolak belakang memiliki besar yang sama, oleh karena itu $\angle AQB \cong \angle A'QB'$. Karena panjang sisi-sisi yang berkorespondensi sama dan sudut yang diapit oleh kedua sisi tersebut sama, maka $\Delta ABQ \cong \Delta A'QB'$, sehingga dapat diketahui bahwa $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.

Berdasarkan bukti ini, diperoleh bahwa refleksi terhadap titik adalah suatu isometri karena mempertahankan jarak. ■

Menurut Rawuh (1994:39), kecuali untuk mempertahankan jarak, suatu isometri memiliki sifat memetakan garis menjadi garis, mempertahankan besar sudut, dan mempertahankan kesejajaran, seperti yang dinyatakan dalam teorema berikut.

1) Memetakan garis menjadi garis

Suatu garis *s* akan direfleksikan terhadap titik *Q*. Ambil $\overline{AB}$, titik *A* dan *B* di luar *Q*.



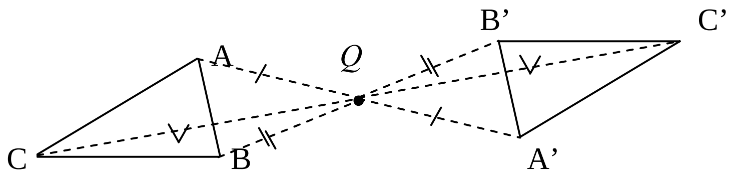
Gambar 12. Refleksi garis *s* terhadap *Q*.

Ambil sebarang isometri *T* dan garis *s*, akan ditunjukkan bahwa *T(s)* berupa sebuah garis. Ambil dua titik sebarang *A* dan *B* pada garis *s* dengan *T(A) = A'* dan *T(B) = B'*. Tarik garis *s'(A', B')*. Akan dibuktikan bahwa $s = s'$.

Ambil titik *P* sebarang pada garis *s* dengan *A-P-B* dan misalkan *P' = T(P)*. Andaikan titik *P'* di luar garis *s'* maka dalam $\Delta A'B'P'$ dipenuhi $m\overline{A'P'}+m\overline{P'B'} > m\overline{A'B'}$, tetapi karena *T* isometri maka pastilah $m\overline{A'P'} + m\overline{P'B'} = m\overline{AP} + m\overline{PB}$. Timbul kontradiksi, maka pengandaian titik *P'* di luar salah, sehingga *P'* harus pada garis *s*, maka $g = t$.■

2) Mempertahankan besar sudut

Ambil sebuah ΔABC, berdasarkan Definisi 2.4 diketahui bahwa $A' = M_Q(A)$, $B' = M_Q(B), C' = M_Q(C)$. Akan dibuktikan bahwa $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

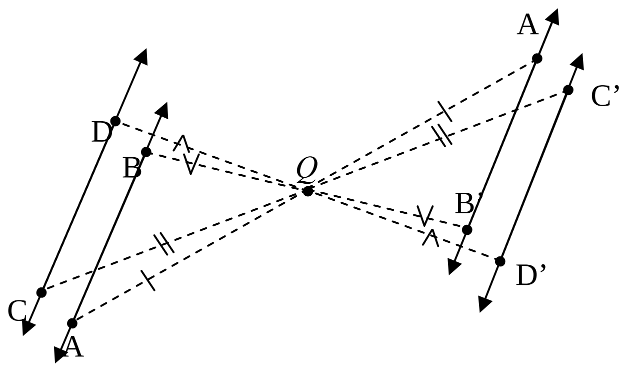


Gambar 13. Refleksi ΔABC terhadap titik Q.

Berdasarkan Teorema 2.8(a) diketahui bahwa suatu garis direfleksikan terhadap titik akan menjadi garis. Panjang $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, dan $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, maka $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. Dengan demikian $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$, dan $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$. ■

3) Mempertahankan kesejajaran

Misalkan $\overline{AB} // \overline{CD}$, berdasarkan Definisi 2.4 diketahui bahwa $A' = M_Q(A)$, $B' = M_Q(B)$, $C' = M_Q(C)$, dan $D' = M_Q(D)$. Akan dibuktikan bahwa $\overline{A'B'} // \overline{C'D'}$.



Gambar 14. Refleksi garis $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ terhadap titik Q.

Dari gambar 14 diketahui bahwa $\overline{AA'}$ dan $\overline{BB'}$ saling berpotongan di titik Q (titik refleksi) dengan $\overline{AQ} \cong \overline{QA'}$ dan $\overline{BQ} \cong \overline{QB'}$. Ruas garis $\overline{CC'}$ dan $\overline{DD'}$ $\overline{CQ} \cong \overline{QC'}$ saling berpotongan di titik Q (titik refleksi) dengan $\overline{DQ} \cong \overline{QD'}$. Dalam perpotongan dua ruas garis, sudut berlainan memiliki besar yang sama, oleh karena itu $\angle AQB \cong \angle A'QB'$ dan $\angle CQD \cong \angle C'QD'$. Maka diperoleh bahwa $\Delta AQB \cong \Delta A'QB'$ dan $\Delta CQD \cong \Delta C'QB'$. Jika $\overline{AB} // \overline{CD}$ maka $\overline{A'B'} // \overline{C'D'}$. ■

Dengan demikian, diketahui bahwa suatu refleksi terhadap titik merupakan isometri yang memiliki sifat memetakan garis menjadi garis, mempertahankan besar sudut, dan mempertahankan kesejajaran.

Teorema 2.9 (Susanta, 1990:42)

Refleksi terhadap titik bersifat involusi.

$M_Q M_Q = \mathrm{I}$

Gambar 15. Refleksi titik *A* terhadap titik *Q*.

Bukti

Menurut Definisi 2.4, jika terdapat titik *A* dan M_Q adalah transformasi refleksi dengan titik *Q* sebagai cermin, maka $M_Q (A) = A'$ dengan *Q* adalah titik tengah $\overline{AA'}$. Karena *Q* adalah titik tengah dari $\overline{AA'}$, maka *Q* merupakan titik tengah dari $\overline{A'A}$, sehingga $M_Q (A') = A$, maka berdasarkan Definisi 2.4 diperoleh bahwa $M_Q (M_Q (A)) = M_Q (A') = A$ atau $M_Q M_Q = I$. ■

Teorema 3.0 (Susanta, 1990:44)

Satu-satunya titik tetap dalam M_Q adalah titik *Q* sendiri, sedang garis-garis tetap adalah garis yang melalui *Q*.

Bukti

Untuk titik pada Q, telah ditunjukkan langsung pada Definisi 2.4 dan sebagai akibatnya, titik Q akan menjadi titik tetap.

Misalkan garis g melalui titik Q. Ambil sebarang titik C pada g di luar titik Q, maka $M_Q(C) = C'$ akan segaris dengan C dan Q (karena Q titik tengah $\overline{CC'}$) maka $C' \in g$. Hubungan ini berlaku untuk setiap titik pada garis g, sehingga g disebut garis tetap. ■

b. Refleksi Terhadap Garis

Definisi 2.5 (Susanta, 1990:49)

Refleksi terhadap garis s dilambangkan dengan M_s

Suatu refleksi terhadap sebuah garis s adalah suatu pemetaan yang memenuhi

(i) Jika $P \in s$ maka $M_s(P) = P$.

(ii) Jika $P \notin s$ maka $M_s(P) = P'$, dengan garis s adalah sumbu $\overline{PP'}$. Garis s dinamakan sebagai sumbu refleksi dan tegak lurus dengan $\overline{PP'}$.

Untuk menyelidiki lebih lanjut sifat-sifat refleksi terhadap garis, akan diselidiki bahwa refleksi terhadap garis merupakan transformasi.

Teorema 3.0 (Rawuh, 1994:34)

Setiap refleksi terhadap garis adalah transformasi.

1) Dari Definisi 2.5 terlihat bahwa daerah asal M adalah seluruh bidang V (Euclides).
2) M_s adalah pemetaan surjektif.

   Ambil titik $X' \in V$. Jika $X' \in s$ maka $M_s(X) = X = X'$. Misalkan $X' \notin s$, maka $X' = M_s(X)$ dengan s menjadi sumbu $\overline{XX'}$. Dengan demikian diketahui bahwa $M_s(X) = X'$, sehingga titik X' memiliki prapeta. Jadi M adalah surjektif.
3) M_s merupakan pemetaan injektif.

   Jika $A \neq B$ maka akan dibuktikan bahwa $M_s(A) \neq M_s(B)$.

   Ambil $A \notin s, B \notin s,$ dan $A \neq B$. Andaikan bahwa $M_s(A) = M_s(B)$, sehingga $A' = B'$. Berdasarkan Definisi 2.5 diketahui bahwa sumbu s tegak lurus dengan $\overline{AA'}$ dan $\overline{BB'}$. Jadi, terdapat $\overline{AA'} \perp s$ dan $\overline{BB'} \perp s$. Karena $A' = B'$, berarti dari satu titik A', terdapat dua garis berlainan yang tegak lurus dengan s, sehingga hal tersebut tidak mungkin. Jadi pengandaian $A \neq B$ maka $M_s(A) = M_s(B)$ adalah tidak benar sehingga jika $A \neq B$ maka $M_s(A) \neq M_s(B)$. Jadi M_s adalah injektif.

   Berdasarkan 1, 2, dan 3 maka M_s adalah suatu transformasi dengan daerah asal bidang Euclides dan daerah hasil bidang Euclides.

Berdasarkan Definisi 2.5, maka akan memunculkan beberapa teorema sebagai berikut.

Teorema 3.1 (Susanta, 1990:49)

Setiap refleksi terhadap garis adalah suatu isometri.

Bukti

Misalkan M_s (*A*) = *A'*

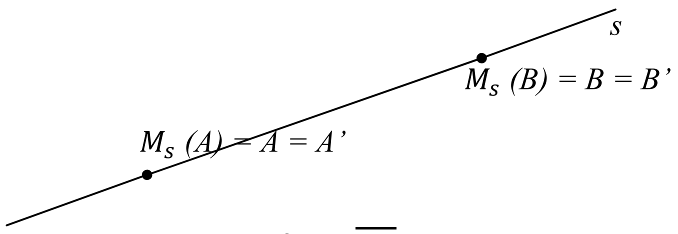
M_s (*B*) = *B'*

1. Titik *A* dan *B* pada garis *s*.

   Maka berdasarkan definisi 2.5 diperoleh

   M_s *(A) = A = A'*

   M_s *(B) = B = B'*

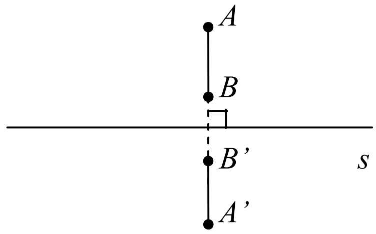


Gambar 16. Refleksi $\overline{AB}$ terhadap garis *s*.

   Dengan demikian, refleksi $\overline{AB}$ terhadap garis *s* adalah ruas garis itu sendiri.

2. Refleksi $\overline{AB}$ terhadap garis s.

   a. Misalkan perpanjangan $\overline{AB} \perp s$.

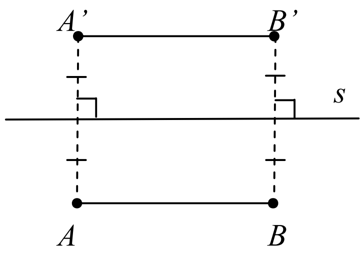


Gambar 17. Refleksi $\overline{AB}$ terhadap garis *s*.

Misalkan titik O adalah titik potong yang dilalui $\overline{AA'}$ dan $\overline{BB'}$, berdasarkan Definisi 2.5, jarak titik A ke garis s sama dengan jarak titik A' ke garis s dan berlaku pula untuk titik B. Maka $m\overline{AB} = m\overline{OB} - m\overline{OA} = m\overline{OB'} - m\overline{OA'} = m\overline{A'B'}$.

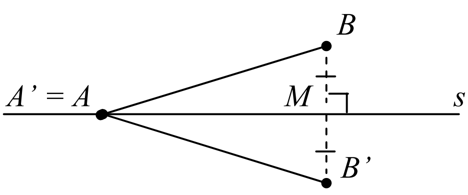
b. Ruas garis $\overline{AB}$ sejajar garis s.

Jika $\overline{AB}$ direfleksikan terhadap garis s maka menghasikan $\overline{B'A'}$. Berdasarkan Definisi 2.5, garis s membagi sama panjang $\overline{A'A}$ dan $\overline{B'B}$, sehingga terbentuk persegi panjang. Berdasarkan sifat persegi panjang, diperoleh $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$.



Gambar 18. Ruas garis $\overline{AB}$ sejajar garis *s*.

c. Ruas garis $\overline{AB}$ dengan titik A pada garis s, dan titik B di luar s.

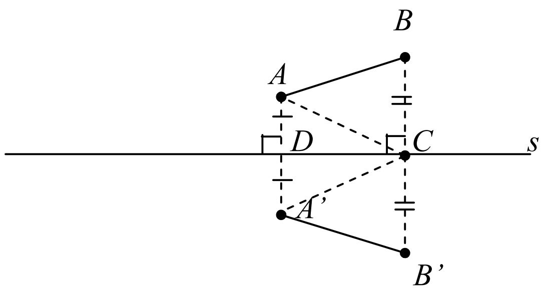


Gambar 19. Salah satu ujung ruas garis terletak di garis *s*.

Diketahui bahwa $\angle AMB \cong \angle A'MB' = 90°$, $\overline{BM} \cong \overline{MB'}$, dan $\overline{AM} \cong \overline{A'M}$.

Sehingga didapat $\Delta ABM \cong \Delta A'B'M$. Dengan demikian $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.

3. Refleksi sebarang ruas garis terhadap garis *s*.



Gambar 20. Refleksi sebarang ruas garis terhadap garis *s*.

Misalkan D adalah titik tengah $\overline{AA'}$

C adalah titik tengah $\overline{BB'}$

Maka titik *C* dan *D* pada garis *s*.

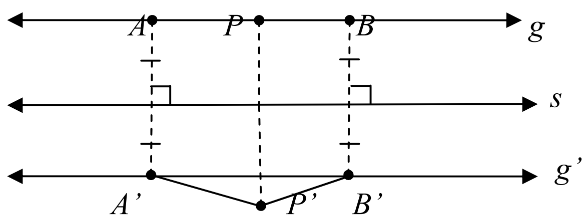
Diketahui $\angle ADC \cong \angle A'DC = 90^{o}$ (karena $\overline{AA'} \perp s$), kemudian $\overline{AD} \cong \overline{A'D}$, dan $\overline{DC} \cong \overline{CD}$, sehingga $\triangle CDA \cong \triangle CDA'$. Akan di buktikan bahwa $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$. Diketahui bahwa $\triangle CDA \cong \triangle CDA'$ maka $\angle ACD \cong \angle A'C'D'$, sehingga $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$. Diketahui $\overline{AC} \cong \overline{A'C}$ (karena $\triangle CDA \cong \triangle CDA'$), titik C merupakan titik tengah $\overline{BB'}$ maka $\overline{BC} \cong \overline{B'C}$. Karena $\angle ACD \cong \angle A'C'D'$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C}$, dan $\overline{BC} \cong \overline{B'C}$ maka $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C$, sehingga $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$. ■

Dengan demikian, refleksi terhadap garis merupakan suatu isometri karena mempertahankan jarak (panjang ruas garis).

Menurut Rawuh (1994:39), kecuali untuk mempertahankan jarak, suatu isometri memiliki sifat memetakan garis menjadi garis, mempertahankan besar sudut, dan mempertahankan kesejajaran, seperti yang dinyatakan dalam teorema berikut.

1) Memetakan garis menjadi garis

Suatu garis *g* akan direfleksikan terhadap garis *s*. Ambil titik *A* dan *B* dengan $A \neq B$ pada garis *g*. Akan dibuktikan bahwa *g* = *g'*.

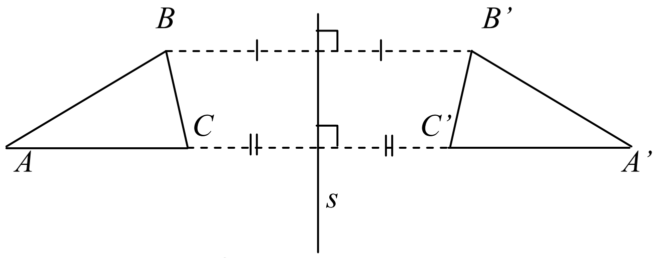


Gambar 21. Refleksi garis g terhadap garis s.

Ambil titik *P* sebarang pada garis *g* dengan *A-P-B* dan $P' = M_s(P)$. Andaikan titik P' di luar garis *g'* maka dalam $\Delta A'B'P'$ dipenuhi $m\overline{A'P'}+m\overline{P'B'} > m\overline{A'B'}$, tetapi karena sumbu *s* membagi dua sama panjang $\overline{PP'}$ maka pastilah $m\overline{AP} + m\overline{PB} = m\overline{A'P'} + m\overline{P'B'}$. Timbul kontradiksi, maka pengandaian titik *P'* di luar salah, sehingga *P'* harus pada garis *g'*, maka $g = g'$. ■

2) Mempertahankan besar sudut

Ambil sebuah ΔABC, akan dibuktikan bahwa setiap sudut pada ΔABC memiliki ukuran yang sama dengan $\Delta A'B'C'$. Berdasarkan Definisi 2.5 diketahui bahwa $A' = M_s(A),\ B' = M_s(B), C' = M_s(C)$. Akan dibuktikan bahwa $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

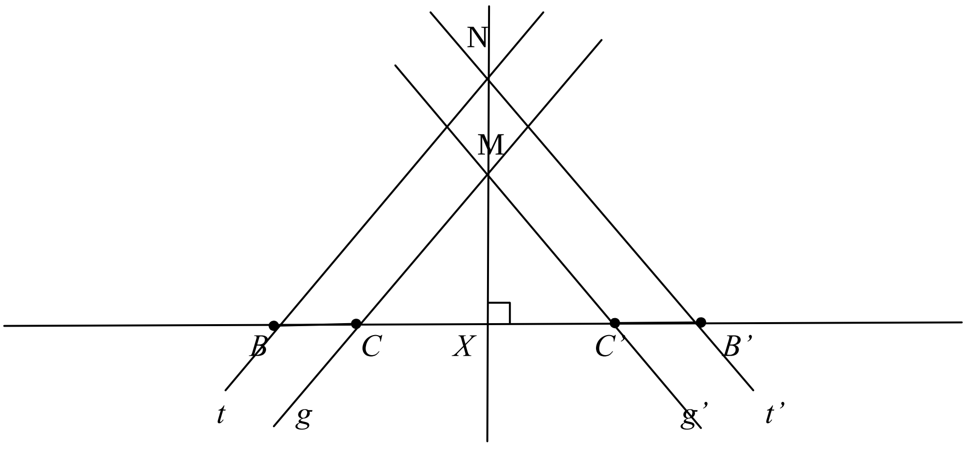


Gambar 22. Refleksi ΔABC terhadap garis *s*.

Diketahui bahwa suatu garis direfleksikan terhadap garis akan menjadi garis. Berdasarkan Teorema 3.1, didapat bahwa $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \overline{BC} \cong \overline{B'C'},$ dan $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, maka $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. Sehingga didapatkan $\angle ABC \cong \angle A'B'C',\ \angle BCA \cong \angle B'C'A'$, dan $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$. Dengan demikian, setiap sudut pada ΔABC memiliki ukuran yang sama dengan $\Delta A'B'C'$. ■

3) Mempertahankan kesejajaran

Diketahui bahwa garis $t//g$. Akan dibuktikan bahwa $t'//g'$.



Gambar 23. Refleksi garis $\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{CD}$ terhadap garis *s*.

Untuk membuktikan dua garis tersebut sejajar, ambil sebuah garis yang memotong garis *t*, *g,* dan tegak lurus sumbu *s*. Akan dibuktikan bahwa jika $\angle MCX \cong$

$\angle NBX$, maka $\angle MC'X \cong \angle NB'X$. Berdasarkan Teorema 3.1 (a) diperoleh bahwa suatu garis direfleksikan terhadap garis akan menjadi garis. Garis *t* dan *t'* akan memotong sumbu *s* dititik *N*, garis *g* dan *g'* memotong sumbu *s* di titik *M*.

Diketahui bahwa $\angle CXM \cong \angle C'XM = 90°$, $\overline{CX} \cong \overline{XC'}$, dan $\overline{XM} \cong \overline{XM}$, sehingga diketahui $\Delta MCX \cong \Delta MC'X$. Diketahui bahwa $\angle BXN \cong \angle B'XN = 90°$, $\overline{BX} \cong \overline{XB'}$, dan $\overline{XN} \cong \overline{XN}$, sehingga diketahui $\Delta NBX \cong \Delta NB'X$.

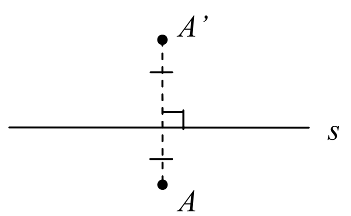
Oelh karena itu, diperoleh bahwa $\angle MCX \cong \angle MC'X$ dan $\angle NBX \cong \angle NB'X$. Jika $\angle MCX \cong \angle NBX$, dengan $\angle MCX \cong \angle MC'X$ dan $\angle NBX \cong \angle NB'X$ maka $\angle MC'X \cong \angle NB'X$ atau besar sudut yang berhadapan sama besar, sehingga bisa dikatakan bahwa $\overline{BN} // \overline{CM}$ maka $\overline{B'N} // \overline{C'M}$.

Dengan demikian, diketahui bahwa suatu refleksi terhadap garis merupakan isometri yang memiliki sifat memetakan garis menjadi garis, mempertahankan besar sudut, dan mempertahankan kesejajaran.

Teorema 3.2 (Susanta, 1990:50)

Refleksi terhadap garis adalah suatu involusi

Jadi : $M_s M_s = I$



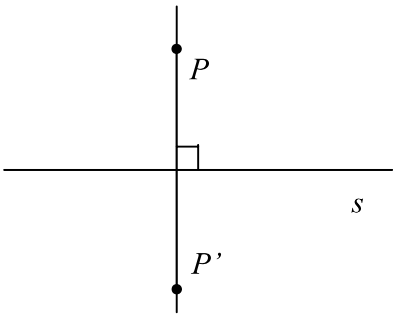
Gambar 24. Refleksi titik *A* terhadap garis *s*.

Bukti

Menurut Definisi 2.5, jika terdapat titik A dan M_s adalah suatu transformasi refleksi dengan garis s sebagai cermin, maka $M_s(A) = A'$ dengan garis s adalah sumbu dari $\overline{AA'}$. Karena garis s adalah sumbu dari $\overline{AA'}$ maka garis s juga merupakan sumbu dari $\overline{A'A}$. Berdasarkan Definisi 2.5 dapat ditulis juga $M_s(A')= A$, maka didapat $M_s\big(M_s(A)\big) = M_s(A') = A$ atau $M_sM_s = I$. ■

Teorema 3.3 (Susanta, 1990:51)

Titik tetap terhadap *Ms* adalah titik pada garis *s*, sedangkan garis tetap adalah garis *s* sendiri dan semua garis yang tegak lurus pada garis *s*.



Gambar 25. Refleksi garis tegak lurus *s*.

Bukti

Untuk titik pada garis *s*, telah ditunjukkan langsung pada Definisi 2.5 dan sebagai akibatnya, garis *s* akan menjadi garis tetap.

Misalkan garis g adalah garis tegak lurus s. Ambil sebarang titik P pada garis g di luar garis s, maka $M_s(P) = P'$ yang terletak pada garis g (karena $\overline{PP'}$ tegak lurus garis s dan titik P terletak pada garis g). Hubungan ini akan berlaku untuk setiap titik pada garis g, sehingga g disebut sebagai garis tetap. ■

Berdasarkan uraian di atas dapat disimpulkan bahwa refleksi terhadap titik dan garis memiliki sifat isometri, involusi, ada titik tetap dan garis tetap. Oleh karena itu, sifat-sifat refleksi terhadap titik dan garis dapat digunakan sebagai bahan kajian pada refleksi terhadap lingkaran.

BAB III

PEMBAHASAN

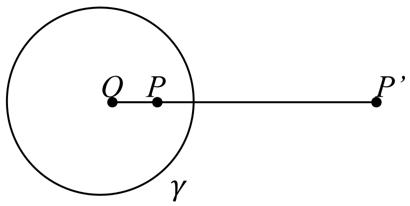
A. Definisi Refleksi Terhadap Lingkaran

Refleksi terhadap lingkaran merupakan suatu refleksi yang menggunakan lingkaran sebagai cermin. Refleksi terhadap lingkaran memetakan objek di dalam cermin lingkaran ke luar cermin lingkaran dan sebaliknya. Jika terdapat titik di dalam lingkaran dan direfleksikan terhadap lingkaran tersebut, maka bayangan titik tersebut akan berada di luar cermin lingkaran dan sebaliknya jika titik tersebut berada di luar lingkaran maka bayangannya akan berada di dalam lingkaran.

Dalam refleksi terhadap garis, refleksi *Ms* adalah suatu pemetaan terhadap garis *s* yang memenuhi *Ms (A) = A* untuk titik *A* pada garis *s*, dan *Ms (A) = A'* untuk titik A yang berada di luar garis s, sedemikian sehingga s adalah sumbu $\overline{AA'}$ (B. Susanta,1990: 49). Sedangkan refleksi terhadap lingkaran didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.1 (Greenberg, 1974: 194)

Untuk setiap titik $P \neq O$ (titik pusat lingkaran), maka refleksi dari titik P terhadap lingkaran γ yang berpusat di O yaitu titik P' yang berada pada sinar garis $\overrightarrow{OP}$, sehingga $(OP)(OP') = r^2$. Titik O disebut dengan titik pusat cermin lingkaran dan γ disebut cermin lingkaran, sedangkan *r* disebut jari-jari cermin lingkaran.



Gambar 26. Refleksi titik *P* terhadap lingkaran γ.

B Menentukan Bayangan Titik, Garis, dan Lingkaran Jika Direfleksikan terhadap Lingkaran.

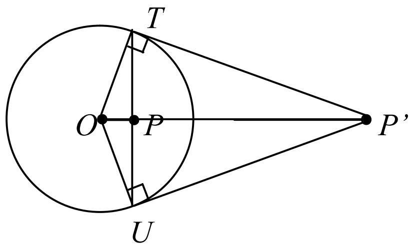
Untuk menentukan sifat-sifat refleksi terhadap lingkaran, perlu diketahui terlebih dahulu bagaimana menentukan bayangan dari suatu titik, garis dan lingkaran. Menurut Definisi 3.1, refleksi terhadap lingkaran mampu memetakan suatu objek dari dalam cermin lingkaran ke luar cermin lingkaran dan sebaliknya.

1. Menentukan Bayangan dari Titik Jika Direfleksikan terhadap Lingkaran

Berdasarkan posisi titik tersebut terhadap lingkaran, terdapat tiga masalah, yaitu: titik *P* di dalam γ, titik *P* di luar γ, titik *P* berada di cermin lingkaran, dan titik *P* berada di titik pusat cermin lingkaran.

Teorema 3.4 (Greenberg, 1974: 195)

a) Terdapat γ sebagai cermin lingkaran yang berpusat di titik O. Misalkan titik *P* di dalam γ dan ruas garis $\overline{TU}$ suatu tali busur γ yang melalui titik *P* dan tegak lurus dengan ruas garis $\overline{OP}$. Refleksi dari titik *P* adalah titik perpotongan antara garis singgung yang melalui titik T dengan garis singgung yang melalui titik U pada γ.

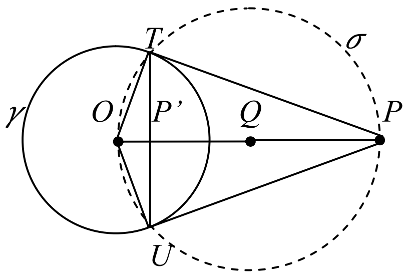


Gambar 27. Refleksi titik di dalam lingkaran.

Bukti

Misal garis singgung γ yang melalui titik T memotong sinar garis $\overrightarrow{OP}$ di titik P'. Diketahui $\angle OPT \cong \angle OTP'$ dan $\angle TOP \cong \angle TOP'$ maka $\Delta OPT \sim \Delta OTP'$, sehingga sisi-sisi yang berkorespondensi sebanding, yaitu $\frac{OP}{OT} = \frac{OT}{OP'}$. Jika $OT = r$, maka $(OP)(OP') = r^2$ yang menunjukkan bahwa P' adalah bayangan dari P terhadap γ. ■

b) Misalkan titik P di luar γ dan Q menjadi titik tengah dari $\overline{OP}$ dan terdapat lingkaran σ yang berpusat di titik Q dengan jari-jari $\overline{OQ}$ dan $\overline{QP}$. Lingkaran σ memotong γ di dua titik yaitu titik T dan U, sehingga terdapat garis $\overleftrightarrow{PT}$ dan $\overleftrightarrow{PU}$ sebagai garis singgung terhadap γ. Bayangan dari titik P adalah P' yang merupakan perpotongan antara ruas garis $\overline{TU}$ dan $\overline{OP}$.



Gambar 28. Refleksi titik *P* terhadap lingkaran.

Bukti

Dari Gambar 28, diketahui bahwa *γ* dan lingkaran *σ* berpotongan di titik *T* dan *U*. Berdasarkan sifat sudut pada lingkaran, sudut keliling yang menghadap diameter lingkaran selalu membentuk 90^{o} atau sudut siku-siku, sehingga $\angle OTP$ dan $\angle OUP$ merupakan sudut siku-siku. Setiap garis singgung selalu tegak lurus dengan jari, maka garis $\overleftrightarrow{PT}$ dan $\overleftrightarrow{PU}$ merupakan garis singgung terhadap *γ*. Jika ruas garis $\overline{TU}$ berpotongan dengan ruas garis $\overline{OP}$ pada titik *P'*, maka berdasarkan Teorema 3.4 (a), didapat bahwa titik *P'* merupakan bayangan dari titik *P*. ■

c) Jika titik *P* berada di cermin lingkaran maka bayangannya adalah titik itu sendiri.

Bukti

Jika terdapat titik P pada cermin lingkaran, maka $OP = r$. Dari Definisi 3.1 disebutkan bahwa untuk setiap titik $P \neq O$ maka refleksi dari titik P terhadap lingkaran *γ* yaitu titik P' yang berada pada sinar garis $\overrightarrow{OP}$, sehingga $(OP)(OP') = r^2$. Diketahui $OP = r$, maka diperoleh $OP' = \frac{r^2}{r} = r$. Terdapat titik P' pada sinar garis $\overrightarrow{OP}$, karena $OP = OP = r$, maka titik *P'* berada pada titik *P*. ■

d) Jika titik P berada di titik pusat cermin lingkaran maka bayangannya jauh tak terhingga.

Bukti

Jika terdapat P berada pada pusat cermin lingkaran, maka dapat diketahui bahwa $OP = 0$. Berdasarkan Definisi 3.1 diketahui bahwa $(OP)(OP') = r^2$, sehingga diperoleh $OP' = \frac{r^2}{0} = \infty$ (jauh tak terhingga) ■

Dengan demikian refleksi $M\gamma$ adalah suatu pemetaan terhadap lingkaran γ yang memenuhi

i) $M\gamma(P) = P$ jika titik P terletak pada lingkaran γ.

ii) $M\gamma(P) = P'$, dengan $(OP)(OP') = r^2$, jika titik P terletak di daerah dalam lingkaran γ atau berada di luar lingkaran dan tidak terletak di titik pusat cermin lingkaran.

iii) Jika titik P berada di titik pusat cermin lingkaran maka bayangannya jauh tah terhingga.

2. Menentukan Bayangan dari Garis Jika Direfleksikan terhadap Lingkaran

Terdapat suatu garis yang akan direfleksikan terhadap lingkaran. Berdasarkan posisi garis tersebut terhadap cermin lingkaran, maka akan terdapat tiga masalah yaitu garis tersebut melalui titik pusat cermin lingkaran, garis tersebut memotong cermin lingkaran tetapi tidak melalui titik pusat cermin lingkaran, dan garis tersebut tidak melalui titik pusat cermin lingkaran dan tidak memotong cermin lingkaran.

Teorema 3.5 (Kozai, 2009:8)

Bayangan dari sebuah garis yang melalui titik pusat cermin lingkaran adalah garis itu sendiri.

Bukti

Misal O menjadi titik pusat cermin lingkaran, dan terdapat garis l yang melalui titik O. Misal titik P berada pada garis l dan titik P' merupakan hasil refleksi dari titik P, maka terdapat titik P' berada pada $\overline{OP}$, sehingga titik P' juga berada pada garis l. Dengan demikian, setiap titik pada garis l jika direfleksikan maka hasilnya akan berada pada garis l tersebut. ■

Teorema 3.6 (Kozai, 2009:9)

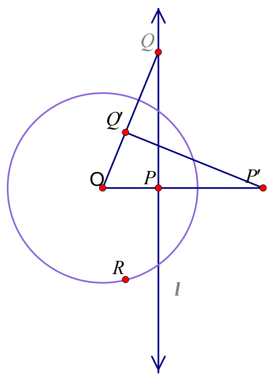
Misalkan γ sebuah lingkaran dengan titik pusat O. Bayangan dari suatu garis yang tidak melalui O jika direfleksikan terhadap γ adalah sebuah lingkaran yang melalui O. Sebaliknya, bayangan dari lingkaran melalui O jika direfleksikan terhadap γ maka akan menghasilkan suatu garis.

Bukti

Misal garis l memotong cermin lingkaran, tetapi tidak melewati O (lihat pada Gambar 29). Untuk membuat bayangan dari garis l, dimisalkan P menjadi titik perpotongan antara sinar garis $\overrightarrow{OP}$ dengan garis l yang saling tegak lurus dan titik Q terletak pada garis l. Berdasarkan Definisi 3.1, diketahui bahwa $(OP)(OP') = r^2$ dan

$(OQ)(OQ') = r^2$, dimana r merupakan jari-jari dari cermin lingkaran. Oleh karena itu, $(OP)(OP') = (OQ)(OQ')$, sehingga $\frac{OP}{OQ'} = \frac{OQ}{OP'}$.

Segitiga $\Delta OPQ \sim \Delta OQ'P'$, karena dua pasang sisi yang berkorespondensi sebanding, yaitu $\frac{OP}{OQ'} = \frac{OQ}{OP'}$ dan pasangan sudut yang diapit kedua sisi yang berkorespondensi tersebut kongruen, yaitu $\angle QOP \cong \angle P'OQ'$. Diketahui bahwa $\angle OPQ$ adalah sudut siku-siku, sehingga $\angle OQ'P'$ merupakan sudut siku-siku.



Gambar 29. Refleksi dari suatu garis yang tidak melalui *O*.

Dengan demikian, $\angle OQ'P'$ merupakan sudut keliling lingkaran dengan $\overline{OP'}$ sebagai diameter, sehingga titik Q' harus berada pada lingkaran yang berdiameter $\overline{OP'}$. Akibatnya, bayangan dari garis l berada di dalam lingkaran yang berdiameter $\overline{OP'}$. Dengan membalikkan konstruksi, setiap bayangan titik pada lingkaran yang berdiameter $\overline{OP'}$ mempunyai titik pada garis l sebagai gambar sebelumnya, maka bayangan dari garis l adalah sebuah lingkaran dengan diameter $\overline{OP'}$. ■

Hal ini berlaku juga untuk pernyataan yang sama yaitu jika garis l tidak memotong atau bersinggungan di cermin lingkaran maka bayangannya yaitu lingkaran yang melalui titik pusat cermin lingkaran. Sebaliknya, jika lingkaran yang melalui titik pusat cermin lingkaran direfleksikan terhadap lingkaran maka bayangannya adalah suatu garis.

Dengan demikian telah diketahui bahwa bayangan refleksi garis terhadap lingkaran ditentukan oleh posisi dari garis tersebut. Jika garis tersebut melalui titik pusat cermin lingkaran, maka akan menghasilkan bayangan yang sama. Jika garis tersebut memotong cermin lingkaran dan tidak melalui titik pusat cermin lingkaran, maka akan menghasilkan bayangan sebuah lingkaran yang melalui titik pusat cermin lingkaran. Jika garis tersebut di luar cermin lingkaran, maka bayangannya juga sebuah lingkaran yang melalui titik pusat cermin lingkaran.

3. Menentukan Bayangan dari Lingkaran Jika Direfleksikan terhadap Lingkaran

Teorema 3.6 menyatakan bahwa jika sebuah lingkaran yang melalui titik pusat cermin lingkaran direfleksikan terhadap lingkaran γ, maka bayangannya akan berupa garis. Tetapi bayangan dari suatu lingkaran yang tidak melalui titik O jika direfleksikan terhadap γ maka tidak akan menghasilkan suatu garis.

Berdasarkan Teorema 3.4(c) diketahui bahwa titik pada lingkaran γ jika direfleksikan terhadap lingkaran γ adalah titik itu sendiri, sehingga γ merupakan lingkaran tetap**,** sehingga dapat dikatakan bahwa refleksi dari γ adalah dirinya sendiri.

Jika γ_0 adalah sebuah lingkaran dengan jari-jari r_0 yang memiliki jari-jari sama dengan γ, maka γ_0 memiliki O sebagai titik pusatnya dan setiap titik dari γ_0 sama jauhnya dari O, sehingga bayangan dari refleksi tersebut juga akan sama jauhnya dari O. Berdasarkan Definisi 3.1 diketahui bahwa $(OP)(OP') = r^2$, dan diketahui bahwa $OP = r_0$, maka:

$(r_0)(OP') = r^2$

$OP' = r^2/r_0.$

Bayangan dari γ_0 adalah lingkaran dengan jari-jari r^2/r_0 jika P adalah titik pada γ_0,

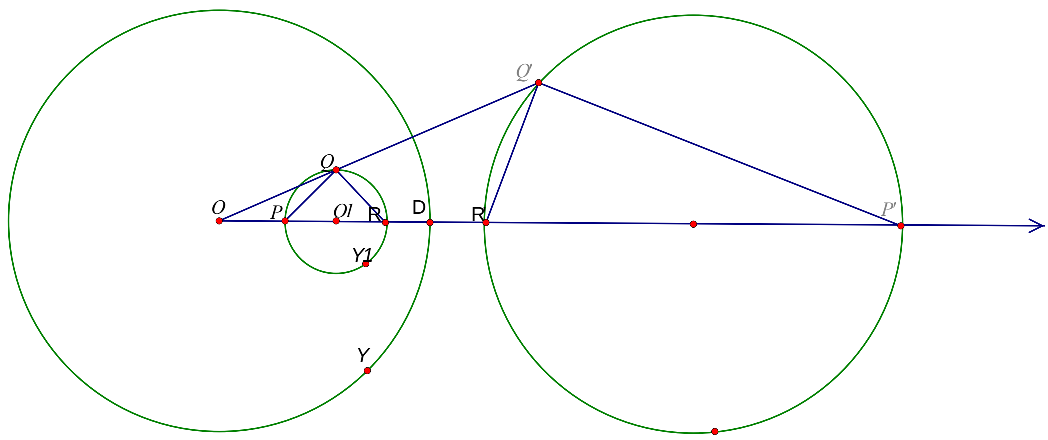
Dalam kasus ini, dapat diketahui bahwa lingkaran yang tidak melalui O adalah sebuah lingkaran.

Teorema 3.7 (Kozai, 2009:10)

Bayangan dari lingkaran yang direfleksi terhadap lingkaran yang tidak melalui pusat dari cermin lingkaran adalah sebuah lingkaran.

Bukti

Akan dibuktikan kasus ketika lingkaran γ_1 di dalam cermin lingkaran γ dan sekaligus sebagai akibat dari kasus lingkaran γ_1 berada di luar cermin lingkaran γ. Diketahui O adalah titik pusat cermin lingkaran γ dan O_1 adalah titik pusat lingkaran γ_1. Buat sinar garis $\overrightarrow{OO_1}$ dan berikan nama perpotongan dari sinar garis $\overrightarrow{OO_1}$ dengan lingkaran γ_1 sebagai titik P dan R. Jika bayangan dari titik P adalah titik P' dan titik R adalah titik R', maka titik P'dan R' berada pada sinar garis $\overrightarrow{OO_1}$. Misal titik Q menjadi titik lain pada lingkaran γ_1 dan titik Q' menjadi bayangan dari titik Q. Berdasarkan sifat sudut pada lingkaran, sudut keliling yang menghadap diameter lingkaran selalu membentuk 90^{o} atau sudut siku-siku sehingga diketahui bahwa $\angle PQR$ adalah sudut siku-siku. Jika dapat ditunjukkan bahwa $\angle P'Q'R'$ juga merupakan segitiga siku-siku, maka $\angle P'Q'R'$ adalah sudut keliling di dalam lingkaran dengan $\overline{P'R'}$ sebagai diameter, maka titik Q' berada pada lingkaran dengan diameter $\overline{P'R'}$.



Gambar 30. Lingkaran direfleksikan terhadap lingkaran.

Berdasarkan Definisi 3.1, diketahui bahwa $(OP)(OP') = r^2 = (OQ)(OQ') = (OR)(OR') = r^2$, dimana r adalah jari-jari dari cermin lingkaran γ.

Maka , $\frac{OP}{OQ'} = \frac{OQ}{OP'}$ dan $\frac{OR}{OQ'} = \frac{OQ}{OR'}$..

Segitiga $\Delta OPQ \sim \Delta OQ'P'$**,** karena dua pasang sisi yang berkorespondensi sebanding yaitu $\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ'}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP'}}$ dan pasangan sudut yang diapit kedua sisi yang berkorespondensi tersebut kongruen yaitu $\angle POQ \cong \angle P'OQ'$.

Demikian juga $\Delta ORQ \sim \Delta OQ'R'$, karena dua pasang sisi yang berkorespondensi sebanding yaitu $\frac{OR}{OQ'} = \frac{OQ}{OR'}$ dan pasangan sudut yang diapit kedua sisi yang berkorespondensi tersebut kongruen yaitu $\angle QOR \cong \angle Q'OR'$.

Diketahui bahwa ukuran sudut luar segitiga sama dengan jumlah ukuran sudut dalam yang tidak berdampingan, dengan $\angle OPQ$ adalah sudut bagian luar ΔPQR, sehingga $\angle OPQ$ adalah penjumlahan dari dua ukuran sudut bagian dalam yang berlawanan. Dengan demikian diperoleh $m\angle OPQ = m\angle PRQ + m\angle PQR$. Diketahui juga bahwa $\angle ORQ \cong \angle OQ'R'$ karena $\Delta OQR \sim \Delta OR'Q'$.

Dengan demikian,

$m\angle OPQ = m\angle OQ'P'$

$m\angle PRQ + m\angle PQR = m\angle OQ'R' + m\angle P'Q'R'$

$m\angle ORQ + m\angle PQR = m\angle ORQ + m\angle P'Q'R'$

$m\angle PQR = m\angle P'Q'R'$.

Diketahui bahwa sudut $\angle PQR$ adalah sudut siku-siku, sehingga $\angle P'Q'R'$ juga merupakan sudut siku-siku.

Untuk memperlihatkan bahwa bayangan dari lingkaran γ_1 merupakan titik yang terletak pada lingkaran dengan diameter $\overline{P'R'}$, maka dapat menggunakan cara yang sama seperti uraian di atas. ■

Dengan demikian, jika lingkaran γ_1 berada di dalam cermin lingkaran γ kemudian lingkaran γ_1 direfleksikan terhadap lingkaran γ, maka bayangan dari setiap titik pada lingkaran γ_1 berada di luar γ dan membentuk suatu lingkaran. Sebaliknya, bayangan dari lingkaran di luar γ adalah lingkaran di dalam γ yang tidak melalui O. Pembuktian dari lingkaran yang tidak melalui O dan memotong γ adalah sama.

Dengan demikian telah diketahui bahwa rerfleksi dari garis akan menjadi garis atau lingkaran dan lingkaran menjadi lingkaran atau garis, tergantung dari objek tersebut apakah melalui titik pusat cermin lingkaran atau tidak.

C. Sifat-sifat Refleksi terhadap Lingkaran

Untuk mengetahui sifat-sifat refleksi terhadap lingkaran, perlu diketahui bahwa refleksi terhadap lingkaran merupakan suatu transformasi.

Teorema 3.8

Setiap refleksi terhadap lingkaran adalah suatu transformasi.

Bukti

Transformasi adalah pemetaan bijektif (korespondensi satu-satu) dari himpunan titik dalam bidang Euclides ke himpunan yang sama.

Berdasarkan Teorema 3.4 diperoleh refleksi $M\gamma$ adalah suatu pemetaan terhadap lingkaran γ yang memenuhi:

i) $M\gamma(P) = P$ jika titik P terletak pada lingkaran γ.

ii) $M\gamma(P) = P'$ dengan $(OP)(OP') = r^2$, jika jika titik P terletak di daerah dalam lingkaran γ atau berada di luar lingkaran dan tidak terletak di titik pusat cermin lingkaran.

iii) Jika titik P berada di titik pusat cermin lingkaran maka bayangannya jauh tah terhingga.

1. Berdasarkan Teorema 3.4 terlihat bahwa daerah asal M adalah seluruh bidang V (Euclides).
2. $M\gamma$ merupakan pemetaan surjektif.

   Ambil titik $P' \in V$. Jika $P' \in \gamma$ maka $M\gamma(P) = P$. Misalkan $P' \notin \gamma$, maka $M\gamma(P) =P'$. *S*ehingga titik P' memiliki prapeta. Jadi M adalah surjektif.
3. $M\gamma$ merupakan pemetaan injektif.

   Jika $A \notin B$ maka akan dibuktikan bahwa $M_Q(A) \neq M_Q(B)$.

   Misalkan $A \notin \gamma$ dan $B \notin \gamma$ dan $M\gamma(A) = M\gamma(B)$ sehingga $A' = B'$.

Dari Definisi 3.1 dikatakan bahwa refleksi dari titik P terhadap γ yaitu P' yang berada pada sinar garis $\overrightarrow{OP}$. Karena $A' = B'$, maka dari titik A' akan terdapat dua ruas garis berlainan, yaitu $\overline{A'A}$ dan $\overline{A'B}$, ini jelas tidak mungkin karena $\overline{A'A}$ berada pada sinar garis $\overrightarrow{OA}$ sedangkan $\overline{A'B}$ tidak berada pada sinar garis $\overrightarrow{OB}$. Jadi pengandaian bahwa $A' \neq B'$ maka $M\gamma(A) = M\gamma(B)$ adalah salah.

Dengan demikian jika $A' \neq B'$ maka $M\gamma(A) \neq M\gamma(B)$. Jadi $M\gamma$ adalah injektif.

Berdasarkan 1,2,3 diperoleh bahwa kesimpulan bahwa $M\gamma$ adalah suatu transformasi. ■

Refleksi terhadap lingkaran merupakan suatu transformasi, selanjutnya akan ditentukan sifat-sifat dari refleksi terhadap lingkaran. Berdasarkan pembahasan sebelumnya telah diketahui bahwa refleksi terhadap titik dan garis memiliki sifat isometri, involusi, memiliki titik tetap, dan garis tetap. Dengan mengacu pada sifat yang ada pada refleksi terhadap titik dan garis, maka refleksi terhadap lingkaran memiliki sifat diantaranya:

1. Refleksi terhadap lingkaran bukan suatu isometri

Suatu isometri memiliki sifat yaitu memetakan garis menjadi garis (kolineasi), mempertahankan besar sudut, dan mempertahankan kesejajaran. Harus ditunjukkan bahwa refleksi terhadap lingkaran merupakan kolineasi, mempertahankan besar sudut dan mempertahankan kesejajaran.

1) Memetakan garis menjadi garis (kolineasi)

   Refleksi terhadap lingkaran bukan suatu kolineasi

   Contoh

   Ambil suatu garis *g* dan refleksikan terhadap lingkaran. Pada Teorema 3.5, telah diketahui bahwa jika suatu garis direfleksikan terhadap lingkaran dan melalui titik pusat cermin lingkaran, maka bayangannya akan berupa garis tersebut, tetapi jika garis tersebut direfleksikan dan tidak melalui titik pusat cermin lingkaran, berdasarkan Teorema 3.6 maka bayangan dari garis tersebut akan berupa suatu lingkaran yang melalui titik pusat cermin lingkaran, sehingga refleksi terhadap lingkaran bukan merupakan suatu kolineasi.

2) Mempertahankan sudut.

   Refleksi terhadap lingkaran tidak mempertahankan besar sudut.

   Contoh

   Ambil dua garis yang berpotongan di titik pusat cermin lingkaran. Jika kedua garis tersebut di refleksikan terhadap lingkaran, berdasarkan Teorema 3.5 maka bayangan dari kedua garis tersebut adalah garis itu sendiri. Oleh karena itu, besar sudut antara dua garis tersebut sama dengan besar sudut dari bayangannya, sehingga diperoleh bahwa releksi terhadap lingkaran mempertahankan besar sudut.

   Ambil dua garis tidak berpotongan di titik pusat cermin lingkaran. Jika kedua garis tersebut di refleksikan terhadap lingkaran, berdasarkan Teorema 3.6 akan diperoleh dua lingkaran yang berpotongan di dalam cermin lingkaran. Oleh karena itu, besar sudut antara dua garis tersebut berbeda dengan besar sudut dari bayangannya, sehingga diperoleh bahwa releksi terhadap lingkaran tidak mempertahankan besar sudut.

Dengan demikian, suatu refleksi terhadap lingkaran akan mempertahankan besar sudut jika dua garis tersebut berpotongan di titik pusat cermin lingkaran, tetapi jika dua garis tersebut tidak berpotongan di titik pusat cermin lingkaran, maka besar sudutnya tidak sama.

3) Mempertahankan kesejajaran.

Refleksi terhadap lingkaran tidak mempertahankan kesejajaran.

Contoh

Ambil dua garis g dan h yang sejajar dan terletak di luar cermin lingkaran. Jika kedua garis direfleksikan, berdasarkan Teorema 3.6, bayangannya akan berupa lingkaran yang melalui titik pusat cermin lingkaran. Dengan demikian refleksi terhadap lingkaran tidak mempertahankan kesejajaran.

Dengan demikian, telah diketahui bahwa refleksi terhadap lingkaran bukanlah suatu isometri.

2. Refleksi terhadap lingkaran merupakan involusi

Teorema 3.9

Refleksi terhadap lingkaran merupakan involusi

Bukti

Berdasarkan Teorema 3.4 diketahui bahwa jika terdapat titik P dan M_γ adalah suatu refleksi dengan γ sebagai cermin lingkaran, maka $M_\gamma(P) = P'$ dengan γ adalah cermin lingkaran dari $\overline{PP'}$. Karena γ adalah cermin lingkaran dari $\overline{PP'}$ maka γ juga merupakan cermin lingkaran dari $\overline{P'P}$. Berdasarkan Teorema 3.4 dapat ditulis juga $M_\gamma(P')= P$. Dengan demikian, diperoleh,

$$M_\gamma\left(M_\gamma(P)\right) = M_\gamma\left(P'\right) = P \text{ atau } M_\gamma M_\gamma = I$$

Maka refleksi titik P terhadap lingkaran dan dilanjutkan refleksi bayangan titik P terhadap lingkaran yang sama adalah titik P sendiri, sehingga refleksi terhadap lingkaran merupakan involusi. ■

3. Refleksi terhadap lingkaran memiliki titik tetap, lingkaran tetap, dan garis tetap

Teorema 4.0

Titik tetap terhadap M_γ adalah semua titik pada γ, garis tetap terhadap M_γ adalah garis yang direfleksikan terhadap lingkaran yang melalui titik pusat cermin lingkaran dan lingkaran tetap terhadap M_γ adalah cermin lingkaran itu sendiri.

Bukti

Berdasarkan Teorema 3.4(c) diketahui bahwa titik pada cermin lingkaran γ jika direfleksikan adalah titik itu sendiri, sehingga dapat dikatakan bahwa refleksi dari lingkaran γ terhadap cemin lingkaran γ adalah dirinya sendiri. Oleh karena itu, γ merupakan lingkaran tetap.

Berdasarkan Teorema 3.5 diketahui bahwa misal O menjadi titik pusat cermin lingkaran dan terdapat garis l yang melalui O. Misal titik P berada pada garis l dan titik P' merupakan hasil refleksi dari titik P. Maka, P' berada pada $\overline{OP}$, sehingga titik P' juga berada pada garis l. Dengan demikian, setiap titik pada garis l jika direfleksikan maka hasilnya akan berada pada garis l tersebut. Oleh karena itu, garis l merupakan garis tetap. ■

BAB IV

SIMPULAN DAN SARAN

A. Simpulan

Refleksi terhadap lingkaran pada dasarnya bisa dikatakan sebagai suatu inversi. Berdasarkan pembahasan mengenai refleksi terhadap lingkaran dapat ditarik beberapa kesimpulan, antara lain:

1. Definisi Refleksi Terhadap Lingkaran

   Untuk setiap titik $P \neq O$ (titik pusat lingkaran), maka refleksi dari titik P terhadap lingkaran γ yang berpusat di O adalah titik P' yang berada pada sinar garis $\overrightarrow{OP}$, sehingga $(OP)(OP') = r^2$. Titik O disebut titik pusat cermin lingkaran dan γ disebut cermin lingkaran, sedangkan r disebut jari-jari cermin lingkaran.

2. Menentukan bayangan titik, garis, dan lingkaran jika direfleksikan terhadap lingkaran.

   a. Bayangan titik jika direfleksikan terhadap lingkaran dipenuhi:

      i) $M\gamma(P) = P$ jika titik P terletak pada lingkaran γ.

      ii) $M\gamma(P) = P'$, dengan $(OP)(OP') = r^2$, jika titik P terletak di daerah dalam lingkaran γ atau di daerah luar lingkaran dan tidak terletak di titik pusat cermin lingkaran.

iii) Jika titik P berada di titik pusat cermin lingkaran maka bayangannya jauh tah terhingga.

b. Bayangan garis jika direfleksikan terhadap lingkaran ditentukan oleh posisi dari garis tersebut. Jika garis tersebut melalui titik pusat cermin lingkaran, maka bayangan akan berupa garis itu sendiri. Jika garis tersebut memotong cermin lingkaran dan tidak melalui titik pusat cermin lingkaran, maka akan menghasilkan bayangan sebuah lingkaran yang melalui titik pusat cermin lingkaran. Jika garis tersebut di luar cermin lingkaran, maka bayangannya juga sebuah lingkaran yang melalui titik pusat cermin lingkaran.

c. Suatu lingkaran yang direfleksikan terhadap lingkaran akan menjadi sebuah lingkaran jika lingkaran tersebut tidak menyentuh titik pusat cermin lingkaran.

3. Sifat-sifat Refleksi Terhadap Lingkaran

Sifat-sifat refleksi terhadap titik dan garis berbeda dengan refleksi terhadap lingkaran. Sifat-sifat refleksi terhadap lingkaran antara lain adalah refleksi terhadap lingkaran bukan merupakan isometri karena tidak memetakan garis menjadi garis (kolineasi), tidak mempertahankan besar sudut, dan tidak mempertahankan kesejajaran. Refleksi merupakan involusi yaitu $M_\gamma M_\gamma = I$, dan refleksi terhadap lingkaran memiliki titik tetap dan lingkaran tetap yaitu semua titik yang terletak pada cermin lingkaran, dan diketahui bahwa titik pada lingkaran γ jika direfleksikan adalah titik itu sendiri, sehingga γ merupakan lingkaran tetap.

B. Saran

Pembahasan topik refleksi terhadap lingkaran (dengan cermin suatu lingkaran) hanya menggunakan titik, garis, dan lingkaran sebagai objek yang akan direfleksikan, sehingga bagi para pembaca yang tertarik dengan topik ini dapat mengembangkan pembahasan pada objek yang lain dan aplikasi dari refleksi terhadap lingkaran.

DAFTAR PUSTAKA

Kozai, Kenji., & Libeskind, Shlomo. 2009. *Circle Inversions and Applications to Euclidean Geometry.*: diakses melalui http://jwilson.coe.uga.edu pada tanggal 5 Januari Desember 2011 pukul 21.30.

Kusno. 2004. *Geometri.* Universitas Jember: Jurusan Matematika.

Greenberg, Marvin Jay. 1974. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries Development and History.* New York: W.H. Freeman and Company.

Rawuh. 1994. *Geometri Transformasi*. Bandung: Deparetement Pendidikan dan Kebudayaan

Rich, Barnett.2005. G*eometri*. Jakarta: Airlangga

Susanta. 1990. *Geometri Transformasi*. Yogyakarta: FMIPA UGM