BENTUK DUAL MASALAH SOCP NORMA SATU

Caturiyati[1], Ch. Rini Indrati[2], Lina Aryati[3]

[1] Mahasiswa Program Doktor Matematika FMIPA UGM dan Dosen Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY, [2,3] Dosen Jurusan Matematika FMIPA UGM
[1]caturiyatiwdd@gmail.com, [2]rinii@ugm.ac.id, [3]lina@ugm.ac.id

Abstrak

Second order cone programming (SOCP) norma satu merupakan masalah menentukan solusi optimal atas masalah linear dengan kendala dibatasi pada daerah yang merupakan irisan *affine* linear dengan beberapa *second order cone* (SOC) norma satu. Seperti pada masalah *linear programming* (LP), masalah SOCP juga mempunyai struktur dual. Pada paper ini akan disampaikan bagaimana membangun struktur dual masalah dualitas SOCP norma satu dengan menggunakan fungsi Lagrange melalui dua cara, bentuk dual dan bentuk masalah *conic*, dengan mengasumsikan dual norma satu adalah norma infinit.

Kata kunci: SOCP norma satu, dualitas, primal-dual.

Pendahuluan

Second order cone programming (SOCP) merupakan masalah program konveks yang berakibat teori dualitasnya dapat dikembangkan. Banyak teori dualitas untuk masalah linear programming (LP), namun ada teori untuk SOCP berbeda dari teori untuk LP. (Alizadeh dan Goldfarb, 2003.) Yang dikembangkan oleh Alizadeh dan Goldfarb pada papernya mengenai dualitas SOCP merupakan dualitas SOCP norma dua. Andersen et.al. 2002 membahas masalah dualitas pada optimisasi SOC dan *p order cone*. Pada tahun 2000 dalam papernya Andersen et.al. mengimplementasikan metode titik primal-dual untuk menyelesaikan masalah optimisasi *conic* kuadratik. Pada paper ini akan dikupas bagaimana membangun struktur dual masalah dualitas pada SOCP norma satu menggunakan bentuk Lagrange dan menggunakan dual *conic*, dengan asumsi dual norma satu adalah norma infinit.

Diberikan masalah SOCP norma satu ($\|.\|_1$) sebagai berikut

$$\text{minimumkan } \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x} \tag{1}$$

$$\text{dengan kendala } \|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + b_i\|_1 \leq \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + d_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

dengan variabel $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, parameter $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}, \boldsymbol{c}_i \in \mathbb{R}^n$ dan $d_i \in \mathbb{R}$. Dualitas (1) akan ditentukan menggunakan fungsi Lagrange dengan dua cara.

Pembahasan

1. Dualitas Lagrange

Sebelum membahas dualitas pada SOCP norma satu, akan diurai kembali mengenai bentuk Lagrange dan dulitas pada masalah bentuk Lagrange sebagai berikut. Diberikan masalah optimisasi berkendala bentuk standar (tidak perlu konveks)

minimum $f_0(\boldsymbol{x})$

dengan kendala $f_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \;\; i = 1, \dots, m$ (a)

$h_i(\boldsymbol{x}) = 0, \;\; i = 1, \dots, p$

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ variabel, $\mathcal{D}$ domain, p^* nilai optimal.

Bentuk Lagrange (a) adalah:

Didefinisikan $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, dengan $\mathbf{dom}\, L = \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$,

$$L(\boldsymbol{x}, \lambda, \nu) = f_0(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, f_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i\, h_i(\boldsymbol{x}) \qquad \text{(b)}$$

yang merupakan jumlah terbobot fungsi tujuan dan fungsi kendala, dengan λ_i pengganda Lagrange berhubungan dengan $f_i(\boldsymbol{x}) \leq 0$ dan ν_i pengganda Lagrange berhubungan dengan $h_i(\boldsymbol{x}) = 0$

Selanjutnya dapat dibentuk suatu fungsi dual Lagrange berikut:

Didefinisikan suatu fungsi dual Lagrange: $g: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, dengan

$$\begin{aligned} g(\lambda, \nu) &= \inf_{x \in \mathcal{D}} L(\boldsymbol{x}, \lambda, \nu) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{D}} \left(f_0(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, f_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i\, h_i(\boldsymbol{x}) \right) \end{aligned}$$

g suatu fungsi konkaf.

Lemma1. *Sifat batas bawah*: *jika* $\lambda \succcurlyeq 0$, *maka* $g(\lambda, \nu) \leq p^*$

Bukti: Jika $\tilde{\boldsymbol{x}}$ fisibel dan $\lambda \succcurlyeq 0$, maka

$$f_0(\tilde{\boldsymbol{x}}) \geq L(\tilde{\boldsymbol{x}}, \lambda, \nu) \geq \inf_{x \in \mathcal{D}} L(\boldsymbol{x}, \lambda, \nu) = g(\lambda, \nu)$$

meminimumkan atas semua fisibel $\tilde{\boldsymbol{x}}$ memberikan $p^* \geq g(\lambda, \nu)$. ■

2. Dualitas SOCP Norma Satu

Berikut ini akan dibangun struktur dual masalah SOCP norma satu, dengan asumsi dual dari norma satu adalah norma infinit.

Bentuk dual masalah SOCP norma satu pada (1) adalah

$$\begin{aligned} &\text{maksimumkan } \textstyle\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{b}_i^T\boldsymbol{u}_i + d_i v_i) \\ &\text{dengan kendala } \textstyle\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{A}_i^T\boldsymbol{u}_i + c_i v_i) + \boldsymbol{f} = 0 \qquad (2) \\ &\qquad\qquad \|\boldsymbol{u}_i\|_\infty \le v_i, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

dengan variabel $\boldsymbol{u}_i \in \mathbb{R}^{n_i}, v_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$ dan data masalah diberikan sebagai $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n}, \boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}^{n_i}, c_i \in \mathbb{R}$ dan $d_i \in \mathbb{R}$.

Masalah (2) atau dual SOCP norma satu dapat diperoleh dengan dua cara berikut:

1. Mendefinisikan variabel baru $\boldsymbol{y}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ dan $t_i \in \mathbb{R}$ dan persamaan $y_i = \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i$, $t_i = \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + d_i$, dan menurunkan dual Lagrange.

2. Dimulai dari formulasi conic dari SOCP dan menggunakan dual *conic*. Menggunakan fakta bahwa *second order cone* (SOC) self dual:
   $t \ge \|\boldsymbol{u}_i\|_1 \Leftrightarrow tv + \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} \ge 0$, untuk semua $v, \boldsymbol{y}$ sehingga $v \ge \|\boldsymbol{y}\|_1$
   Syarat $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} \le tv$ ketaksamaan Cauchy-Schwarz sederhana.

Bentuk Dual masalah SOCP Norma Satu Cara I

Pertama, didefinisikan variabel baru, dan masalah menjadi:

$$\begin{aligned} &\text{minimumkan } \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ &\text{dengan kendala } \|\boldsymbol{y}_i\|_1 \le t_i, \quad i = 1, \dots, m, \qquad (3) \\ &\qquad\qquad \boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i, t_i = \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + d_i, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

Kedua, dibangun bentuk Lagrange (3) sebagai berikut

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t, \lambda, \nu, \mu)$$
$$= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i(\|\boldsymbol{y}_i\|_1 - t_i) + \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{v}_i^T(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_i) + \sum_{i=1}^{m}\mu_i(t_i - \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} - d_i)$$

$$= \left(\boldsymbol{c} - \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{A}_i^T \nu_i - \sum_{i=1}^{m} \mu_i \boldsymbol{c}_i \right)^T \boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i \|\boldsymbol{y}_i\|_1 + \nu_i^T \boldsymbol{y}_i) + \sum_{i=1}^{m} (-\lambda_i + \mu_i) t_i$$
$$- \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{b}_i^T \nu_i + d_i \mu_i).$$

Dari bentuk Lagrange masalah SOCP Norma 1 tersebut, maka

a. Minimum atas $\boldsymbol{x}$ terbatas bawah jika dan hanya jika

$$\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{A}_i^T \nu_i + \mu_i \boldsymbol{c}_i) = \boldsymbol{c}.$$

b. Untuk meminimumkan atas $\boldsymbol{y}_i$,

$$\inf_{x \in \mathcal{D}} (\lambda_i \|\boldsymbol{y}_i\|_1 + \nu_i^T \boldsymbol{y}_i) = \begin{cases} 0 & \|\nu_i\|_1 \leq \lambda_i \\ -\infty & \text{lainnya.} \end{cases}$$

c. Minimum atas t_i terbatas bawah jika dan hanya jika $\lambda_i = \mu_i$.

Ketiga, membentuk fungsi dual lagrange sebagain berikut

$$L(\lambda, \nu, \mu) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{b}_i^T \nu_i + d_i \mu_i) & \text{jika } \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{A}_i^T \nu_i + \mu_i \boldsymbol{c}_i) = \boldsymbol{c}, \|\nu_i\|_\infty \leq \lambda_i, \mu = \lambda \\ -\infty & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Keempat, diperoleh masalah dual masalah SOCP Norma satu dengan asumsi dual norma satu adalah norma infinit,

$$\begin{aligned} &\text{maksimumkan } -\textstyle\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{b}_i^T \nu_i + d_i \lambda_i) \\ &\text{dengan kendala } \textstyle\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{A}_i^T \nu_i + \lambda_i \boldsymbol{c}_i) = \boldsymbol{c} \\ &\qquad\qquad \|\nu_i\|_\infty \leq \lambda_i, \;\; i = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{4}$$

Selanjutnya (4) merupakan suatu SOCP norma infinit.

Bentuk Dual masalah SOCP Norma Satu Cara II

Pertama, bentuk SOCP sebagai suatu masalah *conic*

$$\begin{aligned} &\text{minimumkan } \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ &\text{dengan kendala } -(\boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{x} + d_i, \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i) \preccurlyeq_{K_i} \boldsymbol{0}, \;\; i = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{5}$$

dengan $K_i = \{(\boldsymbol{u}, t) | \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{m-1}, t \in \mathbb{R}, \|\boldsymbol{u}\|_1 \leq t\}$, yaitu SOC norma satu. Dengan asumsi dual dari norma satu adalah norma infinit, maka dual dari SOC K_i adalah SOC norma infinit $K_i^* = \{(\boldsymbol{v}, w) | \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{m-1}, w \in \mathbb{R}, \|\boldsymbol{v}\|_\infty \leq w\}$.

Kedua, dibangun bentuk Lagrange dari (5) adalah:

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} - \sum_i (\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i)^T \boldsymbol{u}_i - \sum_i (\boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{x} + d_i) \boldsymbol{v}_i$$

$$= \left(\boldsymbol{c} - \sum_i (\boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{v}_i) \right)^T x - \sum_i (\boldsymbol{b}_i^T \boldsymbol{u}_i + d_i \boldsymbol{v}_i)$$

untuk $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{u}_i) \succcurlyeq_{K_i^*} 0$ (dengan $\boldsymbol{v}_i \geq \|\boldsymbol{u}_i\|_\infty$)

dengan

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i) = \left(\boldsymbol{c} - \sum_i (\boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{v}_i) \right)^T \boldsymbol{x} - \sum_i (\boldsymbol{b}_i^T \boldsymbol{u}_i + d_i v_i)$$

dan fungsi dual:

$$g(\lambda, \nu, \mu) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{b}_i^T \boldsymbol{\nu}_i + d_i \mu_i) & \text{jika } \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{\nu}_i + \mu_i c_i) = \boldsymbol{c}, \\ -\infty & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Ketiga, bentuk dual dalam bentuk masalah *conic* sebagai berikut

maksimumkan $-\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{b}_i^T \boldsymbol{u}_i + d_i v_i)$

dengan kendala $\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{u}_i + v_i c_i) = \boldsymbol{c}$

$(v_i, \boldsymbol{u}_i) \succcurlyeq_{K_i^*} 0, \;\; i = 1, \ldots, m.$

3. Kesimpulan dan Saran

Kesimpulan

Membangun struktur dual masalah SOCP norma satu dapat melalui dua cara, cara pertama menggunakan bentuk Lagrange dan cara kedua menggunakan bentuk masalah *conic*. Masalah ini diperoleh dengan asumsi bahwa dual dari norma satu adalah norma infinit.

Diberikan masalah SOCP norma satu berikut

minimumkan $\boldsymbol{f}^T \boldsymbol{x}$

dengan kendala $\|\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x} + b_i\|_1 \leq \boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{x} + d_i, \;\; i = 1, \ldots, m,$

dengan variabel $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, parameter $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}, \boldsymbol{c}_i \in \mathbb{R}^n$ dan $d_i \in \mathbb{R}$.

1. Struktur dual masalah SOCP norma satu dengan cara pertama

   maksimumkan $-\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{b}_i^T v_i + d_i\lambda_i)$

   dengan kendala $\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{A}_i^T v_i + \lambda_i \boldsymbol{c}_i) = \boldsymbol{c}$

   $\|v_i\|_\infty \le \lambda_i, \;\; i = 1, \dots, m.$

2. Struktur dual masalah SOCP norma satu dengan cara kedua

   maksimumkan $-\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{b}_i^T \boldsymbol{u}_i + d_i v_i)$

   dengan kendala $\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{u}_i + v_i c_i) = \boldsymbol{c}$

   $(v_i, \boldsymbol{u}_i) \succcurlyeq_{K_i^*} 0, \;\; i = 1, \dots, m.$

Saran

Secara khusus masalah dualitas untuk masalah SOCP norma satu dan SOCP norma infinit, dan secara umum masalah dualitas SOCP norma *p*, dengan $1 \le p \le \infty$, masih terbuka untuk dipelajari.

DAFTAR PUSTAKA

Alizadeh, F. and Goldfarb, D. 2003. Second-order *Cone* programming. *Math. Program*, 95, 3-51.

Andersen, E.D., Roos, C., and Terlaky, T. 2002. Notes on duality in second order and p-order *Cone* optimization. *A Journal of Mathematical Programming and Operation Research*, Volume 51, Issue 4, pages 627-643.

Andersen, E.D., Roos, C., and Terlaky, T. 2000. On Implementing a Primal-dual Interior-point Method for *Conic* Quadratic Optimization. *www.**optimization**-online.org/DB_FILE/2000/12/245.pdf*