SKRIPSI

PERBANDINGAN SEGIEMPAT SACCHERI PADA GEOMETRI EUCLID DAN GEOMETRI NON EUCLID

Diajukan Kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Yogyakarta

Untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan

Guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains

Disusun Oleh :

Tambah Prayoga

(06305141048)

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2011

PERSETUJUAN

SKRIPSI

Perbandingan Segiempat Saccheri Pada Geometri Euclid

dan Geometri Non Euclid

Telah memenuhi syarat dan siap untuk diujikan

Disetujui pada:

Hari/ tanggal: Senin/06 Juni 2011

Dosen pembimbing

Sugiyono, M. Pd

NIP.195308251979031004

PERNYATAAN

Yang bertanda tangan dibawah ini, saya:

Nama	: Tambah Prayoga
NIM	: 06305141048
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: MIPA
Judul Skripsi	: Perbandingan Segiempat Saccheri Pada Geometri Euclid dan Geometri Non Euclid

Menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, dan sepanjang pengetahuan saya tidak berisi materi yang telah dipublikasikan atau ditulis oleh orang lain atau telah digunakan sebagai persyaratan menyelesaikan studi di perguruan tinggi lain, kecuali pada bagian-bagian tertentu yang saya ambil sebagai acuan. Apabila ternyata terbukti bahwa pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab saya.

Yogyakarta, 06 Juni 2011

Yang menyatakan,

Tambah Prayoga

NIM.06305141048

PENGESAHAN

Skripsi

Perbandingan Segiempat Saccheri Pada Geometri Euclid

dan Geometri Non Euclid

Disusun Oleh :

Tambah Prayoga

06305141048

Telah Dipertahankan Di Depan Dewan Penguji Skripsi Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Yogyakarta pada tanggal 15 Juni 2011 dan dinyatakan telah memenuhi syarat guna memperoleh gelar sarjana sains.

Susunan Panitia Penguji Skripsi

Nama	Jabatan	Tanda Tangan	Tanggal
Sugiyono, M.Pd.	Ketua Penguji	....	06-07-2011
Wahyu S., M.Ed.	Sekretaris Penguji	....	06-07-2011
Murdanu, M.Pd.	Penguji Utama	....	1-7-20
Himmawati P.L., M.Si.	Penguji Pendamping	....	06-07-2011

Yogyakarta, 11 Juli 2011

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dekan

Dr. Ariswan

NIP. 19590914 198803 1 003

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

Orang yang paling sukses adalah orang yang paling besar Ikhtiarnya dan paling kusyuk Do'anya

Hari ini harus lebih bermanfaat dari hari kemarin, dan hari esok harus lebih bermanfaat dari hari ini

Alhamdulillah… dengan segenap rasa syukur kepada Allah SWT.Karya sederhana ini saya persembahkan kepada:

- Kedua orang tuaku: Ibu Tamini & Bapak Untung
- Saudara-saudaraku seiman dan seperjuangan.
- Keluarga di Masjid Mujahidin UNY (Takmir,dan saudara-saudaraku pengurus perpustakaan Masjid Mujahidin UNY : A'Eldwin, A'Riza, A'Agung MIPA, A'Agung FT, A'Jendri, A'Aprian, A'Gunawan, U'Nesya, U'Susi, U'Satriah, U'Riyanti, U'Yesi', U'Hikmah dan para pengurus perpus lainya)

PERBANDINGAN SEGIEMPAT SACCHERI PADA GEOMETRI EUCLID DAN GEOMETRI NON EUCLID

Oleh:
Tambah Prayoga
NIM.06305141048

ABSTRAK

Segiempat Saccheri adalah segiempat dengan sepasang sisi sama panjang yang tegaklurus terhadap sisi alasnya. Tujuan penulisan Skripsi ini adalah untuk membandingkan sifat-sifat segiempat Saccheri pada Geometri Euclid dan Geometri Non Euclid.

Dengan mengkaji sifat-sifat Segiempat Sacheri Pada Geometri Euclid dan Geometri Non Euclid ini akan ditentukan Perbandingan dari Segiempat Saccheri pada Geometri Euclid dan Geometri Non Euclid.

Berdasarkan kajian yang telah dilakukan penulis menemukan (1) Segiempat Saccheri pada Geometri Parabolik memiliki sudut-sudut puncak yang kongruen siku-siku, panjang sisi puncaknya samadengan panjang sisi alasnya, dan panjang segmen yang menghubungkan titik-titik tengah dari puncak dan alasanya sama panjang dengan kaki-kaki segiempat Saccheri tersebut. (2) Segiempat Saccheri pada Geometri Hiperbolik memiliki sudut-sudut puncak kongruen dan sudutnya lancip, panjang sisi puncaknya lebih panjang dari panjang sisi alasnya, dan panjang segmen yang menghubungkan titik-titik tengah dari puncak dan alasanya lebih pendek dari kaki-kaki segiempat Saccheri tersebut. (3) Segiempat Saccheri pada Geometri Eliptik memiliki sudut-sudut puncak yang kongruen dan sudutnya tumpul, panjang sisi puncaknya kurang dari panjang sisi alasnya, dan panjang segmen yang menghubungkan titik-titik tengah dari puncak dan alasanya lebih panjang daripada kaki-kaki segiempat Saccheri tersebut.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, hidayah, dan barokah sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan tugas akhir ini.

Skripsi ini disusun untuk memenuhi sebagian persyaratan guna memperoleh gelar Sarjana Sains Program Studi Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta. Penulis dapat menyelesaikan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Ariswan, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
2. Bapak Dr. Hartono, selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika.
3. Ibu Atmini Dhoruri, M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematika.
4. Bapak Fauzan, M.Sc, ST, selaku Penasihat Akademik.
5. Bapak Sugiyono, M.Pd. selaku Dosen pembimbing yang telah memberikan bimbingan dan arahan dalam proses penyusunan skripsi ini.
6. Keluarga, dan sahabat, yang selalu memberikan do’a juga bantuannya.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca pada umumnya dan bagi penulis pada khususnya.

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Keterangan
$\overleftrightarrow{AB}$	:Garis yang memuat titik A dan titik B
$\overrightarrow{AB}$	:Sinar garis yang memuat titik B dan titik A sebagai titik pangkal
$\overline{AB}$	:segmen yang titik pangkalnya titik A dan titik B
[ABC]	:Titik B terletak diantara A dan C
m∠APB	:Besar sudut pada titik P, dengan kaki sudut $\overrightarrow{PA}$ dan $\overrightarrow{PB}$
∠APB	:Sudut yang dibentuk oleh sinar $\overrightarrow{PA}$ dan sinar $\overrightarrow{PB}$ dengan P sebagai titik sudutnya
≅	:Kongruen
∪	:Gabungan
ΔABC	:Segitiga ABC
■	: Terbukti

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

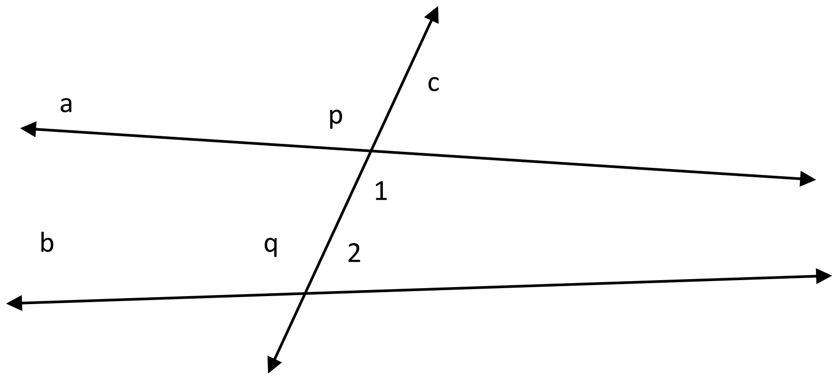
Geometri berasal dari kata Latin "*Geometria" Geo* yang artinya tanah dan *metria* yang artinya pengukuran. Berdasarkan sejarah Geometri tumbuh jauh sebelum Masehi karena keperluan pengukuran tanah, di sekitar kawasan sungai Nil setelah terjadi banjir, dalam bahasa Indonesia Geometri dapat diartikan sebagai Ilmu Ukur (Moeharti, 1986: 1.2). Geometri didefinisikan juga sebagai cabang Matematika yang mempelajari titik, garis, bidang dan benda-benda ruang serta sifat-sifatnya, ukuran-ukurannya dan hubungannya satu sama lain.

Geometri dapat dipandang sebagai sistem deduktif yaitu suatu sistem yang harus ada pengertian-pengertian pangkal, yaitu unsur-unsur dan relasi-relasi yang tidak didefinisikan, kemudian definisi, selain definisi juga harus ada relasi-relasi lain yang dapat dibuktikan dengan menggunakan definisi atau postulat-postulat itu yang disebut dalil atau teorema. Proses untuk mendapatkan atau menurunkan suatu dalil dari himpunan pangkal, definisi, dan postulat inilah yang disebut deduksi. Dalam Geometri sebagai suatu sistem deduktif himpunan postulat itu dapat dipandang sebagai aturan permainan (Moeharti, 1986: 1.3 – 1.4).

Geometri yang pertama-tama muncul sebagai suatu sistem deduktif adalah Geometri dari Euclides. Kira-kira tahun 330 SM, Euclides menulis buku sebanyak 13 buah. Dalam bukunya yang pertama Euclid menjelaskan mengenai definisi, postulat, aksioma dan dalil (Moeharti, 1986: 1.9). Namun Geomerti Euclid ini memiliki kelemahan, salah satu kelemahanya ada pada postulat kelima dari Euclid yang terkenal dengan Postulat Parallel atau Postulat Kesejajaran yang terlalu panjang sehingga merisaukan para matematikawan. Sehingga beberapa matematikawan menganggap bahwa postulat kelima Euclid bukan postulat dan dapat dibuktikan dengan keempat postulat yang lain. Usaha untuk membuktikan postulat kelima ini berlangsung sejak Euclid masih hidup sampai kira-kira tahun 1820. Tokoh yang berusaha membuktikan ini antara lain Proclus dari Aleksandria (410 - 485) Girolamo Saccheri dari Italia (1607 - 1733), Karl Friedrich Gauss dari Jerman (1777 - 1855), Wolfgang (Farkas) Bolyai dari Hongaria (1775 - 1856), dan anaknya Yanos Bolyai (1802 - 18060) dan juga Nicolai Ivanoviteh Lobachevsky (1793 - 1856) (Moeharti, 1986: 1.13).

Menurut Moeharti (1986: 1.12), postulat kesejajaran kelima Euclid adalah sebagai berikut:

“ Jika suatu garis lurus memotong dua garis lurus dan membuat sudut-sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku, kedua garis itu jika diperpanjang tak terbatas, akan bertemu dipihak tempat kedua sudut dalam sepihak kurang dari sudut siku-siku”



Gambar 1. Ilustrasi postulat ke lima Euclid

Pada gambar 1 garis c memotong garis a dan garis b yang mengakibatkan sudut 1 dan sudut 2 kurang dari 180°, garis a dan garis b akan bepotongan pada pihak sudut yang kurang dari 180°, yang pada gambar adalah perpanjangan yang ke kanan.

Postulat kelima ini masih sukar diterima dan dipahami maka beberapa matematikawan berusaha untuk membuktikan dan menggantikannya dengan postulat yang ekuivalen. Salah satu postulat yang paling terkenal dan sederhana adalah Aksioma Playfair oleh John Playfair yang bunyinya (Prenowitz, 1965:25)

"Hanya ada satu garis sejajar (*parallel*) pada garis yang melalui titik bukan pada garis tersebut"

Matematikawan lain, yaitu Proclus yang menulis komentar dari *The Elements* yang menyebutkan usaha pembuktian untuk menyimpulkan dari postulat kelima. Proclus kemudian memberikan bukti sendiri, dan memberikan postulat yang ekuivalen dengan postulat kesejajaran "Jika suatu garis lurus memotong salah satu dari dua garis parallel ia juga akan memotong yang lain, dan garis-garis lurus yang parallel dengan suatu garis lurus yang sama, adalah parallel satu sama lain". Sedangkan John Wallis menggantikan postulat kesejajaran Euclid dengan postulat Wallis. John Wallis menyerah mencoba membuktikan dalil paralel dalam Geometri Netral. Sebaliknya, ia mengusulkan sebuah postulat baru, yang ia merasa lebih masuk akal daripada postulat kelima Euclid (Prenowitz, 1965:28).

Geometri Non Euclid timbul karena para matematikawan berusaha untuk membuktikan postulat kelima dari Euclides. Sehingga Geometri Non Euclid masih berdasarkan empat postulat pertama dari Euclides dan hanya berbeda pada postulat kelimanya. Ada dua macam Geometri Non Euclid yang pertama adalah ditemukan hampir bersamaan oleh 3 tokoh berlainan dan masing-masing bekerja sendiri-sendiri. Tokoh-tokoh tersebut adalah Karl Friedrich Gauss dari Jerman, Yonos Bolyai dari Hongaria, dan Nicolai Ivanovitch Lobachevsky dari Rusia, Geometri ini disebut Geometri Lobachevsky. Geometri Non Euclid yang kedua adalah Geometri yang diketemukan oleh G.F.B. Bernhard Riemann dari Jerman, Geometri ini disebut Geometri Elliptik atau Geometri Riemann (Moeharti, 1986: 1.20).

Suatu geometri yang dilengkapi dengan sistem aksioma-aksioma keterjadian, sistem aksioma-aksioma urutan, sistem aksioma kekongruenan (ruas garis, sudut, segitiga) dan sistem aksioma-aksioma Archiemedes disebut dengan Geometri Netral. Didalam geometri ini ada konsep kesejajaran dua garis; di dalam geometri Netral ini, tidak disebut banyaknya garis yang melalui sebuah titik T diluar sebuah garis lain yang dapat sejajar dengan garis ini. Kalau banyaknya garis itu hanya satu, Geometri Netral itu dinamakan Geometri Euclide. Jika ada lebih dari satu garis, Geometri Netral ini disebut Geometri Lobachevsky. Geometri Lobachevsky adalah salah satu Geometri Non Euclide. Dari Geometri Euclid dapat diambil sarinya berupa dua Geometri yang berlainan dalam dasar logikanya, pengertian pangkalnya dan aksiomanya. Kedua Geometri itu adalah Geometri Affine dan Geometri Absolut atau Geometri Netral. Geometri Affin yang dikenalkan oleh Leonhard Euler dari Jerman, Geometri ini didasarkan pada postulat I, II,dan V, sedangkan Geometri Absolute pertama kali diperkenalkan oleh Y. Bolyai dari Hongaria. Geometri ini mendasarkan pada empat postulat pertama dari Euclid dan meninggalkan postulat ke lima.

Dalam Geometri Netral ini ada konsep kesejajaran. Akan tetapi ada satu hal yaitu bahwa melalui sebuah titik diluar garis tidak perlu ada tepat satu garis sejajar dengan garis yang diketahui; yang jelas dalam Geometri ini ada garis yang sejajar garis yang diketahui melalui titik tadi.

Hal yang amat mendasar, bahwa dalam Geometri Netral ini ada kemungkinan adanya persegi panjang atau ada kemungkinan tidak ada persegi panjang. Dalam hal Geometri Netral mengandung persegi panjang, maka jumlah besar sudut-sudut dalam setiap segitiga adalah dua kali sudut siku-siku atau 180°. Dalam Geometri Netral ada segiempat yang penting, yaitu yang dinamakan segiempat Saccheri. Dalam Geometri Euclide, tidak ada perbedaan antara segiempat Saccheri dan sebuah persegi panjang.

Kemudian Yesuit Giroloma Saccheri yang menyelidiki permasalah pembuktian postulat kesejajaran Euclid dengan mengansumsikan negasi dari postulat kesejajaran Euclid. Secara khusus Saccheri belajar segi empat tertentu, yang selanjutnya segiempat ini dikenal sebagai segiempat Saccheri. Menurut Greeberg "Segiempat Saccheri adalah segiempat dengan sepasang sisi sama panjang yang tegak lurus terhadap sisi alasnya". Untuk suatu segiempat sachheri ABCD dengan sisi $\overline{AD}$ dan sisi $\overline{BC}$ (juga disebut kaki) bersifat sama panjang dan tegak lurus terhadap sisi $\overline{AB}, \overline{CD}$ disebut puncak (Prenowitz, 1965:31).

Segiempat Saccheri di gunakan oleh Yesuit Giroloma Saccheri untuk membuktikan tentang postulat kesejajaran Euclid, namun pembahasan mengenai

Segiempat Saccheri sendiri pada berbagai kajian belum sampai mendetail sampai ke sifat-sifat khusus Segiempat Saccheri untuk berbagai Geometri, baru sekedar pengantar tentang definisi Segiempat Saccheri saja.

B. Batasan Masalah

Dalam kajian Perbandingan Segiempat Saccheri pada Geometri Euclid dan Geometri Non-Euclid ini, permasalahan dibatasi untuk segiempat Saccheri beserta sifat-sifatnya pada Geometri Euclid dan Geometri Non Euclid, yaitu Geometri Parabolik , Geometri Hiperbolik, dan Geometri Eliptik.

C. Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana sifat-sifat segiempat Saccheri pada Geometri Euclid dan Geometri Non Euclid ?

D. Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah mengetahui sifat-sifat segiempat Saccheri pada Geometri Euclid dan Geometri Non Euclid ?

E. Manfaat Penulisan

Manfaat penulisan skripsi ini adalah :

1. Bagi penulis khususnya dan Mahasiswa Matematika pada umumnya mengetahui lebih jelas tentang Segiempat Saccheri dan sifat-sifatnya pada Geometri Euclid dan Geometri non Euclid.
2. Bagi Perpustakaan, menambah referensi tentang Segiempat Saccheri dan sifat-sifatnya pada Geometri Euclid dan Geometri non Euclid.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Dalam Bab II ini akan dibahas pengertian-pengertian dasar yang akan digunakan sebagai landasan pembahasan pada bab-bab selanjutnya yang dinyatakan dalam aksioma, definisi, teorema dan contoh. Pengertian-pengertian dasar yang akan dibahas adalah sebagai berikut:

A. Geometri Parabolik

Pada kajian Geometri Parabolik ini yang pertama akan dikaji adalah pengertian pangkal.

Dalam kajian ini yang merupakan pengertian pangkal yang pertama adalah titik. Titik hanya mempunyai posisi, titik tidak mempunyai panjang, lebar, ataupun ketebalan. Pengertian pangkal yang kedua adalah garis. Garis dilambangkan dengan simbol $\overleftrightarrow{AB}$, mempunyai panjang, tapi tidak mempunyai lebar dan ketebalan. Pengertian pangkal yang ke tiga adalah bidang. Bidang adalah suatu permukaan datar seperti bidang meja (Keedy, 1967: 32).

Aksioma 1.1 (Moeharti, 1986: 2.2)

Ada paling sedikit dua titik.

Aksioma 1.2 (Sova, 1999: 5)

Melalui tiap dua titik ada tepat satu garis.

Titik-titik A, B, C, D,… sebagai unsur yang tidak didefinisikan pada relasi keantaraan. Relasi ini dinyatakan dengan [ABC], yang berarti B terletak diantara A dan C.

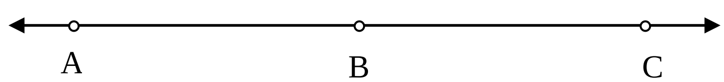
Untuk suatu garis $\overleftrightarrow{AC}$, diantara titik A dan titik C terdapat sebuah titik lain yang dapat memenuhi [ABC] yang diturunkan menjadi aksioma seperti dibawah ini.

Aksioma 1.3 (Moeharti, 1986: 2.2)

Jika A dan B dua titik berlainan, maka ada satu titik C yang memenuhi [ABC], titik B berada diantara A dan C.

Contoh:

Pada gambar 2 di bawah, titik A dan titik C menentukan satu garis dan diantara titik A dan titik C terdapat titik B.



Gambar 2. Titik B terletak diantara A dan C

Pada sebuah garis $\overleftrightarrow{AC}$ yang terdapat titik B diantara titik A dan titik C, sehingga memenuhi [ABC] titik A dengan C selalu berbeda, seperti pada aksioma 1.4 dibawah ini.

Aksioma 1.4 (Moeharti, 1986: 2.2)

Jika [ABC], maka A dan C berlainan A ≠ C.

Definisi 1.1 (keedy : 106) :

Dua ruas garis dikatakan kongruen jika dan hanya jika kedua ruas garis sama panjang.

Sebuah garis pada Geometri Parabolik berlaku urutan titik-titik yang tidak bisa dibolak-balik. Misalkan terdapat garis $\overleftrightarrow{AC}$ dan diantara kedua titik tersebut terdapat titik B maka akan berlaku [ABC], atau [CBA], namun tidak berlaku [BCA], sehingga berlaku aksioma 1.5 dibawah ini

Aksioma 1.5 (Moeharti, 1986: 2.2)

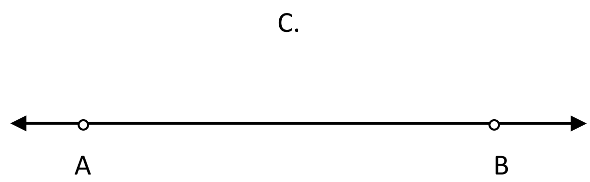
Jika [ABC], maka [CBA] tetapi tidak [BCA].

Pada bidang terdapat dua titik yang membetuk satu garis dan diluar garis tersebut terdapat banyak titik yang bukan termasuk dalam garis tersebut, minimal terdapat satu titik yang diluar garis tersebut yang merupakan titik ketiga yang berada pada bidang tersebut, kemudian dapat ditentukan aksioma 1.6 berikut.

Aksioma 1.6 (Moeharti, 1986: 2.5)

Jika AB suatu garis, ada suatu titik C tidak pada garis ini.

Ilustrasi untuk memperjelas aksioma diatas adalah gambar 3 berikut, terdapat garis yang ditentukan oleh titik A dan titik B, maka dapat ditentukan satu titik C yang diluar garis tersebut.



Gambar 3. Titik C terletak di luar garis A dan B

Definisi 1.2 (Keedy, 1967: 49):

Titik B diantara A dan C jika dan hanya jika A, B, dan C tiga titik yang segaris dan AB + BC = AC.

Definisi 1.3 (Keedy, 1967: 51):

M adalah titik tengah dari PR jika dan hanya jika P - M – R dan panjang PM = panjang MR.

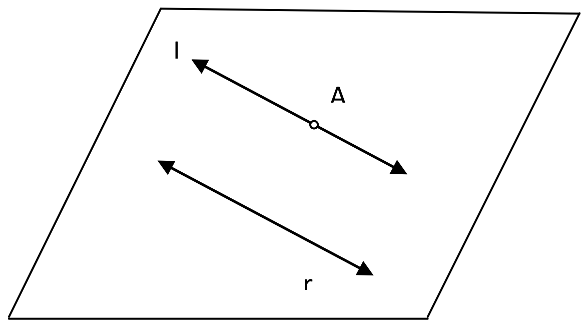
Garis- garis pada bidang memiliki beberapa maca relasi diantaranya garis-garis yang sejajar, dan garis-garis yang berpotongan, relasi-relasi ini dijabarkan sebagai berikut.

1. **Garis-Garis Sejajar**

Aksioma 1.7 (Moeharti, 1986: 3.2)

Untuk sebarang titik A dan sebarang garis r yang tidak melalui A ada dengan tepat satu garis melalui A dalam bidang yang memuat titik A dan garis r, yang tidak memotong r.

Ilustrasi untuk memperjelas aksioma diatas adalah gambar 4 berikut ini, terdapat sebuah garis r dan titik A, dan sebuah garis l yang melalui titik A yang tidak memotong garis r.



Gambar 4. Garis-garis sejajar

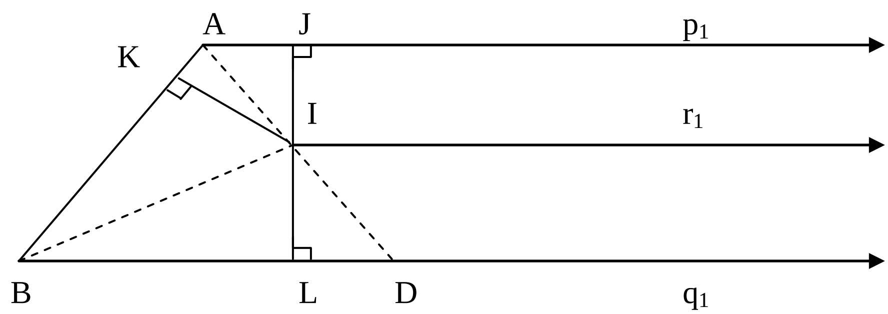
Dalam bidang terdapat dua sinar yaitu sinar p_1 dan sinar q_1 yang berlainan, kedua sinar tesebut p_1 sejajar dengan q_1, maka q_1 sejajar dengan p_1 sehingga dapat diturunkan dalil sebagai berikut.

Dalil 1.1 (Moeharti, 1986: 4.14)

Jika p_1 sejajar dengan q_1 maka q_1 sejajar dengan p_1.

Bukti Dalil 1.1

A adalah suatu titik pada sinar p_1, dan B adalah suatu titik pada sinar q_1, dan p_1 sejajar dengan q_1



Gambar 5. Bukti kesejajaran garis p_1 dan q_1

Dibuat garis bagi sudut A yang memotong q_1 di D. Garis bagi sudut B memotong AD di I. Ditarik IJ tegak lurus p_1, IK tegak lurus AB.

Kemudian direfleksikan terhadap AI dan BI dan terdapat IJ = IK = IL.

Misalkan r_1, garis bagi dalam sudut $\angle$LIJ. Maka refleksi terhadap r_1, menukar L dengan J dan menukar p_1 dengan q_1..

Karena p sejajar dengan q, maka q sejajar dengan p pada arah yang sama, yaitu q_1 sejajar dengan p_1. ■

2. **Perpotongan antar Garis**

Teorema 1.1 (Sova, 1999: 6)

Jika dua garis yang berlainan berpotongan, maka perpotonganya tepat pada satu titik.

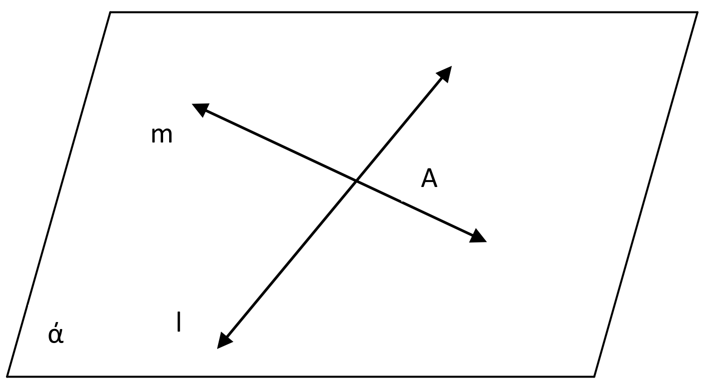
Buki Teorema 1.1

Misalkan garis l dan m adalah dua garis yang berbeda dan berpotongan.

Andaikan perpotongan garis l dan m ada dua titik yang berbeda, misalkan titik A dan titik B. Titik A dan B terletak pada garis l dan m. Dua titik perpotongan tersebut dapat dibuat satu garis $\overleftrightarrow{AB}$, dengan demikian garis l dan m adalah garis yang sama dengan garis $\overleftrightarrow{AB}$. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan awal yang menyatakan bahwa garis l dan m adalah dua garis berbeda yang berpotongan. ■

Untuk lebih memperjelas dapat dilihat pada ilustrasi dibawah ini

Dua garis l dan m adalah dua garis yang berbeda di bidang ά, dan kedua garis l dan m berpotongan di titik A



Gambar 6. Garis-garis yang berpotongan pada bidang ά

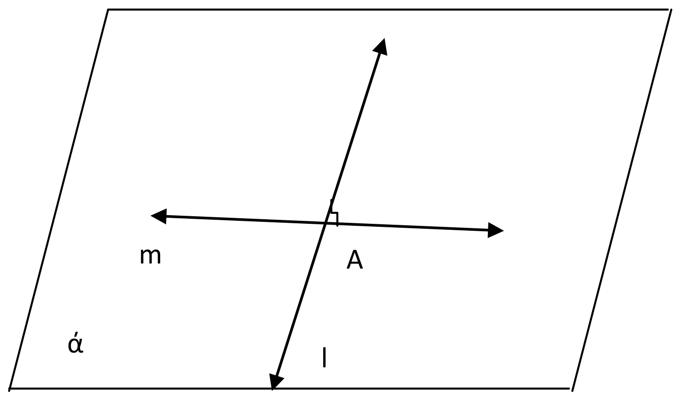
Aksioma 1.8 (Sova, 1999: 29)

Melalui sebuah titik diluar garis, terdapat dengan tepat satu garis yang berpotongan dan tegak lurus dengan garis yang diberikan.

Definisi 1.4 (Sova, 1999: 17)

Garis tegak lurus (*perpendicular*) adalah garis-garis yang saling berpotongan membentuk sudut siku-siku.

Ilustrasi untuk memperjelas definisi diatas adalah gambar berikut ini,



Gambar 7. Garis-garis yang berpotongan tegak lurus pada bidang ά

Teorema 1. 2 (Sova, 1999: 6)

Jika ada dua garis berpotongan, maka ada dengan tepat satu bidang yang memuat garis tersebut.

Bukti teorema 1.2 :

Misalkan terdapat dua garis yang berbeda yaitu l dan m berpotongan di A. misalkan diambil titik pada masing-masing garis l dan m selain titik A yaitu titik B dan C, maka titik A, B dan C adalah tiga titik yang tidak segaris, berdasar aksioma 1.7, maka titik A, B, dan C dengan tepat membentuk satu bidang, dan juga memuat garis l dan m yang berpotongan di A. ■

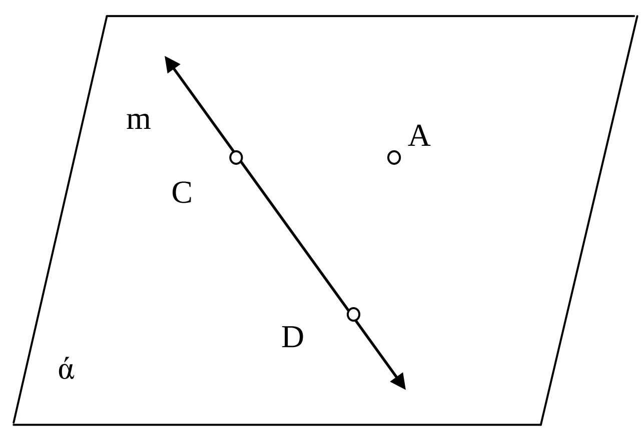
Teorema 1.3 (Sova, 1999: 6)

Untuk setiap garis dan satu titik di luar garis tersebut, terdapat tepat terdapat satu bidang yang memuatnya

Bukti teorema 1.3 :

Ambil sebarang garis dan sebuah titik di luar garis, pada garis yang sudah ada ambil sebarang dua titik yang berlainan, maka akan terdapat tiga titik yang berlainan dengan dua titik yang ada pada garis dan satu titik yang sudah di tentukan di awal, berdasar aksioma 1.7 maka dari tiga titik tersebut dengan tepat terbentuk satu bidang. ■

Misalkan ada garis l, dan titik A di luar garis. Karena garis memuat paling sedikit dua titik yang berbeda misal C dan D, maka terdapat satu bidang yang memuat garis dan titik tersebut.



Gambar 8. Garis dan titik pada bidang ά

Menurut pembahasan sebelumnya dua garis yang berbeda dapat berpotongan, dan perpotongan antar garis tersebut akan membentuk suatu sudut. Berikut ini adalah pembahasan mengenai sudut.

3. Sudut

Definisi 1.5 (Keedy, 1967: 70)

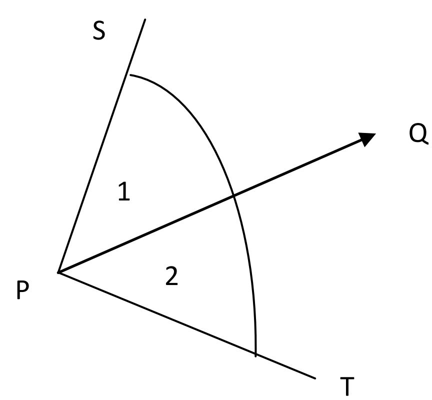
Suatu sudut adalah gabungan dua sinar garis yang bertemu pada titik pangkalnya. Sinar-sinar garis tersebut dinamakan kaki-kaki sudut, sedangkan titik pangkalnya disebut titik sudut

Definisi 1.6 (Rich, 2005: 6)

Garis bagi sudut adalah garis yang membagi sudut menjadi dua bagian yang sama besar atau kongruen.

Berikut ini adalah gambar garis bagi sudut

Garis $\overleftrightarrow{PQ}$ membagi $\angle SPT$ menjadi dua bagian sama besar sehingga bagian $\angle 1 \cong \angle 2$



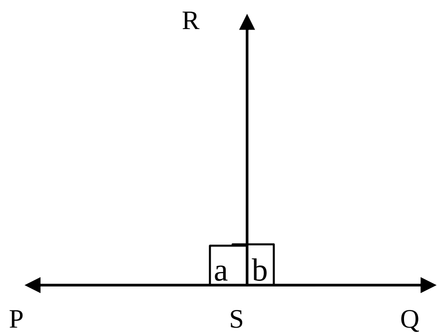
Gambar 9. Garis PQ adalah garis bagi pada ∠P

Definisi 1.7 (Rich, 2005: 7)

Tegak lurus adalah perpotongan dua garis membentuk sudut siku-siku.

Contoh:

Garis $\overleftrightarrow{PQ}$ tegak lurus garis $\overleftrightarrow{RS}$ sehingga terbentuk sudut siku-siku di a dan b



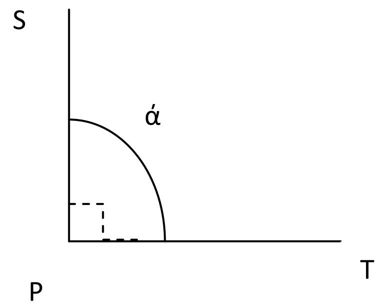
Gambar 10. Garis PQ adalah garis yang tegak lurus garis RS

Pembahasan sebelumnya telah dijabarkan definisi-definisi tentang sudut, berikut ini akan dijabarkan tentang macam-macam sudut.

a. **Macam-Macam Sudut**

Definisi 1.8 (Sova, 1999: 4)

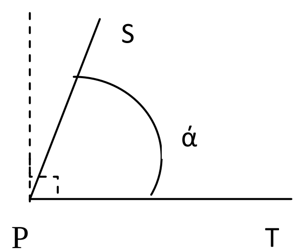
Sudut siku-siku (*right angle*) adalah suatu sudut yang memiliki besar sudut 90°.



Gambar 11. Sudut siku-siku dengan ά = 90°

Definisi 1.9 (Sova, 1999: 4)

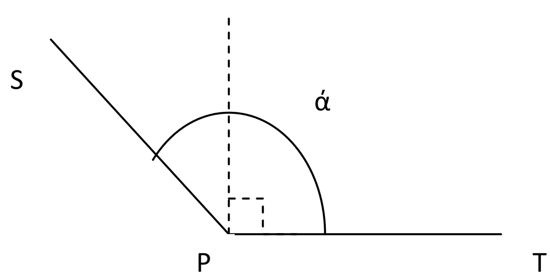
Sudut lancip (*acute angle*) adalah suatu sudut dengan ukuran antara 0° dengan 90°



Gambar 12. Sudut lancip dengan 0° < ά < 90°

Definisi 1.10 (Sova, 1999: 4)

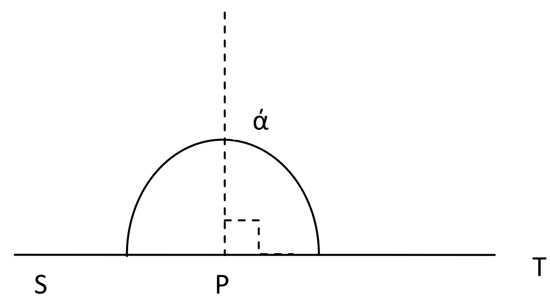
Sudut tumpul (*obtuse angle*) adalah suatu sudut dengan ukuran antara 90° dengan 180°.



Gambar 13. Sudut tumpul dengan 90° < ά < 180°

Definisi 1.11 (Rich, 2005: 6)

Sudut lurus (*straight angle*) adalah sudut yang besarnya 180°.

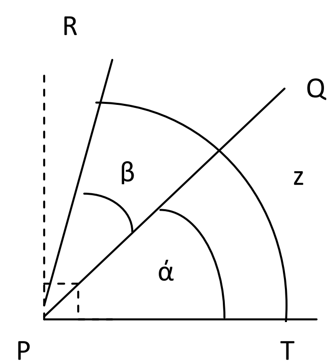


Gambar 14. Sudut lurus dengan ά = 180°

Dari beberapa macam sudut seperti yang telah disebutkan di atas terdapat juga beberapa jenis pasangan-pasangan sudut yang diantaranya dijelaskan sebagai berikut:

Definisi 1.12 (Rich, 2005: 10)

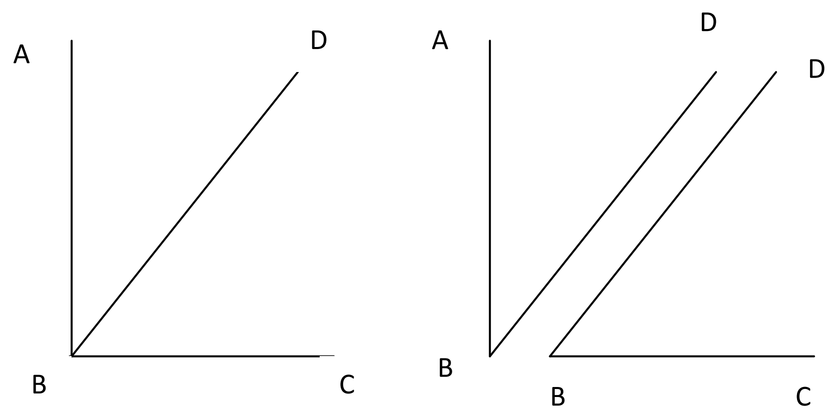
Sudut-sudut berdampingan adalah dua sudut yang memiliki titik sudut sama dan terdapat satu sisi dari kedua sudut tersebut yang berhimpit.



Gambar 15. Sudut ά berdampingan dengan sudut β membentuk sudut z

Definisi 1.13 (Rich, 2005: 11)

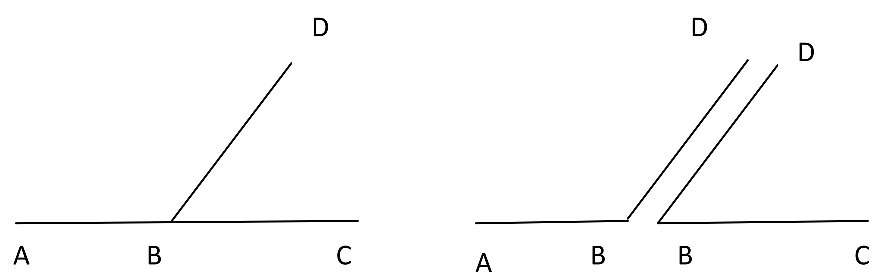
Sudut-sudut komplementer adalah dua sudut yang jumah besar sudutnya sebesar 90°.



Gambar 16. Sudut komplementer

Definisi 1.14 (Rich, 2005: 12)

Sudut-sudut suplementer adalah dua sudut yang jika dijumlahkan besar sudutnya 180°.



Gambar 17. Sudut suplementer

Definisi 1.15 (keedy : 87): Dua sudut dikatakan kongruen jika dan hanya jika kedua sudut tersebut sama besar.

4. **Segi Tiga**

Definisi 1.16 (Keedy, 1967 : 102) :

Segitiga adalah segi yang terbentuk oleh tiga segmen yang ditentukan oleh tiga titik yang tidak segaris, ketiga segmen tersebut disebut sisi, dan ketiga titik sudut tersebut disebut titik sudut.

Dua buah segitiga yang berlainan misalkan ΔABC dan Δ PQR bisa merupakan dua buah segitiga yang kongruen jika kedua segitiga tersebut memiliki beberapa syarat kekongruenan yang menyebabkan dua buah segitiga tersebut kongruen. Pembahasan beberapa syarat yang menyebabkan dua buah segitiga kongruen adalah sebagai berikut.

Definisi 1.17 (Keedy, 1967 : 108) :

Dua segitiga ΔABC dan Δ PQR dikatakan kongruen jika dan hanya jika pasangan sudut-sudut kedua segitiga tersebut sama besar atau pasangan pasangan sisi-sisi antara kedua segitiga itu sama panjang.

Postulat (S, Sd, S) (Keedy, 1967 : 115) :

Dua segitiga kongruen jika dan hanya jika dua sisi dan satu sudut kongruen terhadap bagian-bagian segitiga satunya.

Postulat (Sd, S, Sd) (Keedy, 1967 : 115) :

Dua segitiga kongruen jika dan hanya jika dua sudut dan satu sisinya kongruen terhadap bagian-bagian segitiga satunya.

Postulat (S, S, S) (Keedy, 1967 : 116) :

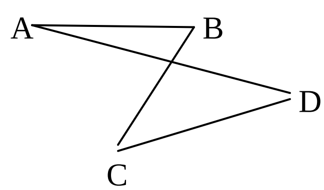
Dua segitiga kongruen jika dan hanya jika untuk ketiga sisinya kongruen terhadap sisi-sisi segitiga satunya.

5. **Segi Empat**

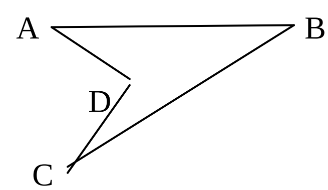
Definisi 1.18 (Keedy, 1967: 226)

Untuk sebarang empat titik pada satu bidang, A, B, C, dan D, dengan tidak ada tiga titik yang segaris, $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$ ini disebut segi empat. Titik A, B, C, dan D disebut titik sudut, segmen $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ disebut sisi.

Beberapa segi empat memiliki sisi-sisi yang berpotongan bukan pada titik sudutnya. Segi empat ini disebut segi empat tidak sederhana (*non-simple quadrilateral*). Segiempat ini ditunjukan seperti pada gambar dibawah ini,



(a)

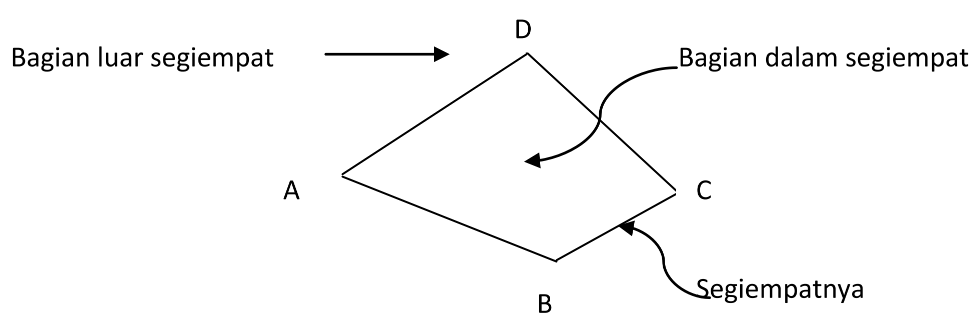


(b)

Gambar 18. Gambar segiempat tidak sederhana

Segi empat sederhana adalah segi yang bersisi empat dan mempunyai perpotongan sisi hanya pada titik sudutnya. Suatu bangun segiempat sederhana pada dasarnya adalah bangun yang memisahkan suatu bidang ke dalam tiga bagian yaitu: bagian pertama bagian dalam segiempat, bagian kedua bagian luar segiempat, dan bagian ketiga bangun segiempat itu sendiri. Contoh bangun segiempat sederhana adalah sebagai berikut.

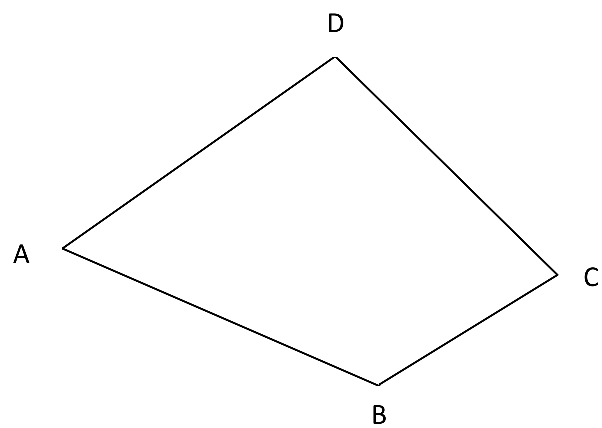
Segi empat ABCD sedehana yang membagi bidang menjadi tiga bagian



Gambar 19. Segi empat sederhana

Definisi 1.19 (Keedy, 1967: 228)

Segiempat sederhana disebut konveks (*convex*) jika dan hanya jika diambil sebarang dua titik pada daerah dalam segiempat tersebut kemudian kedua titik tersebut dihubungkan dengan ruas garis maka ruas garis tersebut ada dalam daerah segiempat tersebut. Ilustrasi segiempat konveks (*convex*) adalah seperti gambar berikut ini.



Gambar 20. Segi empat conveks (*convex*)

Segi empat tak konveks (non-*convex*) jika dan hanya jika diambil sebarang dua titik pada daerah dalam segiempat tersebut kemudian kedua titik tersebut dihubungkan dengan ruas garis maka ruas garis tersebut ada sebagian atau keseluruhan diluar daerah segiempat tersebut.

Definisi 1.20 (Keedy, 1967: 229)

Bagian dalam segi empat konveks (*convex*) adalah semua bagian-bagian dari setengah bidang, masing-masing dari segi empat yang mengelilinginya dan sisa dari segi empat tersebut.

B. Geometri Hiperbolik

Pada kajian Geometri Hiperbolik ini objek-objek kajianya yang berupa titik, garis, bidang dan segmen tidak sama dengan titik, garis, bidang dan segmen pada Geometri Parabolik. Pada Geometri Hiperbolik Ini bidang direpresentasikan oleh sebuah lingkaran O (Prenowitz,1965: 91).

Berikut ini adalah tabel representasi untuk Geometri Hiperbolik

Tabel 1. Representasi Geometri Hiperbolik

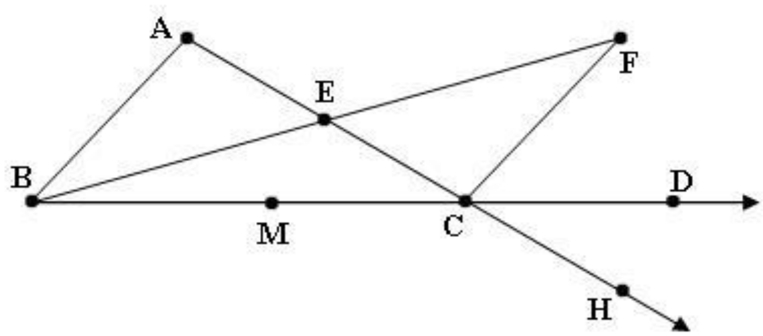
Geometri Hiperbolik	Representasi Geometri Euclid
Titik	Titik: Titik dalam lingkaran
Garis	Penghubung terbuka lingkaran
Bidang	Bagian dalam lingkaran
Segmen	Segmen: Segmen penghubung dua titik

Postulat kesejajaran Hiperbolik (Prenowitz, 1965: 54**)**

Untuk suatu titik dan suatu garis yang tidak melalui titik tersebut terdapat dua garis yang melalui titik tersebut yang sejajar dengan garis pertama.

1. **Jumlah besar sudut suatu segitiga di dalam Geometri Hiperbolik**

Teorema 2.1 (Teorema sudut luar) (Prenowitz,1965: 22)
Sudut luar segitiga akan lebih besar daripada sudut interior (dalam) yang tidak bersisian dengan sudut tersebut.



Gambar 21. Sudut luar segitiga

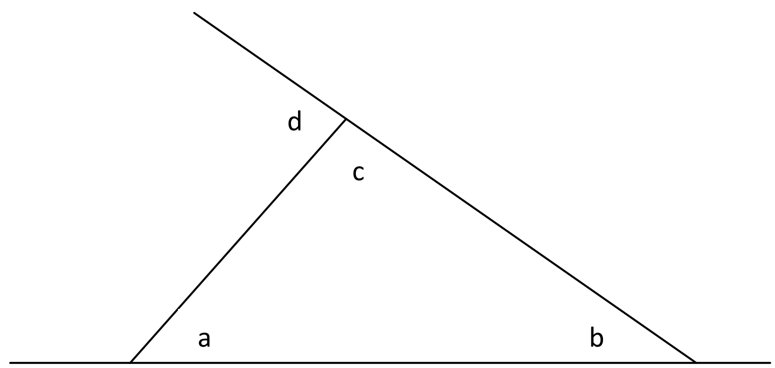
Bukti :

Misalkan ΔABC adalah sembarang segitiga, dan misalkan D merupakan perpanjangan dari $\overline{BC}$ melalui C. Pertama akan ditunjukkan bahwa $m\angle ACD$ lebih besar dari $m\angle A$. Misalkan E merupakan titik tengah $\overline{AC}$, dan misalkan $\overline{BE}$ merupakan perpanjangan garis yang melalui E hingga F, maka $m\,\overline{AE} = m\,\overline{EC},\ m\,\overline{BE} = m\,\overline{EF}$ dan $m\angle AEB = m\angle CEF$ (sudut bertolak belakang sama besar). Jadi $\Delta AEB \cong \Delta CEF$ $(S.Sd.S)$, dan $m\angle BAE = m\angle FCE$ (bagian segitiga kongruen sama besar). Karena $m\angle ACD > m\angle FCE$ (keseluruhan sudut selalu lebih besar dari bagiannya), sehingga dapat disimpulkan $m\ \angle ACD\ >\ m\ \angle BAE = m\ \angle A$.

Untuk menunjukkan bahwa $m\ \angle ACD > m\angle B$, perpanjang $\overline{AC}$ melalui C hingga H, yang membentuk $m\ \angle BCH > m\ \angle B$, dengan menggunakan prosedur bagian pertama pembuktian: misalkan M merupakan titik tengah $\overline{BC}$, perpanjang $\overline{AM}$ melalui M, dan lain-lain. Untuk melengkapi bukti, perhatikan bahwa $\angle BCH$ dan $\angle ACD$ merupakan sudut bertolak belakang sehingga sudut tersebut sama besar. ■

Lemma 2.1(Prenowitz, 1965: 57**)**

Jumlah besar dua sudut suatu segitiga adalah kurang dari atau sama dengan sudut luarnya.



Gambar 22. Jumlah besar dua sudut suatu segitiga

Bukti:

Menurut Teorema Sudut Eksterior $m\angle ACD > m\angle ABC$ dan $m\angle ACD > m\angle BAC$.

Berikutnya, perhatikan bahwa

$m \angle ACD + m \angle ACB = 180^o$

$m \angle ACD = 180^o - m \angle ACB$

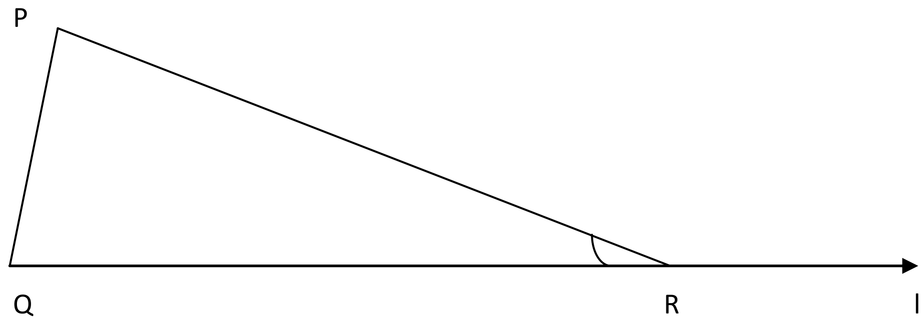
$180^o - m \angle ACB > m \angle ABC$ dan $180^o - m \angle ACB > m \angle BAC$

$180^o > m \angle ACB + m \angle ABC$ dan $180^o > m \angle ACB + m \angle BAC$

Dengan cara yang analog, dapat diperoleh $m \angle BAC + m \angle ABC < 180^o$.. ■

Lemma 2.2 (Prenowitz, 1965: 58**)**

Terdapat garis l, sebuah titik P yang tidak berada digaris l, dan titik Q berada digaris l. Misal diberikan garis $\overleftrightarrow{PQ}$. sebagai sisinya, maka ada suatu titik R di l, pada sisi $\overleftrightarrow{PQ}$ yang diberikan, sedemikian sehingga ∠PRQ lebih kecil atau kurang dari sudut yang telah ditentukan, seperti yang terdapat pada gambar dibawah ini.



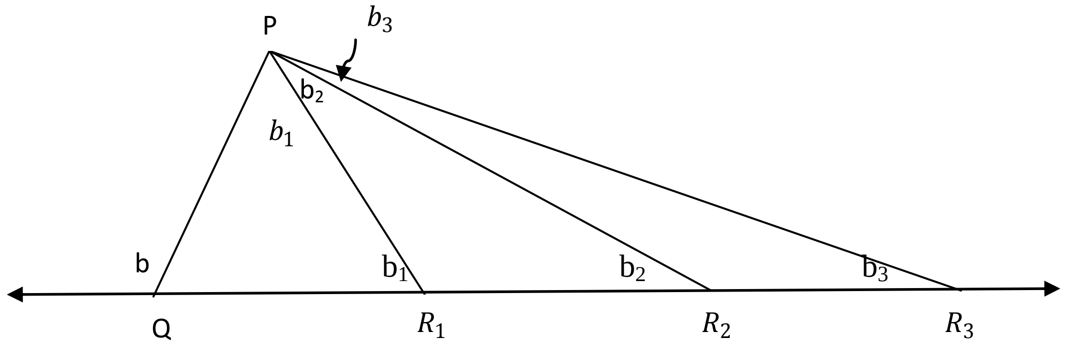
Gambar 23. Sudut terkecil pada segitiga

Bukti:

Missal ά yaitu sudut yang ditentukan (berapapun ukuran sudutnya), perhatikan pada gambar di atas yang terdapat titik R pada garis l, yang terbentuk dari sisi PQ, sedemikian sehingga ∠PRQ <ά. Pertama dibuat langkah-langkah untuk mendapatkan barisan sudut.

$\angle \mathrm{P}R_1Q_1\angle \mathrm{P}R_2Q_2 \ . \ . \ .$

Setiap sudut yang ditentukan tidak lebih besar dari setengahnya yaitu dari hasil yang telah didapat.



Gambar 24. Sudut-sudut terkecil pada segitiga

Misal R_1 adalah titik pada garis l pada sisi PQ sehingga QR_1 = PQ (gambar 23), maka ΔPQR_1 sama kaki, dan

$\angle QPR_1 = \angle PR_1Q = b_1$

Misal b adalah sudut luar ΔPQR_1 pada Q, berdasar lemma 1

$b_1 + b_1 = 2b_1 \leq b$

sehingga $b_1 \leq ½ b$ ……………………(1)

Sekarang dibentuk sudut baru dengan langkah yang sama. Perpanjangan QR_1 melalui R_1 dan R_2 sehingga $R_1R_2 = PR_1$. Digambar PR_2, kemudian ΔPR_1R_2 sama kaki dan

$\angle R_1PR_2 = \angle PR_2R_1 = \angle PR_2Q = b_2$.

Dengan lemma 1 $b_2 + b_2 = 2b_2 \leq b_1$

Sehingga $b_2 \leq ½ b_1$

Dengan persamaan (1) didapat

$b_1 \leq ½^2$ b.

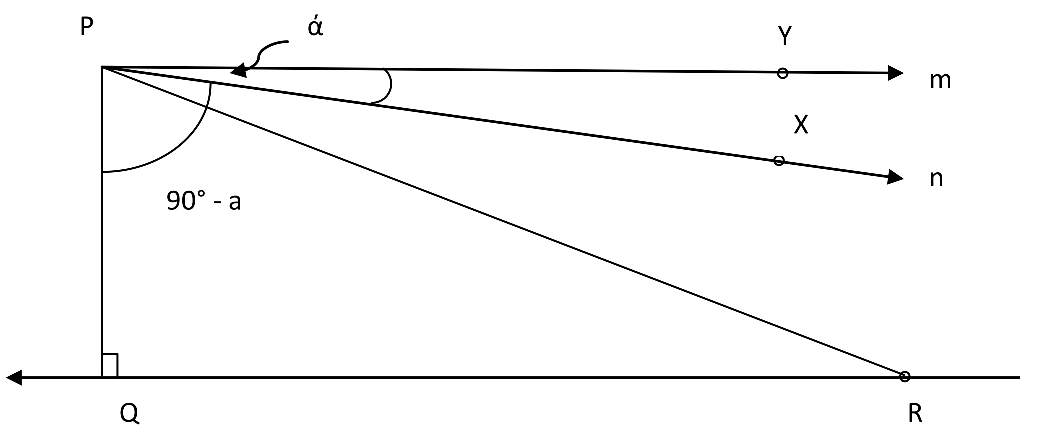
dengan mengulangi proses pembagian dua n, sehingga didapat titik R_n di L, pda sisi PQ, sehingga $b_n = \angle PR_nQ \leq ½^n$ b.

Hasilnya nilai n sangat besar $½^n$ b < ά. kemudian $\angle PR_nQ \leq$ ά. Sehingga teorema yang berlaku adalah R =R_n. ■

Dari kedua lemma yang disampaikan sebelumnya dapat diturunkan teorema berikut ini.

Teorema 2.2 (Prenowitz, 1965: 59**)**

Pada segitiga jumlah besar sudut-sudutnya kurang dari 180°.



Gambar 25. Segitiga dengan jumlah sudutnya kurang dari 180°

Bukti:

Buat garis l dan itik P tidak pada l. Digambar garis m melalui P sejajar l, dengan cara biasa. $\overleftrightarrow{PQ}$ tegaklurus terhadap l pada Q dan m tegaklurus terhadap $\overleftrightarrow{PQ}$ pada P. Menurut postulat kesejajaran Hiperbolik, ada garis selain m melewati P sejajar l. Misal garis tersebut adalah n, sehingga sudut yang dibentuk oleh garis n dan $\overleftrightarrow{PQ}$ besarnya harus kurang dari 90°. Y titik pada garis m, dan X titik pada garis n, terdapat ά = ∠XPY, maka ∠QPX = 90° - ά.

Dengan menggunakan Lemma 2.2 buat titik R pada l, sedemikian sehingga ∠PRQ < ά. terbentuk ΔPQR.

m∠PQR = 90°

m∠QRP < ά

m∠RPQ < m∠XPQ = 90° - ά

Dijumlahkan diperoleh

m∠PQR + m∠QRP + m∠RPQ < 90° + ά + 90° - ά = 180°

Jadi Δ PQR memiliki jumlah sudut kurang dari 180°. ■

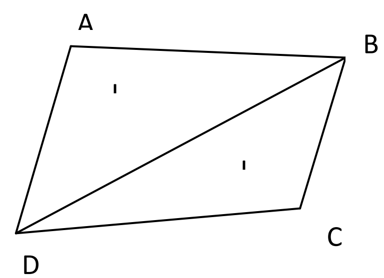
2. Segiempat pada Geometri Hiperbolik

Dari teorema 2.2 di atas mengakibatkan adanya dua corollary untuk segiempat sebagai berikut.

Corollary 2.2 (Prenowitz, 1965: 61**)**

Jumlah besar sudut-sudut dari segiempat kurang dari 360°.

Bukti:



Gambar 26. Segiempat yang jumlah besar sudutnya kurang dari 360°

Segiempat ABCD pada gambar 25 diatas, jika dibuat garis yang menghubungkan titik B dan D maka akan terbentuk dua segitiga, segitiga I dan segitiga II, berdasar teorema 2.2 bahwa jumlah besar sudut dari segitiga kurang dari 180°, maka segiempat tersebut jumlah besar sudut-sudutnya kurang dari 360°. ■

C. Geometri Eliptik

Geometri Eliptik berbeda dengan Geometri Eucli hanya pada postulat kesejajarannya saja, Postulat kesejajaran dari Riemann adalah sebagai berikut (Moeharti, 1986: 5.17) Tidak ada garis-garis sejajar dengan garis lain.

Berdasarkan pada Postulat diatas, pada Geometri Eliptik ini dua garis selalu berpotongan dan tidak ada dua garis sejajar.

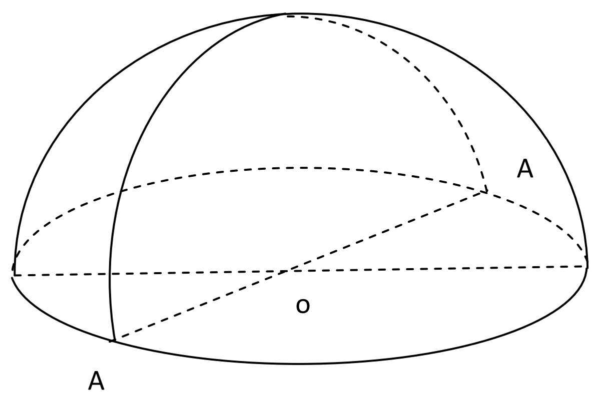
Pada Geometri Eliptik terdapat dua macam pengkhususan yang pertama Geometri "*single elliptic*" dan yang kedua Geometri "*double elliptic*".

Kata Eliptik didasarkan atas klasifikasi Geometri Proyektif, karena tidak ada dua garis yang dapat dibuat sejajar garis tersebut.

Untuk dapat memudahkan dalil-dalil berikut, maka sebagai model dari Geometri "*double elliptic*" ialah bola dan untuk Geometri "*single elliptic*" adalah setengah bola.

Model Geometri Eliptik tunggal (Moeharti, 1986: 5.19)

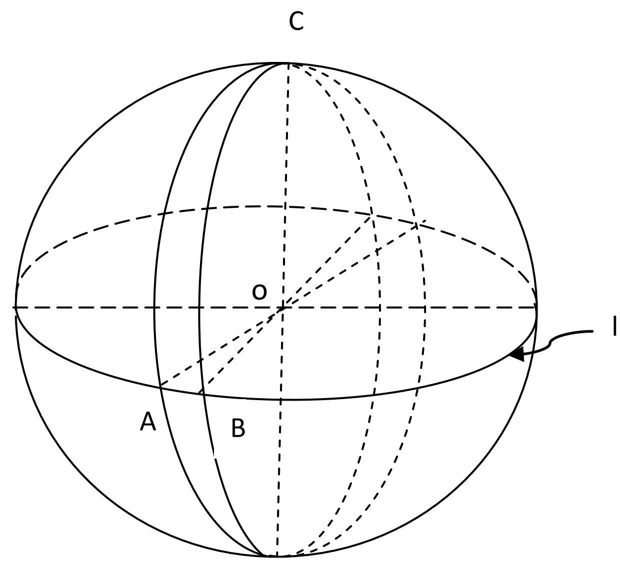
Sebarang dua garis yang berpotongan tepat pada satu titik, tetapi tidak ada garis yang memisahkan bidang tersebut.



Gambar 27. Model Geometri Eliptik tunggal

Model Geometri Eliptik ganda (Moeharti, 1986: 5.19)

Dua garis berpotongan tepat pada dua titik, dan setiap garis memisahkan bidang.



Gambar 28. Model Geometri Eliptik ganda

Tabel 2. Representai bola Euclid

Geometri Eliptik Ganda	**Representasi Euclid**
Titik	Titik pada bola
Garis	Lingkaran besar bola
Bidang	Bola
Segmen	Busur dari suatu lingkaran bola
Jarak antara dua titik	Panjang busur terpendek dari lingkaran besar yang melalui kedua titik itu
Sudut yang dibentuk oleh dua garis	Sudut pada bola yang dibentuk oleh dua lingkaran besar

Dalam Geometri Eliptik melalui satu titik pada suatu garis hanya dapat dilukis satu garis yang tegaklurus garis tersebut. Untuk setiap garis l ada kutup K sedemikian sehingga semua garis melalui K tegaklurus pada l (gambarnya seperti semua meridian melalui kutub tegak lurus melalui ekuator atau katulistiwa).

Sifat kutub misalnya l suatu garis, maka ada suatu titik K, yang disebut kutub dari l sedemikian sehigga :

1. Setiap segmen yang menghubungkan K dengan suatu titik l tegaklurus pada l.
2. K berjarak sama dari setiap titik pada l.

Jarak K sampai sebarang titik pada l disebut jarak polar. Jarak polar suatu kutub sampai garisnya adalah konstan, demikian juga panjang suatu garis adalah konstan.

Berikut ini adalah dalil-dalil yang berlaku pada Geometri Elliptik ini:

Dalil 3.1 (Moeharti, 1986: 5.20)

Dua garis yang tegak lurus pada suatu garis bertemu pada suatu titik ujungnya.

Keabsahan dalil 3.1 diatas dapat ditunjukan oleh gambar 39 , garis a dan garis b sama-sama tegaklurus pada garis l, dan bertemu pada satu titik yaitu titik C. ■

Kemudian untuk beberapa garis yang saling tegaklurus berlaku dalil 3.3 berikut ini.

Dalil 3.2 (Moeharti, 1986: 5.20)

Semua garis tegak lurus pada suatu garis berpotongan pada titik yang disebut kutub dari garis itu dan sebaliknya setiap garis melalui kutub suatu garis tegak lurus pada garis itu.

Bukti Dalil 3.2

Pada dalil 3.1 dua garis yang tegaklurus pada suatu garis bertemu pada satu titik sudah terbukti, titik itulah yang disebut titik kutub, disini akan berlaku untuk setiap garis yang tegak lurus pada garis l, begitu sebaliknya jika pada titik C ditarik garis yang tegak lurus terhadap garis l maka semua garis akan tegaklurus ke l. ■

Sudut-sudut segitiga dalam Geometri Eliptik

Pembahasan sudut-sudut segitiga pada Geometri Eliptik ini berlaku beberapa dalil sebagai berikut

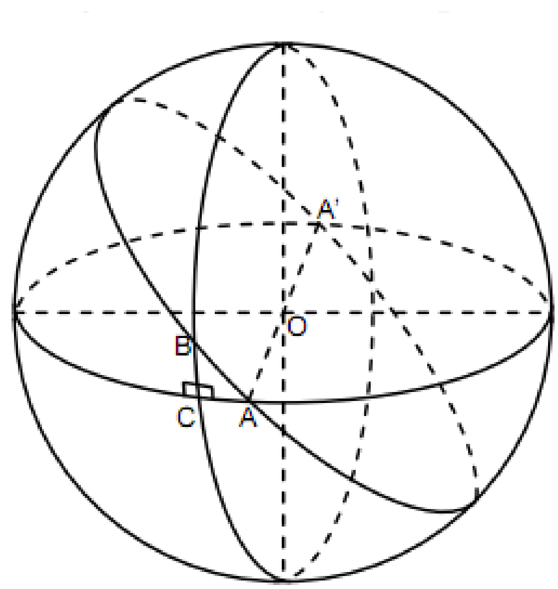
Dalil 3.3 (Moeharti, 1986: 5.20)

Dalam sebarang ΔABC dengan $\angle C = 90°$, sudut A kurang dari, sama dengan atau lebih besar dari 90°, tergantung dari segmen $\overline{BC}$ kurang dari, sama dengan atau lebih besar dari jarak polar q.

Keabsahan dalil 3.3 diatas dapat ditunjukan dengan ilustrasi dibawah ini

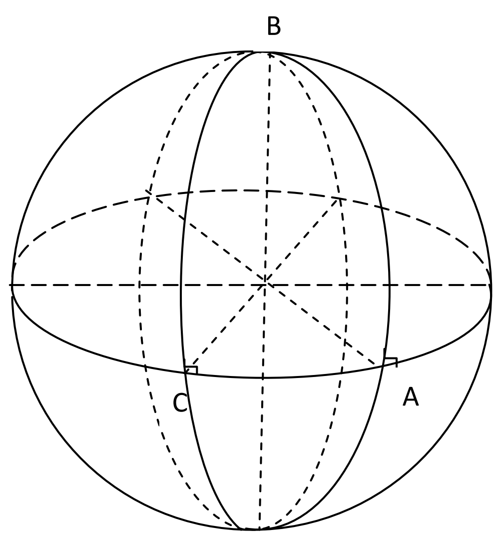
Diketahui : segitiga ABC dengan $\angle C = 90°$

a. Ditunjukkan ∠A < 90°, bila $\overline{BC}$ < dari jarak polar



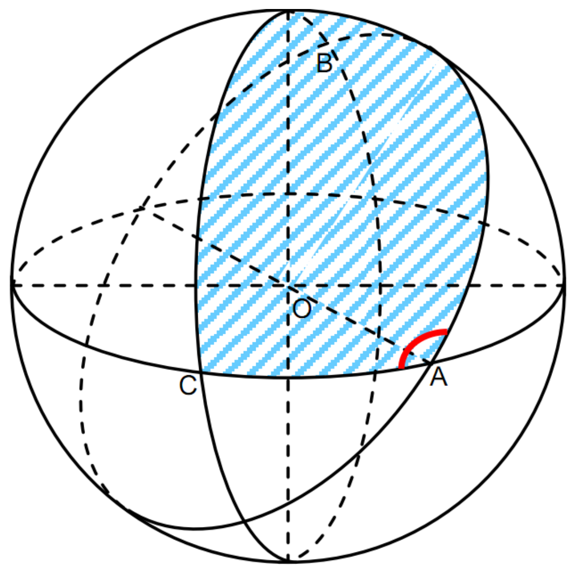
Gambar 29. A < 90°, karena $\overline{BC}$ < jarak polar

b. Ditunjukkan ∠A = 90°, bila $\overline{BC}$ = dari jarak polar



Gambar 30. ∠A = 90°, karena $\overline{BC}$ = jarak polar

c. Ditunjukkan ∠A > 90°, bila $\overline{BC}$ > dari jarak polar



Gambar 31. ∠A > 90°, karena $\overline{BC}$ > jarak polar

Untuk jumlah besar sudut-sudut segitiga dalam Geometri Eliptik ini berlaku dalil 3.4 berikut ini

Dalil 3.4 (Moeharti, 1986: 5.20)

Jumlah besar sudut-sudut segitiga lebih besar dari 180°.

Keabsahan dalil 3.4 diatas dapat ditunjukan dengan menggunakan gambar 30, dan gambar 31:

Pada gambar 30: ∠A = 90°,∠C = 90°, ∠B positif

Sehingga m∠A + m∠B + m∠C = > 180°

Pada gambar 31: ∠C = 90°,∠A tumpul

Sehingga m∠A + m∠B + m∠C > 180°. ■

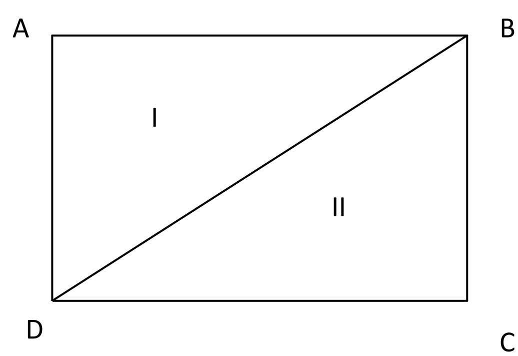
1. Segiempat pada Geometri Eliptik

Segiempat pada Geometri Eliptik ini yang dibahas adalah berikut ini

Dalil 3.5 (Moeharti, 1986: 5.21)

Jumlah besar sudut-sudut segiempat lebih besar dari 360°.

Bukti Dalil 3.5



Gambar 32. ilustrasi jumlah besar sudut-sudut segiempat lebih besar dari 360°.

Segiempat ABCD pada gambar 31 diatas, jika dibuat garis yang menghubungkan titik B dan D maka akan terbentuk dua segitiga, segitiga I dan segitiga II, berdasar dalil 3.4 bahwa jumlah besar sudut dari segitiga lebih dari 180°, maka segiempat tersebut jumlah besar sudutnya lebih dari 360°. ■

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab III ini akan dibahas mengenai Segiempat Saccheri pada Geometri Parabolik, Geometri Hiperbolik, dan Geometri Eliptik. Segiempat Saccheri adalah segiempat dengan sepasang sisi sama panjang yang tegak lurus terhadap sisi alasnya. Pembahasan lebih lengkapnya dijabarkan sebagai berikut.

A. Segiempat Saccheri pada Geometri Parabolik

Geometri Parabolik atau yang lebih dikenal dengan Geometri Euclides adalah sebuah Geometri klasik, mendasarkan pada 5 postulat. Geometri Euclides merupakan sistem aksiomatik, di mana semua teorema ("pernyataan yang benar") diturunkan dari bilangan aksioma yang terbatas.

Kelima postulat tersebut menurut Greenberg (1993: 14-19) adalah:

a. Untuk setiap titik P dan untuk setiap titik Q tidak sama dengan P terdapat satu garis *l* yang melalui P dan Q.

b. Untuk setiap $\overline{AB}$ dan untuk setiap $\overline{CD}$ terdapat titik tunggal E sedemikian sehingga B diantara A dan E serta $\overline{CD}$ kongruen dengan $\overline{BE}$.

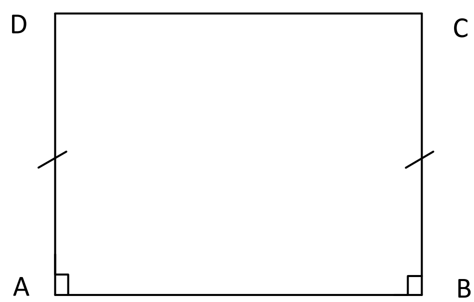
c. Untuk setiap titik O dan setiap titik A yang tidak sama dengan O terdapat lingkaran dengan pusat O dan jari-jari (*radius*) OA.

d. Semua sudut siku-siku adalah kongruen dengan sudut siku-siku yang lain.

e. Untuk setiap garis dan titik P tidak pada garis tersebut, maka terdapar dengan tepat satu garis m yang melalui titi P yang sejajar dengan garis tersebut

Untuk selanjutnya akan dibahas mengenai Segiempat Saccheri pada Geometri Parabolik. Segiempat Saccheri adalah segiempat dengan sepasang sisi sama panjang yang tegak lurus terhadap sisi alasnya, pembahasannya adalah sebagai berikut

Diberikan segiempat Saccheri ABCD dengan sisi alas $\overline{AB}$, sepasang sisi tegak $\overline{AD}$ dan $\overline{BC}$ sama panjang yang tegak lurus terhadap sisi $\overline{AB}$, ∠BCD dan ∠ADC adalah sudut puncak Segiempat Saccheri tersebut.



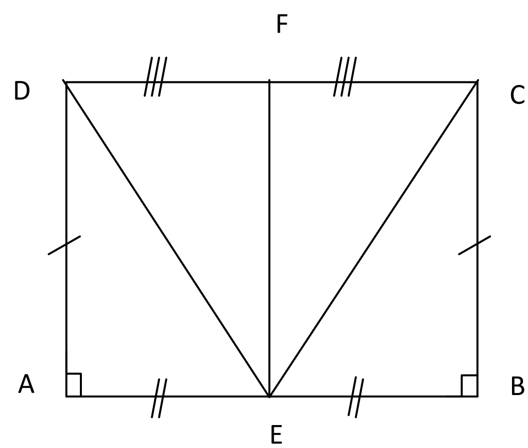
Gambar 33. Segiempat Saccheri pada Geometri Parabolik

Dari gambar 33 akan dibuktikan:

a. Sudut-sudut puncaknya sama besar dan siku-siku
b. Panjang sisi CD = AB
c. Ruas garis yang menghubungkan titik tengah sisi atas dan titik tengah alasnya sama dengan kakinya

Bukti:

a. Sudut-sudut puncaknya sama besar dan siku-siku



Gambar 34. Segiempat Saccheri pada Geometri

Perhatikan gambar 34, diambil titik E sebagai titik tengah $\overline{AB}$, kemudian dari titik C dan D ditarik garis yang melalui E, maka terbentuk ∆ADE dan ∆BCE

$\overline{AE}$ = $\overline{BE}$ (Titik E adalah titik tengah A dan B)

$\overline{AD}$ = $\overline{BC}$ (definisi awal segiempat Saccheri)

karena $\overline{AE}$ = $\overline{BE}$, m∠BAD = m∠ABC dan $\overline{AD}$ = $\overline{BC}$, maka ∆ADE ≅ ∆BCE sehingga m∠ECB = m∠EDA. …………………………………………………………… (1)

Langkah selanjutnya diambil titik F sebagai titik tengah $\overline{CD}$,

Pandang ∆DEF dan ∆CEF

$\overline{CF} = \overline{FD}$, (Titik F adalah titik tengah C dan D)

$\overline{CE} = \overline{DE}$ (Telah disebutkan diatas)

$\overline{EF} = \overline{EF}$ (Berimpit)

Maka $\Delta DEF \cong \Delta CEF$ (S,S,S)

jadi $m\angle FCE = m\angle EDF$.. (1)

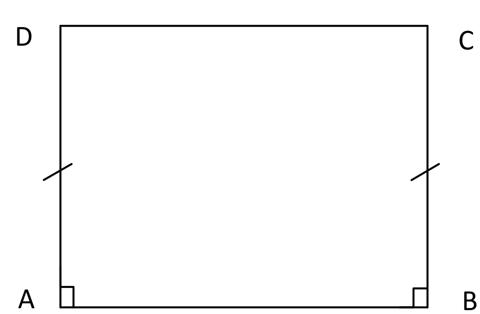
Dari langkah (1) dan (2) di dapatkan

$m\angle BCE + m\angle FCE = m\angle ADE + m\angle EDF$,

$m\angle BCD = m\angle ADC$.

Dari uraian diatas dapat disimpulkan $\angle BCD \cong \angle ADC$.

Akan dibuktikan bahwa sudut-sudut puncaknya siku-siku



Gambar 35. Segiempat Saccheri dengan sudut-sudut puncaknya siku-siku

Perhatikan gambar segiempat Saccheri ABCD pada gambar 35,

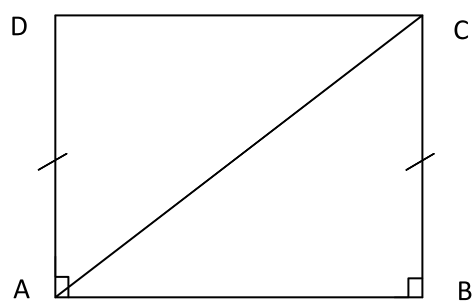
Pada Geometri Parabolik jumlah besar sudut segiempat adalah 360°,

Karena m∠BAD + m∠ABC = 180°, maka ∠BCD + ∠ADC = 180.

Karena ∠BCD ≅ ∠ADC, maka m∠ BCD = m∠ ADC = 180° : 2 = 90°

Terbukti sudut-sudut puncaknya siku-siku. ■

b. Panjang sisi CD = AB



Gambar 36. Segiempat Saccheri dengan CD = AB

Pada segiempat Saccheri ABCD diatas

Akan dibuktikan CD = AB,

Perhatikan ΔABC dan ΔACD pada gambar segiempat Saccheri ABCD diatas

Karena : ∠ADC ≅ ∠ABC (Sudah dibuktikan diatas),

AD = BC (Diketahui),

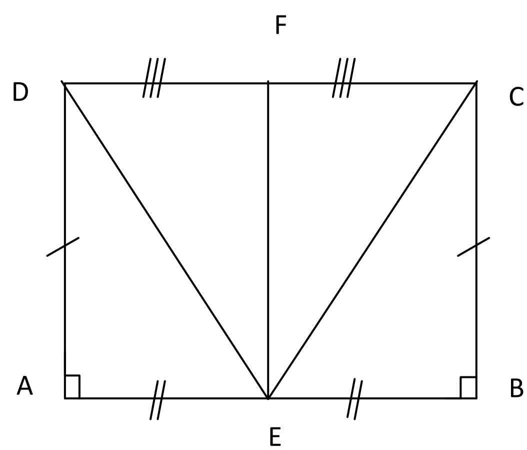
AC = CA (dua garis yang berimpit),

Maka ΔABC ≅ ΔACD (S,S,Sd).

Karena $\Delta ABC \cong \Delta ACD$, maka CD = AB (Dua sisi yang bersesuaian pada dua segitiga yang kongruen)

Terbukti CD = AB. ■

c. Ruas garis yang menghubungkan titik-titik tengah sisi atas dan titik tengah sama dengan kakinya



Gambar 37. Segiempat Saccheri dengan Panjang segmen EF = BC

Akan dibuktikan EF = AD,

Perhatikan pada gambar segiempat Saccheri ABCD diatas, titik E sebagai titik tengah $\overline{AB}$, kemudian dari titik C dan D ditarik garis yang melalui E, maka terbentuk ΔADE dan ΔBCE

$\overline{AE} = \overline{BE}$ (Titik E adalah titik tengah A dan B)

sisi $\overline{AD}$ = sisi $\overline{BC}$ (definisi awal segiempat Saccheri) karena $\overline{AE}$ = $\overline{BE}$, m∠A = m∠B dan $\overline{AD}$ = $\overline{BC}$, maka ∆ADE ≅ ∆BCE sehingga m∠BCE = m∠ADE……………………………………………………………… (1)

Langkah selanjutnya diambil titik F sebagai titik tengah $\overline{CD}$,

Pandang ∆DEF dan ∆CEF

$\overline{CF}$ = $\overline{FD}$, (Titik F adalah titik tengah C dan D)

$\overline{CE}$ = $\overline{DE}$ (Telah disebutkan sebelumnya)

$\overline{EF}$ = $\overline{EF}$ (Berimpit)

Maka ∆DEF ≅ ∆ CEF (S,S,S)

karena m∠CFE + m∠DFE = 180° yang sama besar (sudut-sudut yang bersesuaian pada dua segitiga kongruen), maka m∠CFE = 90°

m∠FEB + m∠FEA = 180° yang sama besar (sudut-sudut yang bersesuaian pada dua segitiga kongruen),maka m∠BEF = 90°

Pada gambar diatas perhatikan ∆EFC dan ∆ EBC

Karena m∠CFE = m∠CBE = 90°,

BE = CF (Telah dibuktikan),

EC = CE (Dua garis yang berimpit)

Maka ∆EFC ≅ ∆ EBC (S,S,Sd).

Karena $\Delta EFC \cong \Delta EBC$, maka EF = BC (Dua sisi yang bersesuaian pada dua segitiga yang kongruen)

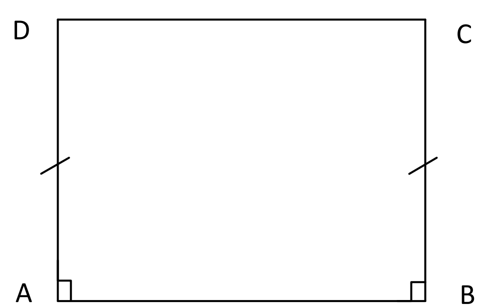
Terbukti EF = BC. ■

B. Segiempat Saccheri pada Geometri Hiperbolik

Geometri Hiperbolik merupakan Geometri non-Eulid, yang pada dasarnya tetap berdasar pada Geometry Euclid yang berdasarkan lima postulat, namun pada Geometry Hiperbolik ini postulat kelima Euclid diganti oleh postulat kesejajaran Hiperbolik dengan postulat 2.1 berikut:

> Untuk suatu titik A dan suatu garis r yang tidak melalui A terdapat dua garis melalui A dalam bidang Ar, yang sejajar dengan r.

Diberikan segiempat Saccheri ABCD dengan sisi alas $\overline{AB}$ dengan sepasang sisi $\overline{AD}$ dan $\overline{BC}$ sama panjang yang tegak lurus terhadap sisi $\overline{AB}$.



Gambar 38. Segiempat Saccheri pada Geometri Hiperbolik

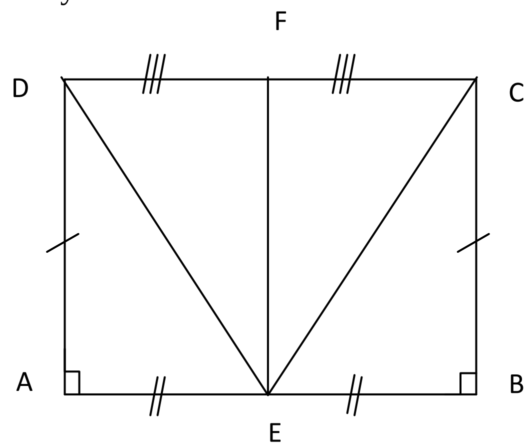
Dari gambar 38 di atas akan dibuktikan:

a. Sudut-sudut puncaknya sama besar dan lancip
b. Panjang sisi CD > AB

c. Ruas garis yang menghubungkan titik-titik tengah sisi atas dan titik tengah alasnya kurang dari kakinya

Bukti:

a. Sudut-sudut puncaknya sama besar



Gambar 39. Sudut-sudut puncak dari segiempat saccheri sama dan lancip

Dari gambar 39 diambil titik E sebagai titik tengah $\overline{AB}$, kemudian dari titik C dan D ditarik garis yang melalui E, maka terbentuk ∆ADE dan ∆BCE

$\overline{AE}$ = $\overline{BE}$ (Titik E adalah titik tengah A dan B)

sisi $\overline{AD}$ = sisi $\overline{BC}$ (definisi awal segiempat Saccheri)

karena $\overline{AE}$ = $\overline{BE}$, m∠A = m∠B dan $\overline{AD}$ = $\overline{BC}$, maka ∆ADE ≅ ∆BCE sehingga m∠BCE = m∠ADE…………………………………………………………… (1)

Langkah selanjutnya diambil titik F sebagai titik tengah $\overline{CD}$, Pandang ΔDEF dan ΔCEF

$\overline{CF} = \overline{FD}$, (Titik F adalah titik tengah C dan D)

$\overline{CE} = \overline{DE}$ (karena $\Delta ADE \cong \Delta BCE$)

$\overline{EF} = \overline{EF}$ (Berimpit)

Maka $\Delta DEF \cong \Delta CEF$ (S,S,S)

jadi $m\angle ECF = m\angle EDF$.. (2)

Dari langkah (1) dan (2) di dapatkan

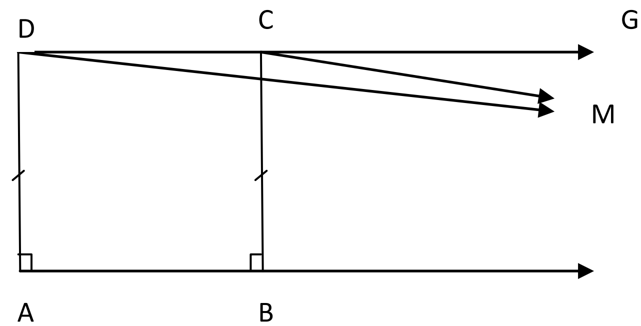
$m\angle BCE + m\angle ECF = m\angle ADE + m\angle EDF$,

$\leftrightarrow m\angle BCD = m\angle ADC$.

Dari uraian diatas dapat disimpulkan $\angle BCD \cong \angle ADC$.

Pada segiempat Saccheri ABCD dibawah ini akan ditunjukan bahwa $\angle BCD$ dan $\angle ADC$ lancip,

Langkah pertama dibuat garis-garis $\overrightarrow{DM}$ dan $\overrightarrow{CM}$ yang sejajar $\overline{AB}$.



Gambar 40. Sudut-sudut puncak segiempat Saccheri pada Geometri Hiperbolik

AD = BC (definisi segiempat Saccheri)

m∠DAM = m∠CBM (siku-siku) maka ΔDAM ≅ Δ CBM akibatnya m∠ADM = m∠BCM,

m∠ADM + m∠GDM < m∠BCM + m∠GCM

∠ADC < ∠BCG

Padahal ∠BCD = ∠ADC jadi ∠BCD < ∠BCG

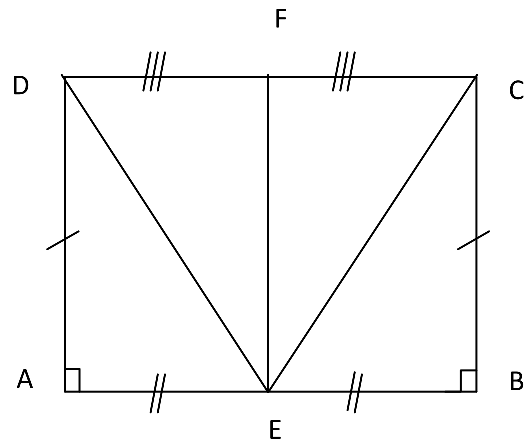
Karena ∠BCD + ∠BCG = 180° (dua sudut suplementer) …………………..(1)

dan ∠BCD - ∠BCG < 0 ……………………………………………….(2)

jika persamaan 1, dan 2 diatas di jumlahkan menjadi 2∠BCD < 180°, maka ∠BCD < 90°

Jadi ∠BCD lancip, atau sudut-sudut puncak segiempat Saccheri pada Geometri Hiperbolik ini lancip. ■

b. Panjang sisi CD > AB



Gambar 41. Segiempat Saccheri dengan Panjang sisi CD > AB

Pada segiempat Saccheri ABCD diatas,

Akan dibuktikan CD > AB,

andaikan CD = AB, maka FC = EB,

dari bukti diatas didapat bahwa ΔDEF ≅ Δ CEF maka sudut-sudut yang bersesuaian kongruen.

m∠CFE = m∠DFE (sudut-sudut bersesuaian pada dua segitiga kongruen)

karena m∠CFE + m∠DFE = 180° yang sama besar maka m∠CFE = 90°.

m∠CFE = m∠EBC = 90° dan $\overline{EC}$ merupakan sisi persekutuan ΔCFE dan ΔEBC, maka ΔCFE ≅ ΔEBC,

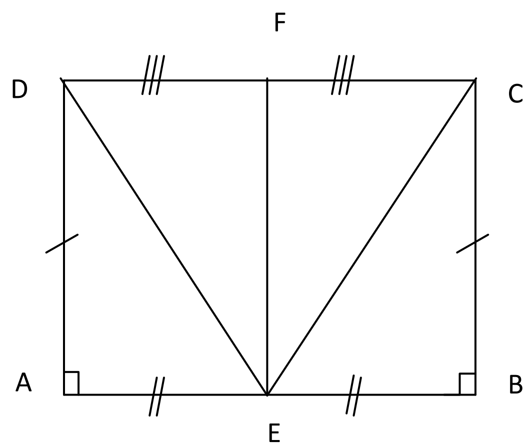
dan diperoleh ∠FEC ≅ ∠BCE, dan ∠FCE ≅ ∠BEC

m∠FCE + m∠BEC = m∠BCE + m∠FCE atau m∠FEB = m∠FCB = 90°.

Terdapat pertentangan dengan yang telah dibuktikan bahwa ∠FCB lancip. Jadi tidak mungkin $\overline{FC} = \overline{EB}$.

Dari gambar 41 lihat segiempat BCFE dengan menggunakan kesejajaran dua garis ∠EBC = ∠BEF = ∠CFE = 90°, dan ∠C lancip, maka $\overline{FC} > \overline{EB}$, atau $\overline{CD} > \overline{AB}$. ■

c. Ruas garis yang menghubungkan titik-titik tengah sisi atas dan titik tengah alasnya kurang dari kakinya



Gambar 42. Segiempat Saccheri dengan Panjang segmen EF < BC

Akan dibuktikan EF < BC,

Perhatikan ΔEFC dan Δ EBC

andaikan EF = AD = BC

∠EFC = ∠EBC = 90° (sudah dibuktikan sebelumnya)

$\overline{EC} = \overline{EC}$ (saling berimpit)

Maka ΔEFC≅ Δ EBC (Sd,S,S)

Sehingga m∠FCE + m∠BCE = m∠BEC + m∠CEF atau m∠FEB = m∠FCB = 90°

Terdapat pertentangan dengan yang telah dibuktikan bahwa ∠FCB lancip. Jadi tidak mungkin EF = AD = BC.

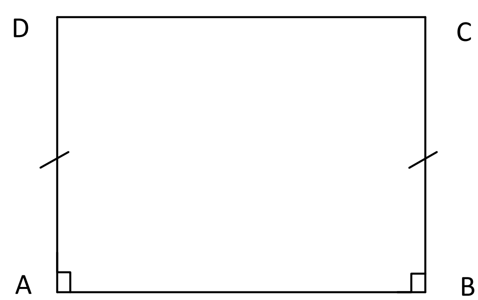
Dari gambar 42 diatas lihat segiempat BCFE dengan menggunakan kesejajaran dua garis ∠EBC = ∠BEF = ∠CFE = 90°, dan ∠BCD lancip, maka EF < BC. ■

C. Segiempat Saccheri pada Geometri Eliptik

Geometri Eliptik tidak jauh berbeda dengan Geometri Hiperbolik sama-sama masih berdasarkan pada Geometri Euclid, dan juga sama-sama mengubah postulat kelima Euclid menjadi sebagai berikut seperti (Moeharti, 1986: 5.117)

Postulat eliptik : Tidak ada garis-garis yang sejajar dengan garis lain.

Diberikan segiempat Saccheri ABCD dengan sisi alas $\overline{AB}$ dengan sepasang sisi $\overline{AD}$ dan $\overline{BC}$ sama panjang yang tegak lurus terhadap sisi $\overline{AB}$.



Gambar 43. Segiempat Saccheri pada Geometri Eliptik

Dari gambar 43 diatas akan dibuktikan:

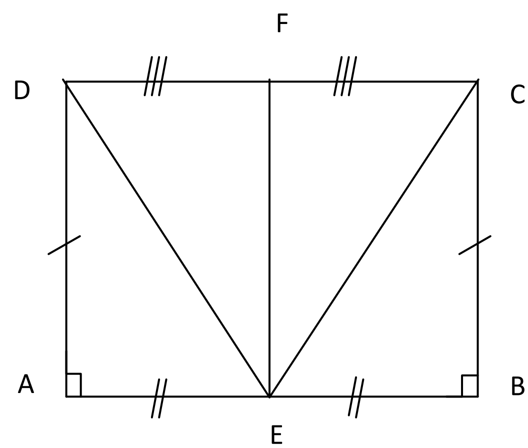
a. Sudut-sudut puncaknya sama besar dan tumpul

b. panjang sisi CD < AB

c. Ruas garis yang menghubungkan titik-titik tengah sisi atas dan titik tengah alasnya lebih dari kakinya

Bukti:

a. Sudut-sudut puncak dari segiempat Saccheri sama dan tumpul.



Gambar 44. Sudut-sudut puncak dari segiempat saccheri sama dan tumpul.

Yang pertama akan dibuktikan Sudut-sudut puncaknya sama besar.

Dari gambar 44 diambil titik E sebagai titik tengah $\overline{AB}$, kemudian dari titik C dan D ditarik garis yang melalui E, maka terbentuk ΔADE dan ΔBCE

$\overline{AE}$ = $\overline{BE}$ (Titik E adalah titik tengah A dan B)

sisi $\overline{AD}$ = sisi $\overline{BC}$ (definisi awal segiempat Saccheri)

karena $\overline{AE}$ = $\overline{BE}$, m∠A = m∠B dan $\overline{AD}$ = $\overline{BC}$, maka ΔADE ≅ ΔBCE sehingga m∠C_1 = m∠D_1. ………………………………………………………………… (1)

Langkah selanjutnya diambil titik F sebagai titik tengah $\overline{CD}$,

Pandang ΔDEF dan ΔCEF

$\overline{CF} = \overline{FD}$, (Titik F adalah titik tengah C dan D)

$\overline{CE} = \overline{DE}$ (Telah disebutkan diatas)

$\overline{EF} = \overline{EF}$ (Berimpit)

Maka $\Delta DEF \cong \Delta CEF$ (S,S,S)

jadi $m\angle C_2 = m\angle D_2$ ………………………………………………………… (1)

Dari langkah (1) dan (2) di dapatkan

$m\angle C_1 + m\angle C_2 = m\angle D_1 + m\angle D_2$,

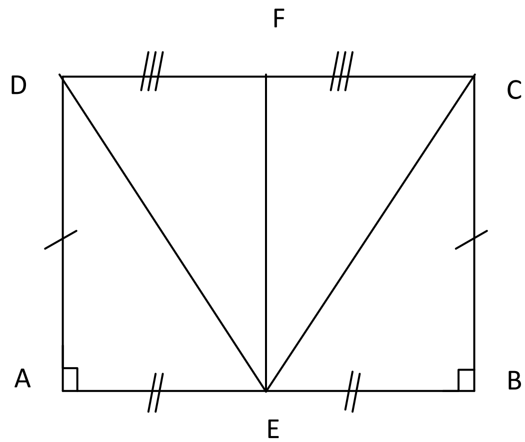
$\leftrightarrow$ $m\angle C = m\angle D$.

Dari uraian diatas dapat disimpulkan $\angle C \cong \angle D$.

Langkah selanjutnya dibuktikan sudut-sudut puncaknya adalah tumpul

Pada bab II, dalil 3.5 telah dibuktikan bahwa besar sudut segiempat pada Geometri Eliptik adalah lebih besar dari 360°, sedangkan segiempat Saccheri kedua sudut alasnya siku-siku jadi sudut puncaknya pasti lebih dari 180°, maka masing-masing sudut puncaknya lebih dari 90° atau tumpul. ■

b. Panjang sisi CD < AB



Gambar 45. Segiempat Saccheri dengan panjang sisi CD < AB

Dari gambar diatas, andaikan CD = AB, maka FC = EB,

dari bukti diatas didapat bahwa ΔDEF ≅ Δ CEF maka sudut-sudut yang bersesuaian kongruen.

m∠CFE = m∠DFE (sudut-sudut bersesuaian pada dua segitiga kongruen)

karena m∠CFE + m∠DFE = 180° yang sama besar maka m∠CFE = 90°.

Jadi m∠CFE = m∠EBC = 90° dan $\overline{EC}$ merupakan sisi persekutuan ΔCFE dan ΔEBC, maka ΔCFE ≅ ΔEBC,

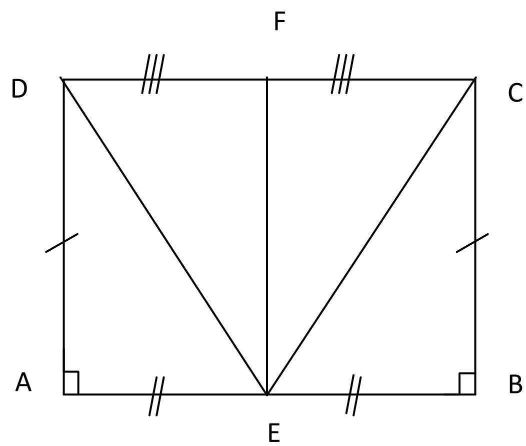
dan diperoleh ∠FEC ≅ ∠BCE, dan ∠FCE ≅ ∠BEC

m∠FCE + m∠BEC = m∠BCE = m∠FCE atau m∠FEB = m∠FCB = 90°

Terdapat pertentangan dengan yang telah dibuktikan bahwa ∠FCB tumpul. Jadi tidak mungkin FC = EB.

Dari gambar 45 lihat segiempat BCFE dengan menggunakan kesejajaran dua garis ∠EBC = ∠BEF = ∠CFE = 90°, dan ∠BCD tumpul maka FC < EB atau CD < AB

c. Ruas garis yang menghubungkan titik-titik tengah sisi atas dan titik tengah alasnya lebih dari kakinya (EF > BC)



Gambar 46. Segiempat Saccheri dengan Panjang segmen EF > BC

Akan dibuktikan EF > BC,

Perhatikan ∆EFC dan ∆ EBC

andaikan EF = AD = BC

∠EFC = ∠EBC = 90° (sudah dibuktikan diatas)

$\overline{EC}$ = $\overline{EC}$ (saling berimpit)

Maka ∆EFC≅ ∆ EBC (Sd,S,S)

Sehingga m∠FCE + m∠BCE = m∠BEC + m∠CEF atau m∠FEB = m∠FCB = 90°.

Terdapat pertentangan dengan yang telah dibuktikan bahwa ∠FCB tumpul. Jadi tidak mungkin EF = AD = BC.

Dari gambar 46 diatas lihat segiempat BCFE dengan menggunakan kesejajaran dua garis $\angle EBC = \angle BEF = \angle CFE = 90°$, dan $\angle BCD$ tumpul, maka $EF > BC$. ■

D. Perbandingan Segiempat Saccheri Pada Geometri Euclid dan Geometri Non Euclid

Pada sub bab-sub bab sebelumnya telah dibahas mengenai sifat Segiempat Saccheri pada masing-masing Geometri, yaitu pada Geometri Parabolik, Geometri Hiperbolik, dan Geometri Eliptik, yang hasilnya adalah

1. Segiempat Saccheri pada Geometri Parabolik memiliki sudut-sudut puncak yang kongruen siku-siku, panjang sisi puncaknya samadengan panjang sisi alasnya, dan panjang ruas garis yang menghubungkan titik-titik tengah dari puncak dan alasanya sama panjang dengan kaki-kaki segiempat Saccheri tersebut.
2. Segiempat Saccheri pada Geometri Hiperbolik memiliki sudut-sudut puncak kongruen dan sudutnya lancip, panjang sisi puncaknya lebih panjang dari panjang sisi alasnya, dan panjang Ruas garis yang menghubungkan titik-titik tengah dari puncak dan alasanya lebih pendek dari kaki-kaki segiempat Saccheri tersebut.
3. Segiempat Saccheri pada Geometri Eliptik memiliki sudut-sudut puncak yang kongruen dan sudutnya tumpul, panjang sisi puncaknya kurang dari panjang sisi alasnya, dan panjang ruas garis yang menghubungkan titik-titik tengah

dari puncak dan alasanya lebih panjang daripada kaki-kaki segiempat Saccheri tersebut.

Dari pembahasan tentang Perbandingan Segiempat Saccheri yang di sampaikan diatas dapat dibuat tabel perbandingan seperti dibawah ini.

Tabel 3. Perbandingan Segiempat Saccheri Pada Geometri Euclid Dan Geometri Non Euclid

Pembanding	Geometri Parabolik	Geometri Hiperbolik	Geometri Eliptik
Sudut puncak	Siku-siku	Lancip	Tumpul
Sisi puncak terhadap sisi alas	Sama panjang	Lebih panjang	Lebih pendek
Panjang segmen penghubung titik tengah sisi atas dan sisi bawah terhadap kaki-kaki segiempat tersebut	Sama panjang	Lebih pendek	Lebih panjang

Dari tabel Perbandingan Segiempat Saccheri diatas terlihat bahwa Segiempat Saccheri memiliki sifat-sifat yang berbeda pada Geometri yang berbeda.

BAB IV

PENUTUP

A. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada bab-bab sebelumnya penelitian Perbandingan Segiempat Saccheri Pada Geometri Euclid Dan Geometri Non Euclid ini dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Segiempat Saccheri adalah segiempat dengan sepasang sisi sama panjang yang tegaklurus terhadap sisi alasnya.
2. Segiempat Saccheri pada Geometri Parabolik memiliki sudut-sudut puncak yang kongruen siku-siku, panjang sisi puncaknya samadengan panjang sisi alasnya, dan panjang ruas garis yang menghubungkan titik-titik tengah dari puncak dan alasanya sama panjang dengan kaki-kaki segiempat Saccheri tersebut.
3. Segiempat Saccheri pada Geometri Hiperbolik memiliki sudut-sudut puncak kongruen dan sudutnya lancip, panjang sisi puncaknya lebih panjang dari panjang sisi alasnya, dan panjang ruas garis yang menghubungkan titik-titik tengah dari puncak dan alasanya lebih pendek dari kaki-kaki segiempat Saccheri tersebut.
4. Segiempat Saccheri pada Geometri Eliptik memiliki sudut-sudut puncak yang kongruen dan sudutnya tumpul, panjang sisi puncaknya kurang dari panjang sisi alasnya, dan panjang ruas garis yang menghubungkan titik-titik tengah

dari puncak dan alasanya lebih panjang daripada kaki-kaki segiempat Saccheri tersebut.

B. SARAN

Pada kajian yang berjudul Perbandingan Segiempat Saccheri Pada Geometri Euclid Dan Geometri Non Euclid ini penulis hanya menulis tentang sifat-sifat Segiempat Saccheri pada Geometri Euclid dan Non Euclid, dengan kajian ini semoga bagi pembaca yang berminat pada kajian Geometri bisa mengembangkan tentang perbandingan bangun yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Coxeter, H. S. M. 1998. *Non-Euclidean Geometry.* Washington, D.C. The Mathematical Association Of America.

Greeberg, Marvin Jay. 1993. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. New York: W.H. Freeman and Company.

Keedy, Mervin L. dkk.1967. Exploring Geometri. New York: Holt, Rinchart and Winston, Inc.

Moeharti HW. 1986. *Materi Pokok Sistem-Sistem Geometri*. Jakarta: Kanika Jakarta, Universitas Terbuka.

Prenowitz, W. Jordan, M. 1965. *Basic Concepts of Geometry.* Blaisdell Publishing Company: Waltham, Manssachusetts. Toronto. London.

Rich, Barnett. 2005. *Geometri.* (Terjemah Irzam Harmein, S.T.): Jakarta: Erlangga

Sova, Dawn B. 1999. *How to Solve Word Problems in Geometry*. New York: McGraw-Hill.