OPTIMISASI PEMROGRAMAN CEMBUNG MENGGUNAKAN SYARAT KUHN-TUCKER

SKRIPSI

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan
Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta
untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan Guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains

Oleh
Supomo
NIM 06305144048

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2011

PERSETUJUAN

SKRIPSI

OPTIMISASI PEMROGRAMAN CEMBUNG
MENGGUNAKAN SYARAT KUHN-TUCKER

Oleh
Supomo
NIM 06305144048

Telah Disetujui pada Tanggal 28 Desember 2010
untuk Dipertahankan di Depan Panitia Penguji Tugas Akhir Skripsi
Program Studi Matematika
Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pendidikan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta

Menyetujui,
Dosen Pembimbing

Himmawati Puji Lestari, M.Si
NIP 197501102000122001

PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama Mahasiswa : Supomo

NIM : 06305144048

Jurusan/ Prodi : Pendidikan Matematika/ Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Judul TAS : Optimisasi Pemrograman Cembung Menggunakan Syarat Kuhn-Tucker

dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini benar-benar karya saya sendiri. Sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya atau pendapat yang ditulis atau diterbitkan orang lain kecuali sebagai acuan atau kutipan dengan mengikuti tata penulisan karya ilmiah yang lazim.

Apabila ternyata terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab saya.

Yogyakarta, 28 Desember 2010
Yang menyatakan,

Supomo
NIM 06305144048

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul "Optimisasi Pemrograman Cembung Menggunakan Syarat Kuhn-Tucker" yang disusun oleh:

Nama : Supomo

NIM : 06305144048

Jurusan/Prodi : Pendidikan Matematika/Matematika

telah dipertahankan di depan Dewan Penguji pada tanggal 11 Januari 2011 dan dinyatakan lulus.

DEWAN PENGUJI

Nama	Jabatan	Tandatangan	Tanggal
Himmawati P.L., M.Si	Ketua Penguji	....	21-01-2011
Atmini Dhoruri, MS	Sekretaris Penguji	....	21-01-2011
Dr. Agus Maman Abadi	Penguji Utama	....	18-01-2011
Karyati, M.Si	Anggota Penguji	....	20-01-2011

Yogyakarta, Januari 2011

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Yogyakarta

Dekan

Dr. Ariswan

NIP 19590914 1988031003

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

MOTTO

- Ilmu itu lebih cantik dari mangkuk yang cantik, orang yang menuntut ilmu itu lebih manis dari madu, dan beramal dengan ilmu yang dimiliki itu lebih sulit dari meniti sehelai rambut. (Usman bin Affan)
- Seseorang dengan tujuan yang jelas akan membuat kemajuan walaupun harus melewati jalan yang sulit. Seseorang tanpa tujuan tidak akan membuat kemajuan walaupun ia berada di jalan yang lurus. (Thomas Carlyle)

PERSEMBAHAN

Karya ini dipersembahkan untuk:

- Kakek dan nenek, serta kedua orang tua tercinta
- Kakak dan adik tersayang
- Sahabat Mat’06
- Para pembaca

OPTIMISASI PEMROGRAMAN CEMBUNG MENGGUNAKAN SYARAT KUHN-TUCKER

Oleh
Supomo
06305144048

ABSTRAK

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk mengkaji pembentukan syarat Kuhn-Tucker dan menyelesaikan pemrograman cembung dengan menggunakan syarat tersebut.

Pembentukan syarat Kuhn-Tucker dikaji melalui pengaruh dua permasalahan, yaitu pengaruh dari masalah optimisasi dengan kendala tak-negatif pada setiap variabel dan pengaruh dari masalah optimisasi dengan kendala berbentuk pertidaksamaan. Dalam hal ini, pembentukan syarat Kuhn-Tucker dimulai dengan pembentukan fungsi Lagrange. Dengan menggunakan syarat Kuhn-Tucker akan diselesaikan masalah optimisasi pemrograman cembung.

Hasil pembahasan menunjukkan bahwa syarat Kuhn-Tucker untuk masalah maksimisasi adalah turunan parsial fungsi Lagrange-nya terhadap variabel pilihan dan pengali Lagrange masing-masing adalah tak-positif dan tak-negatif, dengan variabel pilihan dan pengali Lagrange-nya adalah tak-negatif, dan kondisi-kondisi *complementary slackness*. Sedangkan syarat Kuhn-Tucker untuk masalah minimisasi yaitu sama dengan syarat Kuhn-Tucker untuk masalah maksimisasi, hanya saja pada turunan parsial fungsi Lagrange-nya terhadap variabel pilihan dan pengali Lagrange masing-masing diganti dengan tak-negatif dan tak-positif.

Penyelesaian pemrograman cembung menggunakan syarat Kuhn-Tucker dilakukan melalui langkah-langkah berikut: (1) membentuk fungsi Lagrange (2) menetapkan syarat Kuhn-Tucker, (3) mencari titik optimum dengan menggunakan syarat Kuhn-Tucker, dan (4) menghitung nilai dari fungsi yang akan dioptimumkan atas titik optimum yang diperoleh pada langkah (3).

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas segala limpahan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "Optimisasi Pemrograman Cembung Menggunakan Syarat Kuhn-Tucker" ini.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, motivasi, kerjasama maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Bapak Dr. Ariswan, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta yang telah memberikan kesempatan penulis dalam menyelesaikan studi.
2. Bapak Dr. Hartono, selaku ketua Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta yang telah memberikan kemudahan pengurusan administrasi.
3. Ibu Atmini Dhoruri, M.Si, selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta yang telah memberi dukungan untuk kelancaran studi dan bersedia menjadi dosen penguji.
4. Ibu Himmawati Puji Lestari, M.Si, selaku Penasehat Akademik yang telah memberikan pengarahan selama menjalani masa studi dan sekaligus sebagai

Dosen Pembimbing yang telah dengan sabar membimbing penulis dalam penulisan skripsi.

5. Bapak Dr. Agus Maman Abadi dan Ibu Karyati, M.Si yang telah bersedia menjadi Dosen Penguji.
6. Seluruh Dosen Jurusan Pendidikan Matematika yang telah memberikan berbagai ilmu kepada penulis.
7. Bapak Djumali dan Ibu Nurbaeti, selaku kedua orang tua penulis yang telah memberikan do'a dan motivasi.
8. Semua pihak yang telah membantu tersusunnya skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam skripsi ini masih banyak sekali kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menyempurnakan skripsi ini. Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membacanya.

Yogyakarta,   Januari 2011

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

Halaman Judul i

Halaman Persetujuan ii

Halaman Pernyataan iii

Halaman Pengesahan iv

Motto dan Persembahan v

Abstrak vi

Kata Pengantar vii

Daftar Isi ix

Daftar Gambar xi

Daftar Simbol xii

BAB I PENDAHULUAN 1

1.1 Latar Belakang 1

1.2 Rumusan Masalah 2

1.3 Tujuan Penelitian 3

1.4 Manfaat Penelitian 3

BAB II LANDASAN TEORI 4

2.1 Limit dan Kekontinuan Fungsi 4

2.2 Turunan 8

2.3 Fungsi Naik dan Fungsi Turun 11

2.4 Maksimum dan Minimum 12
2.5 Kecembungan dan Kecekungan Suatu Fungsi 14
2.6 Masalah Optimisasi dan Pemrograman Nonlinear 22
2.7 Pemrograman Cembung 23
2.8 Fungsi Lagrange 30
BAB III PEMBAHASAN 35
3.1 Pembentukan Syarat Kuhn-Tucker 35
3.2 Teorema Kecukupan Kuhn-Tucker 45
3.3 Penyelesaian Pemrograman Cembung Menggunakan Syarat Kuhn-Tucker 51
BAB IV PENUTUP 64
4.1 Simpulan 64
4.2 Saran 65
DAFTAR PUSTAKA 66

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 2.1 Grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{x-2}$ 8

Gambar 2.2 Garis lurus dengan kemiringan $\frac{2}{5}$ 14

Gambar 2.3 Garis lurus dengan kemiringan $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 14

Gambar 2.4 Grafik fungsi cekung dan garis singgungnya 16

Gambar 3.1 Tiga situasi grafik yang mungkin terjadi pada suatu fungsi 36

Gambar 3.2 Grafik fungsi $x_2 = (1 - x_1)^3$ 44

DAFTAR SIMBOL

$a \in S$	: a adalah suatu elemen himpunan S
$S \subset T$	: himpunan S adalah himpunan bagian dari T
$\mathbb{R}$	: himpunan bilangan real
$\mathbb{R}^n$	: ruang berdimensi n
$\leq$	: tidak lebih dari
$\geq$	: tidak kurang dari
$<$	: kurang dari
$>$	: lebih dari
$\Leftrightarrow$	: jika dan hanya jika
$\blacksquare$	: akhir suatu bukti
$\lim_{x \to a} f(x)$	: limit dari $f(x)$ untuk x mendekati a
$\lvert m \rvert$	: nilai absolut dari bilangan m
$f'(x)$	: turunan pertama dari fungsi f terhadap x
$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$	: turunan parsial fungsi $f(x)$ terhadap x_i
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	: penjumlahan $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$
$g^j(x)$	: fungsi kendala x, untuk setiap $j = 1,2,\ldots,m$
L	: fungsi Lagrange
λ	: pengali-Lagrange
λ_j	: pengali-Lagrange, untuk setiap $j = 1,2,\ldots,m$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Suatu permasalahan dalam kehidupan sehari-hari seringkali dapat diselesaikan secara matematis. Dalam menghadapi suatu permasalahan hidup, manusia cenderung berprinsip ekonomi, yakni memperoleh hasil yang optimum dengan usaha sedikit mungkin (Susanto, 1994 : 1). Banyak permasalahan yang dicari nilai optimumnya, misal pendapatan yang maksimum, biaya produksi yang minimum, jarak yang terdekat, dan sebagainya. Permasalahan tersebut merupakan masalah optimisasi yang tidak lain adalah maksimisasi dan minimisasi. Dalam masalah optimisasi timbul model-model matematis yang tercakup dalam riset operasi. Pemrograman linear merupakan salah satu teknik dari riset operasi untuk memecahkan permasalahan optimisasi dengan menggunakan persamaan dan pertidaksamaan linear untuk mencari hasil (*output*) yang optimum dengan memperhatikan sumber-sumber (*input*) yang persediannya terbatas pada nilai tertentu. Sasaran atau hasil yang akan dicapai merupakan fungsi tujuan, sedangkan persedian sumber-sumber yang terbatas pada nilai tertentu merupakan fungsi kendala.

Dalam berbagai bidang ilmu, seperti ekonomi, teknik, dan lain-lain, banyak permasalahan optimisasi yang tidak dapat dimodelkan dalam bentuk pemrograman linear. Hal ini berkaitan dengan bentuk fungsi tujuan dan fungsi kendala, yakni sebagian atau seluruh fungsi tersebut berupa fungsi nonlinear. Salah satu bentuk permasalahan optimisasi tersebut adalah pemrograman cembung.

Pemrograman cembung merupakan salah satu bentuk khusus dari pemrograman nonlinear, di mana fungsi tujuan dan fungsi kendala masing-masing adalah fungsi cekung dan fungsi cembung (dalam hal ini masalahnya adalah maksimisasi), sedangkan untuk masalah minimisasi fungsi tujuan dan fungsi kendala berturut-turut adalah fungsi cembung dan fungsi cekung.

Untuk mencari penyelesaian nilai optimum (nilai maksimum atau nilai minimum) pemrograman cembung, diperlukan suatu metode untuk mendapatkan nilai optimum global, dan tidak terjebak dalam perolehan nilai optimum lokal. Ada beberapa metode yang dapat digunakan dalam menyelesaiakan masalah pemrograman cembung, salah satunya adalah metode Frank-Wolfe. Dalam pelaksanaannya, metode tersebut hanya dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah pemrograman cembung dengan kendala linear. Jika diberikan masalah pemrograman cembung dengan kendala nonlinear, maka metode tersebut tidak efisien lagi. Oleh karena itu, diperlukan sebuah metode alternatif yang lebih efisien untuk menyelesaikan masalah pemrograman cembung baik dengan kendala linear maupun nonlinear.

Hal inilah yang mendasari perlunya disajikan sebuah metode lain, yaitu syarat Kuhn-Tucker sebagai metode alternatif untuk menyelesaiakan masalah pemrograman cembung baik dengan kendala linear maupun nonlinear.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, dapat dirumuskan beberapa masalah sebagai berikut :

1. Bagaimana proses pembentukan syarat Kuhn-Tucker ?
2. Bagaimana langkah-langkah menyelesaikan pemrograman cembung dengan menggunakan syarat Kuhn-Tucker ?

1.3 Tujuan Penulisan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penulisan skripsi ini adalah :

1. Mengkaji secara teoritis pembentukan syarat Kuhn-Tucker.
2. Menyelesaikan pemrograman cembung dengan menggunakan syarat Kuhn-Tucker.

1.4 Manfaat Penulisan

Dari hasil penulisan ini, diharapkan dapat digunakan sebagai sumbangan pemikiran bagi mahasiswa Universitas Negeri Yogyakarta, khususnya jurusan Pendidikan Matematika yang berminat mengembangkan penulisan ini.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini diberikan beberapa landasan teori, yaitu konsep-konsep dasar matematika yang melandasi teori pada bab tiga, diantaranya adalah limit dan kekontinuan fungsi, turunan, fungsi naik dan fungsi turun, masalah maksimum dan minimum, kecembungan dan kecekungan suatu fungsi, masalah optimisasi dan pemrograman nonlinear, pemrograman cembung, dan fungsi Lagrange. Konsep-konsep dasar tersebut berisi beberapa pengertian dasar, definisi, dan teorema.

2.1 Limit dan Kekontinuan Fungsi

Berikut akan diberikan definisi tentang limit dan kekontinuan suatu fungsi.

Definisi 2.1.1. (Varberg dkk, 2003 : 70)

Andaikan f suatu fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$. Limit dari $f(x)$ untuk $x \in \mathbb{R}$ mendekati a adalah L, ditulis

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ yang dipilih, terdapat suatu bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga, jika $0 < |x - a| < \delta$, maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Contoh 2.1.1

Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{x\to 4}(3x-7)=5$. Untuk menunjukkan hal tersebut, maka harus dicari suatu bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga,

$$0 < |x-4| < \delta \Rightarrow |(3x-7)-5| < \varepsilon$$

Sekarang

$$\begin{aligned} |(3x-7)-5| < \varepsilon &\Leftrightarrow |\ 3x-12| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |3(x-4)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |3||x-4| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow 3|x-4| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x-4| < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Ini menunjukkan bahwa $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ akan memenuhi.

Untuk mempermudah pencarian limit, berikut akan diberikan teorema tentang aturan-aturan pencarian limit suatu fungsi.

Teorema 2.1.1 (Varberg dkk, 2003: 76)

Jika x suatu elemen dari $\mathbb{R}$, n adalah bilangan bulat positif, dan k adalah konstanta, serta f dan g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di c, maka:

a. $\lim_{x\to c} k = k$;

b. $\lim_{x\to c} x = c$;

c. $\lim_{x\to c}[k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x\to c} f(x)$;

d. $\lim_{x\to c}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$;

e. $\lim_{x\to c}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$;

f. $\lim_{x \to c}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$;

g. $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$, asalkan $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$.

Selain definisi di atas, adapun definisi tentang limit-limit sepihak, diantaranya adalah definisi limit sisi kanan dan definisi limit sisi kiri. Berikut definisi dari limit sisi kanan.

Definisi 2.1.1. Limit Sisi Kanan (Varberg dkk, 2003 : 74)

Andaikan f suatu fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$. Limit sisi kanan dari $f(x)$ untuk $x \in \mathbb{R}$ mendekati a adalah L, ditulis

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ yang dipilih, terdapat suatu bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga, jika $0 < |x - a| < \delta$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Sedangkan definisi dari limit sisi kiri adalah sebagai berikut.

Definisi 2.1.1. Limit Sisi Kiri (Varberg dkk, 2003 : 74)

Andaikan f suatu fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$. Limit sisi kiri dari $f(x)$ untuk $x \in \mathbb{R}$ mendekati a adalah L, ditulis

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ yang dipilih, terdapat suatu bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga, jika $0 < |a - x| < \delta$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Contoh 2.1.2

Misalkan f didefinisikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{jika } x < 0 \\ 1 & \text{jika } x > 0 \end{cases}$$

Akan ditentukan $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ dan $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, yakni sebagai berikut:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-}(-1) = -1$$

dan

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

Dalam Contoh 2.1.2, $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$. Karena limit kiri dan limit kanannya tidak sama, maka limit dwi-arahnya tidak ada. Konsep limit dwi-arah tidak ada karena limit sepihaknya tidak sama dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.1.1 (Leithold, 1986: 110)

Diberikan suatu fungsi f dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$, maka $\lim_{x \to a} f(x)$ ada dan sama dengan L jika dan hanya jika $\lim_{x \to a^+} f(x)$ dan $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ keduanya ada dan sama dengan L.

Sebagian besar fungsi yang akan digunakan dalam pembahasan selanjutnya adalah kontinu. Berikut akan diberikan definisi tentang kekontinuan fungsi.

Definisi 2.1.2 (Ayres & Mandelson, 2006: 45)

Misalkan f suatu fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan kontinu di titik $x = x_0$, untuk $x \in \mathbb{R}$, jika memenuhi kondisi berikut :

a. $f(x_0)$ ada (yaitu, x_0 berada dalam daerah asal f);

b. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ada;

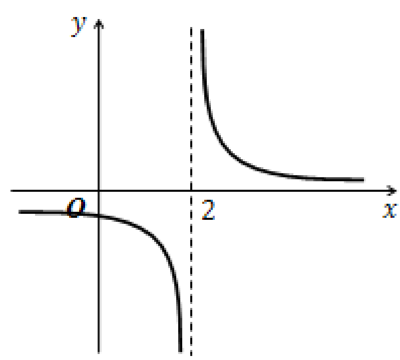
c. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Jika satu atau lebih kondisi di atas tidak dipenuhi, maka fungsi f dikatakan diskontinu di titik $x = x_0$.

Contoh 2.1.2

(a) $f(x) = x^2 + 1$ adalah kontinu pada $x = 2$, karena $\lim_{x \to 2} f(x) = 5 = f(2)$.

(b) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ adalah diskontinu pada $x = 2$, karena $f(2)$ tidak terdefinisi dan juga $\lim_{x \to 2} f(x)$ tidak ada karena limit kiri dan limit kanannya tidak sama, yakni $\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$ dan $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$. Sketsa grafik dari fungsi ini ditunjukkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{x-2}$

2.2 Turunan

Dalam subbab ini akan dijelaskan tentang definisi dan aturan-aturan dalam pencarian turunan.

Definisi 2.2.1 (Varberg dkk, 2003: 111)

Andaikan f suatu fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$. Turunan fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca "f aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan c adalah

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

asalkan nilai limit ini ada.

Jika limit ini memang ada, maka dikatakan bahwa f terdiferensiasikan di c. Pencarian turunan disebut diferensiasi.

Jika f terdiferensiasikan di c, maka fungsi f kontinu di c. Untuk membuktikan hal tersebut, maka harus ditunjukkan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Dengan menuliskan $f(x)$ dalam bentuk lain, yaitu

$$f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c), \qquad x \neq c$$

Sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c} f(x) &= \lim_{x \to c} \left[f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c) \right] \\ &= \lim_{x \to c} f(c) + \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x \to c} (x - c) \\ &= f(c) + f'(c) \, . \, 0 \\ &= f(c) \end{aligned}$$

■

Proses pencarian turunan suatu fungsi langsung dari definisi turunan yakni Definisi 2.2.1 memakan waktu yang cukup lama. Berikut akan dikembangkan cara-cara yang memungkinkan untuk memperpendek proses dalam pencarian turunan.

Teorema 2.2.1 (Varberg dkk, 2003: 117-118)

Jika x suatu elemen dari $\mathbb{R}$ dan k adalah suatu konstanta, maka:

a. Jika $f(x) = k$, maka untuk sebarang x, $f'(x) = 0$.

b. Jika $f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$.

c. Jika $f(x) = x^n$, dengan *n* bilangan bulat positif, maka $f'(x) = nx^{n-1}$.

d. Jika f suatu fungsi yang terdiferensiasikan, maka $(kf)'(x) = kf'(x)$.

Bukti :

a. $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = 0$ ■

b. $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$ ■

c. $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} = nx^{n-1}$$ ■

d. Andaikan $F(x) = k \cdot f(x)$. Maka

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k\cdot f(x+h) - k\cdot f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} k \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = k \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= k \cdot f(x)$$ ■

Bila suatu fungsi didefinisikan atas dua atau lebih variabel bebas, maka definisi turunan dari fungsi tersebut membutuhkan sedikit perubahan, yaitu sebagai berikut:

Definisi 2.2.2 (Baisuni, 1986)

Misalkan f suatu fungsi dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}$, dengan rumus $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, untuk $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Turunan parsial fungsi f terhadap x_i, adalah

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1,x_2,\ldots,x_i+h,\ldots,x_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{h}$$

untuk setiap $i = 1,2, \ldots, n$.

Turunan parsial fungsi $f = f(x)$ terhadap x_i untuk setiap $i = 1,2, \ldots, n$ dinotasikan sebagai :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

dengan menganggap semua variabel bebas yang lain adalah konstanta.

2.3 Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Berikut ini adalah definisi mengenai fungsi naik dan fungsi turun.

Definisi 2.3.1 (Prayudi, 2006: 176)

Andaikan f fungsi yang terdefinisi pada interval I.

a. Fungsi f dikatakan naik pada interval I jika untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam I, jika $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$

b. Fungsi f dikatakan turun pada interval I jika untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam I, jika $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$

Teorema berikut juga dapat digunakan untuk menentukan secara persis di mana suatu fungsi yang terdiferensiasikan naik dan di mana fungsi tersebut turun.

Teorema 2.3.1 (Prayudi, 2006: 177)

Misalkan f kontinu pada interval I dan terdiferensiasikan pada setiap titik dalam interval I.

a. Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap x dalam I, maka f naik pada I.

b. Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap x dalam I, maka f turun pada I.

2.4 Maksimum dan Minimum

Salah satu pemakaian dasar kalkulus yang paling penting dalam skripsi ini adalah masalah maksimum atau minimum suatu fungsi.

Definisi 2.4.1 (Varberg dkk, 2003 : 167)

Misalkan f adalah fungsi dengan daerah asal S, dan misalkan c adalah sebuah titik di S.

a. $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada S jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x di S;

b. $f(c)$ adalah nilai minimum f pada S jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x di S.

Biasanya fungsi yang dimaksimumkan atau diminimumkan mempunyai selang I sebagai daerah asalnya. Selang tersebut beberapa di antaranya memuat titik-titik batas (*boundary point*). Misalnya, $I = [a, b]$ memuat kedua titik batas, $I = [a, b)$ hanya memuat titik batas kiri, dan $I = (a, b)$ sama sekali tidak memuat titik batas. Nilai maksimum atau nilai minimum dari fungsi yang didefinisikan pada selang tutup dapat terjadi pada titik-titik batas.

Jika c adalah titik di dalam I dengan $f'(c) = 0$, maka titik c disebut titik stasioner (*stationary point*). Nilai maksimum atau nilai minimum dapat terjadi pada titik stasioner.

Jika c sebuah titik di dalam I dengan f' tidak ada, maka titik c disebut titik singular (*singular point*). Titik singular berupa titik di mana f tidak terdiferensiasikan pada titik tersebut. Nilai maksimum atau nilai minimum dapat terjadi pada titik singular.

Sebarang titik dalam daerah asal fungsi f yang termasuk salah satu dari ketiga jenis titik ini (titik batas, titik stasioner, dan titik singular) disebut titik kritis f.

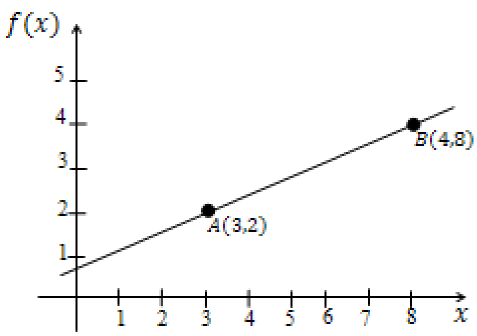
Definisi 2.4.1 berlaku secara umum pada fungsi dengan lebih dari satu variabel. Seperti halnya definisi maksimum dan minimum, jenis-jenis titik kritis juga analog dengan fungsi variabel tunggal, yakni ada tiga jenis titik kritis dari f di S, dengan $S \subseteq \mathbb{R}^n$, yaitu:

1. Titik batas (*boundary point*).
2. Titik stasioner (*stationary point*). Titik $\boldsymbol{x}^* = ({x_1}^*, {x_2}^*, \dots, {x_n}^*)$ disebut titik stasioner jika $\boldsymbol{x}^* = ({x_1}^*, {x_2}^*, \dots, {x_n}^*)$ adalah sebuah titik dalam di S di mana f dapat didiferensialkan dan $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ yang dihitung pada $\boldsymbol{x}^* = ({x_1}^*, {x_2}^*, \dots, {x_n}^*)$.

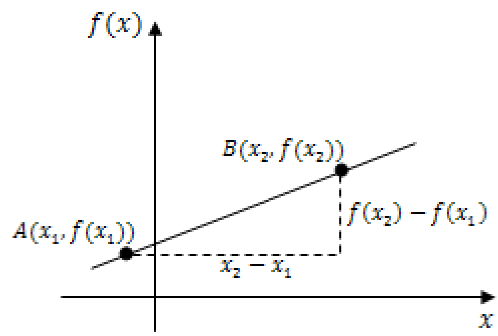
3. Titik singular (*singular point*). Titik $\boldsymbol{x}^* = (x_1{}^*, x_2{}^*, \ldots, x_n{}^*)$ disebut titik singular jika $\boldsymbol{x}^* = (x_1{}^*, x_2{}^*, \ldots, x_n{}^*)$ adalah sebuah titik dalam di S di mana f tidak terdiferensiasikan.

2.5 Kecembungan dan Kecekungan Suatu Fungsi

Pada subbab ini akan diperkenalkan tentang kecembungan (*convexity*) dan kecekungan (*concavity*) suatu fungsi. Agar dapat memahami dengan baik tentang definisi kecembungan dan kecekungan suatu fungsi, maka terlebih adahulu akan dijelaskan tentang kemiringan garis dan garis singgung.



Gambar 2.2 Garis lurus dengan kemiringan $\frac{2}{5}$



Gambar 2.3 Garis lurus dengan kemiringan $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

Dalam Gambar 2.2, titik A ke titik B, terdapat suatu kenaikan (perubahan vertikal) sebesar 2 satuan dan suatu larian (perubahan horizontal) sebesar 5 satuan. Garis yang melalui titik A dan titik B dikatakan mempunyai kemiringan $\frac{2}{5}$. Umumnya (Gambar 2.3), untuk sebuah garis melalui $A(x_1, f(x_1))$ dan $B(x_2, f(x_2))$, dengan $x_1 \neq x_2$, kemiringan dari garis tersebut didefinisikan sebagai

$$m = \frac{\text{kenaikan}}{\text{larian}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Gagasan Euclid tentang garis singgung sebagai garis yang menyentuh suatu kurva, benar jika kurvanya suatu lingkaran, tetapi sama sekali tidak berlaku untuk kebanyakan kurva lain (Varberg dkk, 2003: 103). Dengan menggunakan konsep limit, memberikan definisi formal mengenai garis singgung.

Definisi 2.5.1 (Varberg dkk, 2003: 104)

Garis singgung kurva $y = f(x)$ pada titik $P(c, f(c))$ adalah garis yang melalui P dengan kemiringan

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

menunjukkan bahwa limit ini ada dan bukan ∞ atau -∞.

Pada Definisi 2.5.1, kemiringan garis singgung kurva $y = f(x)$ tidak lain adalah turunan pertama dari fungsi $f(x)$, yakni $m = f'(x)$.

Selanjutnya, pengertian kecembungan dan kecekungan suatu fungsi akan dijelaskan pada definisi berikut.

Definisi 2.5.2 (Chiang & Wainwright, 2005: 304)

Misalkan f suatu fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ dan f fungsi yang terdiferensiasikan.

a. Fungsi $f(x)$ adalah cekung jika, untuk setiap titik tertentu u dan setiap titik lain v dalam domain f, memenuhi

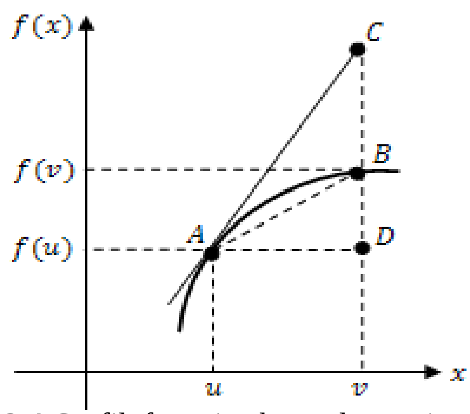
$$f(v) \leq f(u) + (v - u)f'(u)$$

b. Fungsi $f(x)$ dikatakan cembung jika, untuk setiap titik tertentu u dan titik lain v dalam domain f, memenuhi

$$f(v) \geq f(u) + (v-u)f'(u)$$

Definisi 2.5.2 dapat disesuaikan untuk kecekungan sempurna dan kecembungan sempurna dengan mengubah tanda $\leq$ dan tanda $\geq$, masing-masing menjadi tanda < dan tanda >.

Jika ditafsirkan secara geometri, Definisi 2.5.2 menggambarkan suatu kurva cekung (cembung) yang terletak pada atau di bawah (di atas) semua garis singgungnya. Sebaliknya, untuk memenuhi syarat sebagai cekung sempurna (cembung sempurna), kurva harus terletak di bawah (di atas) semua garis singgung, kecuali pada titik singgungnya.



Gambar 2.4 Grafik fungsi cekung dan garis singgungnya

Pada Gambar 2.4, misalkan, titik A dan titik B merupakan titik tertentu pada kurva, masing-masing dengan tinggi $f(u)$ dan $f(v)$, dan titik A dilalui garis singgung AC. Misalkan x naik dari nilai u. Agar kurva membentuk bukit atau cekung sempurna, maka harus melengkung menjauhi garis singgung AC, sehingga titik B

harus terletak di bawah titik C. Sebaliknya, jika kurva tersebut tidak cekung sempurna, maka busur AB berubah menjadi segmen garis dan bersinggungan dengan segmen garis AC, sebagai bagian linear dari kurva. Dalam kasus yang terakhir tersebut, kemiringan segmen garis AB sama dengan kemiringan segmen garis AC. Kedua kasus ini mempunyai implikasi bahwa kemiringan segmen garis AB tidak lebih dari kemiringan segmen garis AC, atau

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leq f'(u)$$

Sehingga,

$$f(v) - f(u) \leq f'(u)(v-u)$$

Berdasarkan Definisi 2.5.2, teorema berikut mengenai kecekungan dan kecembungan dapat diringkas dengan mudah.

Teorema 2.5.1 (Chiang & Wainwright, 2005: 302)

Misalkan f dan g masing-masing suatu fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ dan penjumlahan dari dua fungsi tersebut adalah suatu fungsi baru $f+g$.

(a) Jika $f(x)$ adalah fungsi linear atau fungsi konstanta, maka $f(x)$ adalah fungsi cekung dan juga fungsi cembung, tetapi tidak sempurna.

(b) Jika $f(x)$ merupakan fungsi cekung, maka $-f(x)$ adalah fungsi cembung, dan sebaliknya. Demikian juga, bila $f(x)$ adalah fungsi cekung sempurna, maka $-f(x)$ adalah fungsi cembung sempurna.

(c) Jika $f(x)$ dan $g(x)$ kedua-duanya adalah fungsi cekung (cembung), maka $f(x) + g(x)$ juga merupakan fungsi cekung (cembung). Jika $f(x)$ dan $g(x)$ kedua-duanya adalah fungsi cekung (cembung), dan jika satu atau keduanya cekung sempurna (cembung sempurna), maka $f(x) + g(x)$ adalah cekung sempurna (cembung sempurna).

Definisi 2.5.2 berlaku secara umum pada fungsi dengan lebih dari satu variabel dinyatakan dalam definisi berikut.

Definisi 2.5.3 (Chiang & Wainwright, 2005: 304)

Misalkan f suatu fungsi dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}$ dan f fungsi yang terdiferensiasikan.

a. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ adalah cekung jika, untuk setiap titik tertentu $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan setiap titik lain $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dalam domain f, dengan $u_i \neq v_i$, untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$, memenuhi

$$f(v_1, v_2, \dots, v_n) \leq f(u_1, u_2, \dots, u_n) + \sum_{i=1}^{n} (v_i - u_i) \frac{\partial f(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_i}$$

b. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ adalah cekung jika, untuk setiap titik tertentu $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan setiap titik lain $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dalam domain f, dengan $u_i \neq v_i$, untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$, memenuhi

$$f(v_1, v_2, \dots, v_n) \geq f(u_1, u_2, \dots, u_n) + \sum_{i=1}^{n} (v_i - u_i) \frac{\partial f(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_i}$$

Definisi 2.5.3 dapat disesuaikan untuk kecekungan sempurna dan kecembungan sempurna dengan mengubah tanda $\leq$ dan tanda $\geq$, masing-masing menjadi tanda $<$ dan tanda $>$.

Contoh 2.5.1

Akan diperiksa apakah fungsi-fungsi berikut adalah cembung, cekung, cembung sempurna, atau cekung sempurna atau bukan keempatnya.

(a) $f(x) = -x^4$

(b) $f(x) = {x_1}^2 + {x_2}^2$

Penyelesaian :

(a) Misalkan v dan u sebagai dua titik berbeda dalam domain f, maka

$$f(v) = -v^4 \quad \text{dan} \quad f(u) = -u^4 \tag{2.5.1}$$

dan

$$f(u) + (v-u)f'(u) = -u^4 - (v-u)4u^3 \tag{2.5.2}$$

dengan $f'(u)$ adalah turunan pertama dari $f(u)$. Jika persamaan (2.5.2) dikurangkan oleh $f(v) = -v^4$, diperoleh hasil

$$\begin{aligned} f(v) - [f(u) + (v-u)f'(u)] &= -v^4 - [-u^4 - (v-u)4u^3] \\ &= -v^4 + u^4 + (v-u)4u^3 \\ &= \left(-\frac{v^4-u^4}{v-u} + 4u^3\right)(v-u) \\ &= [-(v^3 + v^2u + vu^2 + u^3) + 4u^3](v-u) \\ &= -(v^3 + v^2u + vu^2 - 3u^3)(v-u) \\ &= -[(v-u)(v^2 + 2vu + 3u^2)](v-u) \end{aligned}$$

$$= -(v^2 + 2vu + 3u^2)(v - u)^2$$

$$= -[(v + u)^2 + 2u^2)](v - u)^2 \qquad \textbf{(2.5.3)}$$

Nilai dari pernyataan (2.5.3) harus negatif, karena untuk setiap v dan u yang diambil, dengan $v \neq u$, maka dipenuhi

$$(v + u)^2 > 0, \quad 2u^2 \geq 0, \text{ dan } \quad (v - u)^2 > 0$$

Sehingga,

$$-[(v + u)^2 + 2u^2)](v - u)^2 < 0.$$

Oleh karena itu,

$$f(v) - [f(u) + (v - u)f'(u)] < 0$$

atau

$$f(v) < f(u) + (v - u)f'(u)$$

Pernyataan pertidaksamaan terakhir ini memenuhi Definisi 2.5.2 nomor (a), sehingga fungsi $f(x) = -x^4$ adalah cekung sempurna.

(b) Misalkan $v = (v_1, v_2)$ dan $u = (u_1, u_2)$, dengan $v_i \neq u_i$, untuk setiap $i = 1,2$, sebagai dua titik dalam domain f, sehingga

$$f(u) = {u_1}^2 + {u_2}^2 \qquad \textbf{(2.5.4)}$$

$$f(v\ ) = {v_1}^2 + {v_2}^2 \qquad \textbf{(2.5.5)}$$

dan

$$f(u) + \sum_{i=1}^{2}(v_i - u_i)\frac{\partial f(u)}{\partial u_i}$$

$$= {u_1}^2 + {u_2}^2 + (v_1 - u_1)2u_1 + (v_2 - u_2)2u_2$$

$$= {u_1}^2 + {u_2}^2 + 2u_1v_1 - 2{u_1}^2 + 2u_2v_2 - 2{u_2}^2$$

$$= -{u_1}^2 - {u_2}^2 + 2u_1v_1 + 2u_2v_2 \quad \textbf{(2.5.6)}$$

Jika persamaan (2.5.6) dikurangakan dari persamaan (2.5.5), maka diperoleh,

$$f(v) - f(u) + \sum_{i=1}^{2}(v_i - u_i)\frac{\partial f(u)}{\partial u_i}$$

$$= {v_1}^2 + {v_2}^2 - (-{u_1}^2 - {u_2}^2 + 2u_1v_1 + 2u_2v_2)$$

$$= {v_1}^2 + {v_2}^2 + {u_1}^2 + {u_2}^2 - 2u_1v_1 - 2u_2v_2)$$

$$= {v_1}^2 - 2u_1v_1 + {u_1}^2 + {v_2}^2 - 2u_2v_2 + {u_2}^2$$

$$= (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 \quad \textbf{(2.5.7)}$$

Tampak jelas pada persamaan (2.5.7) bahwa $(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 > 0$, karena untuk setiap (v_1, v_2) dan (u_1, u_2) yang dipilih, dengan $v_i \neq u_i$ untuk setiap $i = 1{,}2$, maka memenuhi $(v_1 - u_1)^2 > 0$ dan $(v_2 - u_2)^2 > 0$. Oleh karena itu,

$$f(v) - f(u) + \sum_{i=1}^{2}(v_i - u_i)\frac{\partial f(u)}{\partial u_i} > 0$$

atau

$$f(v) > f(u) + \sum_{i=1}^{2}(v_i - u_i)\frac{\partial f(u)}{\partial u_i} \quad \textbf{(2.5.12)}$$

Jadi, pernyataan 2.5.12 memenuhi Definisi 2.5.3 nomor (b) yaitu $f(x) = {x_1}^2 + {x_2}^2$ adalah cembung sempurna.

2.6 Masalah Optimisasi dan Pemrograman Nonlinear

Masalah optimisasi adalah masalah mencari nilai terbesar (maksimisasi) atau nilai terkecil (minimisasi) yang mungkin dari sebuah fungsi dari sejumlah variabel tertentu. Variabel-variabel tersebut terikat pada sekelompok kendala (*constraint*) yang berbentuk persamaan atau pertidaksamaan. Jadi dalam sebuah masalah optimisasi, dicari penyelesaian optimum yaitu nilai untuk variabel-variabel yang tidak bertentangan dengan kendala-kendala yang menyangkut variabel-variabel tersebut dan yang memberikan nilai optimum (maksimum atau minimum) pada fungsi tujuan.

Pemrograman nonlinear merupakan salah satu teknik dari riset operasi untuk memecahkan permasalahan optimisasi dengan menggunakan persamaan dan pertidaksamaan nonlinear untuk mencari hasil (*output*) yang optimum dengan memperhatikan sumber-sumber (*input*) yang persediannya terbatas pada nilai tertentu. Sasaran atau hasil yang akan dicapai merupakan fungsi tujuan, sedangkan persedian sumber-sumber yang terbatas pada nilai tertentu merupakan fungsi kendala. Dalam subbab ini penulis akan membahas ciri-ciri umum dari masalah-masalah pemrograman nonlinear.

Masalah pemrograman nonlinear, merupakan masalah untuk memilih nilai-nilai $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ yang merupakan variabel-variabel keputusan, sedemikian sehingga,

Memaksimumkan/meminimumkan	$f(\boldsymbol{x})$
dengan batasan-batasan	$g^j(\boldsymbol{x}) \leq r_j$, untuk setiap $j = 1,2, \dots, m$
dan	$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

dengan $f(\boldsymbol{x})$ dan $g^j(\boldsymbol{x})$ (untuk setiap $j = 1,2,\dots,m$) masing-masing adalah fungsi dengan *n*-variabel.

Ini merupakan salah satu bentuk baku dari masalah pemrograman nonlinear. Fungsi yang dimaksimumkan/diminimumkan, $f(\boldsymbol{x})$ dinamakan fungsi tujuan. Batasan-batasan biasanya dinamakan kendala-kendala. Pada m-kendala pertama dinamakan kendala-kendala fungsional, sedangkan batasan-batasan $x_i \geq 0$ dinamakan kendala-kendala tak-negatif.

2.7 Pemrograman Cembung

Pemrograman cembung merupakan salah satu bentuk khusus dari pemrograman nonlinear, dan fungsi tujuan dan fungsi kendalanya masing-masing adalah fungsi cekung dan fungsi cembung (dalam hal ini, masalahnya adalah maksimisasi), sedangkan untuk masalah minimisasi fungsi tujuan dan fungsi kendalanya masing-masing adalah fungsi cembung dan fungsi cekung. Pemrograman cembung merupakan pemrograman dengan kendala-kendala berupa pertidaksamaan. Berikut akan diberikan bentuk-bentuk masalah optimisasi pemrograman cembung.

Diberikan bentuk pemrograman cembung dengan variabel-variabel keputusan $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ yaitu sebagai berikut :

Memaksimumkan	$f(\boldsymbol{x})$
dengan kendala	$g^j(\boldsymbol{x}) \leq r_j$, untuk setiap $j = 1,2,\dots,m$
dan	$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

dengan $f(\boldsymbol{x})$ dan $g^j(\boldsymbol{x})$ (untuk setiap $j = 1,2,\dots,m$) berturut-turut adalah fungsi cekung dan fungsi cembung.

Bentuk umum di atas merupakan bentuk umum untuk masalah maksimisasi, sedangkan untuk masalah minimisasi diberikan sebagai berikut :

Meminimumkan	$f(\boldsymbol{x})$
dengan kendala	$g^j(\boldsymbol{x}) \geq r_j$, untuk setiap $j = 1,2,\dots,m$
dan	$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

di mana $f(\boldsymbol{x})$ dan $g^j(\boldsymbol{x})$ (untuk setiap $j = 1,2,\dots,m$) masing-masing adalah fungsi cembung dan fungsi cekung.

Contoh 2.7.1

Akan diselidiki apakah masalah-masalah pemrograman nonlinear berikut merupakan masalah pemrograman cembung.

(a)	Memaksimumkan	$f(x) = x_1 + 2x_2 - x_2{}^3$
	dengan kendala	$x_1 + x_2 \leq 1$
	dan	$x_1, x_2 \geq 0$
(b)	Meminimumkan	$f(x) = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + 40x_1 + 20x_2 - 3000$
	dengan kendala	$x_1 \geq 50$
		$x_1 + x_2 \geq 100$
		$x_1 + x_2 + x_3 \geq 150$
	dan	$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

(c) Meminimumkan $Z = 2x_1 + x_2$

dengan kendala $x_1^2 - 4x_1 + x_2 \geq 0$

dan $x_1, x_2 \geq 0$

Penyelesaian :

(a) Untuk menyelidiki apakah masalah ini adalah masalah pemrograman cembung, pertama harus ditunjukkan bahwa fungsi $f(x)$ adalah fungsi cekung (karena dalam hal ini kasusnya adalah memaksimumkan), yaitu dengan menggunakan Definisi 2.5.3. Misalkan $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$, dengan $v_i \neq u_i$ untuk setiap $i = 1{,}2$, sebagai dua titik dalam domain f, maka

$$f(u) = u_1 + 2u_2 - u_2^3 \qquad \textbf{(2.7.1)}$$

$$f(v) = v_1 + 2v_2 - v_2^3 \qquad \textbf{(2.7.2)}$$

dan

$$f(u) + \sum_{i=1}^{2}(v_i - u_i)\frac{\partial f(u)}{\partial u_i}$$
$$= u_1 + 2u_2 - u_2^3 + [(v_1 - u_1)1 + (v_2 - u_2)(2 - 3u_2^2)]$$
$$= u_1 + 2u_2 - u_2^3 + v_1 - u_1 + 2v_2 - 2u_2 - 3u_2^2 v_2 + 3u_2^3$$
$$= 2u_2^3 + v_1 + 2v_2 - 3u_2^2 v_2 \qquad \textbf{(2.7.3)}$$

Jika persamaan (2.7.3) dikurangkan dari persamaan (2.7.2), maka diperoleh,

$$f(v) - \left[f(u) + \sum_{i=1}^{2}(v_i - u_i)\frac{\partial f(u)}{\partial u_i}\right]$$
$$= v_1 + 2v_2 - v_2^3 - [2u_2^3 + v_1 + 2v_2 - 3u_2^2 v_2]$$
$$= v_1 + 2v_2 - v_2^3 - 2u_2^3 - v_1 - 2v_2 + 3u_2^2 v_2$$
$$= -2u_2^3 - v_2^3 + 3u_2^2 v_2$$

$$= -(2{u_2}^3 + {v_2}^3) + 3{u_2}^2 v_2 \quad \textbf{(2.7.4)}$$

Pernyataan (2.7.4) selalu bernilai negatif, karena untuk setiap $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$ yang dipilih dalam domain f, dengan $v_i \neq u_i$, untuk setiap $i = 1,2$, maka $-(2{u_2}^3 + {v_2}^3) + 3{u_2}^2 v_2 < 0$, sehingga

$$f(v) - \left[f(u) + \sum_{i=1}^{2}(v_i - u_i)\frac{\partial f(u)}{\partial u_i}\right] < 0 \quad \textbf{(2.7.5)}$$

atau ekuivalen dengan

$$f(v) < f(u) + \sum_{i=1}^{2}(v_i - u_i)\frac{\partial f(u)}{\partial u_i} \quad \textbf{(2.7.6)}$$

Berdasarkan pertidaksamaan (2.7.6), maka menurut Definisi 2.5.3 nomor (a) disimpulkan bahwa fungsi $f(x)$ adalah fungsi cekung (cekung sempurna).

Selanjutnya, akan ditunjukkan fungsi kendala $g(x) = x_1 + x_2$ suatu fungsi cembung. Fungsi $g(x)$ merupakan fungsi linear, maka menurut Teorema 2.5.1 bahwa fungsi tersebut adalah fungsi cembung.

Jadi, masalah maksimisasi ini adalah masalah pemrograman cembung karena fungsi tujuan dalam masalah tersebut adalah fungsi cekung (cekung sempurna) dan fungsi kendalanya adalah fungsi cembung.

(b) Dalam hal ini permasalahannya adalah minimisasi, maka akan ditunjukkan fungsi $f(x)$ adalah fungsi cembung dan semua fungsi $g^j(x)$ untuk $j = 1,2,3$ adalah fungsi-fungsi cekung.

Akan ditunjukkan fungsi $f(x)$ adalah fungsi cembung dengan menggunakan Definisi 2.5.3. Misalkan $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$, dengan $v_i \neq u_i$, untuk setiap $i = 1,2,3$, sebagai dua titik sebarang dalam domain f, maka

$$f(u) = {u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2 + 40u_1 + 20u_2 - 3000 \quad \textbf{(2.7.7)}$$

$$f(v) = {v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2 + 40v_1 + 20v_2 - 3000 \quad \textbf{(2.7.8)}$$

dan

$$\begin{aligned} f(u) + \textstyle\sum_{i=1}^{3}(v_i - u_i)\frac{\partial f(u)}{\partial u_i} \\ &= {u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2 + 40u_1 + 20u_2 - 3000 + (v_1 - u_1)(2u_1 + 40) + \\ &\quad (v_2 - u_2)(2u_2 + 20) + (v_3 - u_3)2u_3 \\ &= -{u_1}^2 - {u_2}^2 - {u_3}^2 + 2u_1v_1 + 2u_2v_2 + 2u_3v_3 + 40v_1 + 20v_2 - \\ &\quad 3000 \qquad \textbf{(2.7.9)} \end{aligned}$$

di mana $f_i(u)$ adalah turunan parsial dari $f(u)$ yang dihitung pada u_i. Jika persamaan (2.7.8) dikurangkan oleh persamaan (2.7.9), diperoleh,

$$\begin{aligned} f(v) - \left[f(u) + \textstyle\sum_{i=1}^{3}(v_i - u_i)\frac{\partial f(u)}{\partial u_i}\right] \\ &= {v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2 - 2u_1v_1 - 2u_2v_2 - 2u_3v_3 + {u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2 \\ &= {u_1}^2 - 2u_1v_1 + {v_1}^2 + {u_2}^2 - 2u_2v_2 + {v_2}^2 + {u_3}^2 - 2u_3v_3 + {v_3}^2 \\ &= (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2 \qquad \textbf{(2.7.10)} \end{aligned}$$

Pernyataan (2.7.10) selalu bernilai positif, karena untuk setiap (v_1, v_2, v_3) dan (u_1, u_2, u_3) yang dipilih, dengan $v_i \neq u_i$ untuk setiap $i = 1,2,3$, maka memenuhi $(u_1 - v_1)^2 > 0$, $(u_2 - v_2)^2 > 0$, dan $(u_3 - v_3)^2 >$. Oleh karena itu,

$$f(v) - \left[f(u) + \textstyle\sum_{i=1}^{3}(v_i - u_i)\frac{\partial f(u)}{\partial u_i}\right] > 0 \quad \textbf{(2.7.11)}$$

atau ekuivalen dengan

$$f(v) > \left[f(u) + \sum_{i=1}^{3}(v_i - u_i)\frac{\partial f(u)}{\partial u_i}\right] \quad \textbf{(2.7.12)}$$

Berdasarkan pertidaksamaan (2.7.12), maka menurut Definisi 2.5.3 nomor (b) fungsi $f(x)$ adalah fungsi cembung sempurna.

Selanjutnya, akan ditunjukkan semua fungsi $g^j(x)$ untuk $j = 1,2,3$ adalah fungsi-fungsi cekung. Dalam soal, tampak bahwa fungsi $g^1(x)$, $g^2(x)$, dan $g^3(x)$ masing-masing adalah fungsi linear, sehingga setiap fungsi tersebut merupakan fungsi cekung (berdasarkan Teorema 2.5.1).

Jadi, masalah ini adalah masalah pemrograman cembung karena fungsi tujuan π adalah fungsi cembung (cembung sempurna) dan fungsi kendala $g(x)$ adalah fungsi cekung.

(c) Dalam hal ini permasalahannya adalah minimisasi, maka akan ditunjukkan fungsi Z adalah fungsi cembung dan fungsi $g(x)$ adalah fungsi cekung.

Diketahui fungsi tujuan $Z = 2x_1 + x_2$ merupakan fungsi yang linear, maka fungsi tersebut merupakan fungsi cembung, tetapi tidak sempurna.

Akan diperiksa atau ditunjukkan fungsi $g(x) = {x_1}^2 - 4x_1 + x_2$ adalah fungsi cekung. Untuk menunjukkan hal tersebut juga digunakan Definisi 2.5.3. Misalkan $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$, dengan $v_i \neq u_i$, untuk setiap $i = 1,2$, sebagai dua titik dalam domain g, maka

$$g(u) = {u_1}^2 - 4u_1 + u_2 \quad \textbf{(2.7.13)}$$

$$g(v) = {v_1}^2 - 4v_1 + v_2 \quad \textbf{(2.7.14)}$$

dan

$$g(u) + \sum_{i=1}^{2}(v_i - u_i)\frac{\partial g(u)}{\partial u_i}$$

$$= {u_1}^2 - 4u_1 + u_2 + (v_1 - u_1)(2u_1 - 4) + (v_2 - u_2)1$$

$$= -{u_1}^2 + 2u_1v_1 - 4v_1 + v_2 \qquad \textbf{(2.7.15)}$$

Jika persamaan (2.7.14) dikurangkan oleh persamaan (2.7.15), diperoleh selisihnya adalah

$$g(v) - \left[g(u) + \sum_{i=1}^{2}(v_i - u_i)\frac{\partial g(u)}{\partial u_i}\right]$$

$$= {v_1}^2 - 4v_1 + v_2 + {u_1}^2 - 2u_1v_1 + 4v_1 - v_2$$

$$= {v_1}^2 - 2u_1v_1 + {u_1}^2$$

$$= (u_1 - v_1)^2 \qquad \textbf{(2.7.16)}$$

Pernyataan (2.7.16) selalu bernilai positif, karena untuk setiap (v_1, v_2) dan (u_1, u_2) yang dipilih, dengan $v_i \neq u_i$ untuk setiap $i = 1,2,$, maka memenuhi $(u_1 - v_1)^2 > 0$. Oleh karena itu,

$$g(v) - \left[g(u) + \sum_{i=1}^{2}(v_i - u_i)\frac{\partial g(u)}{\partial u_i}\right] > 0 \qquad \textbf{(2.7.17)}$$

atau ekuivalen dengan

$$g(v) > g(u) + \sum_{i=1}^{2}(v_i - u_i)\frac{\partial g(u)}{\partial u_i} \qquad \textbf{(2.7.18)}$$

Dari pernyataan (2.7.18), maka berdasarkan Definisi 2.5.3 nomor (b) disimpulkan bahwa fungsi $g(x) = {x_1}^2 - 4x_1 + x_2$ adalah fungsi cembung (cembung sempurna).

Berdasarkan pengecekan di atas diperoleh fungsi tujuannya adalah fungsi cembung, tetapi fungsi kendalanya fungsi cembung juga, sehingga masalah pemrograman nonlinear ini bukan suatu pemrograman cembung.

2.8 Fungsi Lagrange

Pada bagian ini akan dikenalkan tentang fungsi Lagrange dan teknik optimisasi multivariabel $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dengan kendala persamaan yang mempunyai bentuk umum sebagai berikut :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Maksimisasi} & \pi = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{dengan kendala} & g(x_1, x_2, \dots, x_n) = r \end{array}\right\} \quad \textbf{(2.8.1)}$$

dengan r suatu konstanta.

Fungsi Lagrange dipakai dalam menyelesaikan permasalahan optimisasi dengan kendala persamaan, seperti pada masalah optimisasi (2.8.1). Fungsi Lagrange tersebut didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.8.1 (Luknanto, 2000: 12)

Diberikan masalah optimisasi seperti pada masalah (2.8.1), fungsi Lagrange dari masalah optimisasi (2.8.1) didefinisikan sebagai,

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda[r - g(x_1, x_2, \dots, x_n)] \quad \textbf{(2.8.2)}$$

dengan λ adalah pengali-Lagrange.

Teorema 2.8.1 (Luknanto, 2000: 12-13)

Fungsi tujuan $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dengan kendala $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = r$ agar mempunyai nilai maksimum atau nilai minimum lokal, jika turunan parsial dari fungsi Lagrange-nya yang didefinisikan pada persamaan (2.8.2) terhadap setiap variabel dan pengali-Lagrange-nya adalah nol yakni $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$, untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$, dan $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$.

Bukti :

Dimisalkan $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, dengan $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = r - g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan variabel x_n pada $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ dapat dinyatakan sebagai $x_n = z(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. Jika nilai ini disubstitusikan ke fungsi tujuan, diperoleh

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\,)$$

Sehingga fungsi $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\,)$ adalah fungsi dari n-1 variabel, yaitu $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Syarat agar fungsi $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\,)$ mempunyai nilai maksimum atau nilai minimum adalah adalah turunan parsial terhadap masing-masing variabelnya adalah nol yakni $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$, untuk setiap $j = 1,2, \dots, n-1$.

Oleh karena itu, dengan menggunakan aturan rantai diperoleh hasil,

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} = 0 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(2.8.3)}$$

dengan $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$. Secara umum, persamaan (2.8.3) dapat ditulis sebagai:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_j} = 0, \text{ untuk setiap } j = 1,2,\dots,n-1 \quad \textbf{(2.8.4)}$$

Jika $z(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ disubstitusikan ke dalam $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, maka $G(x_1, x_2, \dots, z(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\,) = 0$, sehingga berlaku

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x_1} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x_2} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial G}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(2.8.5)}$$

dengan $\frac{\partial G}{\partial z} \neq 0$. Secara umum, persamaan (2.8.5) dapat ditulis sebagai:

$$\frac{\partial G}{\partial x_j} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_j} = 0, \text{ untuk setiap } j = 1,2,\dots,n-1 \quad \textbf{(2.8.6)}$$

Dari persamaan (2.8.6) diperoleh

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \frac{\partial G}{\partial x_j} : \frac{\partial G}{\partial z}, \text{ untuk } \frac{\partial G}{\partial z} \neq 0, \text{ dengan } j = 1,2,\dots,n-1 \quad \textbf{(2.8.7)}$$

Jika persamaan (2.8.7) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.8.4), diperoleh

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial x_j} : \frac{\partial G}{\partial z}\right) = 0$$

atau

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} : \frac{\partial G}{\partial z}\right)\frac{\partial G}{\partial x_j} = 0, \text{ untuk setiap } j = 1,2,\dots,n-1 \quad \textbf{(2.8.8)}$$

Ini berarti ada λ pada persamaan (2.8.8) sehingga persamaan (2.8.2) berlaku, yaitu

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial G}{\partial x_j} = 0, \text{ untuk setiap } j = 1,2, \dots, n-1$$

dengan $\lambda = \frac{\partial f}{\partial z} : \frac{\partial G}{\partial z}$.

Dengan mengubah ke bentuk semula bahwa fungsi f dan fungsi G adalah fungsi yang didefinisikan atas n-variabel, maka berlaku

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial G(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} = 0, \text{ untuk setiap } i = 1,2, \dots, n$$

dan karena $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = r - g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial (r - g(x_1, x_2, \dots, x_n))}{\partial x_i} = 0, \text{ untuk setiap } i = 1,2, \dots, n$$

atau,

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \text{ untuk setiap } i = 1,2, \dots, n.$$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa turunan fungsi Lagrange L terhadap pengali-Lagrangenya adalah nol. Jika fungsi Lagrange L pada persamaan (2.8.2) diturunkan terhadap pengali-Lagrangenya, maka diperoleh,

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = r - g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \qquad \blacksquare$$

Definisi fungsi Lagrange di atas, dapat diperluas untuk masalah optimisasi dengan kendala lebih dari satu. Diberikan masalah optimisasi multivariabel dengan kendala lebih dari satu, yaitu sebagai berikut:

Maksimisasi/minimisasi $\quad f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

dengan kendala $\quad g^j(x_1, x_2, \dots, x_n) = r_j, \quad$ (untuk setiap $j = 1,2, \dots, m$)

maka fungsi Lagrange untuk masalah ini adalah,

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1[r_1 - g^1(x_1, x_2, \dots, x_n)] + \lambda_2[r_2 - g^2(x_1, x_2, \dots, x_n)] + \cdots$$

$$+\lambda_2[r_m - g^m(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

atau, secara sederhana ditulis,

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[r_j - g^j(x_1, x_2, \dots, x_n)\right] \quad \textbf{(2.8.9)}$$

dengan λ_j adalah pengali-Lagrange, untuk setiap $j = 1,2, \dots, m$.

Pada masalah optimisasi dengan banyak kendala, syarat agar suatu fungsi tujuan mempunyai nilai maksimum atau nilai minimum lokal analog dengan masalah optimisasi satu kendala, yaitu turunan parsial dari fungsi Lagrange-nya yang didefinisikan pada persamaan (2.8.9) terhadap setiap variabel dan setiap pengali-Lagrange-nya adalah nol yakni $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$, untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$, dan $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0$, untuk setiap $j = 1,2, \dots, m$.

BAB III

PEMBAHASAN

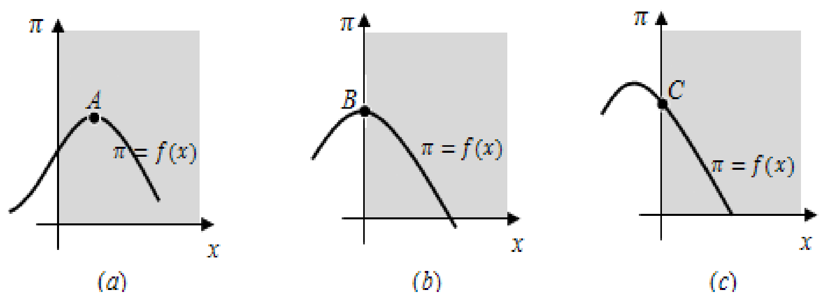
3.1 Pembentukan Syarat Kuhn-Tucker

Pada bagian ini akan dibahas tentang mekanisme pembentukan syarat Kuhn-Tucker. Syarat Kuhn-Tucker merupakan hasil analisis yang penting dalam pembahasan ini karena syarat tersebut selanjutnya akan digunakan sebagai metode penyelesaian masalah optimisasi, maka diperlukan pemahaman yang baik mengenai syarat tersebut. Oleh karena itu, proses pembentukan syarat Kuhn-Tucker ini akan dijelaskan melalui dua tahap (pengaruh dua permasalahan), yaitu pengaruh dari masalah optimisasi dengan kendala tak-negatif pada setiap variabel pilihan dan pengaruh dari masalah optimisasi dengan kendala fungsional yang berbentuk pertidaksamaan.

Sebagai tahap pertama, akan ditinjau suatu masalah optimisasi dengan batasan tak-negatif pada setiap variabel. Diberikan masalah optimisasi satu variabel sebagai berikut:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Maksimisasi} & \pi = f(x) \\ \text{dengan} & x \geq 0\end{array}\right\} \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

dengan f adalah fungsi yang dapat didiferensialkan. Jika x^* adalah titik kritis untuk kasus (3.1.1), maka terdapat tiga kasus yang mungkin muncul. Pertama, jika suatu maksimum lokal π muncul di bagian dalam dari daerah layak yang terarsir di Gambar 3.1, seperti titik A dalam diagram (a), maka masalah (3.1.1) di atas mempunyai penyelesaian bagian dalam (*interior solution*). Oleh karena itu, maksimum dalam kasus ini adalah $f'(x^*) = 0$. Kedua, seperti yang diilustrasikan oleh titik B dalam diagram (b) pada Gambar 3.1, suatu maksimum lokal juga dapat muncul pada sumbu vertikal, di mana $x^* = 0$. Syarat maksimum untuk kasus kedua ini sama dengan kasus yang pertama, yaitu $f'(x^*) = 0$.



Gambar 3.1 Tiga situasi grafik yang mungkin terjadi pada suatu fungsi

Akan tetapi, terdapat kemungkinan ketiga, yakni munculnya suatu maksimum lokal dalam hal ini diambil posisi titik C dalam diagram (c) pada Gambar 3.1, karena untuk memenuhi kualifikasi sebagai suatu maksimum lokal dalam masalah (3.1.1), solusi yang layak harus lebih tinggi dari titik sekitarnya di dalam daerah layak. Berdasarkan kemungkinan terakhir ini, titik maksimum dalam kasus (3.1.1) dapat dicirikan tidak dengan persamaan $f'(x^*) = 0$, tapi dengan pertidaksamaan $f'(x^*) < 0$ karena kurva yang melengkung ke bawah akan memiliki nilai maksimum pada suatu titik.. Pertidaksamaan $f'(x^*) > 0$ dapat diabaikan, karena pada suatu titik di mana kurva melengkung ke atas tidak akan pernah memiliki sebuah maksimum.

Inti dari pembahasan sebelumnya adalah bahwa agar suatu nilai x^* dapat membuat maksimum lokal π dalam kasus (3.1.1), salah satu dari ketiga syarat berikut harus dipenuhi:

$$f'(x^*) = 0 \qquad \text{dan} \qquad x^* > 0 \tag{3.1.2}$$

$$f'(x^*) = 0 \qquad \text{dan} \qquad x^* = 0 \tag{3.1.3}$$

$$f'(x^*) < 0 \qquad \text{dan} \qquad x^* = 0 \tag{3.1.4}$$

Ketiga syarat tersebut dapat digabung ke dalam suatu pernyataan tunggal, yaitu

$$f'(x^*) \leq 0, \qquad x^* \geq 0, \qquad \text{dan} \qquad x^* f'(x^*) = 0 \tag{3.1.5}$$

Pertidaksamaan pertama dalam syarat (3.1.4) merupakan ringkasan dari $f'(x^*)$ yang diperoleh dari syarat (3.1.2) hingga syarat (3.1.4). Pertidaksamaan kedua merupakan ringkasan yang serupa untuk x^*, bahkan pertidaksamaan tersebut merupakan iterasi ulang batasan tak-negatif dari kasus (3.1.1). Persamaan pada bagian ketiga dari kondisi (3.1.5) mengekspresikan suatu syarat umum penting pada syarat (3.1.2) hingga syarat (3.1.4), bahwa dari kedua kuantitas x^* dan $f'(x^*)$, setidaknya salah satunya harus bernilai nol, sehingga hasil kali dari keduanya harus nol. Syarat ini disebut sebagai syarat *complementary slackness* antara x^* dan $f'(x^*)$. Jika disatukan, ketiga bagian dari syarat (3.1.5) membentuk syarat perlu untuk suatu maksimum lokal dalam suatu masalah optimisasi dengan variabel pilihan harus tak-negatif.

Masalah meminimumkan $f(x)$ sama dengan memaksimumkan $-f(x)$, sehingga dari (3.1.1) dapat diperluas menjadi masalah :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimisasi} & \pi = f(x) \\ \text{dengan} & x \geq 0 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(3.1.6)}$$

dengan f adalah fungsi yang terdiferensiasikan.

Syarat agar $x = x^*$ dapat menjadi penyelesaian dari masalah (3.1.6) adalah

$$f'(x^*) \geq 0, \qquad x^* \geq 0, \qquad \text{dan} \qquad x^* f'(x^*) = 0 \qquad \textbf{(3.1.7)}$$

Untuk masalah minimisasi pada (3.1.7), diferensiasi dari f harus tak-negatif dan kondisi *complementary slackness* berlaku sebagaimana masalah maksimisasi.

Selanjutnya masalah (3.1.1) dapat diperumum menjadi masalah optimisasi dengan *n*-variabel, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, yaitu sebagai berikut :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Maksimisasi} & \pi = f(x) \\ \text{dengan} & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(3.1.8)}$$

dengan $f(x)$ adalah fungsi yang terdiferensiasikan.

Dengan mengabaikan $x \geq 0$, maka berdasarkan Definisi 2.4.2 titik kritis untuk fungsi $f(x)$ pada masalah (3.1.8) adalah

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad \text{untuk setiap } \ i = 1,2, \dots, n$$

Persamaan di atas memberikan beberapa kemungkinan nilai dari titik kritis itu sendiri, yaitu sebagai berikut:

1. $x_i > 0$, untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$
2. $x_i = 0$, untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$
3. $x_i < 0$, untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$

Mengingat kembali bahwa $x \geq 0$, maka kemungkinan yang ketiga, $x_i < 0$, bukan merupakan penyelesaian dari kasus (3.1.8) Jika $x_i = 0$ maka pastilah $\frac{\partial f}{\partial x_i} < 0$ karena pada suatu titik di mana kurva melengkung ke atas tidak akan pernah memiliki sebuah maksimum. Karena $x_i \geq 0$ dan $\frac{\partial f}{\partial x_i} \leq 0$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$, maka syarat perlu untuk masalah (3.1.8) diberikan oleh :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \leq 0, \quad x_i \geq 0, \quad \text{dan} \quad x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{untuk } i = 1,2, \dots, n) \qquad \textbf{(3.1.9)}$$

Syarat *complementary slackness* pada syarat (3.1.9) dapat digabungkan menjadi syarat *complementary slackness* tunggal, yaitu

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

Sehingga syarat perlu untuk masalah (3.1.8) dapat ditulis kembali menjadi :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \leq 0, \quad x_i \geq 0, \quad \text{dan} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad \textbf{(3.1.10)}$$

Jika masalah (3.1.8) adalah masalah minimisasi, maka pertidaksamaan pada bagian kiri dari kondisi (3.1.9) dapat dibalik.

Tahap kedua, memperluas masalah (3.1.8) menjadi masalah optimisasi dengan n-variabel , $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, dan m-kendala pertidaksamaan, yaitu sebagai berikut:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Memaksimumkan} & \pi = f(x) & \\ \text{dengan kendala} & g^j(x) \leq r_j & (j = 1,2,\dots,m) \\ \text{dan} & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 & \end{array}\right\} \quad \textbf{(3.1.11)}$$

dengan r_j adalah suatu konstanta, untuk setiap $j = 1,2,\dots,m$. Masalah (3.1.11) dapat diubah dengan memasukkan variabel *slack*, $s_j \geq 0,$ untuk setiap $j = 1,2,\dots,m$, maka pada kasus (3.1.11) dapat diubah menjadi bentuk yang ekuivalen dengan

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Memaksimumkan} & \pi = f(x) \\ \text{dengan kendala} & g^1(x) + s_1 = r_1 \\ & g^2(x) + s_2 = r_2 \\ & \vdots \\ & g^m(x) + s_m = r_m \\ \text{dan} & x_1, x_2, \dots, x_n, s_1, s_2, \dots, s_m \geq 0 \end{array}\right\} \quad \textbf{(3.1.12)}$$

Misalkan pada kasus (3.1.12) tidak ada batasan tak-negatif pada setiap variabel, sehingga kasus tersebut merupakan kasus optimisasi multivariabel dengan kendala persamaan, sehingga dapat dibentuk fungsi Lagrange dari pemasalahan tersebut, yaitu sebagai berikut:

$$L = f(x) + \lambda_1[r_1 - g^1(x) - s_1] + \lambda_2[r_2 - g^2(x) - s_2] + \cdots + \lambda_m[r_m - g^m(x) - s_m] \quad \textbf{(3.1.13)}$$

dan menuliskan syarat perlu sebagai,

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial L}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial L}{\partial s_1} = \frac{\partial L}{\partial s_1} = \cdots = \frac{\partial L}{\partial s_m} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \cdots = \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0$$

atau dapat disederhanakan menjadi,

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial s_j} = 0\,, \quad \text{dan} \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0$$

untuk setiap $i = 1,2,\dots,n$ dan $j = 1,2,\dots,m$.

Akan tetapi, karena variabel x_i dan s_j harus tak-negatif, kondisi perlu pada variabel-variabel tersebut harus diubah dengan cara yang sama yang mendasari pembentukan kondisi (3.1.10). Hasilnya, diperoleh kondisi-kondisi sebagai berikut:

$$\left.\begin{array}{llll} \frac{\partial L}{\partial x_i} \le 0 & x_i \ge 0 & \text{dan} & x_i \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial s_j} \le 0 & s_j \ge 0 & \text{dan} & s_j \frac{\partial L}{\partial s_j} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0 & & & \begin{pmatrix} i = 1,2,3 \\ j = 1,2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \qquad \textbf{(3.1.14)}$$

Pada kondisi di atas, $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}$ harus ditetapkan sama dengan nol karena jika L pada persamaan (3.1.13) diturunkan secara parsial terhadap λ_j untuk setiap $j = 1,2,\dots,m$, maka diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = r_j - g^j(x) - s_j = r_j - \left[g^j(x) + s_j\right] = r_j - r_j = 0$$

untuk setiap $j = 1,2,\dots,m$.

Setiap baris pada kondisi (3.1.14) berhubungan dengan jenis variabel yang berbeda. Dua baris terakhir dari kondisi (3.1.14) dapat digabungkan, dengan tujuan dapat menghilangkan variabel *slack* s_j dari kondisi (3.1.14). Karena $\frac{\partial L}{\partial s_j} = -\lambda_j$, baris kedua pada kondisi (3.1.14) menjelaskan bahwa harus dipenuhi $-\lambda_j \leq 0,\ s_j \geq 0,$ dan $-\lambda_j s_j = 0$, atau ekuivalen dengan

$$s_j \geq 0, \qquad \lambda_j \geq 0, \qquad \text{dan} \qquad \lambda_j s_j = 0 \tag{3.1.15}$$

Kendala pada kasus (3.1.12) dapat dinyatakan ulang sebagai $s_j = r_j - g^j(x)$, untuk setiap $j = 1,2,\dots,m$. Dengan mensubstitusikan nilai tersebut ke dalam kondisi (3.1.15), diperoleh

$$r_j - g^j(x) \geq 0, \qquad \lambda_j \geq 0, \qquad \text{dan} \qquad \lambda_j\left[r_j - g^j(x)\right] = 0 \tag{3.1.16}$$

Hal ini memungkinkan untuk menyatakan kondisi perlu (3.1.14) dalam suatu bentuk yang sama tanpa varibel *slack*, yaitu

$$\left.\begin{array}{llll} \frac{\partial L}{\partial x_i} \leq 0, & x_i \geq 0, & \text{dan} & x_i \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \\ r_j - g^j(x) \geq 0, & \lambda_j \geq 0, & \text{dan} & \lambda_j\left[r_j - g^j(x)\right] = 0 \end{array}\right\} \tag{3.1.17}$$

Kondisi (3.1.17) menjadi syarat Kuhn-Tucker untuk masalah optimisasi (3.1.11), atau lebih tepat, merupakan salah satu versi dari syarat Kuhn-Tucker, yang dinyatakan melalui fungsi Lagrange L pada persamaan (3.1.13).

Dengan menggunakan fungsi Lagrange yang berbeda dapat diperoleh kondisi-kondisi yang sama pada kondisi (3.1.17). Dengan mengabaikan batasan kondisi tak-negatif dan tanda ketidaksamaan dalam kendala pada masalah optimisasi (3.1.11) dan menuliskan fungsi Lagrange L sebagai :

$$L = f(x) + \lambda_1[r_1 - g^1(x)] + \lambda_2[r_2 - g^2(x)] + \cdots + \lambda_m[r_m - g^m(x)]$$

atau

$$L = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[r_j - g^j(x)\right] \qquad \textbf{(3.1.18)}$$

Syarat Kuhn-Tucker dari masalah (3.1.11) yang dinyatakan melalui fungsi Lagrange L pada persamaan (3.1.18), adalah sebagai berikut :

$$\left.\begin{array}{llll} \frac{\partial L}{\partial x_i} \leq 0 & x_i \geq 0 & \text{dan} & x_i \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} \geq 0 & \lambda_j \geq 0 & \text{dan} & \lambda_j \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(3.1.19)}$$

untuk $i = 1,2, \ldots n$ dan $j = 1,2, \ldots m$. Syarat Kuhn-Tucker (3.1.19) merupakan syarat untuk mencapai optimum pada masalah optimisasi (3.1.11).

Jika masalah optimisasi yang diketahui adalah masalah minimisasi, maka salah satu cara menanganinya adalah dengan mengubah masalah optimisasi tersebut menjadi maksimisasi dan kemudian menerapkan syarat (3.1.19). Meminimisasi f sama dengan memaksimisasi $-f$, sehingga perubahan semacam itu selalu dapat dilakukan. Oleh karena itu, harus membalikkan ketidaksamaan kendala dengan mengalikan setiap kendala dengan -1. Selain melalui cara tersebut dapat juga menggunakan fungsi Lagrange L seperti yang dinyatakan dalam persamaan (3.1.18).

Sehingga, secara langsung dapat diterapkan syarat minimisasi Kuhn-Tucker seperti berikut:

$$\left.\begin{array}{llll} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} \geq 0 & x_i \geq 0 & \text{dan} & x_i \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} \leq 0 & \lambda_j \geq 0 & \text{dan} & \lambda_j \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(3.1.20)}$$

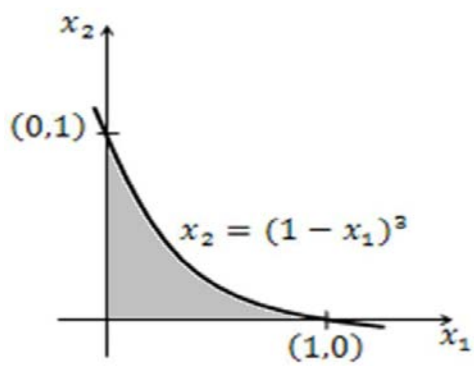
untuk $i = 1,2, \dots n$ dan $j = 1,2, \dots m$.

Syarat Kuhn Tucker yang dinyatakan pada (3.1.19) dan (3.1.20) merupakan syarat perlu, tetapi secara umum bukan merupakan syarat cukup untuk mencapai optimum global. Hal tersebut dapat ditunjukkan dalam contoh berikut.

Contoh 3.1.1

Maksimisasi	$\pi = x_1$
dengan kendala	$x_2 - (1 - x_1)^3 \leq 0$
dan	$x_1, x_2 \geq 0$

Seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 3.2, daerah yang layak terletak pada kuadran pertama, yaitu di bawah kurva $x_2 = (1 - x_1)^3$.



Gambar 3.2 Grafik fungsi $x_2 = (1 - x_1)^3$

Karena fungsi tujuannya adalah memaksimumkan x_1, maka pemecahan optimumnya adalah titik (1,0). Akan tetapi, pemecahan ini gagal untuk memenuhi syarat maksimum Kuhn-Tucker. Untuk memeriksa hal tersebut, mula-mula dibentuk fungsi Lagrange L, yaitu

$$L = x_1 + \lambda_1[-x_2 + (1 - x_1)^3]$$

Sebagai syarat pertama dari syarat Kuhn-Tucker adalah

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 - 3\lambda_1(1 - x_1)^2 \leq 0$$

Pemecahan (1,0) gagal memenuhi syarat Kuhn-Tucker karena jika $\frac{\partial L}{\partial x_1}$ dihitung pada $x_1 = 1$, maka diperoleh $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1$, dan oleh karena itu kontradiksi dengan syarat pertama dari syarat Kuhn-Tucker yang telah ditentukan, yaitu $\frac{\partial L}{\partial x_1} \leq 0$.

3.2 Teorema Kecukupan Kuhn-Tucker

Pada subbab sebelumnya telah dijelaskan bahwa syarat Kuhn-Tucker hanya merupakan syarat perlu tetapi bukan merupakan syarat cukup untuk mencapai optimum global. Oleh karena itu, Kuhn dan Tucker menawarkan pernyataan syarat cukup (teorema kecukupan) berikut untuk mencapai optimum global.

Teorema 3.2.1 (Chiang, 1993 : 223)

Misalkan terdapat masalah optimisasi pemrograman nonlinier dengan variabel-variabel pilihan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sebagai berikut:

Maksimisasi	$\pi = f(x)$	
dengan kendala	$g^j(x) \leq r_j$	$(j = 1,2, \dots, m)$
dan	$x \geq 0$	

titik kritis $x^* = (x_1{}^*, x_2{}^*, \dots, x_n{}^*)$ memberikan maksimum global $\pi = f(x)$, jika perkondisian berikut dipenuhi :

(a) fungsi tujuan $f(x)$ dapat didiferensialkan dan merupakan fungsi cekung,

(b) semua fungsi $g^j(x)$, untuk setiap $j = 1,2, \dots, m$, dapat didiferensialkan dan merupakan fungsi cembung,

(c) titik kritis $x^* = (x_1{}^*, x_2{}^*, \dots, x_n{}^*)$ memenuhi syarat maksimum Kuhn-Tucker.

Bukti :

Fungsi Lagrange dari permasalahan ini adalah

$$L = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \left[r_j - g^j(x) \right] \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

dengan asumsi telah ditetapkan nilai λ_j^*, untuk setiap $j = 1,2, \dots, m$ tertentu untuk pengali-Lagrange, dengan demikian L merupakan fungsi dari variabel x saja. Sejalan dengan kondisi (a) dan (b) dari teorema kecukupan, dimisalkan $f(x)$ cekung dan $g^j(x)$ cembung untuk seluruh $j = 1,2, \dots, m$, yang mengakibatkan $-g^j(x)$ menjadi cekung. Maka, L yang merupakan jumlah dari fungsi cekung juga harus cekung dalam x. Menurut Definisi 2.5.4 , kecekungan dari L berimplikasi bahwa

$$L(x) \leq L(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i^*} (x_i - x_i^*) \qquad \textbf{(3.2.2)}$$

di mana x^* adalah suatu titik tertentu dalam domain, dan $\frac{\partial L}{\partial x_i^*}$ adalah derivatif parsial $\frac{\partial L}{\partial x_i}$ yang dihitung pada x^*. Secara khusus, dipilih x^* dan λ^* sebagai nilai-nilai variabel pilihan dan pengali-Lagrange yang memenuhi kondisi maksimum Kuhn-Tucker, sejalan dengan kondisi (c) dari teorema kecukupan. Maka, $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i^*} (x_i - x_i^*)$ dapat ditunjukkan menjadi tak-positif, sehingga penghapusannya tidak akan merubah ketidaksamaan, dengan demikian memungkinkan untuk menyimpulkan bahwa $L(x) \leq L(x^*)$. Untuk menunjukkan hal tersebut, pernyataan $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i^*} (x_i - x_i^*)$ akan diubah ke dalam dua suku berikut.

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i^*} x_i \qquad \text{dan} \qquad T_2 = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i^*} x_i^*$$

Berdasarkan atas c*omplementary slackness* pada titik x^*, T_2 harus nol. Untuk T_1, yang mengandung x_i dan bukan x_i^*, sedemikian sehingga c*omplementary slackness* tidak dapat diterapkan dan hanya memastikan bahwa $\frac{\partial L}{\partial x_i^*} \leq 0$ dan $x_i \geq 0$ untuk setiap i. Jadi, T_1 adalah tak-positif. Dengan penjumlahan dua suku, diperoleh pernyataan $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i^*} (x_i - x_i^*)$ sebagai tak-positif, dan karena itu dapat disimpulkan bahwa

$$L(x) \leq L(x^*) \qquad \textbf{(3.2.3)}$$

atau, berdasarkan persamaan (3.2.1),

$$f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \left[r_j - g^j(x)\right] \leq f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \left[r_j - g^j(x^*)\right] \qquad \textbf{(3.2.4)}$$

Jika kedua ekspresi Σ dalam pertidaksamaan (3.2.4) dapat dihapus tanpa merubah ketidaksamaan, maka dapat disimpulkan bahwa $f(x) \leq f(x^*)$ untuk seluruh x yang cukup dekat ke x^*, yang membuat pernyataan bahwa x^* memaksimumkan fungsi tujuan $f(x)$. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut. Pernyataan Σ sebelah kiri pasti tak-negatif, karena untuk setiap j, $\lambda_j^* \geq 0$ (tak-negatif) dan $r_j - g^j(x) \geq 0$ (kondisi dari kendala). Sebaliknya, ekspresi Σ di sebelah kiri harus nol, karena $[r_j - g^j(x^*)]$ tidak lain adalah $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j^*}$, sehingga c*omplementary slackness* dapat diterapkan. Akibatnya, $f(x) \leq f(x^*)$ dan x^* merupakan hasil penyelesaian optimum. Jadi, nilai maksimum $f(x^*)$ adalah suatu maksimum global pada x^*. ■

Seperti yang telah dinyatakan di atas, teorema kecukupan hanya berhubungan dengan masalah maksimisasi. Tetapi, penyesuaian dengan masalah minimisasi sama sekali tidak sulit. Terlepas dari perubahan teorema yang sesuai untuk menggambarkan pembalikan masalah itu sendiri, yang harus dilakukan adalah menukar dua kata cekung dan cembung dalam kondisi (a) dan (b), dan menggunakan kondisi minimum Kuhn-Tucker dalam kondisi (c). Dengan demikian akan diperoleh teorema sebagai berikut :

Teorema 3.2.2 (Chiang & Wainwright, 1993 : 402)

Diberikan masalah pemrograman nonlinier dengan variabel-variabel pilihan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ berikut:

$$\text{Meminimumkan} \quad \pi = f(x)$$

dengan kendala $\quad g^j(x) \geq r_j \qquad (j = 1,2, \dots, m)$

dan $\quad x \geq 0$

titik kritis $x^* = (x_1{}^*, x_2{}^*, \dots, x_n{}^*)$ memberikan minimum global $\pi = f(x)$ jika perkondisian berikut dipenuhi :

(a) fungsi tujuan $f(x)$ dapat didiferensialkan dan merupakan fungsi cembung

(b) semua fungsi $g^j(x)$ untuk setiap $j = 1,2, \dots, m$, dapat didiferensialkan dan merupakan fungsi cekung,

(c) titik kritis $x^* = (x_1{}^*, x_2{}^*, \dots, x_n{}^*)$ memenuhi syarat minimum Kuhn-Tucker.

Bukti :

Fungsi Lagrange dari permasalahan ini adalah

$$L = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \left[r_j - g^j(x) \right] \qquad \textbf{(3.2.5)}$$

dengan asumsi telah ditetapkan nilai λ_j^*, untuk setiap $j = 1,2, \dots, m$ tertentu untuk pengali-Lagrange, dengan demikian L merupakan fungsi dari variabel x saja. Sejalan dengan kondisi (a) dan (b) dari teorema kecukupan, dimisalkan $f(x)$ cembung dan $g^j(x)$ cekung untuk setiap $j = 1,2, \dots, m$, yang mengakibatkan $-g^j(x)$ menjadi cembung. Maka, L yang merupakan jumlah dari fungsi cembung juga harus cembung dalam x. Menurut Definisi 2.5.4 , kecembungan dari L berimplikasi bahwa

$$L(x) \geq L(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i^*} (x_i - x_i^*) \qquad \textbf{(3.2.6)}$$

di mana x^* adalah suatu titik tertentu dalam domain (daerah asal), dan $\frac{\partial L}{\partial x_i^*}$ adalah derivatif parsial $\frac{\partial L}{\partial x_i}$ yang dihitung pada x^*. Secara khusus, dipilih x^* dan λ^* sebagai nilai-nilai variabel pilihan dan pengali-Lagrange yang memenuhi kondisi minimum Kuhn-Tucker, sejalan dengan kondisi (c) dari teorema kecukupan. Maka, $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i^*}(x_i - x_i^*)$ dapat ditunjukkan menjadi tak-negatif, sehingga penghapusannya tidak akan merubah ketidaksamaan, dengan demikian memungkinkan untuk menyimpulkan bahwa $L(x) \geq L(x^*)$. Untuk menunjukkan hal tersebut, pernyataan $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i^*}(x_i - x_i^*)$ akan diubah ke dalam dua suku berikut.

$$U_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i^*} x_i \qquad \text{dan} \qquad U_2 = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i^*} x_i^*$$

Berdasarkan atas c*omplementary slackness* pada titik ${x_i}^*$,untuk setiap $i = 1,2,..,n$, maka U_2 harus nol. Untuk U_1, yang mengandung x_i dan bukan x_i^*, sedemikian sehingga c*omplementary slackness* tidak dapat diterapkan dan hanya memastikan bahwa $\frac{\partial L}{\partial x_i^*} \geq 0$ dan $x_i \geq 0$ untuk setiap i. Jadi, U_1 adalah tak-negatif. Dengan penjumlahan dua suku, diperoleh pernyataan $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i^*}(x_i - x_i^*)$ sebagai tak-negatif, dan karena itu dapat disimpulkan bahwa

$$L(x) \geq L(x^*) \tag{3.2.7}$$

atau, berdasarkan persamaan (3.2.5),

$$f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \left[r_j - g^j(x)\right] \geq f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \left[r_j - g^j(x^*)\right] \tag{3.2.8}$$

Jika kedua ekspresi Σ dalam pertidaksamaan (3.2.8) dapat dihapus tanpa merubah ketidaksamaan, maka dapat disimpulkan bahwa $f(x) \geq f(x^*)$ untuk seluruh x yang cukup dekat ke x^*, yang membuat pernyataan bahwa x^* memaksimumkan fungsi tujuan $f(x)$. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut. Pernyataan Σ sebelah kiri pasti tak-positif, karena untuk setiap j, $\lambda_j^* \geq 0$ (tak-negatif) dan $r_j - g^j(x) \leq 0$ (kondisi dari kendala). Sebaliknya, ekspresi Σ di sebelah kiri harus nol, karena $[r_j - g^j(x^*)]$ tidak lain adalah $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j^*}$, sehingga c*omplementary slackness* dapat diterapkan. Akibatnya, $f(x) \geq f(x^*)$ dan x^* merupakan hasil penyelesaian optimum. Jadi, nilai minimum $f(x^*)$ adalah suatu minimum global pada x^*. ■

Dengan mengingat kembali bentuk umum dari pemrograman cembung, maka masalah optimisasi (maksimisasi dan minimisasi) yang dinyatakan dalam teorema kecukupan di atas dan memenuhi perkondisian (a) dan (b) tidak lain adalah masalah pemrograman cembung. Jadi, dengan kata lain, syarat Kuhn-Tucker menjadi syarat perlu dan cukup untuk mencapai optimum global, jika masalah yang diketahui adalah masalah pemrograman cembung.

3.3 Penyelesaian Pemrograman Cembung Menggunakan Syarat Kuhn-Tucker

Prosedur dalam menyelesaikan masalah pemrograman cembung menggunakan syarat Kuhn-Tucker, secara essensial melibatkan fungsi Lagrange. Oleh karena itu, sebelum menetapkan syarat Kuhn-Tucker harus dibentuk terlebih dahulu fungsi Lagrange. Dengan menetapkan syarat Kuhn-Tucker, selanjutnya akan digunakan untuk mencari titik optimum global yang membuat nilai fungsi tujuan optimum global. Jika titik optimum global telah ditemukan, maka dapat dihitung nilai optimum global dari fungsi objektif terhadap titik optimum tersebut.

Dari prosedur di atas terdapat empat langkah utama dalam menyelesaikan pemrograman cembung menggunakan syarat Kuhn-Tucker. Misal diberikan masalah pemrograman cembung dengan variabel-variabel keputusan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sebagai berikut,

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Maksimisasi} & f(x) & \\ \text{dengan kendala} & g^j(x) \leq r_j, & j = 1,2,\dots,m \\ \text{dan} & x \geq 0 & \end{array}\right\} \qquad \textbf{(3.3.1)}$$

Langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah 3.3.1 adalah sebagai berikut :

1. Membentuk fungsi Lagrange.

Fungsi Lagrange untuk masalah ini adalah :

$$L = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_j \left[r_j - g^j(x) \right]$$

dengan λ_j adalah pengali-Lagrange, untuk setiap $j = 1,2,\dots,m$.

2. Menetapkan syarat Kuhn-Tucker.

Dalam masalah maksimisasi ini, syarat Kuhn-Tucker-nya dinyatakan sebagai berikut :

1. $\frac{\partial L}{\partial x_i} \leq 0$ (untuk setiap $i = 1,2,\dots,n$)

2. $x_i \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$ (untuk setiap $i = 1,2,\dots,n$)

3. $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} \geq 0,$ (untuk setiap $j = 1,2, \dots, m$)

4. $\lambda_j \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0$ (untuk setiap $j = 1,2, \dots, m$)

5. $x_i \geq 0$ (untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$)

6. $\lambda_j \geq 0$ (untuk setiap $j = 1,2, \dots, m$)

3. Mencari titik optimum dengan menggunakan syarat Kuhn-Tucker.

Pencarian titik optimum dengan mengunakan syarat Kuhn-Tucker dilakukan dengan cara menganalisa kasus. Kasus yang dianalisa adalah nilai dari x dan λ, di mana nilai dari x dan λ hanya akan berlaku salah satu dari berikut ini, yaitu sama dengan nol $(= 0)$ atau lebih dari nol (> 0). Dalam menganalisa kasus, dicari nilai untuk variabel pilihan (x) dan pengali-Lagrange (λ) yang tidak bertentangan dengan syarat Kuhn-Tucker. Setiap menganalisa kasus, maka harus memenuhi suatu pernyataan sederhana dalam persyaratan lainnya. Jika pada kasus tertentu telah ditemukan titik penyelesaian, maka kasus-kasus yang belum dianalisa dapat diabaikan karena tidak akan didapatkan penyelesaian yang lain, atau dapat juga didapatkan titik penyelesaian yang lain, tetapi nilai otimum dari fungsi tujuannya tetap, yaitu sama dengan nilai optimum yang diperoleh sebelumnya.

4. Jika titik optimum telah ditemukan, maka sebagai langkah terakhir menghitung nilai dari f (fungsi tujuan) atas titik optimum tersebut.

Adapun prosedur langkah penggunaan syarat Kuhn-Tucker untuk masalah minimisasi yaitu sama prosedurnya dengan masalah maksimisasi, hanya saja pada langkah kedua di atas, syarat Kuhn-Tucker untuk masalah minimisasi ini diganti dengan

1. $\frac{\partial L}{\partial x_i} \leq 0$ (untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$)

2. $x_i \frac{\partial L)}{\partial x_i} = 0$ (untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$)

3. $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} \geq 0,$ (untuk setiap $j = 1,2, \dots, m$)

4. $\lambda_j \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0$ (untuk setiap $j = 1,2, \dots, m$)

5. $x_i \geq 0$ (untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$)

6. $\lambda_j \geq 0$ (untuk setiap $j = 1,2, \dots, m$)

Dengan demikian, prosedur penggunaan syarat Kuhn-Tucker dalam menentukan titik optimum global berhasil digunakan.

Kebanyakan masalah pemrograman cembung akan mempunyai hanya satu penyelesaian. Akan tetapi, mungkin saja ada lebih dari satu penyelesaian, atau bahkan tidak memiliki penyelesaian optimum. Kemungkinan yang terakhir ini hanya terjadi jika masalahnya tidak mempunyai penyelesaian yang memenuhi semua kendala, atau kendala-kendalanya tidak menghalangi peningkatan nilai fungsi tujuan dengan tak terhingga ke arah optimum.

Berikut akan diberikan beberapa contoh penyelesaian masalah pemrograman cembung menggunakan syarat Kuhn-Tucker.

Contoh 3.3.1

Akan dicari penyelesaian optimum pada masalah pemrograman cembung berikut dengan menggunakan syarat Kuhn-Tucker.

Maksimisasi	$f(x) = x_1 + 2x_2 - x_2^3$
dengan kendala	$x_1 + x_2 \leq 1$
dan	$x_1, x_2 \geq 0$

Penyelesaian :

Langkah 1. Pembentukan fungsi Lagrange.

Bentuk fungsi Lagrange L dalam masalah ini adalah :

$$\begin{aligned} L &= f(x) + \lambda[r - g(x)] \\ &= x_1 + 2x_2 - x_2^3 + \lambda(1 - x_1 - x_2) \\ &= -x_2^3 + (1 - \lambda)x_1 + (2 - \lambda)x_2 + \lambda \end{aligned}$$

Langkah 2. Menetapkan syarat Kuhn-Tucker.

Dalam masalah ini, syarat Kuhn-Tucker-nya dinyatakan sebagai berikut :

1. $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 - \lambda \leq 0$

2. $x_1 \frac{\partial L}{\partial x_1} = x_1(1 - \lambda) = 0$

3. $\frac{\partial L}{\partial x_2} = -3x_2^2 + 2 - \lambda \leq 0$

4. $x_2 \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_2(-3x_2^2 + 2 - \lambda) = 0$

5. $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - x_1 - x_2 \geq 0$

6. $\lambda \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda(1 - x_1 - x_2) = 0$

7. $x_i \geq 0$, untuk setiap $i = 1,2$

8. $\lambda \geq 0$

<u>*Langkah 3*</u>. Mencari titik optimum global dengan menggunakan syarat Kuhn-Tucker.

Pertama akan dianalisa untuk kasus di mana $x_1 = 0,\ x_2 = 0,$ dan $\lambda = 0.$

<u>Syarat Kuhn-Tucker untuk kasus $(x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \lambda = 0)$</u>

Pemecahan $\lambda = 0$ gagal memenuhi syarat Kuhn-Tucker karena jika $\frac{\partial L}{\partial x_1}$ dihitung pada $\lambda = 0,$ maka diperoleh $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1,$ dan oleh karena itu kontradiksi dengan syarat pertama dari syarat Kuhn-Tucker yang telah ditentukan, yaitu $\frac{\partial L}{\partial x_1} \leq 0.$

Jadi, kasus ini bukan suatu penyelesaian yang memenuhi syarat Kuhn-Tucker.

Berikut ini merupakan kasus yang lain dengan $\lambda = 0$, maka juga memberikan suatu pertentangan dengan syarat pertama dari syarat Kuhn-Tucker sehingga tidak ada penyelesaian yang memenuhi.

Syarat Kuhn-Tucker untuk kasus $(x_1 = 0,\ x_2 > 0,\ \lambda = 0)$

Syarat Kuhn-Tucker untuk kasus $(x_1 > 0,\ x_2 = 0,\ \lambda = 0)$

Syarat Kuhn-Tucker untuk kasus $(x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ \lambda = 0)$

Kasus $x_1 > 0,\ x_2 > 0, \lambda > 0$ perlu ditinjau karena merupakan perkalian tak nol pada persyaratan (2), (4), dan (6), sehingga syarat (1), (3), dan (5) dapat dihapus. Secara singkat diperoleh hasil berikut :

Syarat Kuhn-Tucker untuk kasus $(x_1 > 0,\ x_2 > 0, \lambda > 0)$

2. $1 - \lambda = 0$

4. $-3{x_2}^2 + 2 - \lambda = 0$

6. $1 - x_1 - x_2 = 0$

Dari persyaratan (2) tersebut, diperoleh $\lambda = 1$. Jika pada persyaratan (4) dihitung pada $\lambda = 1$, maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
-3{x_2}^2 + 1 = 0 &\Leftrightarrow -3{x_2}^2 = -1 \\
&\Leftrightarrow \quad {x_2}^2 = \frac{1}{3} \\
&\Leftrightarrow \quad x_2 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \\
&\Leftrightarrow x_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Karena $x_2 > 0$, maka nilai x_2 yang memenuhi adalah $\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Selanjutnya pada persyaratan (6), diperoleh $x_1 = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$ untuk $x_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Dengan demikian, diperoleh penyelesaian $x_1 = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, dan $\lambda = 1$, yang memenuhi persyaratan Kuhn-Tucker.

Karena sudah ditemukan penyelesaian yang memenuhi syarat Kuhn-Tucker, maka kasus-kasus yang lain tidak perlu diperhatikan.

<u>Langkah 4</u>. Menghitung nilai maksimum global dari f

Pada langkah ke-3 diperoleh penyelesaian $(x_1, x_2) = (\frac{1}{3}\sqrt{3}, 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3})(x_1, x_2, x_3)$, sehingga nilai maksimum global dari f dapat dicari dengan cara berikut,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}, 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) &= \left(1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} + 2\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) - \frac{3}{9} \\ &= 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Jadi, nilai maksimum global dari f adalah $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ di titik $(\frac{1}{3}\sqrt{3}, 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3})$.

Berikut adalah salah satu contoh aplikasi dari pemrograman cembung yang diselesaiakan dengan menggunakan syarat kuhn-Tucker.

Contoh 3.3.2 (Contoh Aplikasi)

Sebuah perusahaan membuat komputer mendapat kontrak untuk menyediakan 50 unit komputer pada akhir bulan pertama, 50 unit komputer pada akhir bulan kedua, dan 50 unit komputer pada akhir bulan ketiga. Biaya produksi x buah komputer tiap bulannya adalah x^2. Perusahaan ini dapat memproduksi komputer lebih dari yang dipesan dan menyimpannya di gudang untuk diserahkan pada bulan berikutnya. Biaya gudang adalah sebesar 20 satuan harga untuk tiap komputer yang disimpan dari bulan yang lalu ke bulan berikutnya. Diandaikan bahwa pada permulaaan pesanan di gudang tidak terdapat persedian komputer. Akan ditentukan jumlah produksi komputer tiap bulannya agar biaya pembuatannya minimum.

Penyelesaian:

Dimisalkan x_1, x_2, dan x_3 adalah produksi komputer selama tiga bulan berurutan, maka biaya total yang harus diminimumkan adalah

Biaya total = biaya produksi + biaya gudang

atau

$$f(x) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + 20(x_1 - 50) + 20(x_1 + x_2 - 100)$$
$$= {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + 40x_1 + 20x_2 - 3000$$

dengan kendala

$$x_1 \geq 50$$
$$x_1 + x_2 \geq 100$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 150$$

Akan ditentukan jumlah produksi komputer tiap bulannya agar biaya pembuatannya (biaya total) minimum, dengan langkah-langkah berikut.

Langkah 1. Pembentukan fungsi Lagrange.

Bentuk fungsi Lagrange *L* dalam masalah ini adalah :

$$L = f(x_1, x_2, x_3) + \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \left[r_j - g^j(x_1, x_2, x_3)\right]$$
$$= {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + 40x_1 + 20x_2 - 3000 + \lambda_1(50 - x_1) + \lambda_2(100 - x_1$$
$$- x_2 + \lambda_3(150 - x_1 - x_2 - x_3)$$
$$= {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + 40x_1 + 20x_2 - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_3 x_1 - \lambda_3 x_2$$
$$- \lambda_3 x_3 + 50\lambda_1 + 100\lambda_2 + 150\lambda_3 - 3000$$
$$= {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + (40 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)x_1 + (20 - \lambda_2 - \lambda_3)x_2 - \lambda_3 x_3$$

$$+50\lambda_1 + 100\lambda_2 + 150\lambda_3 + 3000$$

Langkah 2. Menetapkan syarat Kuhn-Tucker.

Dalam masalah ini, syarat Kuhn-Tucker-nya dinyatakan sebagai berikut :

1. $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 40 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \geq 0$

2. $x_1 \frac{\partial L}{\partial x_1} = x_1(2x_1 + 40 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) = 0$

3. $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 20 - \lambda_2 - \lambda_3 \geq 0$

4. $x_2 \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_2(2x_2 + 20 - \lambda_2 - \lambda_3) = 0$

5. $\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 - \lambda_3 \geq 0$

6. $x_3 \frac{\partial L}{\partial x_3} = x_3(2x_3 - \lambda_3) = 0$

7. $\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 50 - x_1 \leq 0$

8. $\lambda_1 \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \lambda_1(50 - x_1) = 0$

9. $\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 100 - x_1 - x_2 \leq 0$

10. $\lambda_2 \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \lambda_2(100 - x_1 - x_2) = 0$

11. $\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = 150 - x_1 - x_2 - x_3 \leq 0$

12. $\lambda_3 \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = \lambda_3(150 - x_1 - x_2 - x_3) = 0$

13. $x_i \geq 0$, untuk setiap $i = 1,2,3$

14. $\lambda_j \geq 0$, untuk setiap $j = 1,2,3$

Langkah 3. Mencari solusi (x, λ) yang memenuhi persyaratan Kuhn-Tucker.

Pertama akan dianalisa untuk kasus di mana $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0, \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, dan $\lambda_3 = 0$.

Kasus ($x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$)

Dengan mensubstitusikan nilai dari masing-masing variabel dan pengali-Lagrange pada kasus ini ke dalam syarat-syarat pertidaksamaan Kuhn-Tucker yang bersesuaian, maka diperoleh:

1. $2(0) + 40 - 0 - 0 - 0 \geq 0$
3. $2(0) + 20 - 0 - 0 \geq 0$
5. $2(0) - 0 \geq 0$
7. $50 - 0 \leq 0$ (bertentangan)
9. $100 - 0 - 0 \leq 0$ (bertentangan)
11. $150 - 0 - 0 - 0 \leq 0$ (bertentangan)

Tampak jelas bahwa kasus ini bertentangan dengan syarat (7), (9), dan (11), maka kasus ini bukan suatu penyelesaian yang memenuhi syarat Kuhn-Tucker.

Kasus-kasus yang lain dengan $x_1 = 0$, atau $x_1 = 0$ dan $x_2 = 0$, atau $x_1 = 0,\ x_2 = 0$, dan $x_3 = 0$, maka juga memberikan suatu pertentangan, sehingga kasus-kasus yang lain tersebut juga tidak akan didapatkan penyelesaian yang memenuhi.

Selanjutnya, akan ditinjau untuk kasus ($x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0,\ \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 > 0$) yang merupakan perkalian tak nol pada persyaratan (2), (4), (6), (8), (10), dan (12), sehingga syarat (1), (3), (5), (7), (9) dan (11) dapat dihapus. Secara singkat diperoleh hasil berikut :

Kasus ($x_1 > 0,\ x_2 > 0, x_3 > 0, \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 > 0$)

2. $2x_1 + 40 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$

4. $2x_2 + 20 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$
6. $2x_3 - \lambda_3 = 0$
8. $50 - x_1 = 0$
10. $100 - x_1 - x_2 = 0$
12. $150 - x_1 - x_2 - x_3 = 0$

Dari persyaratan (8) diperoleh $x_1 = 50$. Oleh karena itu, pada persyaratan (10) diperoleh $x_2 = 50$ dan pada persyaratan (12) jika dihitung pada $x_2 = 50$, maka diperoleh $x_3 = 50$. Selanjutnya, jika pada persyaratan (6) dihitung pada $x_3 = 50$, maka diperoleh $\lambda_3 = 100$. Dengan mensubstitusikan $x_2 = 50$ dan $\lambda_3 = 100$ ke dalam persyaratan (4), diperoleh $\lambda_2 = 20$. Dengan cara yang sama, diperoleh $\lambda_1 = 20$ pada persyaratan (2).

Dengan demikian, diperoleh penyelesaian $(x_1 = 50,\ x_2 = 50,\ x_3 = 50,\ \lambda_1 = 20,\ \lambda_2 = 20,\ \lambda_3 = 100)$ yang memenuhi persyaratan Kuhn-Tucker.

Karena sudah ditemukan penyelesaian yang memenuhi syarat Kuhn-Tucker, maka kasus lainnya yang belum dianalisa dapat diabaikan.

Langkah 4. Menghitung nilai minimum global dari fungsi tujuan f

Pada langkah ke-3 diperoleh penyelesaian $(x_1, x_2, x_3) = (50{,}50{,}50)$, sehingga nilai minimum global dari f dapat dicari dengan cara berikut,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(50{,}50{,}50) \\ &= (50)^2 + (50)^2 + (50)^2 + 40(50) + 20(50) - 3000 \end{aligned}$$

$$= 2500 + 2500 + 2500 + 2000 + 1000 - 3000$$
$$= 7500$$

Jadi, nilai minimum global dari f adalah 7500 di titik $(50,50,50)$.

Dengan demikian, agar biaya pembuatannya minimum maka jumlah produksi komputer tiap bulannya adalah 50 komputer, dengan biaya minimumnya sebesar 7500 satuan harga.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Simpulan

Pembentukan syarat Kuhn-Tucker dikaji melalui dua tahap (pengaruh permasalahan), yaitu pengaruh dari masalah optimisasi dengan kendala tak-negatif pada setiap variabel dan pengaruh dari masalah optimisasi dengan kendala fungsional yang berbentuk pertidaksamaan. Dari hasil pembahasan menunjukkan bahwa syarat Kuhn-Tucker yang terbentuk dari tahap-tahap tersebut, adalah sebagai berikut:

1) Syarat Kuhn-Tucker untuk masalah maksimisasi, yaitu :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} \leq 0, \quad x_i \geq 0, \quad \text{dan} \quad x_i \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} \geq 0, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \text{dan} \quad \lambda_j \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0$$

untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$ dan $j = 1,2, \dots, m$.

2) Syarat Kuhn-Tucker untuk masalah minimisasi, yaitu :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} \geq 0, \quad x_i \geq 0, \quad \text{dan} \quad x_i \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} \leq 0, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \text{dan} \quad \lambda_j \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0$$

untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$ dan $j = 1,2, \dots, m$.

Jika masalah yang akan dioptimumkan adalah masalah optimisasi pemrograman cembung, maka syarat Kuh-Tucker menjadi syarat perlu dan syarat cukup untuk mencapai optimum global. Berikut adalah langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah optimisasi pemrograman cembung dengan menggunakan syarat Kuhn-Tucker:

1. Membentuk fungsi Lagrange L.
2. Menetapkan syarat Kuhn-Tucker.
3. Mencari titik optimum dengan menggunakan syarat Kuhn-Tucker.
4. Menghitung nilai dari fungsi yang akan dioptimumkan atas titik optimum yang diperoleh pada langkah (3).

4.2 Saran

Penyelesaian pemrograman cembung menggunakan syarat Kuhn-Tucker masih menggunakan metode analitis, yakni dengan perhitungan manual. Mengingat tidak semua pemrograman cembung dapat diselesaiakan secara mudah dan dalam waktu yang cukup singkat, maka bagi pembaca yang berminat membuat karya tulis yang berhubungan dengan optimisasi pemrograman cembung disarankan penyelesaiannya dengan memanfaatkan metode numerik, yakni metode yang dilakukan dengan bantuan alat komputasi, seperti komputer.

Pada skripsi ini, jenis-jenis penyelesaian pemrograman cembung tidak disajikan secara lengkap, maka bagi pembaca yang berminat membuat karya tulis tentang pemrograman cembung disarankan untuk mengkaji lebih dalam tentang hal tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, Frank & Mandelson, Elliot. (2006). *Kalkulus* (Edisi ke-4). Terjemahan Nur Danarjaya. Jakarta: Erlangga.

Baisuni, H. M. H.. (1986). *Kalkulus*. Jakarta: UI-Press

Chiang, Alpha C. (1993). *Dasar-Dasar Matematika Ekonomi*. Terjemahan oleh Susatio Sudigyo dan Nartanto. Jakarta: Erlangga.

Chiang, Alpha C. dan Kevin Wainwright. (2005). *Dasar-Dasar Matematika Ekonomi*. (Edisi ke-4). Terjemahan oleh Susatio Sudigyo dan Nartanto. Jakarta: Erlangga.

Hillier, F.S & Gerald J. Lieberman. (1990). *Pengantar Riset Operasi* (Edisi ke-5). Terjemahan oleh Ellen Gunawan S. dan Ardi Wirda Mulia. Jakarta: Erlangga.

Luknanto, Djoko.(2000). *Pengantar Optimasi Nonlinear*. http:/luk.staff.ugm.ac.id/optimasi/pdf/nonlinier2003.pdf. Tanggal akses, 02 Juni 2010.

Prayudi. (2006). *Kalkulus: Fungsi Satu Variabel*. Yogyakarta: Graha Ilmu

Varberg, D.,Purcell, E.J., & Rigdon, S.E. (2003). *Kalkulus Jilid 1* (Edisi ke-8). Terjemahan I Nyoman Susila. Jakarta: Erlangga

Varberg, D.,Purcell, E.J., & Rigdon, S.E.. (2004). *Kalkulus Jilid 2* (Edisi ke-8). Terjemahan Julian Gressando. Jakarta: Erlangga