BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Globalisasi telah menjadi fenomena yang tidak dapat dihindari dalam dunia bisnis. Perekonomian dunia semakin terbuka dan mengarah pada suatu kesatuan global sehingga barang dan jasa yang diproduksi tidak hanya dikonsumsi oleh negara tersebut, namun sudah dikonsumsi oleh negara-negara lain. Globalisasi dapat didefinisikan sebagai suatu kondisi saling tergantung dalam jaringan internasional meliputi transportasi, distribusi, komunikasi, dan ekonomi yang melampaui garis batas teritorial negara (Kismono, 2001:31).

Globalisasi ekonomi membuat proses produksi dan konsumsi barang dan jasa menjadi suatu kerja internasional yang melibatkan banyak negara. Hal itu akan menyebabkan kompetisi bisnis yang semakin ketat. Berbagai macam produk dan jasa yang ditawarkan produsen kepada konsumen dan semakin banyak dijumpai di pasaran dengan berbagai macam variasinya. Variasi tersebut dapat berupa harga, bentuk, kualitas maupun pelayanan tambahan yang ditawarkan pada produk tersebut. Produsen menciptakan variasi tersebut untuk memenuhi kepuasan pelanggannya agar tetap menggunakan produk yang ditawarkan secara berkelanjutan. Langkah tersebut diambil oleh produsen supaya para pelanggannya tidak direbut oleh pesaing atau kompetitor lain yang memproduksi barang dengan kualitas yang hampir sama ataupun lebih unggul. Oleh karena itu perusahaan harus menguasai konsep pemasaran (*marketing concept*) yang menjadi faktor penentu sukses atau tidaknya suatu perusahaan menjalankan usahanya.

Kegiatan pemasaran harus dilaksanakan berdasarkan konsep pemasaran yang efisien dan bertanggung jawab sosial. Konsep managerial yang dilakukan hendaknya berorientasi pada konsumen untuk mencapai tujuan jangka panjang. Untuk itu perusahaan harus mengetahui kebutuhan dan keinginan konsumen, mengembangkan kualitas produk untuk kepuasan konsumen, menciptakan produk yang mudah didapatkan oleh konsumen pada harga yang pantas dan menyediakan pelayanan pasca penjualan (*after sales service*).

Setiap perusahaan harus mempunyai strategi untuk mendapatkan konsumen melalui tawaran yang lebih menarik dan mempertahankan konsumennya melalui suatu jaminan kepuasan. Salah satu strategi yang dapat ditempuh perusahaan untuk mencapai tujuan tersebut adalah dengan memberikan layanan purna jual *(after sales*) pada konsumen yang salah satu bentuknya adalah penawaran garansi *(warranty*), untuk pembelian jenis produk tertentu.

Layanan purna jual adalah jasa yang ditawarkan oleh produsen kepada konsumen setelah transaksi penjualan dilakukan sebagai jaminan mutu untuk produk yang ditawarkannya. Garansi merupakan salah satu layanan purna jual. Garansi didefinisikan sebagai suatu kesepakatan kontrak yang mengharuskan produsen melakukan perbaikan (*rectification*) terhadap produk yang mengalami kegagalan fungsional (kegagalan yang disebabkan oleh kerusakan produksi) dalam periode tertentu. Dengan adanya garansi akan diberikan jaminan kepada konsumen bahwa produk yang dibeli akan berfungsi sebagaimana yang dijanjikan selama periode waktu tertentu.

Kegagalan suatu produk biasanya disebabkan karena adanya kesalahan prosedur dalam proses pembuatan ataupun kesalahan sistem terhadap produk yang dipasarkan. Reliabilitas sebagai ukuran keandalan suatu produk sangat berperan dalam mencapai kepuasan pelanggan disamping ukuran lain seperti biaya pembelian produk, biaya operasional, biaya perbaikan dan sebagainya. Menjual produk dengan garansi berarti memberikan biaya tambahan bagi produsen. Biaya garansi ini merupakan bagian dari biaya penjualan produk. Besarnya estimasi biaya garansi yang tinggi akan membuat harga jual dari suatu produk menjadi tinggi sehingga harga produk menjadi tidak kompetitif, sebaliknya jika estimasi biaya garansi lebih rendah dari aktualnya maka akan mengurangi keuntungan perusahaan. Hal tersebut dikarenakan perusahaan harus menanggung beban klaim yang lebih besar. Oleh karena itu penerapan biaya garansi produk merupakan hal yang menarik untuk dipelajari, terutama bagi produsen untuk mendapatkan estimasi biaya garansi yang tepat, terutama dengan kebijakan *nonrenewing Free Replacement Warranty*. Hal itu dikarenakan kebijakan tersebut banyak dilakukan oleh perusahaan modern dan telah dikenal luas oleh masyarakat.

Kebijakan *nonrenewing Free Replacement Warranty* berarti perusahaan diharuskan melakukan perbaikan atau pergantian produk tanpa pungutan biaya apapun kepada konsumen, apabila konsumen mengajukan klaim akibat adanya kegagalan produk pada periode garansi. Pada kebijakan tersebut, setiap produk akan memperoleh masa garansi sesuai periode yang telah ditetapkan, dengan tidak adanya pembaharuan garansi setelah terjadinya servis klaim.

Secara umum, garansi dikategorikan menjadi garansi satu dimensi dan garansi dua dimensi (Blischke & Murthy, 1994:131). Karakteristik garansi satu dimensi dinyatakan dalam suatu interval (masa garansi) yang menggambarkan variabel tunggal (umur produk). Contoh garansi jenis ini adalah garansi satu tahun untuk pembelian monitor, garansi enam bulan untuk pembelian handphone dan sebagainya. Sedangkan karakteristik garansi dua dimensi dinyatakan dalam suatu daerah kartesius dengan *axis* berupa variabel waktu (umur produk) dan *ordinat* berupa tingkat pemakaian *(usage)* produk atau sebaliknya. Contoh garansi jenis ini adalah garansi mesin 3 tahun atau pemakaian maksimal 45.000 km (salah satu tercapai terlebih dahulu) untuk pembelian produk sepeda motor.

Salah satu sifat produk adalah daya hidup yang semakin menurun sehingga akan terjadi kegagalan fungsional. Kegagalan fungsional akan semakin meningkat seiring dengan lamanya waktu dan pemakaian produk tersebut. Suatu perusahaan akan memberikan garansi apabila terjadi kegagalan fungsional dalam periode tertentu. Hal tersebut yang menjadi alasan distribusi bivariat pareto digunakan untuk analisis garansi ini.

Keberadaan garansi (*warranty)* produk, merupakan suatu fenomena menarik untuk dipelajari terutama mengenai estimasi biaya garansinya. Namun dalam menentukan biaya garansi membutuhkan persyaratan (asumsi) dari konsumen dan produsen tentang kegagalan suatu produk sehingga estimasi biaya garansi dapat dimodelkan. Hal tersebut diharapkan dapat membantu manajemen perusahaan yang memanfaatkan layanan tersebut sebagai salah satu strategi pemasaran serta usaha untuk menarik perhatian konsumen terhadap keunggulan produknya.

B. Batasan Masalah

Pembahasan masalah dalam skripsi ini, terbatas pada masalah model ekspektasi biaya garansi untuk kebijakan *nonrenewing Free Replacement Warranty* dengan pendekatan dua dimensi. Pendekatan dua dimensi berarti melibatkan dua faktor untuk memodelkan garansi yaitu waktu dan pemakaian. Hal itu dikarenakan kebijakan tersebut banyak dilakukan oleh perusahaan modern dan telah dikenal luas oleh masyarakat.

C. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan, dapat dirumuskan permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini yaitu:

1. Bagaimana prosedur mendapatkan model ekspektasi biaya garansi produk dengan kebijakan *non-renewing Free Replacement Warranty* ?
2. Bagaimana penerapan analisis hasil perhitungan biaya garansi dengan kebijakan *nonrenewing Free Replacement Warranty* pada data klaim garansi ?

D. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah:

1. Menjelaskan prosedur mendapatkan model ekspektasi biaya garansi produk untuk kebijakan *nonrenewing Free Replacement Warranty*.
2. Menjelaskan analisis hasil perhitungan biaya garansi dengan kebijakan *nonrenewing Free Replacement Warranty* pada data klaim garansi.

E. Manfaat Penulisan

Manfaat dari penulisan skripsi ini antara lain:

1. Bagi penulis

   Bagi penulis sendiri, penulisan skripsi ini dapat memperdalam serta mengetahui penerapan ilmu peluang yang pernah didapat selama perkuliahan teori peluang dan statistika terapan.

2. Bagi para pembaca

   Bagi para pembaca, skripsi ini dapat menambah wawasan para pembaca terutama mengenai model ekspektasi biaya garansi dan juga bermanfaat dalam hal menambah referensi serta sumber belajar bagi mahasiswa Jurusan Pendidikan Matematika.

BAB II

DASAR TEORI

Pada bagian dasar teori ini akan dibahas beberapa teori pendukung yang diperlukan untuk pemodelan ekspektasi jumlah klaim dan ekspektasi biaya garansi. Untuk dapat menganalisis dan menyelesaikan permasalahan dengan baik perlu dilakukan pengkajian beberapa teori pendukung. Materi yang akan dibahas dalam bab ini antara lain mengenai definisi dan kebijakan garansi, beberapa peubah acak kontinu berikut sifat-sifat peluangnya seperti fungsi peluang, fungsi distribusi kumulatif, nilai harapan dan variansinya. Fungsi reliabilitas, nilai kegagalan dan proses stokastik juga diperlukan dalam menganalisis dan menyelesaikan permasalahan dalam model analisis garansi *(warranty).*

A. Studi Garansi

Dalam penulisan skripsi ini materi paling mendasar yang akan dibahas adalah masalah studi garansi. Studi garansi ini meliputi definisi garansi, taksonomi kebijakan garansi, kegagalan produk, klaim yang diajukan konsumen, serta tipe perbaikan item penyusun produk. Adapun ulasan materinya adalah sebagai berikut:

2.1.1 Definisi Garansi

Terdapat beberapa definisi mengenai garansi, tetapi pada dasarnya memiliki ide yang sama, yaitu garansi didefinisikan sebagai suatu kesepakatan kontrak antara produsen dan konsumen, yang mengharuskan produsen melakukan perbaikan (*rectification*) terhadap produk yang mengalami kegagalan fungsional (kegagalan yang disebabkan oleh kerusakan produksi) dalam periode tertentu. Garansi memberikan jaminan bahwa produsen akan melakukan perbaikan jika produk mengalami kegagalan fungsional di dalam masa garansi yang telah ditentukan. (Blischke & Murthy, 1994:2).

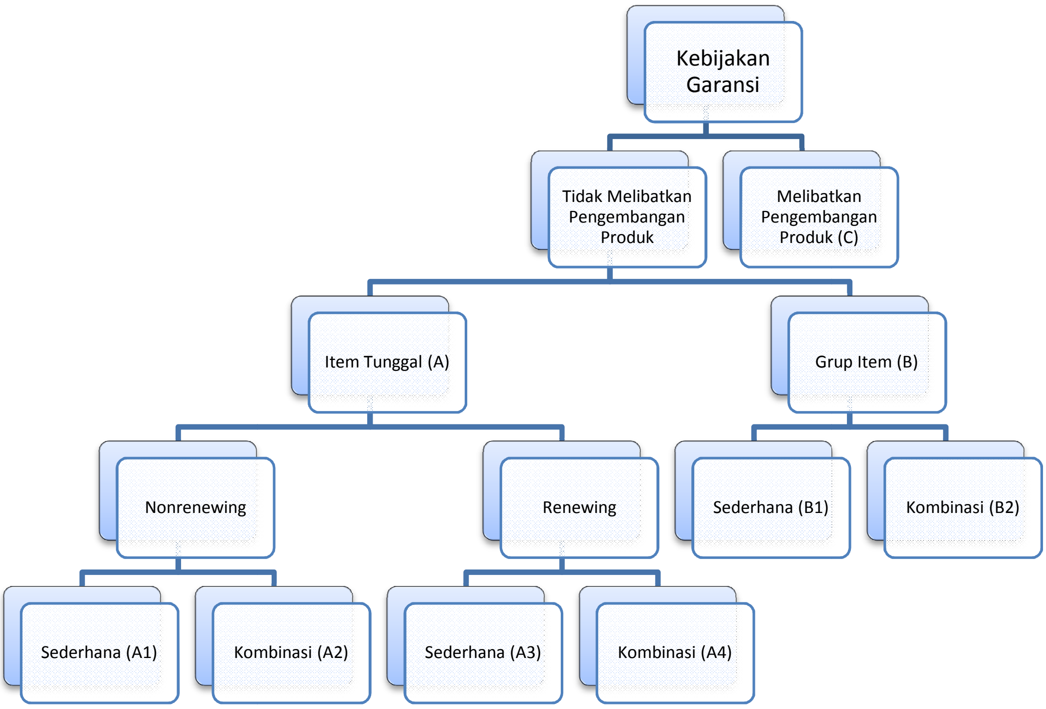
Garansi secara tidak langsung memberikan informasi kepada konsumen mengenai kualitas produk. Bagi produsen penawaran garansi merupakan salah satu strategi *marketing* yang cukup handal, yaitu sebagai salah alat promosi dan alat proteksi. Bentuk promosi tersebut berupa penawaran garansi yang diharapkan dapat membantu meningkatkan penjualan suatu produk. Sebagai alat proteksi, garansi didesain sedemikian rupa sehingga dapat melindungi perusahaan dari klaim yang tidak layak.

2.1.2 Taksonomi Kebijakan Garansi

Blischke & Murthy (1994) menyusun suatu taksonomi kebijakan garansi yang bertujuan untuk memberikan kerangka bagi pengaturan berbagai kebijakan garansi yang selama ini diterapkan. Taksonomi garansi dapat dilihat pada gambar 1.

Kebijakan garansi dibedakan menjadi dua kelompok berdasarkan pertimbangan apakah kebijakan tersebut melibatkan adanya faktor pengembangan produk setelah penjualan ataukah tidak.

Kebijakan garansi diklasifikasikan sebagai berikut:



Gambar . 1 Taksonomi Kebijakan Garansi

Kebijakan yang melibatkan pengembangan produk (C) biasanya diterapkan untuk peralatan dengan masa hidup yang relatif lama seperti peralatan militer dan pesawat terbang. Perusahaan diharuskan melakukan pengembangan produk jika perfomansi produk tersebut gagal memenuhi standar yang ditentukan dalam periode tertentu.

Kebijakan garansi *item* tunggal (A) diterapkan untuk produk yang dijual secara tunggal seperti motor, televisi dan sebagainya. Sedangkan kebijakan garansi untuk grup *item* (B) diterapkan jika produk yang dijual berupa unit yang terdiri dari sejumlah (misal n) *item* sehingga garansi berlaku untuk keseluruhan *item* dalam unit tersebut (dengan batas masa garansi nW dan nU). Kebijakan garansi untuk grup *item* diterapkan pada peralatan kemiliteran dan peralatan penerbangan komersil yang dibeli dalam jumlah banyak. Contohnya modul elektronik pada pesawat kemersial dan bor keping pada industri pertambangan.

Kebijakan garansi item tunggal dibedakan menjadi kebijakan item tunggal *renewing* dan *nonrenewing*. Perbedaan keduanya terletak pada ada tidaknya pembaharuan garansi setelah terjadinya servis klaim. Misalkan W dan U adalah batas masa garansi yang berturut-turut menyatakan umur dan pemakaian produk. Pada kebijakan *renewing*, jika produk gagal pada saat umur dan pemakaian produk masing-masing mencapai x dan y dalam daerah garansi $[0,W)\times[0,U)$, maka produk telah menempuh servis klaim akan memperoleh masa garansi yang sama seperti pada saat pembelian yaitu $[x,x+W)\times[y,y+U)$. Pada kebijakan *nonrenewing*, produk yang telah menempuh servis klaim akan memperoleh masa garansi dengan periode $[\mathrm{x},W)\times[\mathrm{y},U)$, yaitu sisa masa garansi awal.

Kebijakan *renewing* dan *nonrenewing* masing-masing dikelompokkan menjadi dua, yaitu kebijakan sederhana (A1 dan A3) dan kombinasi (A2 dan A4). Kebijakan *renewing* dan *nonrenewing* sederhana meliputi kebijakan *Free Replacement Warranty (FRW)* dan *Pro Rata Warranty (PRW).* Kebijakan kombinasi merupakan kebijakan sederhana dengan beberapa keistimewaan atau dapat diartikan sebagai bentuk kombinasi dari dua atau lebih kebijakan sederhana.

Kebijakan *Free Replacement Warranty* berarti perusahaan diharuskan melakukan perbaikan atau pergantian produk tanpa pungutan biaya apapun kepada konsumen, apabila konsumen mengajukan klaim akibat adanya kegagalan produk pada periode garansi. Sedangkan kebijakan *Pro Rata Warranty* berarti perusahaan diharuskan membayar sejumlah uang kepada konsumen jika terjadi kegagalan produk dalam periode garansi.

Jika terjadi kegagalan fungsional produk dalam interval waktu $[0,W)\times[0,U)$, penerapan *FRW* mengharuskan perusahaan melakukan perbaikan atau pergantian produk tanpa pungutan biaya pada konsumen. Dengan penerapan *PRW*, perusahaan diharuskan membayar sejumlah uang kepada konsumen jika terjadi kegagalan dalam periode garansi. Besarnya uang pengembalian tergantung pada nilai umur dan pemakaian produk yang bersangkutan.

Semua kebijakan tersebut diatas secara umum, garansi dikategorikan menjadi garansi satu dimensi dan garansi dua dimensi (Blischke & Murthy, 1994:131). Karakteristik garansi satu dimensi dinyatakan dalam suatu interval (masa garansi) yang menggambarkan variabel tunggal (waktu atau tingkat pemakaian). Contoh garansi jenis ini adalah garansi satu tahun untuk pembelian monitor, garansi enam bulan untuk pembelian handphone dan sebagainya. Karakteristik garansi dua dimensi dinyatakan dalam suatu daerah kartesius dengan *axis* berupa variabel waktu (umur produk) dan *ordinat* berupa tingkat pemakaian *(usage)* produk atau sebaliknya. Contoh garansi jenis ini adalah garansi mesin 3 tahun atau pemakaian maksimal 45.000 km (salah satu tercapai terlebih dahulu) untuk pembelian produk sepeda motor.

2.1.3 Biaya Garansi

Setiap terjadi pengajuan klaim yang dikarenakan kualitas produk tidak memuaskan atau tidak sesuai yang dipersyaratkan, maka produsen akan mengeluarkan biaya garansi. Jika klaim yang diajukan tidak valid, biaya yang dikeluarkan hanyalah biaya administrasi. Klaim dikatakan tidak layak jika masa garansinya telah habis *(expired)* atau kegagalan terjadi akibat kesalahan konsumen. Jika klaim yang diajukan valid, ada beberapa biaya tambahan yang harus dikeluarkan produsen. Biaya tambahan tersebut meliputi biaya tenaga kerja *(labor cost)* dan biaya pergantian komponen *(replacement cost)*. Untuk kasus *FRW (Free Replacement Warranty)*, produsen menyediakan pergantian tanpa adanya biaya pergantian yang dipungut dari konsumen.

Secara umum total biaya garansi yang harus dikeluarkan produsen untuk setiap unit penjualan tidak dapat diperkirakan *(unpredictable)*. Hal ini disebabkan kegagalan produk bersifat acak dan cara pemakaian produk oleh masing-masing konsumen berbeda secara signifikan.

Biaya garansi sangat penting bagi produsen untuk beberapa alasan. Pertama, biaya garansi merupakan bagian dari harga jual (dimasukkan ke dalam harga jual), oleh karena itu diperlukan estimasi yang akurat. Kedua, pengetahuan mengenai biaya garansi membantu produsen untuk membandingkan dan kemudian memilih kebijakan garansi yang terbaik.

2.1.4 Tipe Perbaikan Item

Jika suatu produk *repairable* gagal, maka perusahaan akan melakukan perbaikan sampai produk perbaikan sampai produk tersebut dapat berfungsi kembali sebagaimana mestinya. Kondisi produk setelah perbaikan akan berbeda, tergantung pada jenis perbaikan yang dilakukan. Beberapa tipe perbaikan yang biasa dilakukan oleh perusahaan antara lain adalah:

1. *Good As New* (Barang seperti baru)

Kondisi produk setelah diperbaiki diasumsikan sebaik kondisi produk baru (pada saat pembelian). Dengan kata lain, distribusi waktu kegagalan produk yang telah diperbaiki akan sama dengan distribusi waktu kegagalan produk baru.

2. *Minimal Repair* (Perbaikan Minimal)

Jenis rektifikasi ini cocok diterapkan untuk yang terdiri dari beberapa (misalkan n) komponen. Jika komponen yang gagal telah diperbaiki, maka produk (secara keseluruhan) dapat berfungsi kembali. Karena umur komponen penyusun produk sesaat sebelum gagal adalah sama, misal $X_i=x(i=1,n)$, maka produk yang telah diperbaiki secara keseluruhan juga akan berumur x. Oleh sebab itu dengan *minimal repair, failure rate* produk yang telah diperbaiki akan sama dengan *failure rate* produk yang baru.

3. *Different from New* (Berbeda dengan yang baru)

Jika suatu produk gagal, maka akan dilakukan pemeriksaan pada keseluruhan komponen secara teliti. Akibatnya, tidak hanya komponen gagal saja yang diperbaiki, tetapi juga komponen lain yang mengalami penurunan kualitas fungsional akibat kegagalan produk secara keseluruhan. Hal ini menyebabkan distribusi waktu kegagalan produk yang telah diperbaiki $F_1(x)$ akan berbeda dengan distribusi waktu kegagalan produk awal $F(x)$.

B. Peubah Acak dan Sifat-Sifat Peluangnya

Dalam penulisan skripsi ini, untuk memodelkan ekspektasi biaya garansi, diperlukan pula beberapa materi mengenai peubah acak dan sifat-sifatnya. Adapun ulasan materinya adalah sebagai berikut:

2.2.1 Peubah Acak (Variabel Random)

Untuk keperluan statistik, seringkali hasil suatu percobaan dinyatakan dalam bilangan riil. Hasil percobaan ini dapat dinyatakan ke dalam bilangan riil dengan menggunakan suatu fungsi yang disebut sebagai peubah acak. Dalam ilmu peluang, peubah acak seringkali dilambangkan dengan huruf besar seperti X, adapun nilai-nilai yang ada dalam X dilambangkan dengan huruf kecil misalkan x.

Definisi 2.2.1 Peubah Acak/ Random

Variabel acak X adalah fungsi bernilai real yang didefinisikan pada ruang sampel yang menghubungkan bilangan real $X(e) = x$ dengan setiap elemen dalam ruang sampel (Bain & Englehardth, 1992 : 65).

Dalam ilmu peluang, peubah acak dibedakan menjadi 2 macam, yakni peubah acak diskret dan peubah acak kontinu. Jika nilai suatu peubah acak berhingga atau tidak berhingga akan tetapi nilainya sama dengan suatu bilangan cacah maka peubah acak tersebut disebut sebagai peubah acak diskret, sedangkan jika nilai peubah acak tersebut berupa bilangan yang tak terhingga banyaknya akan tetapi sama banyak dengan banyaknya titik-titik pada sebuah ruas garis maka peubah acak tersebut disebut sebagai peubah acak kontinu (Bain &Engelhardt, 1992: 53). Untuk pembahasan masalah garansi ini digunakan variabel acak kontinu. Hal ini dikarenakan analisis garansi ini menggunakan peubah acak yang merepresentasikan waktu dan pemakain produk dan nilai dari peubah acak tersebut berupa bilangan yang tak terhingga banyaknya akan tetapi sama banyak dengan banyaknya titik-titik pada sebuah ruas garis.

2.2.2 Fungsi Padat Peluang

Untuk menghitung nilai peluang dari suatu peubah acak, seringkali digunakan sebuah tabel atau rumus tertentu. Fungsi peluang dari peubah acak diskret disebut sebagai fungsi peluang diskret, sedangkan fungsi peluang pada peubah acak kontinu disebut fungsi padat peluang (Walpole, 1995: 116).

Jika *X* merupakan peubah acak kontinu, maka *f(x)* disebut fungsi padat peluang dari peubah acak *X*, jika memenuhi

a. $f(x) \geq 0$, untuk semua $x \in R$

b. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

c. $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

(Walpole & Myers, 1995 : 60).

Selain fungsi peluang dan fungsi padat peluang ada juga yang disebut sebagai fungsi distribusi kumulatif, yakni fungsi $F(x)$ dari suatu peubah acak *X* dengan definisi berikut:

Definisi 2.2.2 Fungsi Distribusi Kumulatif

Untuk $F(x) = P(X \leq x)$, untuk setiap $x \in X$ dan *X* adalah suatu peubah acak, maka fungsi distribusi kumulatif didefinisikan sebagai berikut:

Jika *f(x)* merupakan fungsi padat peluang dari *X* peubah acak kontinu, maka fungsi distribusi kumulatif (FDK) dari *X* dapat dinyatakan sebagai

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{2.2.1}$$

(Bain &Engelhardt, 1992: 64).

Dalam ilmu peluang, misalkan *X* adalah suatu peubah acak, maka rata-rata dari *X* disebut sebagai Nilai Harapan atau Ekspektasi dari *X* dan dilambangkan dengan *E*(*X*).

Definisi 2.2.3 : Ekspektasi Variabel Acak

Jika *X* adalah variabel acak kontinu dengan fungsi padat peluang *f(x)*, maka nilai ekspektasi dari *X*, *E(X)*, didefinisikan sebagai

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

(Bain &Engelhardt, 1992:67).

Jika *X* variabel acak dengan fungsi padat peluang *f(x)*, *a* dan *b* suatu konstanta, *g(x)* dan *f(x)* fungsi riil dengan domain elemen dari *X*, maka

$$E[ag(X) + bh(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} [ag(x) + bh(x)]\, f(x)dx$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx$$

$$= aE[g(X)] + bE[h(X)] \tag{2.2.2}$$

Selain nilai harapan, sifat peluang berikutnya adalah variansi. Sifat peluang ini menjelaskan tingkat keragaman nilai dari peubah acak yang diteliti. Berikut ini adalah beberapa definisi dan teorema untuk menghitung nilai variansi dari suatu peubah acak.

Definisi 2.2.4 : Variansi Peubah Acak

Misalkan X adalah suatu peubah acak dengan Nilai Harapan μ maka variansi dari peubah acak X didefinisikan sebagai:

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2]$$

Teorema 2.2.4 (Walpole & Myers, 1995:97)

Misalkan X adalah suatu peubah acak dengan nilai harapan μ, maka variansi dari peubah acak X akan memenuhi persamaan berikut :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E[X^2-\mu^2] \\ &= E(X^2)-(E(X))^2\end{aligned}$$

Bukti:

Menurut Definisi 2.2.4, variansi dari suatu peubah acak X adalah σ^2, dengan :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E\ [(X-\mu)^2] \\ &= E[X^2 - 2X\mu + \mu^2] \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2 \\ &= E(X^2)-(E(X))^2\end{aligned}$$

Definisi 2.2.4 Distribusi Bersyarat

Jika *X* dan *Y* adalah variabel acak dengan fungsi padat peluang masing-masing *f(x)* dan *g(y)*, maka fungsi padat peluang bersyarat *X* jika diketahui *Y*, didefinisikan sebagai,

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{g(y)}, g(y) \neq 0 \qquad (2.2.3)$$

(Bain &Engelhardt, 1992:153).

Jika $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$ dan $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$ berturut-turut menyatakan fungsi padat peluang marjinal dari X dan Y, maka $E\big(E(Y|X=x)\big)$dapat dinyatakan dengan

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(Y|X=x)f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)f_X(x)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\frac{f(x,y)}{f_X(x)}f_x dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy = E(Y)$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$E\big(E(Y|X=x)\big) = E(Y) \qquad (2.2.4)$$

C. Distribusi Pareto

Menurut Blisckhe & Murthy (1994:76) untuk untuk merumuskan kegagalan suatu produk biasanya akan mengikuti beberapa distribusi tertentu salah satunya adalah distribusi Pareto.

Salah satu sifat produk adalah daya hidup yang semakin menurun sehingga akan terjadi kegagalan fungsional. Kegagalan fungsional akan semakin meningkat seiring dengan lamanya penggunaan produk tersebut. Suatu perusahaan akan memberikan garansi apabila terjadi kegagalan fungsional dalam periode tertentu. Hal tersebut yang menjadi alasan distribusi pareto digunakan untuk analisis garansi ini.

Suatu variabel acak kontinu X dikatakan berdistribusi Pareto dengan parameter $\theta > 0$ dan $a > 0$, (Bain & Engelhardt, 1992:76) jika memiliki fungsi densitas peluang,

$$f(x;\theta;a) = \begin{cases} \frac{a}{\theta}(1 + \frac{x}{\theta})^{-(a+1)}, & x > 0 \\ 0, & x \text{ yang lain} \end{cases} \qquad (2.3.1)$$

dengan

$$E(X) = \frac{\theta}{(a-1)} \quad , a > 1 \qquad \text{dan}$$

$$Var(X) = \frac{\theta^2 a}{(a-1)^2(a-2)} \quad , a > 2$$

Untuk pengujian data apakah data mengikuti distribusi tertentu atau tidak, dalam hal ini yang dimaksud adalah distribusi pareto, *Kolmogorov-Smirnov* *test* dapat digunakan untuk mengujinya. Tes Kolmogorov-Smirnov adalah suatu tes *goodness of fit*, artinya yang diperhatikan adalah tingkat kesesuaian antara distribusi serangkaian harga sampel dengan suatu distribusi teoritis tertentu. Adapun hipotesisnya sebagai berikut:

1. Hipotesis

   Ho : data mengikuti distribusi pareto

   Ha : data tidak mengikuti distribusi pareto

2. Taraf signifikansi (α)

   (α) dapat kita pilih 0,05, 0,025 ataupun 0,01

3. Statistik Uji

   Tes Kolmogorov-Smirnov, tes ini mengikuti distribusi normal. Statistik ujinya adalah,

   $$D = \max_{1 \leq i \leq n} |Fs(X_i) - Ft(X_i)|$$

   Dengan $Fs(X_i)$ adalah fungsi distribusi frekuensi kumulatif sampel dan $Ft(X_i)$ adalah fungsi distribusi frekuensi kumulatif pareto serta *n* adalah banyaknya data.

4. Kriteria keputusan

   Ho ditolak apabila nilai D lebih besar daripada nilai kritis tabel Kolmogorov-Smirnov pada ukuran sampel n dan α atau nilai *p-value* < α. Untuk langkah-langkah uji Kolmogorov-Smirnov akan disajikan pada lampiran 12.

2.3.2 Distribusi Bivariat Pareto

Salah satu sifat produk adalah daya hidup yang semakin menurun sehingga akan terjadi kegagalan fungsional. Kegagalan fungsional akan semakin meningkat seiring dengan lamanya waktu dan pemakaian produk tersebut. Suatu perusahaan akan memberikan garansi apabila terjadi kegagalan fungsional dalam periode tertentu. Hal tersebut yang menjadi alasan distribusi bivariat pareto digunakan untuk analisis garansi ini.

Analisis garansi dua dimensi menggunakan dua variabel yang masing-masing berperan untuk merepresentasikan waktu dan penggunaan. Untuk itu perlu dibahas distribusi bivariat pareto. Adapun ulasannya sebagai berikut:

Fungsi padat peluang $f(x,y)$ pada peubah acak X, Y dengan X,Y saling bebas adalah,

$$f(x,y) = \frac{a(a+1)}{\theta_1\ \theta_2}\left(\frac{1}{\theta_1}x + \frac{1}{\theta_2}y - 1\right)^{-(a+2)} \qquad (2.3.2)$$

dengan $a > 1$, $x > 0$, $\theta_1 > 0$, $y > 0$ dan $\theta_2 > 0$.

Fungsi padat peluang marjinal dari X adalah:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^\infty f(x,y)dy \\ &= \int_0^\infty \frac{a(a+1)}{\theta_1\ \theta_2}\left(\frac{1}{\theta_1}x + \frac{1}{\theta_2}y - 1\right)^{-(a+2)} dy \\ &= \frac{-a}{\theta_1}\left(\frac{1}{\theta_1}x + \frac{1}{\theta_2}y - 1\right)^{-(a+1)} \Bigg|_0^\infty \\ &= \frac{a}{\theta_1}\left(\frac{1}{\theta_1}x - 1\right)^{-(a+1)} \end{aligned}$$

Sehingga Ekspektasi *X* adalah

$$E(X) = \int_0^\infty x\, f_X(x) dx$$

$$= (-1)^a \frac{\theta_1}{a-1}, a > 1 \qquad (2.3.3)$$

dan fungsi padat peluang marjinal dari *Y* adalah:

$$f_Y(y) = \int_0^\infty f(x,y) dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{a(a+1)}{\theta_1\ \theta_2} \left(\frac{1}{\theta_1}x + \frac{1}{\theta_2}y - 1\right)^{-(a+2)} dx$$

Sehingga Ekspektasi *Y* adalah

$$E(Y) = \int_0^\infty y\, f_Y(y) dy$$

$$= (-1)^{-a} \frac{\theta_2}{a-1}, a > 1 \qquad (2.3.4)$$

Maka fungsi padat peluang bersyarat *X* jika diketahui *Y* adalah,

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$= \frac{\frac{a(a+1)}{\theta_1\ \theta_2} \left(\frac{1}{\theta_1}x + \frac{1}{\theta_2}y - 1\right)^{-(a+2)}}{\frac{a}{\theta_1} \left(\frac{1}{\theta_1}x - 1\right)^{-(a+1)}}$$

$$= \frac{(a+1) \left(\frac{1}{\theta_1}x + \frac{1}{\theta_2}y - 1\right)^{-(a+2)}}{\theta_2 \left(\frac{1}{\theta_1}x - 1\right)^{-(a+1)}}$$

Dengan demikian ekspektasi bersyaratnya adalah,

$$E(Y|X=x)=\int_0^\infty yf(y|x)dy$$

$$=\int_0^\infty \frac{(a+1)\left(\frac{1}{\theta_1}x+\frac{1}{\theta_2}y-1\right)^{-(a+2)}}{\theta_2\left(\frac{1}{\theta_1}x-1\right)^{-(a+1)}}dy$$

$$E(Y|X=x)=\frac{\theta_2}{a}\left(\frac{1}{\theta_1}x-1\right) \qquad (2.3.5)$$

(Blischke & Murthy, 1994: 76).

D. Transformasi Laplace

Untuk menyelesaikan persamaan-persamaan dalam proses *renewal* dan ekspektasi jumlah kegagalan produk dalam kasus garansi dua dimensi maka diperlukan transformasi laplace.

Definisi 2.4.1 Transformasi Laplace

Misalkan *F(t)* adalah suatu fungsi dari *t* yang tertentu untuk *t>0*, maka transformasi Laplace dari *F(t)* dinyatakan sebagai,

$$\mathcal{L}\{F(t)\}=f(s)$$

$$=\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt \qquad (2.4.1)$$

(Silaban & Waspakrik, 1999: 1).

dan jika $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ atau transformasi Laplace suatu fungsi $F(t)$ adalah $f(s)$, maka *F(t)* disebut transformasi Laplace Invers dari *f(s)* yang dinyatakan sebagai,

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} \qquad (2.4.2)$$

(Silaban & Waspakrik, 1999:42).

Definisi 2.4.2 Fungsi Kontinu Sebagian-Sebagian

Suatu fungsi dikatakan kontinu secara sebagian-sebagian dalam sutu selang $\alpha \leq t \leq \beta$, jika selang tersebut dapat dibagi-bagi kedalam sejumlah berhingga selang, dalam setiap selang ini fungsinya kontinu (Silaban & Waspakrik, 1999:2).

Jika *F(t)* adalah kontinu sebagian-sebagian dalam setiap selang berhingga $0 \leq t \leq N$ dan eksponensial berorde γ, maka transformasi Laplace-nya ada untuk semua s > γ. (Syarat Cukup Transformasi Laplace).

Definisi 2.4.3 Integral Konvolusi

Jika *f(t)* dan *g(t)* merupakan dua buah fungsi yang kontinu dalam interval [0,∞), maka integral konvolusi dari kedua fungsi tersebut didefinisikan sebagai,

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-v)g(v)dv = \int_0^t f(u)g(t-u)du \qquad (2.4.3)$$

(Silaban & Waspakrik, 1999:45).

Sifat Konvolusi Laplace

Jika $\mathcal{L}\{F(t)\} = F(s)$ dan $\mathcal{L}\{G(t)\} = G(s)$, maka

$$\mathcal{L}\{F(t) * G(t)\} = F(s) * G(s) \qquad (2.4.4)$$

(Silaban & Waspakrik, 1999: 45).

Definisi 2.4.4 Integral Jenis Konvolusi

$Y(t) = F(t) + \int_0^t K(t-u)Y(u)du$ adalah persamaan integral pada konvolusi dan dapat dituliskan sebagai $Y(t) = F(t) + K(t) * Y(t)$.

Penyelesaian persamaan tersebut dapat dilakukan dengan mengambil transformasi Laplace kedua ruas dengan menganggap $\mathcal{L}\{F(t)\} = F(s)$ dan $\mathcal{L}\{K(t)\} = K(s)$ sedemikian sehingga diperoleh,

$$\mathcal{L}\{Y(t)\} = \mathcal{L}\ \{F(t) + K(t) * Y(t)\}$$

$$\Rightarrow Y(s) = F(s) + K(s)Y(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{F(s)}{1 - K(s)}$$

$$\Rightarrow Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\ \{Y(s)\} \qquad (2.4.5)$$

(Silaban & Waspakrik, 1999: 112).

E. Pemodelan Waktu Kegagalan Awal Item

Untuk mendapatkan estimasi biaya garansi yang baik dibutuhkan model yang dapat merepresentasikan kegagalan item dengan baik. Kegagalan awal item *(first time to failure)* mempunyai andil yang cukup mendasar sehingga analisis garansi dapat dilakukan.

Definisi 2.5.1 Perumusan untuk Kegagalan Satu Dimensi

Misalkan peubah acak X_1 menyatakan umur item pada saat terjadi kegagalan awal (*first time to failure*). X_1 dimodelkan sebagai variabel acak dengan fungsi distribusi tertentu.

Fungsi reliabilitas suatu item (peluang suatu item tetap bekerja dengan baik selama waktu *x*) dapat dinyatakan dengan,

$$R(x) = \bar{F}(x) = 1 - F(x) = P(X_1 > x) = \int_x^\infty f(t)dt \qquad (2.5.1)$$

dengan $F(x) = P(X_1 \leq x)$ adalah fungsi distribusi kumulatif waktu kegagalan awal (Blischke & Murthy, 1994: 75).

Definisi 2.5.2 Reliabilitas Bersyarat

Reliabilitas dari suatu item dapat digunakan untuk menggambarkan seberapa besar peluang item tersebut untuk tetap berfungsi baik pada saat *t* atau minimal pada saat *t*.

Reliabilitas bersyarat dari suatu item dengan umur *t* dirumuskan sebagai,

$$R(t|x) = \bar{F}(t|x) = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(x)}, \qquad \bar{F}(x) > 0$$

Probabilitas item gagal dalam interval waktu [x,x+t), jika diketahui item tersebut tidak gagal pada saat *x* adalah:

$$F(t|x) = 1 - \bar{F}(t|x) = \frac{F(t+x) - F(x)}{\bar{F}(x)} \qquad (2.5.2)$$

(Blischke & Murthy, 1994: 66).

Definisi 2.5.3 Fungsi Hazard

Fungsi hazard dari suatu item dapat diinterpretasikan sebagai besarnya laju/kecepatan suatu item mengalami kegagalan pada saat *t*. Fungsi hazard adalah probabilitas bersyarat bahwa suatu benda akan mati pada interval $(t, t + \Delta t)$.

Fungsi hazard / $h(x)$ yang bersesuaian dengan $F(x)$ didefinisikan sebagai,

$$h(x) = \lim_{n \to 0} \frac{F(t|x)}{t}$$

$$= \lim_{n \to 0} \frac{F(t+x) - F(x)}{\bar{F}(x)}$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}$$

$$= \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{-R'(x)}{R(x)} \qquad (2.5.3)$$

(Blischke & Murthy, 1994: 66).

Hubungan antara $f(x), F(x), h(x)$ dan $H(x)$ dengan, $H(x)$ merupakan simbol dari fungsi hazard kumulatif, dapat dinyatakan dalam persamaan berikut,

$$H(x) = \int_0^x h(t)dt$$

$$\int_0^x h(t)dt = -\int_0^x \frac{-R'(x)}{R(x)} dt$$

$$H(x) = -[\ln R(x) - \ln R(0)]$$

$$H(x) = -[\ln R(x) - \ln 1]$$

$$-H(x) = \ln R(x)$$

$$R(x) = e^{-H(x)}$$

Dengan demikian

$$R(x) = exp\left\{-\int_0^x h(t)dt\right\}$$

$$F(x) = 1 - exp\left\{-\int_0^x h(t)dt\right\} \tag{2.5.4}$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{d(x)} = h(x)exp\left\{-\int_0^x h(t)dt\right\} \tag{2.5.5}$$

F. Perumusan untuk Kegagalan Dua Dimensi

Perumusan kegagalan item untuk garansi dua dimensi pada dasarnya sama dengan perumusan untuk garansi satu dimensi, hanya saja variabel yang berperan adalah variabel umur (X) dan pemakaian (Y).

Misal (x, y) menyatakan umur dan *usage* (penggunaan) item pada saat terjadi kegagalan awal X_1 dan Y_1 dimodelkan sebagai variabel acak nonnegatif dengan fungsi distribusi bersama $F(x, y)$.

Fungsi reliabilitas suatu item dapat dinyatakan dengan,

$$
\begin{aligned}
R(x,y) &= \bar{F}(x,y) \\
&= 1 - F(x,y) \\
&= 1 - \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(s,t)\,ds\,dt \\
&= \int_{y}^{\infty}\int_{x}^{\infty} f(s,t)\,ds\,dt \qquad (2.6.9)
\end{aligned}
$$

dengan $\bar{F}(x,y) = P(X_1 > x,\ Y_1 > y)$ adalah fungsi distribusi kumulatif bersama kegagalan awal.

Berdasarkan persamaan (2.5.3) maka fungsi hazard / nilai kegagalan *(hazard rate)* yang bersesuaian dengan $F(x, y)$ didefinisikan sebagai,

$$
\begin{aligned}
h(x,y) &= \frac{f(x,y)}{\bar{F}(x,y)} \\
&= \frac{f(x,y)}{R(x,y)} = \frac{-R'(x,y)}{R(x,y)} \qquad (2.6.10)
\end{aligned}
$$

hubungan antara $f(x,y)$, $F(x,y)$, $h(x,y)$ dan $H(x)$ dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$H(x,y) = \int_0^y \int_0^x h(u,v)dudv$$

$$\int_0^y \int_0^x h(u,v)dudv = -\int_0^y \int_0^x \frac{R'(u,v)}{R(u,v)} dudv$$

$$H(x,y) = -\ln R(x,y)$$

$$R(x,y) = e^{-H(x,y)}$$

Dengan demikian,

$$R(x,y) = \exp\left\{-\int_0^y \int_0^x h(u,v)dudv\right\} \tag{2.6.11}$$

$$F(x,y) = 1 - \exp\left\{-\int_0^y \int_0^x h(u,v)dudv\right\} \tag{2.6.12}$$

$$f(x,y) = \frac{d^2F(x,y)}{dxdy} = h(x,y)\exp\left\{-\int_0^y \int_0^x h(u,v)dudv\right\} \tag{2.6.13}$$

Karena untuk menganalisis tentang garansi dengan distribusi pareto maka akan ditentukan fungsi hazard dari distribusi bivariat Pareto

$$f(x,y) = \frac{a(a+1)}{\theta_1 \ \theta_2}\left(\frac{1}{\theta_1}x + \frac{1}{\theta_2}y - 1\right)^{-(a+2)}$$

dengan $a > 1$, $x > 0$, $\theta_1 > 0$, $y > 0$ dan $\theta_2 > 0$.

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}\frac{a(a+1)}{\theta_1\ \theta_2}\left(\frac{1}{\theta_1}u+\frac{1}{\theta_2}v-1\right)^{-(a+2)}dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{y}\left(-\frac{a}{\theta_2}\left(\frac{1}{\theta_1}u+\frac{1}{\theta_2}v-1\right)^{-(a+2)}\Bigg|_{-\infty}^{x}\right)dv$$

$$=\int_{-\infty}^{x}-\frac{a}{\theta_2}\left(\frac{1}{\theta_1}x+\frac{1}{\theta_2}v-1\right)^{-(a+2)}dv$$

$$F(x,y)=\left(\frac{1}{\theta_1}x+\frac{1}{\theta_2}v-1\right)^{-a}\Bigg|_{-\infty}^{y}$$

$$=\left(\frac{1}{\theta_1}x+\frac{1}{\theta_2}y-1\right)^{-a}-\lim_{v\to-\infty}\left(\frac{1}{\theta_1}x+\frac{1}{\theta_2}v-1\right)^{-a}$$

$$=\left(\frac{1}{\theta_1}x+\frac{1}{\theta_2}y-1\right)^{-a}-0$$

$$=\left(\frac{1}{\theta_1}x+\frac{1}{\theta_2}y-1\right)^{-a} \tag{2.6.14}$$

$$R(x,y)=\bar{F}(x,y)=1-F(x,y)$$

$$=1-\left(\frac{1}{\theta_1}x+\frac{1}{\theta_2}y-1\right)^{-a}$$

$$h(x,y)=\frac{f(x,y)}{\bar{F}(x,y)}$$

$$=\frac{\frac{a(a+1)}{\theta_1\ \theta_2}\left(\frac{1}{\theta_1}x+\frac{1}{\theta_2}y-1\right)^{-(a+2)}}{1-\left(\frac{1}{\theta_1}x+\frac{1}{\theta_2}y-1\right)^{-a}} \tag{2.6.15}$$

G. Proses Stokastik untuk Pemodelan Garansi

Dalam penulisan skripsi ini, selain materi peluang, transformasi laplace diperlukan pula beberapa materi mengenai proses stokastik. Adapun ulasan materinya adalah sebagai berikut:

Definisi 2.7.1 Proses Stokastik

Proses stokastik dapat dipandang sebagai kumpulan variabel acak berindeks $\{X_t\}$, $t \in T$, dengan T adalah himpunan indeks. Untuk setiap $t \in T$, $\{X_t\}$ adalah suatu variabel acak yang menyatakan keadaan suatu proses pada saat t. Suatu proses stokastik $\{X_t\}$, $t \in T$ disebut proses stokastik diskret jika T (Blischke & Murthy, 1994: 94).

Definisi 2.7.2 *Point Processes*

Point Processes merupakan proses stokastik kontinu yang dinyatakan oleh kejadian yang muncul secara acak selama waktu (kontinu) tertentu (Blischke & Murthy, 1994: 94).

Definisi 2.7.3 Proses Berhitung *(Counting Processes)*

Suatu *Point Processes* $(N(t), t \geq 0)$ disebut *Counting Processe* atau proses berhitung, jika $N(t)$ menyatakan jumlah kejadian yang terjadi sampai waktu t. Beberapa sifat penting $N(t)$ sebagai berikut,

a. $N(t) \geq 0$ (diasumsikan untuk $t = 0,\ N(0) = 0$)
b. $N(t)$ bernilai integer

c. Jika $s < t$, maka $N(s) \leq N(t)$

d. Untuk $s < t, (N(t) - N(s))$ merupakan banyaknya kejadian dalam interval waktu [s,t].

(Blischke & Murthy, 1994: 94).

H. *Renewal Processes* / Proses *Renewal*

Proses *Renewal* dalam analisis garansi ini sangat berguna untuk memodelkan kegiatan perbaikan terhadap suatu item yang dapat mempengaruhi performa sistem penyusun produk secara keseluruhan.

Definisi 2.8.1 *Ordinary Renewal Processes*

Kegiatan mengamati jumlah peristiwa yang terjadi selama [0,t) disebut *Counting Processes*. *Counting Processes* *(N(t), t ≥ 0)* adalah suatu *Ordinary Renewal Processes* jika memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:

a) $N(0) = 0$

b) Interval waktu antar kejadian ke-*(j-1)* dan kejadian ke-*j* merupakan suatu urutan variabel acak yang independen dan berdistribusi identik dengan fungsi distribusi $F(x)$

c) $N(t) = \sup\{n: Sn \leq t\}$, dengan S_n adalah waktu terjadinya renewal ke-*n*

$S_0 = 0$ dan $S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i,\ n \geq 1$

(Blischke & Murthy, 1994: 100).

Jika kegagalan awal terjadi pada saat $X_t = x$, maka secara matematis ekspektasi jumlah renewal, dilambangkan $E\big(N(t)\big)$ atau $M(t)$ dalam interval [0,t) dapat dituliskan sebagai:

$$E\big(N(t|X_t = x)\big) = \begin{cases} 0 & , x > t \\ 1 + E\big(N(t+x)\big), & x \leq t \end{cases}$$

(Blischke & Murthy, 1994: 102).

Dengan penurunan persamaan (2.2.4) tentang sifat probabilitas bersyarat maka diperoleh

$$E\big(N(t)\big) = E\Big(E\big(N(t|X_t = x)\big)\Big)$$

$$E\big(N(t)\big) = M(t)$$

$$= \int_0^t E\big(N(t|X_t = x)\big) f(x)dx$$

$$= \int_0^t \Big(1 + E\big(N(t-x)\big)\Big) f(x)dx$$

$$= F(t) + \int_0^t M(t-x)f(x)dx$$

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x)dF(x) \qquad (2.8.1)$$

Persamaan di atas disebut sebagai persamaan renewal yang merupakan integral jenis konvolusi pada persamaan (2.4.5) dapat diselesaikan dengan cara sebagai berikut:

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x)dF(x)$$

$$= F(t) + \int_0^t M(t-x)f(x)dx$$

$$= F(t) + M(t) * f(t)$$

$$\mathcal{L}\{M(t)\} = \mathcal{L}\{F(t)\} + \mathcal{L}\{M(t) * f(t)\}$$

$$M(s) = F(s) + M(s)f(s)$$

$$M(s) = \frac{F(s)}{1 - f(s)}$$

Sehingga diperoleh

$$M(s) = \mathcal{L}^{-1}\{M(s)\} \tag{2.8.2}$$

Ekspektasi kuadrat dari jumlah renewal dinyatakan sebagai,

$$E\left(N^2(t)\right) = M(t^2)$$

$$= \int_0^t E\left(N^2(t|X_1 = x)\right)f(x)dx$$

$$= \int_0^t \left(1 + 2E\left(N(t-x)\right)\right) + E\left(N(t-x)\right)f(x)dx$$

$$= F(t) + 2\int_0^t M(t-x)f(x)dx + \int_0^t M\,(t-x)^2 f(x)dx$$

$$M(t^2) = F(t) + 2M(t)^* f(t) + M(t^2)f(t) \tag{2.8.3}$$

$$\mathcal{L}\{M(t^2)\} = \mathcal{L}\{F(t)\} + 2\mathcal{L}\{M(t)^* f(t)\} + 2\{M(t-x)^2 f(t)\}$$

$$M(s^2) = F(s) + 2M(s)F(s) + M(s^2)f(s)$$

$$\big(1 - f(s)\big)M(s) = F(s) + 2M(s)f(s)$$

$$M(s^2) = \frac{F(s) + 2M(s)f(s)}{1 - f(s)}$$

$$= \frac{F(s) + 2\frac{F(s)}{1 - f(s)}f(s)}{1 - f(s)}$$

$$M(s^2) = \frac{F(s) - F(s)f(s) + 2F(s)f(s)}{\big(1 - f(s)\big)^2}$$

sehingga diperoleh

$$M(t^2) = \mathcal{L}^{-1}\{M(s^2)\} \qquad (2.8.4)$$

I. Ekspektasi Jumlah Renewal

Selain proses renewal, dalam penulisan skripsi ini juga dibahas tentang ekspektasi jumlah renewal. Adapun ulasan materinya adalah sebagai berikut:

Definisi 2.9.1 *Ordinary Renewal* Dua Dimensi

Counting process $\{N(x,y),(x,y)\} \in R_+^2$ adalah suatu *ordinary renewal process* dua dimensi. Dengan R_+^2 adalah bilangan riil positif dalam kuadran positif bidang dua dimensi, jika memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:

1. $N(0,0) = 0$

2. $\{(X_1, Y_1), i \geq 1\}$ adalah urutan variabel acak yang independen dan berdistribusi identik dengan fungsi distribusi bersama $F(x, y)$, dengan $F(x, y) = P(X_1 \leq x, Y_1 \leq y)$.
3. $N(x, y) = \max\left\{n: S_{n_1} \leq x, S_{n_1} \leq y\right\}$, dengan $S_0 = 0$, $S_{n_1} = \sum_{i=1}^{n} X_1$ dan $S_{n_2} = \sum_{i=1}^{n} Y_1$.

(Blische & Murthy, 1994:117).

Ekspektasi jumlah renewal pada garansi dua dimensi $M(x, y)$ pada dasarnya sama dengan penurunan $M(t)$ pada persamaan (2.8.2). Jika X dan Y berturut-turut menyatakan variabel acak untuk umur dan pemakaian produk, maka $M(x, y)$ adalah ekspektasi jumlah renewal yang terjadi pada daerah $[0, X) \times [0, Y)$. Jika kegagalan awal terjadi pada saat $X_1 = u$ dan $Y_1 = v$ maka dengan sifat probabilitas bersyarat (persamaan (2.2.4)) maka ekspektasi jumlah renewal dinyatakan sebagai :

$$E\big(N(x, y|u, v)\big) = \begin{cases} 1 + E\big(N(x-u, y-v)\big), & u \leq x, v \leq y \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad , & u > x, v > y \end{cases}$$

(Blischke & Murthy, 1994: 120).

Maka,

$$M(x, y) = E\big(N(x, y|u, v)\big)$$

$$= \int_0^x \int_0^y E\big(N(x, y|u, v)\big)\, dF(u, v)$$

$$= \int_0^x \int_0^y \Big(1 + E\big(N(x-u, y-v)\big)\Big)\, dF(u, v)$$

$$M(x,y) = F(x,y) + \int_0^x \int_0^y M(x-u, y-v)dF(u,v) \tag{2.9.1}$$

$M(x,y)$ dikenal sebagai fungsi renewal dua dimensi yang nantinya akan sangat berperan penting dalam analisis biaya garansi.

J. Metode Penduga Kemungkinan Maksimum

Dalam pembahasan skripsi ini metode penduga maksimum/*maximum likelihood estimator* (*MLE*) akan digunakan untuk mengestimasi parameter yang bersesuaian dengan fungsi kegagalan. Metode *MLE* ini akan digunakan model ekspektasi biaya garansi.

Definisi 2.10.1 ***Maksimum Likelihood Estimator***

Misal $L(\theta) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$ $\theta \epsilon \Omega$ merupakan fungsi densitas peluang bersama dari $X_1, X_2, \dots, X_n$. Untuk sampel acak $x_1, x_2, \dots, x_n$, nilai $\hat{\theta}$ pada Ω yang memaksimumkan $L(\theta)$ disebut *Maximum Likelihood Estimator (MLE)* dari θ. Jadi $\hat{\theta}$ adalah nilai dari θ yang memenuhi :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \max_{\theta \epsilon \Omega} f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) \tag{2.10.1}$$

(Bain & Engelhandt, 1992: 293).

Jika Ω suatu interval terbuka dan jika $L(\theta)$ mempunyai turunan dan diasumsikan mempunyai nilai maksimum pada Ω.

$$\hat{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$$

$$L(\hat{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\hat{\theta})$$

maka *MLE* adalah penyelesaian dari persamaan

$$\frac{dL(\hat{\theta})}{d\theta_1} = \frac{dL(\hat{\theta})}{d\theta_2} = \cdots = \frac{dL(\hat{\theta})}{d\theta_n} = 0 \qquad (2.10.2)$$

$L(\hat{\theta})$ adalah fungsi monoton naik, jika $\hat{\theta}$ memaksimumkan fungsi *likelihood*, $L(\theta)$, maka $\hat{\theta}$ juga akan memaksimumkan fungsi *log-likelihood*, $ln\left(L(\hat{\theta}\,)\right)$. Sehingga diperoleh :

$$\frac{d\ ln\left(L(\hat{\theta})\right)}{d\theta_1} = \frac{d\ ln\left(L(\hat{\theta})\right)}{d\theta_2} = \cdots = \frac{d\ ln\left(L(\hat{\theta})\right)}{d\theta_n} = 0 \qquad (2.10.3)$$

dengan syarat cukup:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{d^{\,2} ln\left(L(\hat{\theta})\right)}{d{\theta_1}^2} & \frac{d^{\,2} ln\left(L(\hat{\theta})\right)}{d\theta_1 d\theta_2} & \cdots. & \frac{d^{\,2} ln\left(L(\hat{\theta})\right)}{d\theta_1 d\theta_m} \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{d^{\,2} ln\left(L(\hat{\theta})\right)}{d\theta_1 d\theta_m} & \cdots & \cdots & \frac{d^{\,2} ln\left(L(\hat{\theta})\right)}{d{\theta_m}^2} \end{pmatrix}$$

merupakan matrik definit negatif untuk $\hat{\theta}$. Untuk menentukan syarat cukup fungsi *log-lilelihood* digunakan definisi marik definit negatif. Adapun definisinya sebagai berikut,

Definisi 2.10.2 Matrik definit negatif

Matrik simetrik **A** dan bentuk kuadrat $\mathbf{x}^{\mathbf{t}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ disebut matrik definit negatif jika $\mathbf{x}^{\mathbf{t}}\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$ untuk $\mathbf{x} \neq 0$ dan hasil kali tiap submatrik utamanya adalah negatif (Anton,1987:320).

BAB III

PEMBAHASAN

A. Garansi dengan kebijakan *nonrenewing Free Replacement Warranty*

Kebijakan garansi yang banyak diterapkan oleh perusahaan modern adalah kebijakan *nonrenewing Free Replacement Warranty*. Kebijakan garansi ini sebenarnya cukup dikenal oleh masyarakat luas, tetapi sedikit sekali yang mengetahui akan pendefinisian salah satu layanan purna jual ini. Penerapan *Free Replacement Warranty* (*FRW*) yang banyak diketahui oleh konsumen seperti, pembelian printer dengan garansi enam bulan, garansi 3 tahun atau pemakaian 45.000 km untuk pembelian sepeda motor, garansi 1 tahun untuk pembelian handphone dan sebagainya.

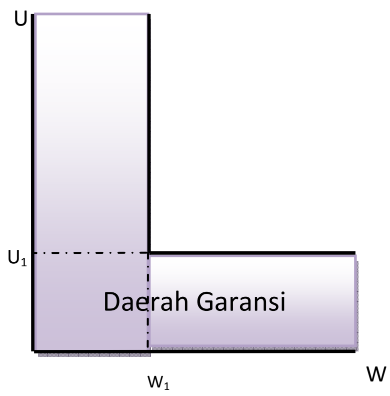
Kebijakan *nonrenewing Free Replacement Warranty* mengharuskan suatu perusahaan melakukan rektifikasi berupa perbaikan *(reparation)* atau penggantian produk *(replacement)* tanpa adanya pungutan biaya yang dikeluarkan oleh konsumen. Biaya yang ditanggung oleh perusahaan meliputi biaya tenaga kerja *(labor cost)*, biaya pergantian komponen *(replacement cost)* dan biaya garansi itu sendiri.

Rektifikasi komponen dari suatu produk dalam kebijakan garansi ini akan dilakukan dengan kebijakan polis minimum. Polis minimum merupakan polis standar yang banyak digunakan oleh perusahaan untuk penawaran garansi. Polis ini dilakukan dengan syarat jika terjadi kegagalan fungsional (klaim) sampai batas waktu *W* (umur produk) atau pemakaian *U* yang telah ditetapkan (mana yang terpenuhi lebih dahulu). Dewasa ini, perusahaan mulai menerapkan polis maksimum yang merupakan pengembangan dari polis minimum. Polis maksimum dilakukan dengan syarat jika terjadi kegagalan fungsional (klaim) sampai batas waktu maksimum *W* (umur produk) dan pemakaian maksimum *U*.

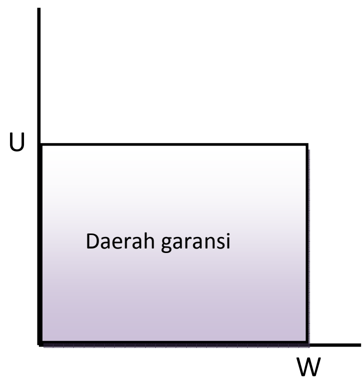
Kebijakan *Free Replacement Warranty* (*FRW*), pada polis maksimum konsumen memperoleh tawaran garansi dengan batas waktu maksimum *W* dan pemakaian maksimum *U*. Konsumen akan lebih diuntungkan dengan polis maksimum karena garansi suatu produk akan berakhir pada saat umur produk telah mencapai *W* dan pemakaian item telah mencapai *U* (garansi berakhir sampai kedua syarat terpenuhi). Sedangkan perusahaan akan lebih diuntungkan dengan polis minimum, karena garansi yang diberikan ke konsumen akan berakhir apabila salah satu syarat (waktu atau penggunaan) telah terpenuhi.

Penentuan tindakan yang dilakukan oleh perusahaaan mengenai produk/komponen yang mengalami kegagalan fungsional akan diperbaiki *(repairment)* ataupun diganti dengan yang baru *(replacement)*, tergantung dari sifat produk/komponen yang bersangkutan. Sifat dari suatu produk dikategorikan menjadi dua yaitu dapat diperbaiki (*repaireable*) dan tidak dapat diperbaiki (*nonrepaireable*).

Pada kebijakan garansi yang tidak melibatkan pengembangan produk pada item tunggal terdapat kebijakan *nonrenewing*. Hal itu berarti produk yang telah menempuh servis klaim akan memperoleh masa garansi dengan periode [x,*W*)×[y,*U*), yaitu sisa masa garansi awal. Sifat kebijakan *nonrenewing* dilakukan apabila produk mengalami kegagalan fungsional pertama kali pada saat mencapai umur *x* dan pemakaian *y*, maka produk yang telah direktifikasi akan memperoleh garansi baru sampai batas umur produk (*W*-*x*) dan pemakaian (*U*-*y*), yaitu sisa masa garansi saat pembelian. Berikut adalah gambar daerah garansi dua dimensi,



Gambar 2 Daerah Garansi Dua Dimensi untuk Polis Maksimum



Gambar 3 Daerah Garansi Dua Dimensi untuk Polis Minimum

Setiap terjadi pengajuan klaim yang dikarenakan perfomansi produk tidak memuaskan atau tidak sesuai yang dipersyaratkan, jika klaim valid maka produsen akan mengeluarkan biaya garansi. Selain biaya garansi, produsen harus mengeluarkan biaya tambahan berupa biaya penggantian komponen *(replacement cost)* atau biaya tenaga kerja *(labor cost)* untuk perbaikan item. Secara umum total biaya garansi yang harus dikeluarkan produsen untuk setiap unit penjualan tidak dapat diperkirakan *(unpredictable)*. Hal ini disebabkan kegagalan produk bersifat acak dan cara pemakaian produk oleh masing-masing konsumen berbeda secara signifikan.

B. Asumsi dalam Analisis Garansi

Beberapa asumsi yang digunakan untuk produk kompleks atau banyak komponen yang gagal dikarenakan satu/sedikit komponen yang gagal diantaranya:

1. Pengajuan klaim hanya dapat diterima untuk kegagalan komponen pertama kali (perbaikan dilakukan sedemikian sehingga kemungkinan terjadinya kegagalan fungsional kedua dan seterusnya sangat kecil*/instantaneously*)
2. Kegagalan yang terjadi menyebabkan adanya klaim garansi
3. Semua kegagalan adalah valid
4. Waktu perbaikan yang relatif pendek dibandingkan dengan rata-rata antar kegagalan *(mean time between failure)* diasumsikan kecil atau dapat diabaikan.

Sedangkan beberapa asumsi untuk menentukan ekspektasi biaya garansi pada penelitian ini diantaranya:

1. Servis klaim dilakukan dengan segera *(instantaneously)* setelah terjadinya kegagalan.
2. Komponen yang memiliki kerusakan diganti dengan komponen yang baru *(replacement),* jika tidak bisa diperbaiki.
3. Biaya selain biaya tenaga kerja (*labor cost)* dan biaya pergantian (*replacement cost)* tidak termasuk dalam komponen pemodelan biaya garansi.
4. Biaya servis klaim diasumsikan konstan.

5. Pemodelan kegagalan didasarkan pada data historis tanpa mempertimbangkan beberapa faktor penyebab kegagalan.

C. Pemodelan Kegagalan Item dengan Pendekatan Dua Dimensi

Estimasi biaya garansi selalu diperlukan oleh perusahaan untuk menentukan harga jual produk. Hal itu dikarenakan biaya garansi merupakan bagian dari harga jual. Untuk mendapatkan estimasi biaya garansi dibutuhkan suatu model yang dapat merepresentasikan kegagalan item dengan baik. Kegagalan suatu item dipengaruhi oleh umur (X), dan pemakaian (Y) dari suatu produk. Kedua faktor ini akan digunakan dalam analisis biaya garansi. Selanjutnya keterlibatan dua faktor diperlukan untuk mendapatkan pemodelan kegagalan item yang akurat.

Pemodelan kegagalan item dalam garansi dua dimensi dimodelkan melalui dua metode. Pertama, memodelkan kegagalan suatu item dengan pendekatan satu faktor, yaitu memandang suatu kegagalan item pada berdasarkan dimensi waktu saja. Sedangkan faktor penggunaan *(usage)* diasumsikan berbanding lurus dengan waktu pemakaian. Kedua, model garansi dengan melibatkan dua faktor yakni, memandang suatu kegagalan item sebagai titik pandang dua dimensi, yaitu umur dan pemakaian *(usage)*. Pendekatan dua dimensi dengan melibatkan kedua faktor ini yang selanjutnya akan diterapkan dalam analisa berikutnya.

Misalkan (x, y) menyatakan umur dan pemakaian item pada saat terjadi kegagalan awal. X dan Y dimodelkan sebagai variabel random non negatif dengan fungsi distribusi bersama $F(x,y)$ yang didefinisikan sebagai $F(x, y) = P(X, \leq x, Y, \leq y)$.

Pada analisis garansi bentuk distribusi yang sering digunakan adalah distribusi eksponensial, pareto, weibull, beta dan gamma. Fungsi distribusi yang akan digunakan dalam analisis garansi (*warranty)* adalah distribusi bivariat pareto, sebagaimana yang dikemukakan oleh Blischke & Murthy (1994:118). Suatu variabel acak kontinu X dan Y dengan X,Y saling bebas dikatakan berdistribusi bivariat pareto dengan parameter θ_1 , $\theta_2 > 0$ dan $a >$ 0, jika memiliki fungsi padat peluang,

$$f(x, y) = \frac{a(a+1)}{\theta_1 \ \theta_2}\left(\frac{1}{\theta_1}x + \frac{1}{\theta_2}y - 1\right)^{-(a+2)}$$

dengan $a > 1$, $x > 0$, $\theta_1 > 0$, $y > 0$ dan $\theta_2 > 0$.

Pada skripsi ini, akan digunakan fungsi hazard untuk menentukan besarnya laju kegagalan suatu item pada saat t pada tiap komponen penyusun produk dari persamaan 2.6.15, yaitu nilai kegagalan *(hazard rate)* dari distribusi bivariat pareto.

$$h(x, y) = \frac{f(x, y)}{\bar{F}(x, y)}$$

$$= \frac{\frac{a(a+1)}{\theta_1 \ \theta_2}\left(\frac{1}{\theta_1}x + \frac{1}{\theta_2}y - 1\right)^{-(a+2)}}{1 - \left(\frac{1}{\theta_1}x + \frac{1}{\theta_2}y - 1\right)^{-a}} \tag{3.2.1}$$

Sedangkan fungsi hazard kumulatif dari distribusi bivariat pareto adalah:

$$H(u,w) = \int_0^u \int_0^w h(x,y)dxdy$$

$$= \int_0^w \int_0^u \frac{\frac{a(a+1)}{\theta_1\ \theta_2}\left(\frac{1}{\theta_1}x + \frac{1}{\theta_2}y - 1\right)^{-(a+2)}}{1 - \left(\frac{1}{\theta_1}x + \frac{1}{\theta_2}y - 1\right)^{-a}}$$

D. Estimasi Parameter dengan *Metode Maximum Likelihood Estimator*

Metode penduga maksimum/*maximum likelihood estimator* (*MLE*) akan digunakan untuk mengestimasi parameter yang bersesuaian dengan fungsi kegagalan. Berdasarkan persamaan (2.6.11) maka fungsi reliabilitas untuk komponen ke-1 $R_1(w,u)$ yang bersesuaian dengan fungsi hazard (3.2.1) adalah

$$R(w,u) \ = e^{-H(x,y)}$$

$$R_1(w,u) = \exp\left\{-\int_0^u \int_0^w h_1(x,y)dxdy\right\}$$

$$= \exp\left\{-\int_0^u \int_0^w \frac{\frac{a(a+1)}{\theta_1\ \theta_2}\left(\frac{1}{\theta_1}x + \frac{1}{\theta_2}y - 1\right)^{-(a+2)}}{1 - \left(\frac{1}{\theta_1}x + \frac{1}{\theta_2}y - 1\right)^{-a}} dxdy\right\}$$

$$= \exp\left\{\ln\left[1 - \left(\frac{1}{\theta_1}w + \frac{1}{\theta_2}u - 1\right)^{-a}\right]\right\}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{\theta_1} w + \frac{1}{\theta_2} u - 1\right)^{-a}$$

Sehingga fungsi densitas kegagalan berdasarkan persamaan (2.6.10) dan persamaan (2.6.13) tentang hubungan fungsi densitas kegagalan, nilai kegagalan dan fungsi reliabilitas adalah:

$$h_1(w,u) = \frac{f_1(w,u)}{R_1(w,u)}$$

$$f_1(w,u) = h_1(w,u) \text{ x } R_1(w,u)$$

$$= \frac{\frac{a(a+1)}{\theta_1\ \theta_2}\left(\frac{1}{\theta_1} w + \frac{1}{\theta_2} u - 1\right)^{-(a+2)}}{1 - \left(\frac{1}{\theta_1} w + \frac{1}{\theta_2} u - 1\right)^{-a}}\ x\ \left(1 - \left(\frac{1}{\theta_1} w + \frac{1}{\theta_2} u - 1\right)^{-a}\right)$$

$$= \frac{a(a+1)}{\theta_1\ \theta_2}\left(\frac{1}{\theta_1} w + \frac{1}{\theta_2} u - 1\right)^{-(a+2)} \tag{3.4.2}$$

Dengan demikian, fungsi distribusi kegagalan dan fungsi reliabilitas yang bersesuaian dengan persamaan (2.5.1) dapat dinyatakan sebagai

$$F_1 = 1 - R_1(w,u)$$

$$= 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{\theta_1} w + \frac{1}{\theta_2} u - 1\right)^{-a}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\theta_1} w + \frac{1}{\theta_2} u - 1\right)^{-a}$$

Estimasi parameter didasarkan pada data dan *n* unit produk, maka fungsi likelihood untuk komponen ke-i yang bersesuaian dengan model kegagalan (3.2.1) diatas adalah

$$L(\hat{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f_i(w;u) \quad dengan\,\hat{\theta} = a, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$$

Substitusikan ke dalam persamaan (3.4.2) sehingga

$$L_1(\hat{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{a(a+1)}{\theta_1\ \theta_2} \left(\frac{1}{\theta_1} w_i + \frac{1}{\theta_2} u_i - 1 \right)^{-(a+2)} \right) \tag{3.4.4}$$

Dengan *w* dan *u* berturut-turut menyatakan umur dan pemakaian komponen ke-1 untuk produk ke-i. Bentuk logaritma persamaan (3.4.4) adalah

$$ln\, L_1(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{a(a+1)}{\theta_1\ \theta_2} \left(\frac{1}{\theta_1} w_i + \frac{1}{\theta_2} u_i - 1 \right)^{-(a+2)} \right) \tag{3.4.5}$$

Estimasi parameter $a, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ diperoleh dengan cara memaksimalkan nilai dari persamaan (3.4.5), sebagai berikut:

$$\frac{d\, ln\left(L_1(\hat{\theta})\right)}{d\theta_1} = \frac{a+2}{{\theta_1}^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{\left(\frac{1}{\theta_1} w_i + \frac{1}{\theta_2} u_i - 1\right)} - \frac{n}{\theta_1} \tag{3.4.6}$$

$$\frac{d\, ln\left(L_1(\hat{\theta})\right)}{d\theta_2} = \frac{a+2}{{\theta_2}^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{\left(\frac{1}{\theta_1} w_i + \frac{1}{\theta_2} u_i - 1\right)} - \frac{n}{\theta_2} \tag{3.4.7}$$

Sehingga

$$\frac{d\ ln\left(L(\hat{\theta})\right)}{d\theta_1} = \frac{d\ ln\left(L(\hat{\theta})\right)}{d\theta_2} = 0$$

$$(a+2)\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{\left(\frac{1}{\theta_1}w_i + \frac{1}{\theta_2}u_i - 1\right)} - n\theta_1 = (a+2)\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{\left(\frac{1}{\theta_1}w_i + \frac{1}{\theta_2}u_i - 1\right)} - n\theta_2 = 0$$

$$(a+2)\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i - u_i}{\left(\frac{1}{\theta_1}w_i + \frac{1}{\theta_2}u_i - 1\right)} - n(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

Syarat cukup memaksimalkan fungsi likelihood $\ln\ (L_1(\hat{\theta}))$ adalah

$$H = \begin{pmatrix} \frac{d^{\,2} ln\left(L(\hat{\theta})\right)}{d{\theta_1}^2} & \frac{d^{\,2} ln\left(L(\hat{\theta})\right)}{d\theta_1 d\theta_2} \\ \frac{d^{\,2} ln\left(L(\hat{\theta})\right)}{d\theta_1 d\theta_2} & \frac{d^{\,2} ln\left(L(\hat{\theta})\right)}{d{\theta_2}^2} \end{pmatrix}$$

merupakan matrik definit negatif untuk $\hat{\theta}$, dengan

$$\frac{d^{\,2} ln\left(L(\hat{\theta})\right)}{d{\theta_1}^2} = \frac{a+2}{{\theta_1}^4}\sum_{i=1}^{n} \frac{{w_i}^2}{\left(\frac{1}{\theta_1}W_i + \frac{1}{\theta_2}U_i - 1\right)^2} - \frac{n}{{\theta_1}^2} \tag{3.4.8}$$

$$\frac{d^{\,2} ln\left(L(\hat{\theta})\right)}{d{\theta_2}^2} = \frac{a+2}{{\theta_2}^4}\sum_{i=1}^{n} \frac{{u_i}^2}{\left(\frac{1}{\theta_1}w_i + \frac{1}{\theta_2}u_i - 1\right)^2} - \frac{n}{{\theta_2}^2} \tag{3.4.9}$$

$$\frac{d^{\,2} ln\left(L(\hat{\theta})\right)}{d\theta_1 d\theta_2} = \frac{a+2}{{\theta_1}^2{\theta_2}^2}\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i u_i}{\left(\frac{1}{\theta_1}w_i + \frac{1}{\theta_2}u_i - 1\right)^2} \tag{3.4.10}$$

Dalam skripsi ini akan digunakan *software* MATLAB untuk mencari estimasi dengan pendekatan komputasional. Nilai dari pendekatan ini akan digunakan untuk perhitungan ekspetasi biaya garansi dalam bab selanjutnya.

E. Model Garansi Dua Dimensi

Pada analisis model garansi ini, akan dibahas mengenai ekspektasi jumlah klaim, variansi jumlah klaim dan ekspektasi biaya garansi. Adapun ulasannya sebagai berikut.

E.1. Ekspektasi Jumlah Klaim (*Renewal*)

Setiap terjadi pengajuan klaim yang dikarenakan perfomansi produk tidak memuaskan atau tidak sesuai yang dipersyaratkan, maka produsen akan mengeluarkan biaya garansi. Oleh karena itu akan dibahas mengenai ekspektasi jumlah klaim dari suatu produk jika klaim masih dinyatakan valid.

Misal (X_i,Y_i) menyatakan umur dan pemakaian item pada saat terjadi kegagalan dengan fungsi distribusi bersama

$$F(x,y) = P(X_i \leq x, Y_i \leq y)$$

diberikan

$$S_n{}^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ dan } S_n{}^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Dengan S_n adalah waktu terjadinya renewal ke-n. Dan $\{Xi; i \geq 1\}$ adalah variabel acak dengan fungsi distribusi $F_X(x) = F(x,\infty)$, yaitu fungsi distribusi marjinal dari X. Sedangkan $\{Y_i;\ i \geq 1\}$didefinisikan sebagai proses renewal (perbaikan) yang lain dengan fungsi distribusi $F_Y(y) = F(\infty, y)$, yaitu fungsi distribusi marjinal dari Y.

a. Ekspektasi jumlah klaim polis minimum

Misalkan $N(x,y)$ merupakan jumlah renewal (perbaikan) yang berakhir pada [0,x)×[0,y) dalam masa garansi polis minimum, dinyatakan dengan

$$N(x,y) = \min\left\{{N_x}^{(1)}, {N_y}^{(2)}\right\} \tag{3.5.1}$$

dengan ${N_x}^{(1)} = \max\{n: {S_n}^{(1)}\}$ dan ${N_y}^{(2)} = \max\{n: {S_n}^{(2)}\}$

Hal tersebut dikarenakan polis minimum dilakukan dengan syarat jika terjadi kegagalan fungsional (klaim) sampai batas waktu *w* (umur produk) atau pemakaian *u* yang telah ditetapkan (mana yang terpenuhi lebih dahulu).

Pada analisis garansi dua dimensi, misalkan $x = w$ dan $y = u$ maka jumlah renewal polis minimum dilambangkan dengan $N(W,U)$.

Penurunan rumus (2.8.1) dengan $x = w$ dan $y = u$, diperoleh ekspektasi jumlah renewal sebagai berikut;

$E(N) = M(w,u)$ dengan $M(w,u)$ diperoleh dari

$$M(w,u) = F(w,u) + \int_0^w \int_0^u M(w-s, u-t)dF(s,t) \tag{3.5.2}$$

Dalam analisis garansi ini telah dipilih distribusi bivariat Pareto untuk membahasnya, maka ekspektasi jumlah renewal dalam daerah garansi adalah:

$$E(N) = M(w,u)$$

dengan menggunakan penyelesaian integral jenis konvolusi pada persamaan (2.8.2) , transformasi laplace pada persamaan (2.4.1) dan penurunan rumus pada lampiran 11 diperoleh

$$E(N) = \mathcal{L}^{-1}\{M(s,t)\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s,t)}{1-f(s,t)}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{abs\left(\frac{\int_0^{\infty} e^{-sx-ty}\left(\frac{1}{\theta_1}x+\frac{1}{\theta_2}y-1\right)^{-a} dxdy}{1-\int_0^{\infty} e^{-st-ty}\frac{a(a+1)}{\theta_1\theta_2}\left(\frac{1}{\theta_1}x+\frac{1}{\theta_2}y-1\right)^{-(a+1)} dxdy}\right)\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{abs\left(\frac{(-1)^{-a}\frac{(\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)+a(\theta_2 t-1)a\theta_1 s}{st(\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)}}{1-\frac{a(a+1)(-1)^{-a}}{(\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)}}\right)\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a\theta_1 s+a(\theta_2 t-1)+(\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)}{st\big((\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)-(-1)^{-a}a(a+1)\big)}\right\} \qquad (3.5.3)$$

b. Ekspektasi jumlah klaim polis maksimum

Dengan mengembangkan rumus $N(x,y)$ pada polis minimum, maka jumlah renewal dalam masa garansi pada polis maksimum dilambangkan dengan $\widetilde{N}(W,U)$ yang merupakan hubungan antara proses perbaikan univariat ${N_x}^{(1)}$ dan ${N_y}^{(2)}$ dan dapat dinyatakan dengan:

$$\widetilde{N} = \max\left\{{N_x}^{(1)}, {N_y}^{(2)}\right\} \qquad (3.5.4)$$

dengan diketahui

$$\max\left\{N_x{}^{(1)}, N_y{}^{(2)}\right\} = N_x{}^{(1)} + N_y{}^{(2)} - \min\left\{N_x{}^{(1)}, N_y{}^{(2)}\right\}$$

$$= N_x{}^{(1)} + N_y{}^{(2)} - N(x,y)$$

Hal tersebut dikarenakan polis maksimum dilakukan dengan syarat jika terjadi kegagalan fungsional (klaim) sampai batas waktu *w* (umur produk) dan pemakaian *u* yang telah ditetapkan (garansi berakhir sampai kedua syarat terpenuhi).

Sehingga persamaan (3.5.3) dapat ditulis dalam bentuk

$$\widetilde{N} = N_x{}^{(1)} + N_y{}^{(2)} - N(x,y) \tag{3.5.5}$$

Dengan $x = w$ dan $y = u$ dan penurunan rumus pada persamaan (2.8.1) diperoleh ekspektasi jumlah kegagalan dalam masa garansi polis maksimum sebagai berikut:

$$E(\widetilde{N}) = M(w) + M(u) - M(w,u)$$

dimana $M(w), M(u)$ dan $M(w,u)$ diperoleh dari:

$$M(w) = F(w) + \int_0^w M(w-s)dF(s) \tag{3.5.6}$$

$$M(u) = F(u) + \int_0^u M(u-t)dF(t) \tag{3.5.7}$$

$$M(w,u) = F(w,u) + \int_0^w \int_0^u M(w-s, u-t)dF(s,t) \tag{3.5.8}$$

Dalam analisis garansi ini telah dipilih distribusi bivariat Pareto untuk membahasnya, maka ekspektasi jumlah kegagalan dalam daerah garansi adalah:

$$E(\tilde{N}) = M(w) + M(u) - M(w,u) \ ,$$

Dengan menggunakan penyelesaian integral jenis konvolusi pada persamaan (2.8.2), transformasi laplace pada persamaan (2.4.1) dan penurunan rumus pada lampiran 11 diperoleh

$$E(\tilde{N}) = \mathcal{L}^{-1}\{M(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{M(t)\} - \mathcal{L}^{-1}\{M(s,t)\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{1-f(s)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(t)}{1-f(t)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s,t)}{1-f(s,t)}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{abs\left(\frac{\int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{1}{\theta_1}x-1\right)^{-a}dx}{1-\int_0^\infty e^{-st}\frac{a}{\theta_1}\left(\frac{1}{\theta_1}x-1\right)^{-(a+1)}dx}\right)\right\}$$

$$+\mathcal{L}^{-1}\left\{abs\left(\frac{\int_0^\infty e^{-ty}\left(\frac{1}{\theta_2}y-1\right)^{-a}dy}{1-\int_0^\infty e^{-ty}\frac{a}{\theta_1}\left(\frac{1}{\theta_2}y-1\right)^{-(a+1)}dy}\right)\right\}$$

$$-\mathcal{L}^{-1}\left\{abs\left(\frac{\int_0^\infty e^{-sx-ty}\left(\frac{1}{\theta_1}x+\frac{1}{\theta_2}y-1\right)^{-a}dxdy}{1-\int_0^\infty e^{-st-ty}\frac{a(a+1)}{\theta_1\theta_2}\left(\frac{1}{\theta_1}x+\frac{1}{\theta_2}y-1\right)^{-(a+1)}dxdy}\right)\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{abs\left(\frac{(-1)^{-a+1}\frac{(\theta_1 s-1)+a}{s(\theta_1 s-1)}}{1-\frac{a(-1)^{-a+1}}{\theta_1 s-1}}\right)\right\}$$

$$+\mathcal{L}^{-1}\left\{abs\left(\frac{(-1)^{-a+1}\frac{(\theta_2 t-1)+a}{t(\theta_2 t-1)}}{1-\frac{a(-1)^{-a+1}}{\theta_2 t-1}}\right)\right\}$$

$$-\mathcal{L}^{-1}\left\{abs\left(\frac{(-1)^{-a}\frac{(\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)+a(\theta_2 t-1)a\theta_1 s}{st(\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)}}{1-\frac{a(a+1)(-1)^{-a}}{(\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)}}\right)\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(\theta_1 s-1)+a}{s(\theta_1 s-1+a(-1)^{-a}}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(\theta_2 t-1)+a}{t(\theta_2 t-1+a(-1)^{-a}}\right\}$$

$$-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a\theta_1 s+a(\theta_2 t-1)+(\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)}{st\big((\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)-(-1)^{-a}a(a+1)\big)}\right\} \qquad (3.5.9)$$

E.2. Variansi Jumlah Klaim

Setelah memodelkan ekspektasi jumlah klaim, selanjutnya akan dimodelkan variansi jumlah klaim.

a. Variansi jumlah klaim pada garansi polis minimum

Dari nilai N pada persamaan (3.5.1) diperoleh N^2 sebagai berikut,

$$N^2 = \big(N(x,y)\big)^2$$

$$E(N^2) = E\left(\big(N(x,y)\big)^2\right)$$

$$= M(w,u)^2$$

Dengan menggunakan penyelesaian integral jenis konvolusi pada pada persamaan (2.8.2) dan (2.8.4) $E(N^2)$ serta penurunan rumus pada lampiran 11 diperoleh

$E(N^2) = M(w,u)^2$

$$E(N^2) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s,t) + F(s,t)f(s,t)}{\left(1 - f(s,t)\right)^2}\right\}$$

$$E(N^2) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{(-1)^a\left((\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1) + a(\theta_2 t - 1) + a\theta_1 s\right)}{st(\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)} + \frac{\left((\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1) + a(\theta_2 t - 1) + a\theta_1\right)a(a+1)}{st(\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)}}{\left(1 - \frac{a(a+1)(-1)^a}{(\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)}\right)^2}\right) \tag{3.5.10}$$

Variansi diperoleh dengan cara memasukkan nilai $E(N)$ pada persamaan (3.5.3) dan $E(N^2)$ pada persamaan (3.5.10) ke dalam rumus variansi sebagai berikut:

$$Var\ (N) = E(N^2) - \left(E(N)\right)^2 \tag{3.5.11}$$

$$Var\ (N) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{(-1)^a\left((\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1) + a(\theta_2 t - 1) + a\theta_1 s\right)}{st(\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)} + \frac{\left((\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1) + a(\theta_2 t - 1) + a\theta_1\right)a(a+1)}{st(\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)}}{\left(1 - \frac{a(a+1)(-1)^a}{(\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)}\right)^2}\right) -$$

$$\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a\theta_1 s + a(\theta_2 t - 1) + (\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)}{st\left((\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1) - (-1)^{-a}a(a+1)\right)}\right\}\right)^2$$

b. Variansi jumlah klaim pada garansi polis maksimum

Dari nilai $\widetilde{N}$ pada persamaan (3.5.5) diperoleh $\widetilde{N}^2$ sebagai berikut

$$\widetilde{N}^2 = \left(\left(N_x{}^{(1)} + N_y{}^{(2)} - N(x,y)\ \right)\right)^2$$

$$= \left(N_x{}^{(1)} + N_y{}^{(2)}\right)^2 - 2\left(N_x{}^{(1)} + N_y{}^{(2)}\right)N(x,y) + (N(x,y))^2$$

$$= \left(N_x{}^{(1)}\right)^2 + 2N_x{}^{(1)}N_y{}^{(2)} + \left(N_y{}^{(2)}\right)^2 - 2\left(N_x{}^{(1)} + N_y{}^{(2)}\right)N(x,y)$$

$$+ (N(x,y))^2 \qquad (3.5.12)$$

$$E\left(\widetilde{N}^2\right) = E\left(\left(N_x{}^{(1)}\right)^2 + 2N_x{}^{(1)}N_y{}^{(2)} + \left(N_y{}^{(2)}\right)^2 - 2\left(N_x{}^{(1)} + N_y{}^{(2)}\right)N(x,y)\right.$$

$$\left. + (N(x,y))^2\right)$$

$$= M(w^2) + 2M(w)M(u) + M(u^2) - 2\big(M(w) + M(u)\big)M(w,u)$$

$$+ M(w,u)^2 \qquad (3.5.13)$$

Dengan menggunakan penyelesaian integral jenis konvolusi pada pada persamaan (2.8.2) dan (2.8.4) $E\left(\widetilde{N}^2\right)$ serta penurunan rumus pada lampiran 11 diperoleh

$$E\left(\widetilde{N}^2\right) = M(w^2) + 2M(w)M(u) + M(u^2) - 2\big(M(w) + M(u)\big)M(w,u)$$

$$+ M(w,u)^2$$

$$E\left(\widetilde{N}^2\right) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s) + F(s)f(s)}{\left(1 - f(s)\right)^2}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{1 - f(s)}\right\}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(t)}{1 - f(t)}\right\}$$

$$+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(t) + F(t)f(t)}{\left(1 - f(t)\right)^2}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{1 - f(s)}\right\}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s,t)}{1 - f(s,t)}\right\}$$

$$-2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(t)}{1 - f(t)}\right\}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s,t)}{1 - f(s,t)}\right\}$$

$$+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s,t)+F(s,t)f(s,t)}{\left(1-f(s,t)\right)^2}\right\} \tag{3.5.14}$$

$$E\left(\widetilde{N}^2\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{(-1)^a\left({\theta_1}^2s^2-2\theta_1 s+1+a\theta_1 s-a\right)-a\theta_1 s+a-a^2}{s(\theta_1 s(-1)^a-(-1)^a+a)^2}\right)$$

$$+2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(\theta_1 s-1)+a}{s(\theta_1 s-1-a(-1)^{a+1})}\right)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(\theta_2 t-1)+a}{t(\theta_2 t-1-a(-1)^{a+1})}\right)$$

$$+\mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{(-1)^a\left({\theta_2}^2t^2-2\theta_2 t+1+a\theta_2 t-a\right)-a\theta_2 t+a-a^2}{t(\theta_2 t(-1)^a-(-1)^a+a)^2}\right)$$

$$-2\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(\theta_1 s-1)+a}{s(\theta_1 s-1-a(-1)^{a+1})}\right)\right.$$

$$\left.\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a\theta_1 s+a(\theta_2 t-1)+(\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)}{st\left((\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)-(-1)^a a(a+1)\right)}\right)\right)$$

$$-2\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(\theta_1 t-1)+a}{t(\theta_1 t-1-a(-1)^{a+1})}\right)\right.$$

$$\left.\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a\theta_1 s+a(\theta_2 t-1)+(\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)}{st\left((\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)-(-1)^a a(a+1)\right)}\right)\right)$$

$$+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{(-1)^a\left((\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)+a(\theta_2 t-1)+a\theta_1 s\right)}{st(\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)}+\frac{\left((\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)+a(\theta_2 t-1)+a\theta_1\right)a(a+1)}{st(\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)}}{\left(1-\frac{a(a+1)(-1)^a}{(\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)}\right)^2}\right) \tag{3.5.15}$$

Sehingga diperoleh variansi dengan memasukkan nilai $E\left(\widetilde{N}\right)$ pada persamaan (3.5.9) dan $E\left(\widetilde{N}^2\right)$ pada persamaan (3.5.15) ke dalam rumus variansi sebagai berikut:

$$Var\,(\widetilde{N}) = E\left(\widetilde{N}^2\right) - \left(E(\widetilde{N})\right)^2 \tag{3.5.16}$$

$$Var\,\left(\widetilde{N}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{(-1)^a\left({\theta_1}^2s^2 - 2\theta_1 s + 1 + a\theta_1 s - a\right) - a\theta_1 s + a - a^2}{s(\theta_1 s(-1)^a - (-1)^a + a)^2}\right)$$

$$+2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(\theta_1 s - 1) + a}{s(\theta_1 s - 1 - a(-1)^{a+1})}\right)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(\theta_2 t - 1) + a}{t(\theta_2 t - 1 - a(-1)^{a+1})}\right)$$

$$+\mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{(-1)^a\left({\theta_2}^2t^2 - 2\theta_2 t + 1 + a\theta_2 t - a\right) - a\theta_2 t + a - a^2}{t(\theta_2 t(-1)^a - (-1)^a + a)^2}\right)$$

$$-2\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(\theta_1 s - 1) + a}{s(\theta_1 s - 1 - a(-1)^{a+1})}\right)\right.$$

$$\left.\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a\theta_1 s + a(\theta_2 t - 1) + (\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)}{st\left((\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1) - (-1)^a a(a+1)\right)}\right)\right)$$

$$-2\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(\theta_1 t - 1) + a}{t(\theta_1 t - 1 - a(-1)^{a+1})}\right)\right.$$

$$\left.\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a\theta_1 s + a(\theta_2 t - 1) + (\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)}{st\left((\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1) - (-1)^a a(a+1)\right)}\right)\right)$$

$$+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\dfrac{(-1)^a\left((\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1) + a(\theta_2 t - 1) + a\theta_1 s\right)}{st(\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)} + \dfrac{\left((\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1) + a(\theta_2 t - 1) + a\theta_1\right)a(a+1)}{st(\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)}}{\left(1 - \dfrac{a(a+1)(-1)^a}{(\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)}\right)^2}\right)$$

$$-\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(\theta_1 s-1)+a}{s(\theta_1 s-1+a(-1)^{-a}}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(\theta_2 t-1)+a}{t(\theta_2 t-1+a(-1)^{-a}}\right\}\right.$$

$$\left.-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a\theta_1 s+a(\theta_2 t-1)+(\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)}{st\big((\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)-(-1)^{-a}a(a+1)\big)}\right\}\right)^2$$

E.3. Ekspektasi Biaya Garansi

Nilai ekspektasi biaya garansi suatu produk digunakan untuk menentukan biaya garansi yang dimasukkan ke dalam harga jual. Adapun ulasannya sebagai berikut.

a. Ekspektasi biaya garansi polis minimum

Ekspektasi biaya garansi produk yang dijual dengan polis minimum dinyatakan sebagai:

$$E\big(C_s(w,u)\big)=C_s(M(w,u))$$

$$=C_s(E(N)) \qquad (3.5.17)$$

C_s menyatakan rata-rata biaya yang harus dikeluarkan produsen untuk merektifikasi produk yang mengalami kegagalan.

b. Ekspektasi biaya garansi polis maksimum

Ekspektasi biaya garansi produk yang dijual dengan polis minimum dinyatakan sebagai:

$$E\big(C_s(W,U)\big)=C_s(M(w)+M(u)-M(w,u))$$

$$=C_s(E(\widetilde{N})) \qquad (3.5.18)$$

C_s menyatakan rata-rata biaya yang harus dikeluarkan produsen untuk merektifikasi produk yang mengalami kegagalan.

F. Penerapan Model Ekspektasi Garansi Dua Dimensi Polis Minimum

Salah satu sifat produk adalah daya hidup yang semakin menurun sehingga akan terjadi kegagalan fungsional. Kegagalan fungsional akan semakin meningkat seiring dengan lamanya waktu dan pemakaian produk tersebut. Suatu perusahaan akan memberikan garansi apabila terjadi kegagalan fungsional dalam periode tertentu. Hal tersebut yang menjadi alasan distribusi bivariat pareto digunakan untuk analisis garansi ini.

Berdasarkan data pada lampiran 1 yang berisi tentang data klaim garansi sepeda motor, yaitu penawaran garansi mesin 3 tahun atau penggunaan maksimal 45.000 km pada PT. Indomobil Niaga Internasional. Item-item yang tercakup dalam garansi mesin diantaranya terdiri atas lima komponen yang saling mendukung yaitu *piston*, *cylinder*, *pin*, *valve* dan *ring piston*. Analisa data klaim garansi ini hanya merupakan contoh kecil perhitungan ekspektasi biaya garansi dikarenakan cukup sulitnya memperoleh data kegagalan produk dalam jumlah yang besar. Perhitungan ekspektasi jumlah klaim dan ekspektasi biaya garansi didasarkan pada penurunan rumus yang dibahas pada bab III.

Pada lampiran 1 diperoleh 46 data klaim yang dinyatakan valid pada PT PT. Indomobil Niaga Internasional dari penjualan 1.000 unit sepeda motor yang telah berhasil dijual di beberapa area penjualan. Tanggal klaim mulai dari 22 Oktober 2005 sampai 10 Oktober 2007 dengan tanggal pembelian dari 12 Juni 2004 sampai 12 Juli 2007. Jika X dan Y berturut-turut menyatakan variabel acak untuk umur dan pemakaian produk, maka distribusi datanya sebagai berikut.

a. Distribusi data

Model garansi dua dimensi ini menggunakan distribusi pareto untuk analisnya. Distribusi data untuk umur dan penggunaan produk jika diestimasi berdasarkan nilai statistik Kolmogorov-Smirnov dengan uji hipotesis sebagai berikut:

Hipotesis:

Ho : data mengikuti distribusi pareto

H_1 : data tidak mengikuti distribusi pareto

Kriteria Keputusan

Ho ditolak jika *p-value* < α*=0,05*

Dengan menggunakan *software* Easy Fit dari data pada lampiran 1 diperoleh *output* sebagai berikut:

Tabel 1 *Output* penggunaan komponen

Pareto [#42]					
Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size Statistic P-Value Rank	46 0.06227 0.98925 1				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.15457	0.17665	0.19625	0.21944	0.23544
Reject?	No	No	No	No	No

Tabel 2 *Output* umur komponen

Pareto [#42]					
Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size Statistic P-Value Rank	46 0.07751 0.92501 4				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.15457	0.17665	0.19625	0.21944	0.23544
Reject?	No	No	No	No	No

Berdasarkan kedua *output* diatas diketahui bahwa nilai dari *p-value* > *α*, sehingga dapat diambil kesimpulan bahwa data diatas (umur dan penggunaan) berdistribusi pareto.

b. Estimasi parameter

Berdasarkan persamaan (3.4.4) maka fungsi likelihood untuk analisis dengan menggunakan data lengkap adalah:

$$L_1(\hat{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{a(a+1)}{\theta_1 \ \theta_2} \left(\frac{1}{\theta_1} w_i + \frac{1}{\theta_2} u_i - 1 \right)^{-(a+2)} \right)$$

Dalam skripsi ini akan digunakan *software* MATLAB untuk mencari estimasi dengan pendekatan komputasional. Melalui *running* program pada lampiran 2, diperoleh nilai estimasi parameter $a, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ berturut-turut adalah 4, 7,39 dan 2,38. Nilai estimasi parameter ini selanjutnya akan digunakan untuk menghitung ekpektasi jumlah klaim dan ekspektasi biaya garansi.

c. Ekspektasi jumlah klaim

Berdasarkan persamaan (3.5.3) tentang rumus ekspektasi jumlah klaim untuk komponen yang digaransi dengan menggunakan nilai estimasi parameter $a, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ berturut-turut adalah 4, 7,39 dan 2,38, dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$E(N) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a\theta_1 s + a(\theta_2 t - 1) + (\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)}{st\big((\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1) - (-1)^{-a} a(a+1)\big)}\right\}$$

Sehingga diperoleh,

$$E(N) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{29{,}56s + 9{,}52t - 4 + (7{,}39s - 1)(2{,}38t - 1)}{st\big((7{,}39s - 1)(2{,}38t - 1) - 20\big)}\right\}$$

Dengan program MAPLE 11, hasil perhitungan fungsi renewal pada lampiran 5 dan memisalkan nilai peubah acak $x = W$ dan $y = U$ maka diperoleh,

$$\begin{aligned} E(N) = {} & -3{,}007894737e^{-2{,}571041949\,W} \\ & + 0{,}3000000000e^{-1{,}217861976\,w}\sinh(1{,}353179973\,W) \\ & + 0{,}1578947368 - 0{,}1500000000e^{0{,}13531799\,W} \\ & + 4.\,\mathrm{Bessell}(0.,2{,}132722230\sqrt{UW}e^{0{,}1353179973\,W + 0{,}4201680672\,U} \end{aligned}$$

Melalui *running* program pada lampiran 3, diperoleh output jumlah klaim sebagai berikut:

Tabel. 3 Ekspektasi jumlah klaim garansi polis minimum

U \ W	1	1.5	2	2.5	3
1	0,6967	0,7678	0,8303	0,8937	0,9609
1.5	0,8665	0,9531	1,0325	1,1143	1,2015
2	1,0771	1,1836	1,2848	1,3902	1,5031
2.5	1,3384	1,4704	1,5993	1,7352	1,8813
3	1,6625	1,8271	1,9917	2,1665	2,3553
3.5	2,0647	2,2708	2,4809	2,7058	2,9493
4	2,5636	2,8227	3,0911	3,3799	3,6938
4.5	3,1826	3,5092	3,8519	4,2226	4,6265

U: pemakaian/*usage* (dalam puluhan ribu kilometer)

W: umur (dalam tahun)

Tabel diatas menyajikan nilai ekspektasi jumlah klaim garansi polis minimum yang ditawarkan oleh PT. Indomobil Niaga Internasional yaitu berupa penawaran garansi mesin dengan periode waktu (*W*) sampai 3 tahun dan *usage* (*U*) / penggunaan 45.000 km. Besarnya nilai *W* (waktu) yang disajikan dalam tabel tergantung besarnya periode waktu maksimal yang ditawarkan oleh perusahaan tersebut, dalam hal ini adalah 3 tahun. Interval nilai *W* disajikan antara 1 tahun sampai 3 tahun dengan penyajian selang waktu tiap 0,5 tahun. Interval ini dapat diubah batas bawahnya dan besarnya peningkatan dengan cara mengganti batas bawah umur dan selang waktunya pada lampiran 3.

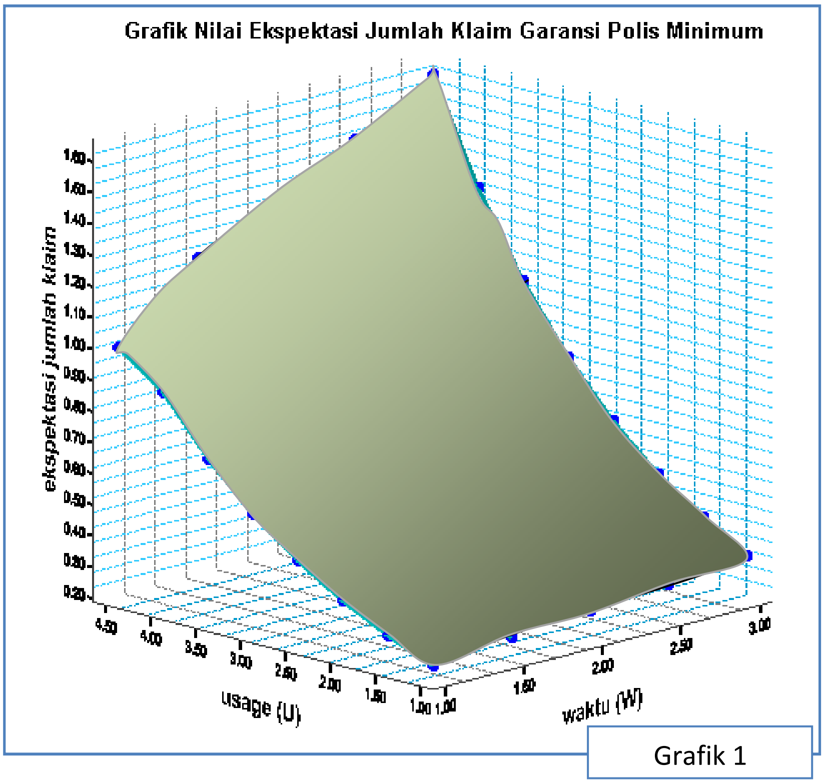
Sedangkan besarnya nilai *U (usage)* yang disajikan dalam tabel tergantung besarnya periode penggunaan maksimal yang ditawarkan oleh perusahaan tersebut, dalam hal ini adalah 45.000 km. Interval nilai *U* disajikan antara 10.000 km sampai 45.000 km, dengan besar penyajian selang penggunaan tiap 5.000 km. Interval ini dapat diubah batas bawahnya dan besarnya peningkatan dengan cara mengganti batas bawah umur dan selang waktunya pada lampiran 3.

Tabel 3 menginformasikan bahwa masa garansi dinyatakan valid apabila klaim diajukan kepada konsumen masih dalam daerah garansi. Daerah garansi yang ditawarkan yaitu waktu (*W*) klaim sampai 3 tahun dan *usage* (*U*) / penggunaan 45.000 km. Waktu klaim dinyatakan habis apabila salah satu syarat terpenuhi. Sebagai contoh, dalam kasus ini U=4,5 dan W=3 berarti menyatakan sebuah periode garansi dengan waktu tiga tahun dan batas penggunaan 45.000 km. Nilai ekspektasi jumlah klaim dalam periode garansi tersebut adalah 4,6265. Hal itu berarti dalam masa garansi tersebut dari setiap penjualan 1000 unit sepeda motor diketahui ekspektasi jumlah klaim yang diajukan oleh konsumen terhadap produk yang dibelinya mengalami kegagalan fungsional sebanyak 4,6265 klaim.

Dari tabel diatas dapat diketahui bahwa ekspektasi jumlah klaim dari kelima komponen yang diklaim dalam garansi mesin, mengalami peningkatan sebanding dengan peningkatan jumlah pemakaian dan umur dari komponen yang bersangkutan. Dengan kata lain, semakin luas daerah garansi yang ditawarkan, maka ekspektasi jumlah klaim akan semakin besar.

Tabel di atas juga memberikan informasi bahwa banyaknya klaim yang diajukan oleh konsumen dari setiap penjualan 1.000 unit sepeda motor terhadap kelima komponen (komponen mesin) yang mengalami kegagalan dalam jangka waktu 3 tahun atau pemakaian 45.000 km sebanyak 4,6265 klaim. Nilai ekspektasi tersebut cukup besar sehingga dapat mengurangi keuntungan perusahaan tersebut. Hal itu disebabkan oleh daerah garansi yang besar (umur 3 tahun dan pemakaian 45.000 km) dan kualitas komponen produk yang kurang baik.

Nilai ekspektasi jumlah klaim di atas dapat disajikan dalam bentuk grafik sebagai berikut:



Gambar 4. Grafik Nilai Ekspektasi Jumlah Klaim Garansi Polis Minimum

d. Variansi jumlah klaim

Berdasarkan persamaan (3.5.11) tentang rumus variansi jumlah klaim untuk komponen yang digaransi dengan menggunakan nilai estimasi parameter $a, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ berturut-turut adalah 4, 7,39 dan 2,38, dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$Var(N) = \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\dfrac{(-1)^a\big((\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)+a(\theta_2 t-1)+a\theta_1 s\big)}{st(\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)} + \dfrac{\big((\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)+a(\theta_2 t-1)+a\theta_1\big)a(a+1)}{st(\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)}}{\left(1-\dfrac{a(a+1)(-1)^a}{(\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)}\right)^2} \right) \right)$$

$$-\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a\theta_1 s+a(\theta_2 t-1)+(\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)}{st\big((\theta_1 s-1)(\theta_2 t-1)-(-1)^{-a}a(a+1)\big)}\right\}\right)^2$$

$$Var(N) = \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\dfrac{(-1)^4\big((7{,}39s-1)(2{,}38t-1)+4(2{,}38t-1)+29{,}56s\big)}{st(7{,}39s-1)(2{,}38t-1)} + \dfrac{\big((7{,}39s-1)(2{,}38t-1)+4(2{,}38t-1)+29{,}56\big)20}{st(7{,}39s-1)(2{,}38t-1)}}{\left(1-\dfrac{12}{(7{,}39s-1)(2{,}38t-1)}\right)^2} \right) \right)$$

$$-\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{29{,}56s+4(2{,}38t-1)+(7{,}39s-1)(2{,}38t-1)}{st\big((7{,}39s-1)(2{,}38t-1)-20\big)}\right\}\right)^2$$

Hasil perhitungan dengan MAPLE 11 pada lampiran 5 diperoleh:

$$\begin{aligned} Var(N) = {} & -5.772632674 + \frac{1}{\sqrt{-1.\,U}}\Big(8.60900672110^{-9}\sqrt{W}\,\mathrm{BesselI}\big(1., \\ & 2.612040613\sqrt{-1.\,U\,W}\big)\,e^{0.1353179973\,W+0.4201680672\,U}\Big) \\ & -1.41210529810^{-20}\,e^{0.1353179973\,W}\big(8.73269262110^{19} \\ & +1.77253571010^{20}\,W\big) \\ & +0.003337342755e^{2.165087957\,W}\,(1500.\,W\cosh(2.029769959W) \\ & -739.\,\sinh(2.029769959W)) \\ & +1.46941238110^{-23}\,e^{4.194857916\,W}\big(4.78872043310^{25}\,W \\ & +1.36502240810^{23}\big) \\ & +5.00701630610^{-23}\,e^{0.1353179973\,W+0.4201680672\,U}\big(1.44699901 \\ & 10^{26}\sqrt{-1.\,U\,W}\,\mathrm{BesselI}\big(1., 2.612040613\sqrt{-1.\,U\,W}\big) \\ & +2.08416700010^{6}\,\mathrm{BesselI}\big(0., \\ & 2.612040613\sqrt{-1.\,U\,W}\big)\big(5.31601001010^{19} \\ & +6.47769250610^{20}\,U\big)\big)-\big(-3.007894737e^{-2.571041949\,W} \\ & +0.3000000000e^{-1.217861976\,W}\sinh(1.353179973W) \\ & +0.1578947368-0.1500000000e^{0.1353179973\,W}+4.\,\mathrm{BesselI}\big(0., \\ & 2.132722230\sqrt{U\,W}\big)\,e^{0.1353179973\,W+0.4201680672\,U}\big)^2 \end{aligned}$$

Melalui *running* program MATLAB pada lampiran 4 diperoleh output variansi jumlah klaim sebagai berikut:

Tabel 4 Variansi jumlah klaim garansi polis minimum

U \ W	1	1,5	2	2,5	3
1	0,9873	0,9994	1,0951	6,0933	10,4552
1,5	1,3017	1,3005	1,2646	5,7984	11,0605
2	1,7843	1,7689	1,6247	5,4031	10,5091
2,5	2,5001	2,4662	2,2428	4,8609	9,7084
3	3,5527	3,4922	3,2172	4,1589	8,5337
3,5	5,0981	4,9976	4,6944	3,4611	6,8064
4	7,3691	7,2067	6,8964	3,5945	4,2671
4,5	10,7112	10,4526	10,1561	5,7873	10,5385

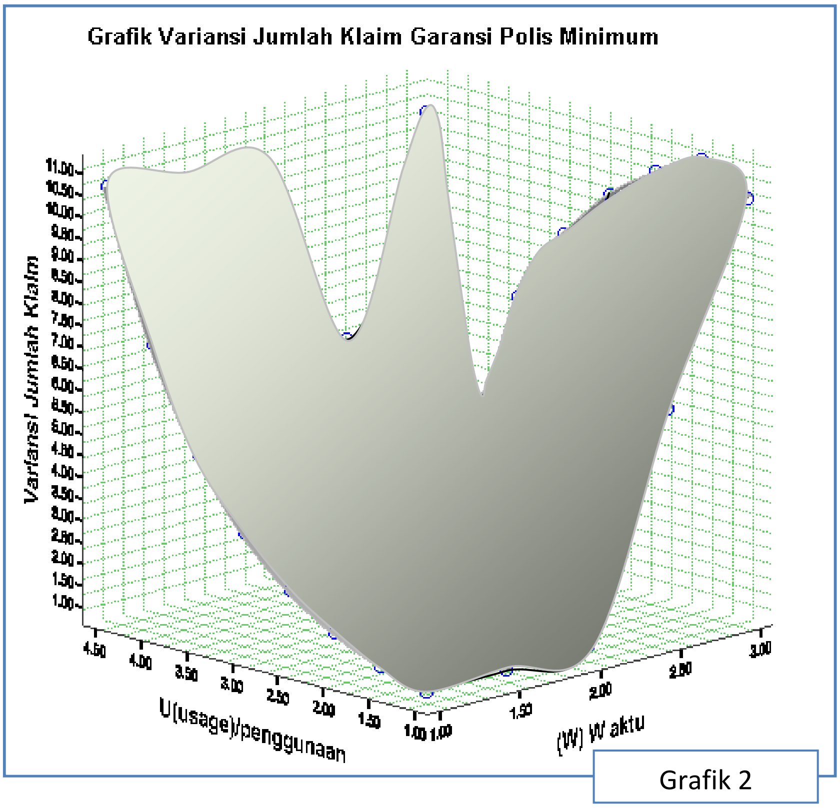
U: pemakaian/*usage* (dalam puluhan ribu kilometer)
W: umur (dalam tahun)

Tabel diatas menyajikan nilai variansi jumlah klaim garansi polis minimum yang ditawarkan oleh PT. Indomobil Niaga Internasional yaitu berupa penawaran garansi mesin dengan periode waktu (*W*) sampai 3 tahun atau *usage* (*U*) atau penggunaan 45.000 km. Besarnya nilai *W* (waktu) yang disajikan dalam tabel tergantung besarnya periode waktu maksimal yang ditawarkan oleh perusahaan tersebut, dalam hal ini adalah 3 tahun. Interval nilai *W* disajikan antara 1 tahun sampai 3 tahun dengan penyajian selang waktu tiap 0,5 tahun. Interval ini dapat diubah batas bawahnya dan besarnya peningkatan dengan cara mengganti batas bawah umur dan selang waktunya pada lampiran 3.

Sedangkan besarnya nilai *U (usage)* yang disajikan dalam tabel tergantung besarnya periode penggunaan maksimal yang ditawarkan oleh perusahaan tersebut, dalam hal ini adalah 45.000 km. Interval nilai *U* disajikan antara 10.000 km sampai 45.000 km, dengan besar penyajian selang penggunaan tiap 5.000 km. Interval ini dapat diubah batas bawahnya dan besarnya peningkatan dengan cara mengganti batas bawah umur dan selang waktunya pada lampiran 4.

Cara membaca tabel diatas sebagai berikut. Dalam kasus ini misalnya U=1,5 dan W=2,5 berarti menyatakan sebuah periode garansi dengan waktu dua setengah tahun dan batas penggunaan 15.000 km. Nilai variansi jumlah klaim dalam periode garansi tersebut adalah 5,7984, berarti tingkat keragaman data klaim dari produk yang mengalami kegagalan pada batas masa garansi (periode garansi dengan waktu 2,5 tahun dan batas penggunaan 15.000 km) adalah sebesar 5,7984.

Nilai variansi jumlah klaim di atas diperlukan untuk mengetahui keragaman data pada tiap-tiap batas masa garansi. Nilai variansi jumlah klaim di atas dapat disajikan dalam bentuk grafik sebagai berikut:



Gambar 5. Grafik Nilai Variansi Jumlah Klaim Garansi Polis Minimum

e. Ekspektasi biaya garansi

Berdasarkan persamaan (3.5.17) ekspektasi biaya garansi produk yang dijual dengan polis minimum dinyatakan sebagai:

$$E\big(C_s(w,u)\big) = C_s(M(w,u))$$

$$= C_s(E(N)\,)$$

C_s menyatakan rata-rata biaya yang harus dikeluarkan produsen untuk merektifikasi satu produk (per item) yang mengalami kegagalan.

PT. Indomobil Niaga Internasional mengalokasikan biaya pergantian rata-rata sebesar Rp 35.000.000,- untuk memperbaiki komponen penyusun mesin pada seluruh sepeda motor yang terjual. Melalui program MATLAB pada lampiran 3 didapat:

Tabel 5 Ekspektasi biaya garansi tiap unit sepeda motor dengan polis minimum (dalam ratusan ribu)

U \ W	1	1,5	2	2,5	3
1	0,2438	0,2687	0,2906	0,3128	0,3363
1,5	0,3033	0,3336	0,3614	0,3900	0,4205
2	0,3770	0,4143	0,4497	0,4866	0,5261
2,5	0,4684	0,5146	0,5598	0,6073	0,6585
3	0,5819	0,6395	0,6971	0,7583	0,8244
3,5	0,7226	0,7948	0,8683	0,9470	1,0323
4	0,8973	0,9879	1,0819	1,1830	1,2928
4,5	1,0039	1,2282	1,3482	1,4779	1,6193

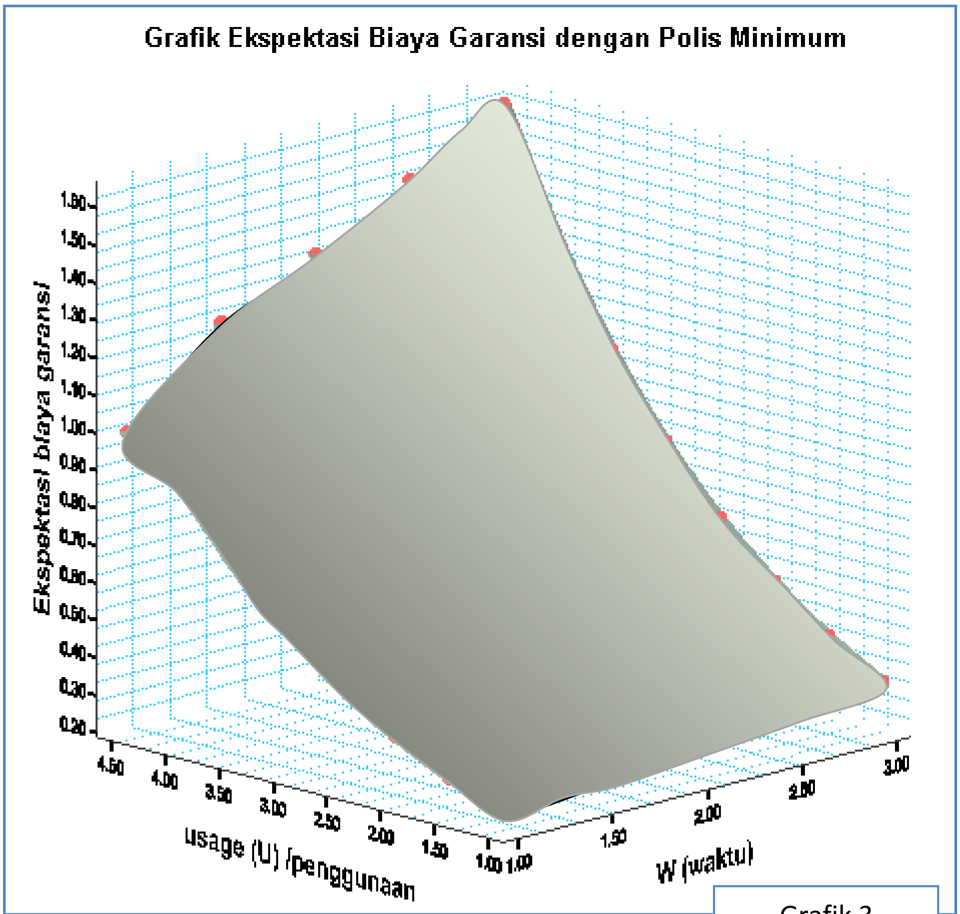
U: pemakaian/*usage* (dalam puluhan ribu kilometer)

W: umur (dalam tahun)

Tabel di atas menyajikan nilai ekspektasi biaya garansi polis minimum tiap unit sepeda motor yang ditawarkan oleh PT. Indomobil Niaga Internasional yaitu berupa penawaran garansi mesin dengan periode waktu (*W*) sampai 3 tahun dan *usage* (*U*) /penggunaan maksimal 45.000 km. Nilai ekspektasi biaya garansi merupakan perkalian antara nilai ekspektasi jumlah klaim pada tabel 3 dengan alokasi biaya perbaikan rata-rata komponen penyusun mesin seluruh sepeda motor yang dijual yaitu sebesar Rp.35.000.000,-. Hal itu berarti rata-rata biaya rektifikasi tiap unit sepeda motor adalah Rp. 35.000,-

Cara membaca tabel diatas sebagai berikut. Dalam kasus ini U=4,5 dan W=3 berarti menyatakan sebuah periode garansi dengan waktu tiga tahun dan batas penggunaan 45.000 km. Nilai ekspektasi biaya garansi tiap unit sepeda motor ditanggung oleh PT Indomobil Niaga Internasional dalam periode garansi tersebut adalah Rp. 161.930,-. Hal itu berarti besarnya biaya garansi yang harus dimasukkan ke dalam harga jual oleh PT. Indomobil Niaga Internasional adalah sebesar Rp. 161.930,- pada tiap unit sepeda motor yang dijual, apabila perusahaan tersebut memberikan penawaran garansi 3 tahun dan penggunaan maksimal 45.000 km.

Nilai ekspektasi biaya garansi di atas dapat disajikan dalam bentuk grafik sebagai berikut:



Grafik 3

Gambar 6. Grafik Ekspektasi Biaya Garansi Polis Minimum

Tabel di atas juga memberikan informasi bahwa besarnya ekspektasi biaya garansi dari kelima komponen (komponen mesin) dalam tiap unit sepeda motor yang mengalami kegagalan dalam jangka waktu 3 tahun atau pemakaian 45.000 km adalah Rp.161.930,-.

Faktor-faktor lain yang menopang sistem dalam sebuah sepeda motor, seperti sistem kelistrikan dan sistem suspensi juga harus diperhatikan untuk mendapatkan garansi. Pada tabel di atas diketahui biaya garansi yang harus ditanggung untuk tiap unit sepeda motor sebesar Rp.161.930,-. Berdasarkan harga tiap unit sepeda motor ini pada saat pengambilan data sebesar Rp. 13.500.000,-, maka besarnya biaya garansi itu sekitar 1,2% dari harga jual. Nilai tersebut masih cukup besar karena belum mempertimbangkan dua sistem pendukung tadi. Menurut Blischke dan Murthy (1994) sebagian besar perusahaan yang menjual produk peralatan otomotif mengeluarkan biaya garansi mesin sebesar 1,0% dari harga jual produk. Nilai ekspektasi tersebut cukup besar sehingga dapat mengurangi keuntungan perusahaan tersebut. Hal itu disebabkan oleh daerah garansi yang cukup besar (umur 3 tahun dan pemakaian 45.000 km) dan kualitas komponen produk yang kurang baik.

Ada beberapa cara yang dapat dilakukan oleh PT. Indomobil Niaga Internasional untuk menentukan kebijakan (periode) garansi sehingga biaya garansi yang dikeluarkan tidak terlalu besar dan klaim yang diajukan oleh konsumen tidak terlalu banyak. Cara yang dapat ditempuh perusahaan tersebut akan dijelaskan di bawah ini.

Pertama, perusahaan harus mengurangi luas daerah garansi, karena semakin kecil luas garansi yang ditawarkan maka biaya garansi yang ditanggung oleh perusahaan menjadi lebih kecil. Hal ini sangat beresiko karena kebanyakan konsumen akan memilih berganti ke produk lain dengan kualitas yang relatif sama tetapi memberikan penawaran daerah garansi yang cukup luas.

Kedua, mempertahankan luas daerah garansi awal, tetapi perusahaan tersebut harus menaikkan harga komponen penyusun produk yang digaransi. Kenaikan harga komponen tersebut harus diimbangi oleh peningkatan kualitas komponen produk, sehingga konsumen akan tertarik untuk membeli produk dengan performa dan kualitas yang memuaskan serta produk dapat mempunyai daya saing yang tinggi.

G. Penerapan Model Ekspektasi Garansi Dua Dimensi Polis Maksimum

Salah satu sifat produk adalah daya hidup yang semakin menurun sehingga akan terjadi kegagalan fungsional. Kegagalan fungsional akan semakin meningkat seiring dengan lamanya waktu dan pemakaian produk tersebut. Suatu perusahaan akan memberikan garansi apabila terjadi kegagalan fungsional dalam periode tertentu. Hal tersebut yang menjadi alasan distribusi bivariat pareto digunakan untuk analisis garansi ini.

Berdasarkan data pada lampiran 6 yang berisi tentang data klaim garansi *microchip*, yaitu penawaran garansi 2 tahun dan penggunaan maksimal 15.000 jam pada perusahaan Sandisk Company Ltd. Perhitungan ekspektasi jumlah klaim dan ekspektasi biaya garansi didasarkan pada penurunan rumus yang dibahas pada bab III.

Pada lampiran 6 diperoleh 30 data klaim yang dinyatakan valid pada perusahaan Sandisk Company Ltd dari penjualan 1000 unit *microchip* yang telah berhasil dijual di beberapa area penjualan. Tanggal klaim mulai dari 25 Oktober 2005 sampai 16 April 2007 dengan tanggal pembelian dari 24 September 2004 sampai 21 Oktober 2006. Jika X dan Y berturut-turut menyatakan variabel acak untuk umur dan pemakaian produk, maka distribusi datanya sebagai berikut.

a. Distribusi data

Model garansi dua dimensi ini menggunakan distribusi pareto untuk analisisnya. Distribusi data untuk umur dan penggunaan produk jika diestimasi berdasarkan nilai statistik Kolmogorov-Smirnov dengan uji hipotesis sebagai berikut:

Hipotesis:

Ho : data mengikuti distribusi pareto

H_1 : data tidak mengikuti distribusi pareto

Kriteria Keputusan

Ho ditolak jika *p-value* < $\alpha = 0.05$

Dengan menggunakan *software* Easy Fit dari data pada lampiran 6 diperoleh *output* sebagai berikut:

Tabel 6 *Output* penggunaan komponen

Pareto [#42]					
Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size Statistic P-Value Rank	30 0.09061 0.9475 22				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.19032	0.21756	0.2417	0.27023	0.28987
Reject?	No	No	No	No	No

Tabel 7 *Output* umur komponen

Pareto [#42]					
Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size Statistic P-Value Rank	30 0.16121 0.37624 30				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.19032	0.21756	0.2417	0.27023	0.28987
Reject?	No	No	No	No	No

Berdasarkan kedua output diatas diketahui bahwa nilai dari *p-value* $>\alpha$, sehingga dapat diambil kesimpulan bahwa data diatas (umur dan penggunaan) berdistribusi pareto.

b. Estimasi parameter

Berdasarkan persamaan (3.4.4) maka fungsi likelihood untuk analisis dengan menggunakan data lengkap adalah:

$$L_1(\hat{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{a(a+1)}{\theta_1 \ \theta_2} \left(\frac{1}{\theta_1} W_i + \frac{1}{\theta_2} U_i - 1 \right)^{-(a+2)} \right)$$

Dalam skripsi ini akan digunakan *software* MATLAB untuk mencari estimasi dengan pendekatan komputasional. Melalui *running* program pada lampiran 7, diperoleh nilai estimasi parameter $a, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ berturut-turut adalah 3, 7,9 dan 2,38. Nilai estimasi parameter ini selanjutnya akan digunakan untuk menghitung ekpektasi jumlah klaim dan ekspektasi biaya garansi.

c. Ekspektasi jumlah klaim

Berdasarkan persamaan (3.5.9) tentang rumus ekspektasi jumlah klaim garansi polis maksimum untuk komponen yang digaransi dengan menggunakan nilai estimasi parameter $a, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ berturut-turut adalah 3, 7,9 dan 2,38, dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$E(\widetilde{N}) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(\theta_1 s - 1) + a}{s(\theta_1 s - 1 + a(-1)^{-a})}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(\theta_2 t - 1) + a}{t(\theta_2 t - 1 + a(-1)^{-a})}\right\}$$

$$-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a\theta_1 s + a(\theta_2 t - 1) + (\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)}{st\big((\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1) - (-1)^{-a}a(a+1)\big)}\right\}$$

Sehingga diperoleh,

$$E(\widetilde{N}) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7{,}9s \mp 2}{s(7{,}9s \mp 2)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2{,}38t + 2}{t(2{,}38t + 2)}\right\}$$

$$-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{23{,}7s + 7{,}14t - 3 + (7{,}9s - 1)(2{,}38t - 1)}{st\left((7{,}9s - 1)\big((2{,}38t - 1)\big) - 12\right)}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{t}\right\}$$

$$-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{23{,}7s+7{,}14t-3+(7{,}9s-1)(2{,}38t-1)}{st\Big((7{,}9s-1)\big((2{,}38t-1)\big)-12\Big)}\right\}$$

$$=2-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{23{,}7s+7{,}14t-3+(7{,}9s-1)(2{,}38t-1)}{st\Big((7{,}9s-1)\big((2{,}38t-1)\big)-12\Big)}\right\}$$

Dengan program MAPLE 11, hasil perhitungan fungsi renewal pada lampiran 10 dan memisalkan nilai peubah acak $x = W$ dan $y = U$ maka diperoleh ,

$$\begin{aligned} E(\widetilde{N}) = {} & -6{,}060606060e^{-1{,}488497970\,W} \\ & + 1{,}333333333e^{-0{,}6765899865\,W}\sinh(0{,}8119079838W) \\ & - 0{,}666666666e^{0{,}1353179973W} + 0{,}7272727272 \\ & + 6.\,\mathrm{Bessell}(0.,1{,}651999536\sqrt{UW}e^{0{,}1353179973W+0{,}4201680672U} \end{aligned}$$

Melalui *running* program pada lampiran 8, diperoleh *output* jumlah klaim sebagai berikut:

Tabel 8 Ekspektasi jumlah klaim garansi polis maksimum

U \ W	1	1,25	1,5	1,75	2
1	0,7520	1,0683	1,3836	1,7008	2,0226
1,1	0,8545	1,1890	1,5241	1,8628	2,2080
1,2	0,9601	1,3135	1,6693	2,0306	2,4004
1,3	1,0687	1,4420	1,8194	2,2044	2,6000
1,4	1,1806	1,5745	1,9746	2,3843	2,8071
1,5	1,2958	1,7112	2,1349	2,5707	3,0219

U: pemakaian/*usage* (dalam puluhan ribu jam)

W: umur (dalam tahun)

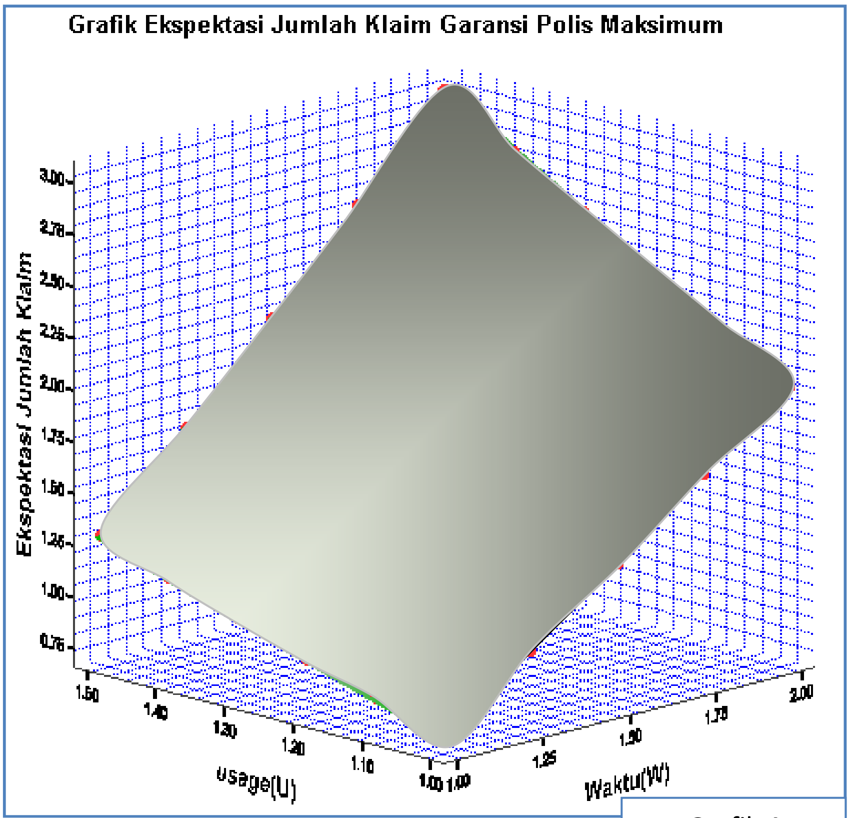
Tabel diatas menyajikan nilai ekspektasi jumlah klaim garansi polis maksimum tiap unit *microchip* yang ditawarkan oleh perusahaan Sandisk Company Ltd yaitu berupa penawaran garansi dengan periode waktu (*W*) sampai 2 tahun dan *usage* (*U*) 15.000 jam. Besarnya nilai *W* (waktu) yang disajikan dalam tabel tergantung besarnya periode waktu maksimal yang ditawarkan oleh perusahaan tersebut, dalam hal ini adalah 2 tahun. Interval nilai *W* disajikan antara 1 tahun sampai 2 tahun dengan penyajian selang waktu tiap 0,25 tahun. Interval ini dapat diubah batas bawahnya dan besarnya peningkatan dengan cara mengganti batas bawah umur dan selang waktunya pada lampiran 8.

Sedangkan besarnya nilai *U (usage)* yang disajikan dalam tabel tergantung besarnya periode penggunaan maksimal yang ditawarkan oleh perusahaan tersebut, dalam hal ini adalah 15.000 jam. Interval nilai *U* disajikan antara 10.000 jam sampai 15.000 jam, dengan besar penyajian selang penggunaan tiap 1.000 jam. Interval ini dapat diubah batas bawahnya dan besarnya peningkatan dengan cara mengganti batas bawah umur dan selang waktunya pada lampiran 8.

Cara membaca tabel diatas sebagai berikut. Sebagai contoh dalam kasus ini U=1,5 dan W=2 berarti menyatakan sebuah periode garansi dengan waktu dua tahun dan batas penggunaan maksimal 15.000 jam. Nilai ekspektasi jumlah klaim dalam periode garansi tersebut adalah 3,0219. Hal itu berarti dalam masa garansi tersebut dari setiap penjualan 1000 unit *microchip* diketahui konsumen yang mengajukan klaim pada produk yang dibelinya mengalami kegagalan fungsional sebanyak 3,0219 klaim.

Dari tabel diatas dapat diketahui bahwa ekspektasi jumlah klaim *microchip* yang diklaim para konsumen dalam garansi polis maksimum perusahaan Sandisk Company Ltd, mengalami peningkatan sebanding dengan peningkatan jumlah pemakaian dan umur dari komponen yang bersangkutan. Dengan kata lain, semakin luas daerah garansi yang ditawarkan, maka ekspektasi jumlah klaim akan semakin besar.

Nilai ekspektasi jumlah klaim di atas dapat disajikan dalam bentuk grafik sebagai berikut:



Grafik 4

Gambar 7. Grafik Nilai Ekspektasi Jumlah Klaim Garansi Polis Maksimum

Tabel di atas juga memberikan informasi bahwa besarnya ekspektasi jumlah klaim dari *microchip* yang mengalami kegagalan dalam jangka waktu 2 tahun atau pemakaian 15.000 jam adalah 3,0219 klaim. *Microchip* mempunyai sifat yang rentan untuk mengalami kerusakan yang diakibatkan kesalahan sistem produksinya, sehingga perusahaan memberikan layanan purna jual berupa garansi polis maksimum. Garansi polis maksimum ini ditawarkan oleh perusahaan supaya konsumen lebih diuntungkan karena mendapatkan pelayanan yang memuaskan (kedua syarat batas garansi harus terpenuhi).

d. Variansi jumlah klaim

Berdasarkan persamaan (3.5.15) tentang rumus variansi jumlah klaim untuk komponen yang digaransi dengan menggunakan nilai estimasi parameter $a, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ berturut-turut adalah 3, 7,9 dan 2,38, dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$Var\ (\widetilde{N}) = \left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(62{,}41s^2 - 15{,}8s - 3)}{s(7{,}9s + 4)^2}\right) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)\right.$$

$$+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(4{,}76t^2 - 4{,}76t - 3)}{t(238t + 4)^2}\right)$$

$$-2\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{23{,}7s + 7{,}14t - 2 + (7{,}9s - 1)(2{,}38t - 1)}{st\big((7{,}9s - 1)(2{,}38t - 1) + 12\big)}\right)\right)$$

$$-2\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{23{,}7s + 7{,}14t - 2 + (7{,}9s - 1)(2{,}38t - 1)}{st\big((7{,}9s - 1)(2{,}38t - 1) + 12\big)}\right)\right)$$

$$\left.+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\dfrac{-\big((7{,}9s - 1)(2{,}38t - 1) + 3(2{,}38t - 1) + 23{,}7s\big)}{st(7{,}9s - 1)(2{,}38t - 1)} + \dfrac{\big((7{,}9s - 1)(2{,}38t - 1) + 3(2{,}38t - 1) + 23{,}7\big)12}{st(7{,}9s - 1)(2{,}38t - 1)}}{\left(1 - \dfrac{-12}{(7{,}9s - 1)(2{,}38t - 1)}\right)^2}\right)\right)$$

$$-\left(2-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{23{,}7s+7{,}14t-3+(7{,}9s-1)(2{,}38t-1)}{st\left((7{,}9s-1)\left((2{,}38t-1)\right)-12\right)}\right\}\right)^2$$

Hasil perhitungan dengan MAPLE 11 pada lampiran 10 diperoleh:

$$\begin{aligned}Var(\tilde{N}) = {} & -0.453232921 \\ & - 1.238901244 10^{-9}\, e^{-0.5412719892\, W}\left(4.368800000 10^{8}\, W - 1.210719219 10^{9}\right) \\ & - 2.967079071 10^{-7}\, e^{-1.680672269\, U}\left(5.660000000 10^{6}\, U - 5.052859000 10^{6}\right) + 24.24242424 e^{-1.488497970\, W} \\ & - 5.333333332 e^{-0.6765899865\, W} \sinh(0.8119079838 W) \\ & + 2.666666667 e^{0.1353179973\, W} - 24.\, \mathrm{BesselI}\left(0.,\, 1.651999536\sqrt{U\, W}\right) e^{0.4201680672\, U + 0.1353179973\, W} \\ & - 3.000000000 e^{0.4201680672\, U + 0.1353179973\, W} \\ & + 267.0400000 e^{0.4201680672\, U}\left(e^{0.1353179973\, W} - 1.\right) \\ & - 4.824083835 10^{-20}\, e^{1.759133965\, W}\left(-2.600315924 10^{20} + 1.658173352 10^{20}\, W\right)\end{aligned}$$

Melalui *running* program MATLAB pada lampiran 9 diperoleh *output* variansi jumlah klaim sebagai berikut:

Tabel 9 Variansi jumlah klaim garansi polis maksimum

U \ W	1	1,25	1,5	1,75	2
1	3,9304	4,7522	4,9751	3,9610	1,3802
1,1	4,1456	5,0277	5,3071	4,3407	1,5189
1,2	4,3690	5,3112	5,6471	4,7282	1,7549
1,3	4,6000	5,0631	5,9956	5,1243	2,0620
1,4	4,8388	5,9036	6,3529	5,5297	2,4199
1,5	5,0859	6,2131	6,7197	5,9450	2,8150

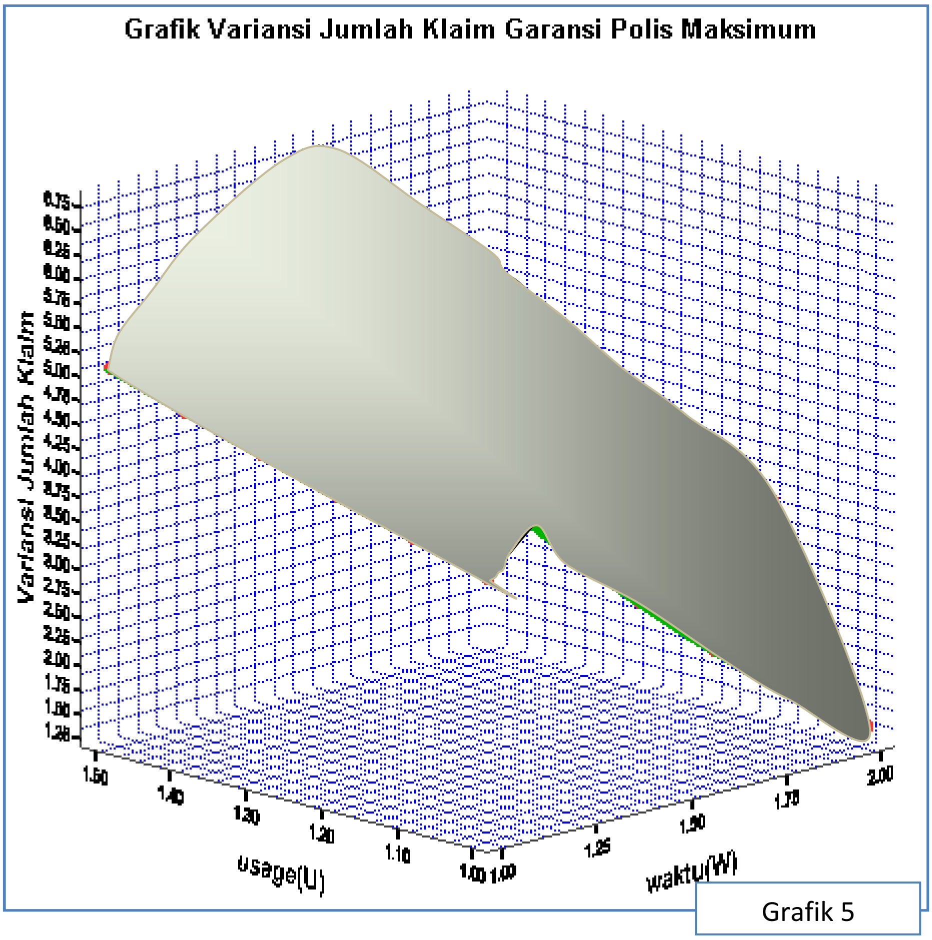
U: pemakaian/*usage* (dalam puluhan ribu jam)
W: umur (dalam tahun)

Tabel diatas menyajikan nilai variansi jumlah klaim garansi polis maksimum yang ditawarkan oleh perusahaan Sandisk Company Ltd yaitu berupa penawaran garansi dengan periode waktu *(W)* sampai 2 tahun dan *usage (U)* 15.000 jam. Besarnya nilai *W* (waktu) yang disajikan dalam tabel tergantung besarnya periode waktu maksimal yang ditawarkan oleh perusahaan tersebut, dalam hal ini adalah 2 tahun. Interval nilai *W* disajikan antara 1 tahun sampai 2 tahun dengan penyajian selang waktu tiap 0,25 tahun. Interval ini dapat diubah batas bawahnya dan besarnya peningkatan dengan cara mengganti batas bawah umur dan selang waktunya pada lampiran 8.

Sedangkan besarnya nilai *U (usage)* yang disajikan dalam tabel tergantung besarnya periode penggunaan maksimal yang ditawarkan oleh perusahaan tersebut, dalam hal ini adalah 15.000 jam. Interval nilai *U* disajikan antara 10.000 jam sampai 15.000 jam, dengan besar penyajian selang penggunaan tiap 1.000 jam. Interval ini dapat diubah batas bawahnya dan besarnya peningkatan dengan cara mengganti batas bawah umur dan selang waktunya pada lampiran 8.

Cara membaca tabel diatas sebagai berikut. Sebagai contoh dalam kasus ini U=1,5 dan W=1,75 berarti menyatakan sebuah periode garansi dengan waktu 1 tahun sembilan bulan dan batas penggunaan maksimal 15.000 jam. Nilai variansi jumlah klaim dalam periode garansi tersebut adalah 5,9450, berarti tingkat keragaman data klaim dari produk yang mengalami kegagalan pada batas masa garansi (periode garansi dengan waktu 1,75 tahun dan batas penggunaan 15.000 jam) adalah sebesar 5,9450.

Nilai variansi jumlah klaim di atas diperlukan untuk mengetahui keragaman data pada tiap-tiap batas masa garansi. Nilai variansi jumlah klaim di atas dapat disajikan dalam bentuk grafik sebagai berikut:



Gambar 8. Grafik Nilai Variansi Jumlah Klaim Garansi Polis Maksimum

f. Ekspektasi biaya garansi

Berdasarkan persamaan (3.5.18) ekspektasi biaya garansi produk yang dijual dengan polis minimum dinyatakan sebagai:

$$E\left(C_s(w,u)\right) = C_s(M(w) + M(u) - M(w,u))$$

$$= C_s(E(\tilde{N}))$$

C_s menyatakan rata-rata biaya yang harus dikeluarkan produsen untuk merektifikasi satu produk (per item) yang mengalami kegagalan.

Sandisk Company Ltd. mengalokasikan biaya pergantian rata-rata sebesar Rp.100.000.000,- untuk memproduksi seluruh komponen penyusun *microchip* yang terjual. Melalui program MATLAB pada lampiran 8 didapat:

Tabel 10 Ekspektasi biaya garansi tiap unit sepeda motor dengan polis maksimum (dalam ratusan ribu)

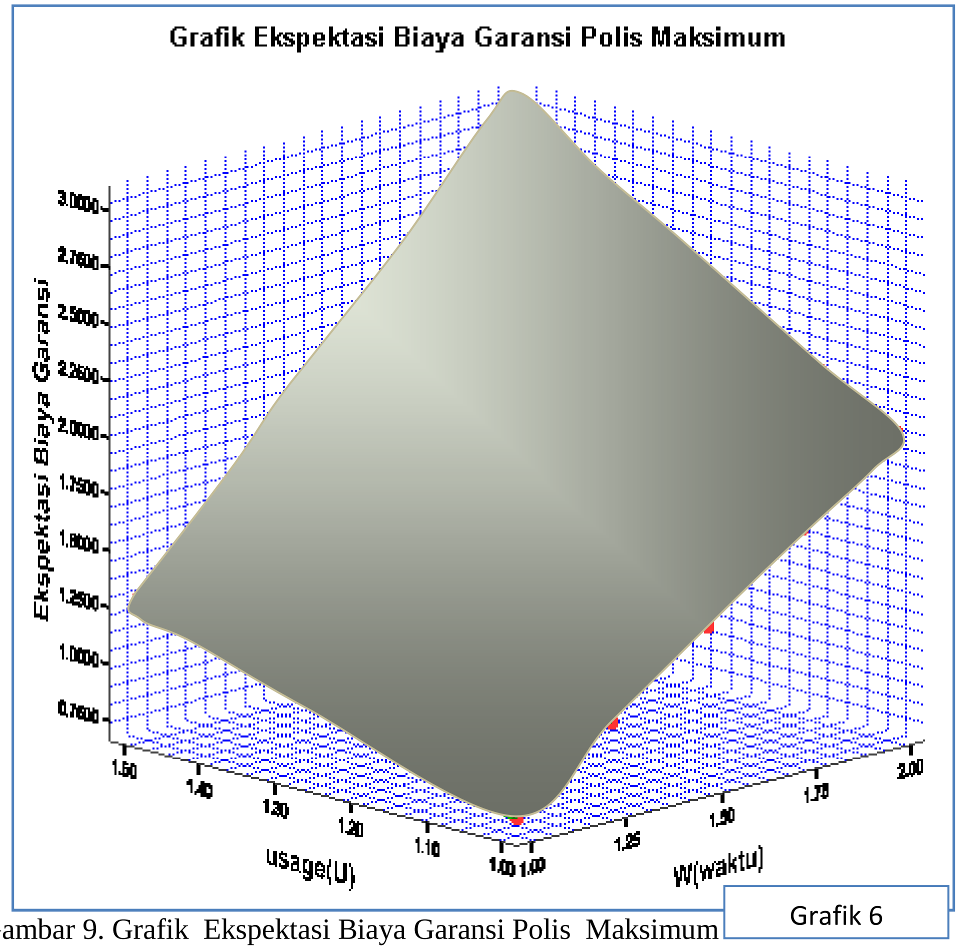
U \ W	1	1,25	1,5	1,75	2
1	0,7520	1,0683	1,3836	1,7008	2,0226
1,1	0,8545	1,1890	1,5241	1,8628	2,2080
1,2	0,9601	1,3135	1,6693	2,0306	2,4004
1,3	1,0687	1,4420	1,8194	2,2044	2,6000
1,4	1,1806	1,5745	1,9746	2,3843	2,8071
1,5	1,2958	1,7112	2,1349	2,5707	3,0219

U: pemakaian/*usage* (dalam puluhan ribu jam)
W: umur (dalam tahun)

Tabel di atas menyajikan nilai ekspektasi biaya garansi polis maksimum yang ditawarkan oleh perusahaan Sandisk Company Ltd yaitu berupa penawaran garansi dengan periode waktu (*W*) sampai 2 tahun dan *usage* (*U*) 15.000 jam. Nilai ekspektasi biaya garansi merupakan perkalian antara nilai ekspektasi jumlah klaim pada tabel 8 dengan alokasi biaya perbaikan rata-rata komponen penyusun seluruh *microchip* yaitu sebesar Rp.100.000.000,-. Hal itu berarti rata-rata biaya rektifikasi tiap unit *microchip* adalah Rp. 100.000,-

Cara membaca tabel diatas sebagai berikut. Dalam kasus ini U=1,5 dan W=2 berarti menyatakan sebuah periode garansi dengan waktu dua tahun dan batas penggunaan 15.000 jam. Nilai ekspektasi biaya garansi tiap unit *microchip* dalam periode garansi tersebut adalah Rp. 302.190,-.

Nilai ekspektasi biaya garansi di atas dapat disajikan dalam bentuk grafik sebagai berikut:



Gambar 9. Grafik Ekspektasi Biaya Garansi Polis Maksimum

Tabel di atas juga memberikan informasi bahwa besarnya ekspektasi biaya garansi dari tiap unit *microchip* yang mengalami kegagalan dalam jangka waktu 2 tahun atau pemakaian 15.000 jam adalah Rp. 302.190,-. Pada tabel di atas diketahui biaya garansi yang harus ditanggung untuk tiap unit *microchip* sebesar Rp. 302.190,-. Berdasarkan harga tiap unit *microchip* pada saat pengambilan data sebesar Rp. 15.000.000,-, maka besarnya biaya garansi itu sekitar 2,01% dari harga jual. Menurut Blischke dan Murthy (1994) sebagian besar perusahaan yang menjual produk peralatan elektronik dan kontrolnya mengeluarkan biaya garansi sebesar 1,0 – 1.9% dari harga jual produk.

Nilai ekspektasi tersebut cukup besar sehingga dapat mengurangi keuntungan Sandisk Ltd. Hal itu disebabkan oleh sistem komponen produk yang kurang baik. Akan tetapi *microchip* mempunyai sifat yang rentan untuk mengalami kerusakan yang diakibatkan kesalahan sistem produksinya, sehingga perusahaan memberikan layanan purna jual berupa garansi polis maksimum.

Ada bebrapa cara yang dapat dilakukan oleh Sandisk Ltd. untuk menentukan kebijakan (periode) garansi sehingga biaya garansi yang dikeluarkan tidak terlalu besar dan klaim yang diajukan oleh konsumen tidak terlalu banyak. Cara yang dapat ditempuh perusahaan tersebut akan dijelaskan di bawah ini.

Pertama, mempertahankan luas daerah garansi awal, tetapi perusahaan tersebut harus menaikkan harga komponen penyusun produk yang digaransi. Kenaikan harga komponen tersebut harus diimbangi oleh peningkatan kualitas komponen produk, sehingga konsumen akan tertarik untuk membeli produk dengan performa dan kualitas yang memuaskan serta produk dapat mempunyai daya saing yang tinggi. Kedua, melakukan penyempurnaan sistem dan meminimalkan bentuk *microchip* yang dijual, sehingga dapat meminimalkan penggunaan komponen lain yang bersangkutan.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Prosedur mendapatkan model ekspektasi biaya garansi dengan kebijakan *nonrenewing Free Replacement Warranty* beserta analisis hasil perhitungannya sebagai berikut:

1. Pada kebijakan *nonrenewing Free Replacement Warranty*, tentukan polis yang akan dianalisis, dalam pembahasan telah dipilih polis minimum dan polis maksimum.
2. Menentukan fungsi distribusi yang merepresentasikan kegagalan suatu produk, dalam pembahasan telah dipilih distribusi bivariat pareto. Distribusi bivariat pareto memiliki fungsi padat peluang jika *X* dan *Y* peubah acak kontinu dengan *X*,*Y* saling bebas dengan parameter θ_1 , $\theta_2 > 0$ dan a > 0 yaitu,

   $$f(x,y) = \frac{a(a+1)}{\theta_1 \ \theta_2}\left(\frac{1}{\theta_1}x + \frac{1}{\theta_2}y - 1\right)^{-(a+2)}$$

   dengan $a > 1$, $x > 0$, $\theta_1 > 0$, $y > 0$ dan $\theta_2 > 0$.
3. Menentukan parameter fungsi padat peluang dari distribusi bivariat pareto dengan metode maksimum *likelihood.* Dengan *w* dan *u* berturut-turut menyatakan umur dan pemakaian komponen. Estimasi parameter $a, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ diperoleh dengan cara memaksimalkan nilai dari persamaan

$$ln\, L_1(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{a(a+1)}{\theta_1\ \theta_2}\left(\frac{1}{\theta_1}w_i + \frac{1}{\theta_2}u_i - 1\right)^{-(a+2)}\right)$$

sebagai berikut:

$$\frac{d\, ln\left(L_1(\hat{\theta})\right)}{d\theta_1} = \frac{a+2}{{\theta_1}^2}\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{\left(\frac{1}{\theta_1}w_i + \frac{1}{\theta_2}u_i - 1\right)} - \frac{n}{\theta_1}$$

$$\frac{d\, ln\left(L_1(\hat{\theta})\right)}{d\theta_2} = \frac{a+2}{{\theta_2}^2}\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{\left(\frac{1}{\theta_1}w_i + \frac{1}{\theta_2}u_i - 1\right)} - \frac{n}{\theta_2}$$

Sehingga

$$\frac{d\, ln\left(L(\hat{\theta})\right)}{d\theta_1} = \frac{d\, ln\left(L(\hat{\theta})\right)}{d\theta_2} = 0$$

4. Selanjutnya dari nilai parameter yang diperoleh dari distribusi bivariat pareto digunakan untuk mencari nilai ekspektasi jumlah klaim, variansi jumlah klaim dan ekspektasi biaya garansi. Adapun rumusnya sebagai berikut.

   a. Ekspektasi Jumlah Klaim (*Renewal*)

      i. Ekspektasi jumlah klaim polis minimum

         $$E(N) = M(w,u)$$

         dengan menggunakan penyelesaian integral jenis konvolusi dan transformasi laplace diperoleh,

         $$E(N) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a\theta_1 s + a(\theta_2 t - 1) + (\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)}{st\left((\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1) - (-1)^{-a}a(a+1)\right)}\right\}$$

      ii. Ekspektasi jumlah klaim polis maksimum

         $$E(\tilde{N}) = M(w) + M(u) - M(w,u)$$

         dengan menggunakan penyelesaian integral jenis konvolusi dan transformasi laplace diperoleh,

$$E(\tilde{N}) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(\theta_1 s - 1) + a}{s(\theta_1 s - 1 + a(-1)^{-a}}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(\theta_2 t - 1) + a}{t(\theta_2 t - 1 + a(-1)^{-a}}\right\}$$

$$-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a\theta_1 s + a(\theta_2 t - 1) + (\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)}{st\big((\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1) - (-1)^{-a}a(a+1)\big)}\right\}$$

b. Variansi Jumlah Klaim

i. Variansi jumlah klaim polis minimum

$$Var\ (N) = E(N^2) - \big(E(N)\big)^2$$

$$Var\ (N) = M(w,u)^2 - \big(M(w,u)\big)^2$$

dengan menggunakan penyelesaian integral jenis konvolusi dan transformasi laplace diperoleh,

$$Var\ (N) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\dfrac{(-1)^a\big((\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1) + a(\theta_2 t - 1) + a\theta_1 s\big)}{st(\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)} + \dfrac{\big((\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1) + a(\theta_2 t - 1) + a\theta_1\big)a(a+1)}{st(\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)}}{\left(1 - \dfrac{a(a+1)(-1)^a}{(\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)}\right)^2}\right) -$$

$$\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a\theta_1 s + a(\theta_2 t - 1) + (\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)}{st\big((\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1) - (-1)^{-a}a(a+1)\big)}\right\}\right)^2$$

ii. Variansi jumlah klaim polis maksimum

$$Var\ (\tilde{N}) = E(\tilde{N}^2) - \big(E(\tilde{N})\big)^2$$

dengan menggunakan penyelesaian integral jenis konvolusi dan transformasi laplace diperoleh,

$$Var\,(\tilde{N}) = \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{(-1)^a\left({\theta_1}^2 s^2 - 2\theta_1 s + 1 + a\theta_1 s - a\right) - a\theta_1 s + a - a^2}{s(\theta_1 s(-1)^a - (-1)^a + a)^2}\right)$$

$$+2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(\theta_1 s - 1) + a}{s(\theta_1 s - 1 - a(-1)^{a+1})}\right)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(\theta_2 t - 1) + a}{t(\theta_2 t - 1 - a(-1)^{a+1})}\right)$$

$$+\mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{(-1)^a\left({\theta_2}^2 t^2 - 2\theta_2 t + 1 + a\theta_2 t - a\right) - a\theta_2 t + a - a^2}{t(\theta_2 t(-1)^a - (-1)^a + a)^2}\right)$$

$$-2\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(\theta_1 s - 1) + a}{s(\theta_1 s - 1 - a(-1)^{a+1})}\right)\right.$$

$$\left.\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a\theta_1 s + a(\theta_2 t - 1) + (\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)}{st\left((\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1) - (-1)^a a(a+1)\right)}\right)\right)$$

$$-2\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(\theta_1 t - 1) + a}{t(\theta_1 t - 1 - a(-1)^{a+1})}\right)\right.$$

$$\left.\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a\theta_1 s + a(\theta_2 t - 1) + (\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)}{st\left((\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1) - (-1)^a a(a+1)\right)}\right)\right)$$

$$+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\dfrac{(-1)^a\left((\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1) + a(\theta_2 t - 1) + a\theta_1 s\right)}{st(\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)} + \dfrac{\left((\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1) + a(\theta_2 t - 1) + a\theta_1\right)a(a+1)}{st(\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)}}{\left(1 - \dfrac{a(a+1)(-1)^a}{(\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)}\right)^2}\right)$$

$$-\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(\theta_1 s - 1) + a}{s(\theta_1 s - 1 + a(-1)^{-a}}\right\}\right.$$

$$+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(\theta_2 t - 1) + a}{t(\theta_2 t - 1 + a(-1)^{-a}}\right\}$$

$$\left.-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a\theta_1 s + a(\theta_2 t - 1) + (\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1)}{st\left((\theta_1 s - 1)(\theta_2 t - 1) - (-1)^{-a} a(a+1)\right)}\right\}\right)^2$$

c. Ekspektasi Ongkos Garansi

Ekspektasi biaya garansi produk yang dijual dengan polis minimum dan polis maksimum dinyatakan sebagai:

i. Ekspektasi ongkos garansi polis minimum

$$E\big(C_s(w,u)\big) = C_s(M(w,u))$$

$$= C_s\big(E(N)\big)$$

ii. Ekspektasi ongkos garansi polis minimum

$$E\big(C_s(w,u)\big) = C_s(M(w) + M(u) - M(w,u))$$

$$= C_s\left(E(\tilde{N})\right)$$

C_s menyatakan rata-rata biaya yang harus dikeluarkan produsen untuk merektifikasi produk yang mengalami kegagalan.

5. Hasil penerapan model ini menunjukkan bahwa ekspektasi biaya garansi akan meningkat seiring dengan peningkatan jumlah pemakaian dan umur dari produk yang bersangkutan. Dengan kata lain ekspektasi biaya garansi akan meningkat seiring makin luasnya daerah garansi yang ditawarkan (nilai waktu dan pengunaan semakin besar).

B. Saran

Kebijakan *nonrenewing Free Replacement Warranty* merupakan salah satu kebijakan garansi yang banyak diterapkan produsen dalam memasarkan produknya. Dalam skripsi ini masih banyak yang perlu dibahas sebagai upaya untuk memperdalam ilmu tentang garansi. Hal tersebut dikarenakan masih banyak kemungkinan untuk mengembangkan atau membentuk model baru dalam analisis garansi, diantaranya;

1. Memodelkan garansi dengan kebijakan selain *Free Replacement Warranty* yaitu *Pro Rata Warranty* dengan polis gabungan.
2. Menggunakan distribusi selain distribusi pareto untuk memodelkan kegagalan produk, seperti distribusi weibul, eksponensial dan gamma.
3. Memodelkan garansi dengan kebijakan yang melibatkan pengembangan produk, untuk produk *nonrenewing* maupun *renewing.*
4. Model penentuan waktu optimal pemberian garansi pada setiap komponen produk.

ERROR: syntaxerror
OFFENDING COMMAND: --nostringval--

STACK:

(Analisis Garansi)
/Keywords
(PDFCreator Version 0.9.5)
/Creator
(D:20090214063208+07'00')
/CreationDate
(Jajang Amiroso)
/Author
-mark-